

М.С. УРМАЕВ

**ОРБИТАЛЬНЫЕ
МЕТОДЫ
КОСМИЧЕСКОЙ
ГЕОДЕЗИИ**

М. С. Урмаев

ОРБИТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ



МОСКВА «НЕДРА» 1981

Урмаев М. С. Орбитальные методы космической геодезии. — М., Недра, 1981, 256 с.

В монографии изложены вопросы применения орбитальных методов при определении координат пунктов наблюдения ИСЗ, а также для координатно-временной привязки результатов космических съёмок поверхности Земли.

Приводятся используемые в космической геодезии системы отсчета, необходимые сведения из теории движения ИСЗ, методы вычисления матрицы изохронных производных, вопросы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ.

Книга предназначена для научных сотрудников и инженеров в области геодезии, геофизики, практической астрономии, геологии, которым в своей деятельности приходится использовать орбитальные измерения для определения орбит и координат пунктов. Она написана с расчетом на использование в качестве учебного пособия для студентов старших курсов геодезических вузов и университетов, изучающих космическую геодезию.

Табл. 11, ил. 19, список лит.— 74 назв.

Рецензент д-р техн. наук Е. Г. Бойко

Михаил Сергеевич Урмаев

ОРБИТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Редактор издательства *Л. М. Комарькова*
Переплет художника *Б. Ю. Лисенкова*
Художественный редактор *Е. Л. Юрковская*
Технический редактор *Н. В. Жидкова*
Корректор *В. И. Ионкина*
ИБ № 7826

Сдано в набор 16.01.81. Подписано в печать 12.08.81. Т-21987 Формат 60×90¹/₁₆ Бумага типографская № 1 Гарнитура «Литературная» Печать высокая Усл.-печ. л. 16,0 Усл. кр.-отт. 16,3 л. Уч.-изд. л. 15,40. Тираж 2250 экз. Заказ 60/7826—15 Цена 2 р. 50 к.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19
Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли.
109088, Москва. Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основной задачей при работе над этой книгой автор считал последовательное изложение современного состояния способов математической обработки измерений в орбитальных методах космической геодезии с учетом современных достижений в этой области. Он надеется, что эта книга сможет в какой-то степени служить руководством при алгоритмизации задач орбитального метода космической геодезии. С другой стороны, отсутствие вузовского учебника по орбитальным методам, в котором нуждаются студенты астрономы, геодезисты, геофизики, географы, а также аспиранты соответствующих специальностей, заставило автора построить изложение дедуктивно. Все эти соображения и определили характер и расположение материала.

В первой главе рассмотрены основные принципы использования орбитальных методов. При этом большое значение имеет установление систем отсчета и выбор единиц. Здесь же выполнена линейаризация основного уравнения орбитального метода и обсуждается проблема решения переопределенной системы уравнений в соответствии с правилами обобщенного метода наименьших квадратов, а также рассматривается принципиальная последовательность операций при обработке результатов измерений на ЭВМ. Все шесть последующих глав, по сути дела, являются следствиями первой главы, в каждой из них рассматриваются методы вычисления того или иного элемента линейаризованного уравнения орбитального метода.

Во второй главе рассмотрены элементы теории задачи двух тел, являющейся теоретической основой всех фундаментальных соотношений метода. При выводе дифференциальных уравнений движения в обобщенных криволинейных координатах автор отказался от вариационного принципа, сразу приводящего к уравнениям Лагранжа II рода, но требующего знания вариационного исчисления, а получил формулы для ускорения в криволинейных обобщенных координатах формальным методом, проектируя вектор ускорения на оси криволинейной системы координат.

Вообще вторая глава содержит лишь те специальные вопросы теории невозмущенного движения, которые связаны с реализацией орбитального метода.

Третья глава посвящена изучению моделей возмущенного движения. Не имея возможности в рамках этой книги рассмотреть аналитические методы небесной механики, автор не приводил выводов для уравнений движения в форме Лагранжа и Лагранжа—Ньютона, а также не рассмотрел систем канонических элементов Делоне и Якоби, полагая, что с этими фундаментальными вопросами небесной механики читатель может ознакомиться по довольно многочисленной сейчас литературе, например по работам [12],

[47], [44]. Однако автор считал необходимым привести сведения о линеаризированных моделях движения, а также о промежуточной орбите, основанной на проблеме двух неподвижных центров, получившей свою глубокую разработку в работах проф. Е. П. Аксенова, имея в виду важность этих вопросов для численного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

В четвертой главе подробно рассмотрены теория и методы вычисления матрицанта, т. е. матрицы производных от текущих элементов орбиты по их начальным значениям. Эта матрица имеет фундаментальное значение при составлении уравнений поправок орбитального метода. Теория и основные свойства матрицанта излагаются здесь на основании работы [5]. В этой главе помещен также полностью алгоритм точного аналитического метода расчета матрицанта, разработанный Де Беллисом и Эскобалом. Удачный выбор системы элементов делает этот алгоритм универсальным, пригодным для любых моделей, в том числе и вырожденных, а также для случая гиперболического движения.

В пятой главе изложены вопросы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Здесь автор стремился дать подробные алгоритмы применяемых сейчас методов численного интегрирования. При изложении разностных методов используются только левые разности, что позволяет наиболее компактно расположить материал.

Помимо традиционных методов Рунге—Кутты и Адамса, в этой главе приводятся также новые методы численного интегрирования — метод Шенкса, метод Булирша и Штора, а также метод Эверхарта.

Шестая глава посвящена сравнительно мало разработанному вопросу координатно-временной привязки результатов космических съемок с использованием орбитального метода. Здесь же кратко изложены вопросы теории определения орбиты по снимкам, выполненным с борта искусственного спутника планеты. Совокупность этих вопросов образует новый раздел фотограмметрии, который можно было бы назвать динамической фотограмметрией.

Наконец, в небольшой седьмой главе рассмотрены состав измерений в орбитальных методах, проблема наблюдаемости и некоторые соображения об оптимизации плана работ при орбитальных методах. Более подробно проблема наблюдаемости изложена в работах [5, 6, 13]. При изложении вопроса наблюдаемости автор руководствовался в основном работами [5, 6].

Несколько слов о принятой в этой книге символике. Векторные величины везде обозначены полужирной буквой с чертой наверху, матрицы также полужирными буквами, но без черты, а скаляры обозначены светлыми буквами. Все топоцентрические или спутникоцентрические величины снабжены нижним двойным индексом, первый из которых относится к начальной, а второй — к конечной точке. Геоцентрические величины имеют один нижний индекс.

В заключение автор считает своей приятной обязанностью выразить благодарность коллективу кафедры астрономии и космической геодезии МИИГАиК за обсуждение рукописи книги, а также благодарность заслуженному деятелю науки и техники РСФСР проф. доктору техн. наук В. Д. Большакову, проф. доктору техн. наук С. С. Уралову и проф. доктору техн. наук Ю. В. Плахову за поддержку и обсуждение отдельных положений книги. Автор благодарен также канд. техн. наук В. К. Осипову и инж. В. А. Сикачевой, много сделавшим для оформления рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга «Орбитальные методы космической геодезии» написана на основе курса лекций, который автор читал в период 1973—1979 гг. студентам Московского ордена Ленина института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии по специальности «Космическая геодезия».

Космическая геодезия, являясь инженерной дисциплиной, имеет своей основной задачей создание единой системы координат и модели внешнего гравитационного поля для Земли (или для другой исследуемой планеты) на основе наблюдений за искусственными спутниками, а также путем обработки информации, полученной с борта искусственного спутника планеты. Как только космическая геодезия сформировалась в виде довольно специфической отрасли геодезической науки, стало возможным установить достаточно отчетливо две основных тенденции в развитии ее методов.

Первая из них предполагает геометрический путь построения геодезических сетей на основании синхронных наблюдений ИСЗ с нескольких пунктов. В этом случае ИСЗ рассматривается как очень высокая визирная цель, позволяющая значительно увеличить расстояния между определяемыми пунктами по сравнению с классической триангуляцией.

Теория движения ИСЗ в геометрических методах используется лишь для эфемеридных целей. Координаты пунктов в этом случае получаются в относительной системе координат, т. е. на практике в системе координат исходных пунктов. Исключение теории движения ИСЗ приводит к довольно простым геометрическим решениям.

Гораздо более перспективным и внутренне более глубоким является второй метод, основанный на исследовании эволюции орбиты ИСЗ (с учетом всех действующих на него сил) по результатам траекторных измерений. Если удалось построить математическую модель движения ИСЗ, адекватную реальному движению, а между множеством фазовых состояний ИСЗ и множеством траекторных измерений существует однозначное соответствие, то для каждого момента времени можно получить значения компонент геоцентрического вектора искусственного спутника, начало которого совпадает с центром масс исследуемой планеты, а также компоненты вектора его геоцентрической скорости. При этом в качестве неизвестных могут фигурировать как координаты определяемых пунктов, так и параметры модели движения, к которым, кроме начальных значений элементов орбит, прежде всего относятся коэффициенты в разложении гравитационного поля планеты в ряды, параметры, характеризующие свойства атмосферы и т. д.

Обычно задача в такой общей постановке приводит к группе методов, называемых динамическими методами космической геодезии, в результате применения которых совместно определяются координаты станции наблюдения, элементы орбиты и постоянные, характеризующие внешнее гравитационное поле планеты.

В этой книге рассматриваются достаточно подробно все аспекты другой более частной задачи. Будем предполагать, что модели сил, действующих на искусственный спутник, известны а priori с точностью, обеспечивающей адекватность математической модели движения реальному движению, а по результатам наблюдений требуется определить координаты пунктов наблюдения и начальные условия интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих движение. Задача в этой постановке приводит к группе методов, называемых орбитальными. Таким образом, орбитальными называются все методы космической геодезии, основанные на использовании теории движения ИСЗ и предполагающие известные модели действующих на ИСЗ сил. Если орбитальный метод реализуется на очень небольшом, например в 2—3 мин, интервале, то при экстраполяции положения и скорости ИСЗ достаточно ограничиться учетом лишь основных возмущений, что существенно облегчает задачу интегрирования дифференциальных уравнений движения. Такой способ получил название метода коротких дуг.

При решении ряда практических задач (особенно навигационных) часто полагают, что координаты и составляющие скорости ИСЗ для моментов измерений известны и не нуждаются в уточнении, в этом случае ИСЗ является своеобразным носителем координат и определение положений пунктов наблюдений сводится к решению обратных пространственных засечек.

Замечательным свойством орбитальных методов является их автономность, отсутствие необходимости в синхронизации наблюдений. При этом положение пунктов определяется в единой системе координат с началом в центре масс планеты. Таким образом, преимуществом их перед геометрическими методами является возможность определения «абсолютных» положений пунктов, в то время как геометрические методы всегда дают только относительные положения. Но орбитальные методы требуют точного знания моделей действующих сил и гораздо сложнее геометрических методов при математической обработке результатов измерений. Поэтому успешное развитие орбитальных методов тесно связано с успехами в смежных областях — в гравиметрии, физике атмосферы, астрометрии и т. д., а также с прогрессом современной вычислительной техники.

Отечественный опыт использования орбитальных методов в геодезических целях обобщен в книге Е. Г. Бойко, Б. М. Кленецкого, И. М. Ландис и Г. А. Устинова [17], а также в ряде статей. Развитие орбитальных методов в геодезии также во многом зависит от состояния теории движения искусственных спутников. Два

последних десятилетия характеризуются бурным развитием этой прикладной отрасли небесной механики. Здесь прежде всего необходимо назвать работы советских ученых — Е. П. Аксенова [2, 3], В. Г. Демина [11], И. Д. Жонголовича [14, 15], В. Н. Брандина [5, 6], Ю. В. Плахова [40], Л. П. Пеллинина [39], Г. Н. Разоренова [6], П. Е. Эльясберга [59], В. Д. Ястребова [62] и многих других.

Возникло новое направление в науке о космосе — экспериментальная космическая баллистика. В работе [6] рассматриваются математические аспекты космической баллистики и, в частности, систематически излагаются теория и свойства переходных матриц (матрицантов), необходимые для корректной алгоритмизации орбитального метода. В связи с развитием теории определения орбит космических аппаратов возникли также новые проблемы — корректности постановки, адекватности математической модели движения и наблюдаемости, т. е. установления однозначного соответствия между множеством фазовых состояний космического аппарата и множеством измерений. При этом решается вопрос о возможности определения орбиты при данном составе измерений и одновременно оптимизируются как состав измерений, так и расположение измерительных пунктов и частота и время измерений. Последовательное изложение этих вопросов можно найти в работах [5], [6].

Все большее значение при решении задач реализации орбитальных методов приобретают методы статистической обработки траекторных измерений и применение теории ошибок и метода наименьших квадратов при определении орбит. Этот вопрос исследуется в работах П. Е. Эльясберга [59], Б. Ф. Жданюка [13], В. И. Мудрова и В. Л. Кушко [33, 34]. Весьма важны также принципиальные вопросы уравнительных вычислений и оценки точности полученных результатов, а также методы решения перепределенных нелинейных систем, рассмотренные в работах В. Д. Большакова [4], Л. В. Кантаровича [18], Линника Ю. В. [29] и других ученых, работающих в области математической обработки геодезических измерений.

Большой вклад в разработку методов космической геодезии и, в частности, орбитального метода внесли труды зарубежных ученых Г. Вейса [10, 45], В. Каулы [19, 20], П. Эскобала [61], И. Козаи [23], К. Арнольда [63], М. Бурши [9] и многих других.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОРБИТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 1. Системы отсчета, постоянные и единицы

В исследованиях, учитывающих закономерности движения ИСЗ относительно центра масс Земли, необходимо задать инерциальную систему отсчета, по отношению к которой массивные физические объекты, не подверженные действию внешних сил, перемещаются по прямым линиям и с постоянной скоростью.

Строго говоря, геоцентрические системы отсчета не являются инерциальными вследствие движения Земли вокруг Солнца и ускоренного движения самого Солнца в пространстве. Но если рассматривать движение искусственного спутника Земли, который перемещается в пространстве вместе с Землей, то движение Земли не отразится на основных динамических уравнениях. Таким образом, при решении ряда вопросов, связанных с теорией движения ИСЗ, удовлетворительной можно считать геоцентрическую систему координат, оси которой привязаны к далеким звездам или галактикам.

В качестве такой практически инерциальной системы координат будем принимать среднюю экваториальную систему координат, фиксированную для некоторой эпохи T_0 данными фундаментального каталога положений и собственных движений ряда звезд. Располагая значениями постоянных прецессии, можно воспроизводить эту систему отсчета для любой другой эпохи.

Наиболее точной фундаментальной системой современности является система ярких звезд FK-4, созданная на основании меридианных наблюдений этого столетия.

1. Фундаментальная система координат.

В фундаментальной инерциальной системе координат начало o (рис. 1) располагается в центре масс Земли. Ось x направлена к средней точке весеннего равноденствия $\Upsilon_{\text{ср}}$ в эпоху T_0 , а ось z перпендикулярна к среднему экватору эпохи T_0 . В космических исследованиях в качестве эпохи T_0 принята эпоха $T_0 = 1950,0$, т. е. начало Бесселева тропического года 1950, которому соответствует момент всемирного времени $22^{\text{h}}05^{\text{m}}42^{\text{s}}$ 31 декабря 1949 г. или юлианская дата $\text{JD} = 2\,433\,282,4234$.

В дальнейшем будем пользоваться модифицированными юлианскими днями (MJD), которые отсчитываются от юлианского дня $2\,400\,000,5$; тогда

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2\,400\,000,5,$$

и эпоха T_0 фундаментальной системы определится как $T_0 = 33\,281,9234 \text{ MJD}$.

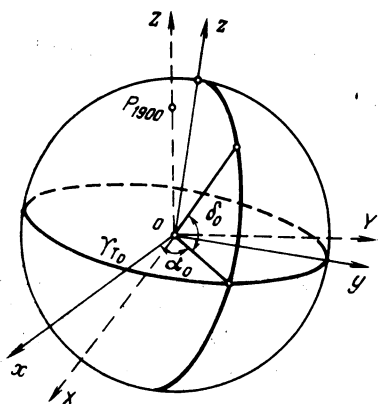


Рис. 1

Таким образом,

$$\vec{r}_{T_0}^0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix}_{T_0}, \quad (1.2)$$

где α_0 и δ_0 — прямое восхождение и склонение звезды, отнесенные к равноденствию эпохи T_0 и положению на эпоху T ,

$$\vec{r}_T^0 = \Pi \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix}_{T_0}. \quad (1.3)$$

Ортогональная матрица прецессии Π определяется по формуле [46]

$$\Pi = \begin{bmatrix} -\sin \kappa \sin \omega + \cos \kappa \cos \omega \cos \nu & -\cos \kappa \sin \omega - \sin \kappa \cos \omega \cos \nu & -\cos \omega \sin \nu \\ \sin \kappa \cos \omega + \cos \kappa \sin \omega \cos \nu & \cos \kappa \cos \omega - \sin \kappa \sin \omega \cos \nu & -\sin \omega \sin \nu \\ \cos \kappa \sin \nu & \sin \kappa \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где эйлеровы углы κ , ω и ν определяются из выражений

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= 0,063107'' (\text{MJD} - 33\,282,0), \\ \omega &= 0,063107'' (\text{MJD} - 33\,282,0), \\ \nu &= 0,054875'' (\text{MJD} - 33\,282,0); \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

в формулах (1.5) MJD — модифицированная юлианская дата, соответствующая эпохе T .

Преобразование системы отсчета для любой другой эпохи T будем выполнять на основании следующей формулы ортогональных преобразований:

$$\vec{r}_T^0 = \Pi \vec{r}_{T_0}^0, \quad (1.1)$$

где $\vec{r}_{T_0}^0$ — единичный вектор направления на звезду, отнесенный к равноденствию T_0 , но исправленный поправками за собственное движение звезды за промежуток $(T - T_0)$; $\vec{r}_T^0$ — единичный вектор направления на звезду в средней инерциальной системе отсчета на эпоху T , Π — ортогональная матрица прецессии.

2. Гринвичская система координат.

Для определения положений объектов, вращающихся вместе с Землей, необходимо располагать геоцентрической системой координат, жестко фиксированной в теле Земли. В качестве земной геоцентрической системы координат будет применять гринвичскую систему координат $oXYZ$, которая определяется следующим образом (см. рис. 1).

Начало координат расположено в центре масс Земли, ось Z направлена к среднему северному полюсу Земли 1900—1905 гг. Ось X лежит в плоскости земного экватора и направлена в точку пересечения среднего гринвичского меридиана со средним экватором 1900—1905 гг.

Переход от фундаментальной системы координат эпохи $T_0 = 1950,0$ к гринвичской системе осуществляется в такой последовательности:

1) фундаментальная система с учетом действия прецессии воспроизводится для эпохи T ;

2) с учетом действия нутации от средней системы координат эпохи T переходят к истинной системе этой же эпохи;

3) с учетом координат δx_p и δy_p мгновенного полюса Земли эпохи T относительно среднего полюса 1900—1905 гг. ось Z истинной системы координат эпохи T направляется в средний полюс Земли 1900—1905 гг., после чего плоскость oXY совпадает с плоскостью среднего экватора 1900—1905 гг.;

4) выполняется поворот системы координат вокруг нового положения оси Z на угол, численно равный истинному звездному времени S в Гринвиче для эпохи T .

Таким образом, переход от инерциальной системы координат эпохи $T_0 = 1950,0$ к гринвичской системе координат можно представить в виде соотношения

$$\mathbf{R}_G = |\mathbf{r}| \mathbf{S} \mathbf{P} \mathbf{N} \mathbf{P}_T^{-1}, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{P}$ — матрица прецессии, $\mathbf{N}$ — матрица нутации, $\mathbf{P}$ — матрица, учитывающая движение мгновенного полюса, $\mathbf{S}$ — матрица поворота вокруг направления в средний полюс на угол, численно равный истинному звездному времени в Гринвиче, $|\mathbf{r}|$ — геоцентрическое расстояние объекта, $\bar{\mathbf{R}}_G$ — вектор положения объекта в гринвичской системе координат

$$\mathbf{R}_G = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Матрица прецессии $\mathbf{P}$ получается на основании формулы (1.4). Матрица нутации $\mathbf{N}$ определяется по формуле

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\mu & -\Delta\nu \\ \Delta\mu & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\nu & \Delta\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.8)$$

где $\Delta\mu$, $\Delta\nu$ и $\Delta\epsilon$ — составляющие нутации по прямому восхождению, склонению и наклону эклиптики. С погрешностью менее $0,2''$ для вычисления этих углов могут быть использованы следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\mu &= 10^{-6} [-76,7 \sin A + 0,9 \sin 2A - 5,7 \sin 2B - 0,9 \sin 2C]; \\ \Delta\nu &= 10^{-6} [-33,3 \sin A + 0,4 \sin 2A - 2,5 \sin 2B - 0,4 \sin 2C]; \\ \Delta\epsilon &= 10^{-6} [44,7 \cos A - 0,4 \cos 2A + 2,7 \cos 2B + 0,4 \cos 2C]; \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где углы A , B и C вычисляются так:

$$\left. \begin{aligned} A &= 12,1128^\circ - 0,0529539^\circ t; \\ B &= 280,0812^\circ + 0,9856473^\circ t; \\ C &= 64,3824^\circ + 13,1763960^\circ t, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

а аргумент $t = \text{MJD} - 33282,0$.

Матрица $\mathbf{P}$ имеет вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta x_p \\ 0 & 1 & -\delta y_p \\ -\delta x_p & \delta y_p & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

где δx_p и δy_p — координаты мгновенного полюса относительно среднего полюса 1900—1905 гг., выраженные в радианах.

Значения δx_p и δy_p координат мгновенного полюса периодически публикует Международное бюро времени (БВН) в *Circulaires BИН*, издаваемых в Париже, причем *Circulaire B* и *D* дают наблюдаемые значения координат полюса, а *Circulaire C* — их экстраполированные значения.

Матрица $\mathbf{S}$ имеет вид

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

где S — истинное звездное время в Гринвиче.

Истинное звездное время в Гринвиче можно определить по формуле

$$S = \bar{S} + \Delta\mu, \quad (1.13)$$

где $\bar{S}$ — среднее звездное время в Гринвиче, а $\Delta\mu$ — нутация по прямому восхождению.

С точностью до $0,2''$ для вычисления истинного звездного времени можно использовать формулу Ньюкомба, представляющую звездное время как функцию среднего солнечного времени и принятую Международным Астрономическим Союзом (МАС).

С учетом нутации $\Delta\mu$ по прямому восхождению формула Ньюкомба имеет вид

$$S = 100,075542^\circ + 360,985647348^\circ t + 0,2900^\circ \cdot 10^{-12} t^2 - \\ - 4,392^\circ \cdot 10^{-3} \sin A + 0,053^\circ \cdot 10^{-3} \sin 2A - \\ - 0,325^\circ \cdot 10^{-3} \sin 2B - 0,050^\circ \cdot 10^{-3} \sin 2C, \quad (1.14)$$

где аргументы A , B и C и t определяются формулами (1.10).

На практике обсерватории определяют звездное время по своим наблюдениям и вычисляют S по формуле (1.14). Время, полученное из непосредственных наблюдений, образует систему УТО, не являющуюся равномерной временной шкалой вследствие движения мгновенного полюса, сезонных вариаций скорости вращения Земли, обусловленных метеорологическими причинами, а также вековым замедлением скорости вращения Земли из-за приливного трения и ее флуктуациями, связанными с солнечной активностью.

Обсерватории, объединенные в Международную службу движения полюсов (МСДП), определяют две поправки к УТО — поправку $\Delta\lambda$, обусловленную отклонением мгновенного полюса относительно среднего, и поправку ΔT_s , обусловленную сезонными вариациями скорости вращения Земли. Введение этих поправок образует соответственно системы $UT1 = UTO + \Delta\lambda$ и $UT2 = UT1 + \Delta T_s$. Система $UT2$ является квазиравномерной шкалой, наилучшим образом приближающейся к равномерной шкале времени.

Шкала атомного времени ТА получается на основании использования молекулярных и атомных высокостабильных эталонов для регулировки кварцевых часов. Эта шкала практически равномерна (с точностью до 10^{-11}), тогда как единица времени, определяемая по гелиоцентрическому движению Земли, имеет точность 10^{-9} . За 1 атомную секунду принят промежуток времени, в течение которого происходит 9192631770 колебаний атома цезия.

В СССР принята шкала атомного времени ТА-1. Она основана на двух кварцевых часах, которые регулируются цезиевым эталоном частоты. Нуль-пункт шкалы ТА-1 совпадает с моментом 1964, янв. 1, 12^hUT2, для этого момента ТА-1=UT2. Разность шкал UT2—ТА-1 публикуется в бюллетенях «Эталонное время».

Поскольку сезонные вариации скорости вращения Земли не подчиняются каким-либо закономерностям, не существует и аналитических формул, связывающих ТА-1 и UT2.

Однако существует шкала всемирного согласованного времени TUC, которая введена для согласования шкал времени ТА и UT2 при помощи одних и тех же сигналов времени.

3. Геодезические системы координат.

Геодезические системы координат определяются геодезическими координатами B_0 , L_0 и H_0 в исходном пункте и параметрами $\tilde{a}$ и $\tilde{e}$ (большая полуось и эксцентриситет) принятого референц-эллипсоида. Поскольку до недавнего времени реализация гринвичской системы координат была невозможна, в геодезических

работах использовались и используются геодезические координаты. Они могут быть заданы в форме прямоугольных координат (X_r, Y_r, Z_r) либо криволинейных (B, L, H) , связь между которыми устанавливается формулами (рис. 2)

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+H) \cos B \cos L \\ (N+H) \cos B \sin L \\ [N(1-\tilde{e}^2) + H] \sin B \end{pmatrix} = R_r \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos L \\ \cos \Phi \sin L \\ \sin \Phi \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

где N — радиус кривизны первого вертикала, Φ — геоцентрическая широта, причем

$$N = \frac{\tilde{a}}{\sqrt{1-\tilde{e}^2 \sin^2 B}} = \tilde{a} \left(1 + \frac{\tilde{e}^2}{2} \sin^2 B + \frac{3}{8} \tilde{e}^4 \sin^4 B + \frac{5}{16} \tilde{e}^6 \sin^6 B + \dots \right). \quad (1.16)$$

Формулы обратного перехода имеют вид

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y_r}{X_r}, \quad (1.17)$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z_r + N\tilde{e}^2 \sin^2 B}{X_r \cos L + Y_r \sin L}, \quad (1.18)$$

$$H = \frac{X_r}{\cos B \cos L} - N = \frac{Y_r}{\cos B \sin L} - N = \frac{Z_r}{\sin B} - N(1-\tilde{e}^2). \quad (1.19)$$

Вычисление геодезической широты B по формуле (1.18) выполняется методом последовательных приближений. При этом в качестве начального значения широты можно принять значение, полученное по формуле

$$\operatorname{tg} B^{(0)} = \frac{Z_r + \tilde{a} \tilde{e}^2 \sin^2 B}{X_r \cos L + Y_r \sin L}. \quad (1.20)$$

В общем случае система геодезических координат сдвинута и развернута на небольшие углы относительно гринвичской системы координат. Начало геодезической системы координат не совпадает с центром масс Земли, так как его положение по отношению к поверхности Земли неизвестно. Разворот геодезической системы относительно гринвичской возникает вследствие ошибок астрономических определений при ориентации геодезической системы. Ошибка астрономической ориентации геодезической системы координат может быть представлена в виде трех составляющих — в азимуте dA , в плоскости мери-

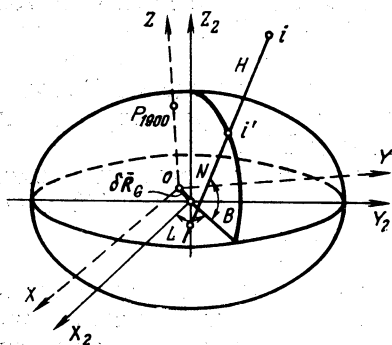


Рис. 2

диана $d\xi$ и плоскости первого вертикала $d\eta$. Эти углы невелики и во всяком случае не превышают погрешностей современных астрономических определений, т. е. $1-2''$.

Таким образом, преобразование геодезических координат в гринвичские можно представить формулой

$$\bar{\mathbf{R}}_G = \mathbf{R}_r + \delta\bar{\mathbf{R}}_G + \Pi_a \delta\bar{\mathbf{R}}^0, \quad (1.21)$$

где $\bar{\mathbf{R}}_G = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ — вектор положения в гринвичской системе координат;

$\bar{\mathbf{R}}_r = \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix}$ — вектор положения в геодезической системе координат;

$\delta\bar{\mathbf{R}}_G = \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{pmatrix}$ — вектор сдвига начала геодезической системы относительно начала гринвичской системы;

$\delta\bar{\mathbf{R}}^0 = \begin{pmatrix} dA \\ d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$ —

единичный вектор погрешностей ориентировки геодезической системы координат;

Π_a — матрица преобразования, имеющая вид [45]:

$$\Pi_a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.22)$$

элементы которой определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \sin B_0 \Delta Y_r - \cos B_0 \sin L_0 \Delta Z_r; \\ a_{12} &= \cos L_0 \Delta Z_r; \\ a_{13} &= -\cos B_0 \Delta Y_r - \sin B_0 \sin L_0 \Delta Z_r; \\ a_{21} &= -\sin B_0 \Delta X_r + \cos B_0 \cos L_0 \Delta Z_r; \\ a_{22} &= \sin L_0 \Delta Z_r; \\ a_{23} &= \cos B_0 \Delta X_r + \sin B_0 \cos L_0 \Delta Z_r; \\ a_{31} &= \cos B_0 \sin L_0 \Delta X_r - \cos B_0 \cos L_0 \Delta Y_r; \\ a_{32} &= \cos B_0 \Delta X_r + \sin B_0 \Delta Y_r; \\ a_{33} &= \sin B_0 \sin L_0 \Delta X_r - \sin B_0 \cos L_0 \Delta Y_r, \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

$$\text{где} \quad \Delta X_r = X_r - X_r^0; \quad \Delta Y_r = Y_r - Y_r^0; \quad \Delta Z_r = Z_r - Z_r^0; \quad (1.24)$$

X_r^0 , Y_r^0 и Z_r^0 — координаты начала геодезической системы.

Поскольку величины dA , $d\xi$ и $d\eta$ малы и их значения неизвестны, в дальнейшем будем предполагать, что разворот геодезиче-

ской системы относительно гринвичской отсутствует и имеет место лишь сдвиг, т. е.

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_r + \delta \bar{\mathbf{R}}_G. \quad (1.25)$$

Координаты вектора $\delta \bar{\mathbf{R}}_G$ начала геодезической системы, приведенного к гринвичской системе, есть функции абсолютного уклонения отвеса (ξ_0 , η_0 и ζ_0) в начальном пункте геодезической системы, составляющие которого в меридиане ξ_0 , первом вертикале η_0 и по высоте ζ_0 выражены в линейной мере

$$\delta \bar{\mathbf{R}}_G = \begin{bmatrix} \delta X_0 \\ \delta Y_0 \\ \delta Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin B_0 \cos L_0 & \sin L_0 & -\cos B_0 \cos L_0 \\ \sin B_0 \sin L_0 & -\cos L_0 & -\cos B_0 \sin L_0 \\ -\cos B_0 & 0 & -\sin B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

4. Динамическая система координат (u , v , w).

Как мы уже отмечали, движение космических аппаратов следует представлять в системе отсчета, принятой в качестве инерциальной, но в этом случае в основные динамические уравнения войдут члены, учитывающие косвенные лунно-солнечные возмущения, обусловленные прецессией и нутацией экваториальной плоскости Земли. Если же описывать движение КА в гринвичской системе координат, то в динамических уравнениях будут появляться члены, связанные с тем, что гринвичская система не является инерциальной.

Таким образом, для построения точных аналитических теорий движения необходим компромиссный выбор системы координат, в которой Земля, хотя и незначительно, перемещается, но возникающие из-за этого члены малы.

Такую квазинерциальную динамическую систему координат предложил Г. Вейс [10]. Козан доказал, что эта система координат является оптимальной для динамических исследований. В рассматриваемой системе координат (u , v , w) положение КА связано с равноденствием эпохи $T_0=1950,0$ и мгновенным экватором эпохи наблюдений T . При этом эклиптика вообще исключается из системы отсчета. Особенностью этой системы является то, что ее отклонения от инерциальной системы не влияют на короткопериодические возмущения от гравитационного поля Земли. Часовой угол точки весеннего равноденствия (звездное время), который связывает эту систему с гринвичской системой координат, является простой линейной функцией времени UT1 и называется модифицированным звездным временем (MST).

Началом динамической системы координат является центр масс Земли, ось w направлена в мгновенный полюс Земли в эпоху T , а ось u — в точку Υ' , лежащую в плоскости истинного экватора эпохи T на угловом расстоянии $\mu + \Delta\mu$ (прецессия и нутация от 1950,0 до эпохи T) к востоку от истинной точки весеннего равноденствия Υ эпохи T . Таким образом, эта система не

вращается вокруг полярной оси, а лишь медленно наклоняется вместе с истинным экватором.

Связь гринвичской (X, Y, Z) и динамической (u, v, w) систем координат получается на основании формулы [45]

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{T} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

где матрица $\mathbf{T}$ имеет следующую структуру:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos S^* & \sin S^* & \delta x_p \\ -\sin S^* & \cos S^* & -\delta y_p \\ -\delta x_p \cos S^* - \delta y_p \sin S^* & -\delta x_p \sin S^* + \delta y_p \cos S^* & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

В формуле (1.28) S^* представляет собой модифицированное звездное время, которое получается, если исключить прецессию и нутацию в прямом восхождении за интервал $(T - 1950,0)$ в формуле (1.14) для истинного звездного времени

$$S^* = S - (\mu + \Delta\mu). \quad (1.29)$$

Переход от инерциальной системы координат (x, y, z) на эпоху $T_0 = 1950,0$ к динамической системе (u, v, w) выполняется на основании соотношения

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{M}\mathbf{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{T_0}, \quad (1.30)$$

где матрицы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{Q}$ имеют следующий вид [45]:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa \cos v \\ \sin \kappa \cos \kappa - \cos \kappa \sin \kappa \cos v \\ \cos \kappa \sin v \\ \sin \kappa \cos \kappa - \sin \kappa \cos \kappa \cos v & -\cos \kappa \sin v \\ \cos^2 \kappa + \sin^2 \kappa \cos v & \sin \kappa \sin v \\ -\sin \kappa \sin v & \cos v \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos \mu \Delta v - \sin \mu \Delta \varepsilon \\ 0 & 1 & \sin \mu \Delta v - \cos \mu \Delta \varepsilon \\ \cos \mu \Delta v + \sin \mu \Delta \varepsilon & -\sin \mu \Delta v + \cos \mu \Delta \varepsilon & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Матрица $\mathbf{Q}$ отражает только действие прецессии и не зависит от нутации. Матрица $\mathbf{M}$ учитывает действие нутации, но в некоторой степени зависит и от прецессии. При $\Delta v = \Delta \varepsilon = 0$ она становится единичной.

5. Основные единицы и постоянные.

В соответствии с рекомендациями Международного астрономического союза (МАС) при реализации орбитальных методов принята следующая система фундаментальных постоянных [56]:

1) гауссова гравитационная постоянная, определяющая астрономическую единицу $k=0,01720209895$.

Это значение гауссовой постоянной принято МАС в 1938 г. и служит для определения астрономической единицы расстояния A , если соответствующие единицы массы и времени уже определены. Единицей массы является масса Солнца, а единицей времени — эфемеридные сутки, или 86 400 эфемеридных секунд. Размерность k есть $(ae)^{3/2} \cdot (\text{эфемеридные сутки})^{-1} \cdot (\text{масса Солнца})^{-1}$;

2) величина астрономической единицы в метрах $A=149600 \times 10^6$.

Величина A представляет собой округленное значение, полученное по современным радиолокационным измерениям;

3) экваториальный радиус Земли, m

$$a_e = 6\,378\,160.$$

Термин «экваториальный радиус Земли» относится к экваторальному радиусу эллипсоида вращения, аппроксимирующего геоид;

4) динамический коэффициент, характеризующий сжатие Земли.

$$J_2 = 0,0010827.$$

Термин «динамический коэффициент, характеризующий сжатие Земли» относится к коэффициенту второй зональной гармоники разложения гравитационного потенциала Земли, принятого комиссией МАС в 1961 г.;

5) геоцентрическая гравитационная постоянная (m^3/c^2) [39, 40]

$$\mu = GM_{\oplus} = 398\,600,5 \cdot 10^9,$$

$$\sqrt{\mu} = 1996,5049 \cdot 10^4 \text{ м}^{3/2}/\text{с}.$$

Геоцентрическая гравитационная постоянная μ пригодна для вычисления геоцентрических орбит, когда единицей расстояния является метр, а единицей времени — секунда. Величина $M_{\oplus}$ есть масса Земли, включая массу ее атмосферы. Третий закон Кеплера для тела с массой m , обращающегося по невозмущенной эллиптической орбите вокруг Земли, записывается так:

$$\mu \left(1 + \frac{m}{M_{\oplus}} \right) = n^2 a^3,$$

где n — сидерическое среднее движение в радианах в секунду и a — среднее расстояние в метрах. Значение μ выводится из наблюдений ИСЗ и измерений силы тяжести;

6) сжатие Земли $f=0,0033529=1/298,25$ [39, 40].

Сжатие $f = \frac{a-b}{a}$, где a и b — большая и малая полуоси опорного земного эллипсоида. Принимается, что опорный, эллип-

соид вращения является эквипотенциальной поверхностью. В этом случае для определения внешнего гравитационного поля и геометрической формы указанного тела достаточно взять три параметра, при условии, что известны угловая скорость вращения Земли ω_3 и относительная масса атмосферы μ_a . Вариациями скорости вращения Земли можно пренебречь, а массу атмосферы достаточно знать с небольшой точностью. Их необходимые значения следующие:

$$\omega_3 = 0,000072921 \text{ рад/с; } \mu_a = 0,000001.$$

Выражения для сжатия f и ускорения силы тяжести g_e на экваторе через основные постоянные с точностью до величин второго порядка малости имеют вид

$$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} q + \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{15}{28} J_2 q - \frac{39}{56} q^2;$$

$$q = \frac{\mu}{a_e^2} \left(1 - \mu_a + \frac{3}{2} J_2 - q + \frac{27}{8} J_2^2 - \frac{6}{7} J_2 q + \frac{47}{56} q^2 \right),$$

где $q = \frac{a_e \omega^2}{g_e}$ получается в результате последовательных приближений.

Сжатие f связано с эксцентриситетом e эллипсоида соотношением $e^2 = 2f - f$.

§ 2. Фундаментальное уравнение орбитальных методов

Пусть $\bar{r}_j$ (рис. 3) — геоцентрический вектор ИСЗ в инерциальной системе координат в некоторый момент t_j .

Введем в пункте наблюдений i на поверхности Земли топоцентрическую систему координат ($ix'y'z'$), оси которой параллельны осям геоцентрической системы.

Предположим, что из измерений в пункте i для момента t_j известны все три компоненты топоцентрического вектора ИСЗ $\bar{r}_{ij}$:

$$\bar{r}_{ij} = |r_{ij}| \begin{bmatrix} l_{ij} \\ m_{ij} \\ n_{ij} \end{bmatrix} =$$

$$= |r_{ij}| \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} \cos \delta_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} \cos \delta_{ij} \\ \sin \delta_{ij} \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

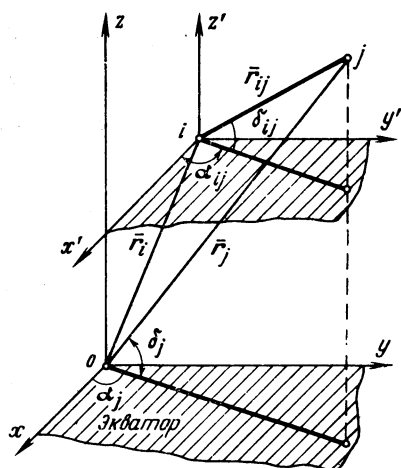


Рис. 3

тогда можно написать векторное уравнение

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}_j - \bar{r}_i, \quad (1.34)$$

связывающее в любой момент t_j топоцентрический вектор ИСЗ $\bar{r}_{ij}$, его геоцентрический вектор $\bar{r}_j$ и геоцентрический вектор пункта $\bar{r}_i$. Уравнение (1.34) является фундаментальным уравнением орбитальных методов в космической геодезии. Проектируя уравнение (1.34) на оси инерциальной системы координат, получим три уравнения в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} x_i &= r_j \cos \alpha_j \cos \delta_j - r_{ij} \cos \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}; \\ y_i &= r_j \sin \alpha_j \cos \delta_j - r_{ij} \sin \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}; \\ z_i &= r_j \sin \delta_j - r_{ij} \sin \delta_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

позволяющие вычислить координаты пункта i , если для данного момента t_j известны геоцентрические $(r_j, \alpha_j, \delta_j)$ и топоцентрические координаты ИСЗ.

Эти уравнения в гринвичской системе координат будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= r_j \cos(\alpha_j - S_j) \cos \delta_j - r_{ij} \cos(\alpha_{ij} - S_j) \cos \delta_{ij}; \\ Y_i &= r_j \sin(\alpha_j - S_j) \cos \delta_j - r_{ij} \sin(\alpha_{ij} - S_j) \cos \delta_{ij}; \\ Z_i &= r_j \sin \delta_j - r_{ij} \sin \delta_{ij}. \end{aligned} \right\}. \quad (1.36)$$

Геоцентрические координаты ИСЗ получаются на основании теории движения ИСЗ, модель которого в инерциальных координатах можно представить системой трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} &= \frac{\partial R_V}{\partial x} + \frac{\partial R_{\odot, \zeta}}{\partial x} + Q_x; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial R_V}{\partial y} + \frac{\partial R_{\odot, \zeta}}{\partial y} + Q_y; \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} &= \frac{\partial R_V}{\partial z} + \frac{\partial R_{\odot, \zeta}}{\partial z} + Q_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.37)$$

В уравнениях (1.37) R_V представляет собой часть пертурбационной функции, обусловленную отличием реального гравитационного поля Земли от гравитационного поля сферической Земли с потенциалом

$$V_{\text{сф}} = \frac{\mu}{r} = \frac{398\,600,5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2}{r}.$$

Таким образом,

$$R_V = V - V_{\text{сф}}, \quad (1.38)$$

где V — потенциал реальной Земли, для которого по рекомендации МАС принята стандартная запись в виде разложения по сферическим функциям геоцентрических координат (r, Φ, λ) :

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \right]. \quad (1.39)$$

В этом выражении a_e — экваториальный радиус Земли, C_{nm} и S_{nm} — безразмерные коэффициенты, $P_{nm}(\sin \Phi)$ — присоединенные функции Лежандра. Для зональной части геопотенциала, которой соответствуют гармоники с коэффициентами C_{n0} , чаще пользуются обозначением

$$J_n = -C_{n0}. \quad (1.40)$$

Величина $R_{\odot, \zeta}$ в формулах (1.37) является частью пертурбационной функции, обусловленной совместным притяжением спутника Солнцем и Луной, а величины Q_x , Q_y и Q_z — составляющие возмущающих ускорений от негравитационных сил — сопротивления атмосферы, давления солнечной радиации и ряда других.

Для интегрирования дифференциальных уравнений движения необходимо располагать вектором начальных условий

$$\bar{\mathbf{E}}_{q_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix}_{t=t_0}, \quad (1.41)$$

компонентами которого являются координаты и составляющие скорости в некоторый начальный момент t_0 .

Начальные условия $\bar{\mathbf{E}}_{q_0}$ необходимо определить по результатам наблюдений ИСЗ, и при решении геодезических задач орбитальными методами начальные условия чаще всего фигурируют в качестве неизвестных.

Вектор начальных условий часто задается в виде элементов кеплеровой орбиты на момент t_0

$$\bar{\mathbf{\Theta}}_0 = \begin{pmatrix} \Omega \\ i \\ \omega \\ a \\ e \\ M_0 \end{pmatrix}_{t=t_0}, \quad (1.42)$$

где Ω — долгота восходящего узла орбиты, i — наклон плоскости орбиты к экватору, Φ — аргумент перигентра, a — большая

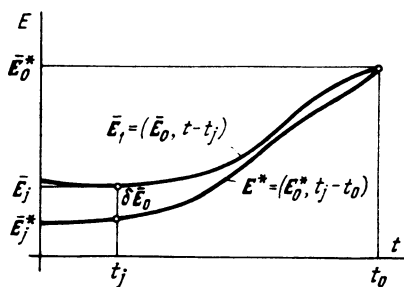


Рис. 4

полуось орбиты, e — эксцентриситет, а M_0 — средняя аномалия в момент t_0

$$M_0 = n(t_0 - t_n), \quad (1.43)$$

здесь t_n — время последнего прохождения ИСЗ через перигеум орбиты, а n — среднее движение, связанное с большой полуосью соотношением:

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} = \frac{1996,5049 \cdot 10^4 \text{ м}^3/2/\text{с}}{a^{3/2}}. \quad (1.44)$$

Грубо приближенные значения начальных условий $\bar{E}_0$ или $\bar{\Theta}_0$ обычно известны для момента выхода ИСЗ на орбиту.

§ 3. Линеаризация фундаментального уравнения

Разложим фундаментальное уравнение (1.34) в ряд Тейлора, удерживая лишь линейные члены:

$$\Delta \bar{r}_{ij} = \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_j} \Delta \bar{r}_j - \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_i} \Delta \bar{r}_i. \quad (1.45)$$

Геоцентрический вектор $\bar{r}_j$ есть функция текущих элементов орбиты

$$\bar{r}_j = \bar{r}_j(\bar{E}_j), \quad (1.46)$$

поэтому предыдущее уравнение можно еще представить так:

$$\Delta \bar{r}_{ij} = \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial \bar{E}_j} \Delta \bar{E}_j - \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_i} \Delta \bar{r}_i. \quad (1.47)$$

В свою очередь, текущие элементы орбиты $\bar{E}_j$ есть некоторые сложные функции начальных условий $\bar{E}_0$, параметров C_{nm} и S_{nm} модели гравитационного поля, параметров P_l моделей других сил, а также времени, неявно входящего в дифференциальные уравнения движения ИСЗ:

$$\bar{E}_j = \bar{E}_j(\bar{E}_0; \sum_{n,m} (C_{nm}, S_{nm}); P_l | t). \quad (1.48)$$

Линеаризация этого уравнения приводит к выражению

$$\Delta \bar{E}_j = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial \bar{E}_0} \Delta \bar{E}_0 + \sum_{n,m} \frac{\partial \bar{E}_j}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} (\Delta C_{nm}) +$$

$$+ \frac{\bar{E}_j}{\partial (P_1, P_2, \dots, P_l)} \begin{pmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_l \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Подставив значение $\bar{\Delta E}_j$ из формулы (1.49) в выражение (1.47), получим

$$\begin{aligned} \Delta \bar{r}_{ij} = & \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_j} \cdot \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial \bar{E}_j} \left[\frac{\partial \bar{E}_j}{\partial E_0} \Delta \bar{E}_0 + \sum_{n, m} \frac{\partial \bar{E}_j}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} (\Delta C_{nm}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{E}_j}{\partial (P_1, P_2, \dots, P_l)} \begin{pmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_l \end{pmatrix} \right] - \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_i} \Delta \bar{r}_i. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Производная от вектора по вектору есть матрица, элементами которой являются производные от координат первого вектора по координатам второго. Поэтому имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_j} &= \frac{\partial (r_{ij}, \alpha_{ij}, \delta_{ij})}{\partial (x_j, y_j, z_j)}; \\ \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial \bar{E}_j} &= \frac{\partial (x_j, y_j, z_j)}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}; \\ \frac{\partial \bar{E}_j}{\partial E_0} &= \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)}; \\ \frac{\partial \bar{r}_{ij}}{\partial \bar{r}_i} &= \frac{\partial (r_{ij}, \alpha_{ij}, \delta_{ij})}{\partial (x_i, y_i, z_i)}. \end{aligned} \right\}. \quad (1.51)$$

Еще более обобщая рассматриваемую задачу, предположим, что на пункте i измеряются не только компоненты топоцентрического вектора положения ИСЗ $\bar{r}_{ij}$, но и компоненты вектора $\dot{\bar{r}}_{ij}$ топоцентрической скорости ИСЗ.

В этом случае будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta (\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij}) &= \frac{\partial (\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij})}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \times \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \times \\ &\times \left[\frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} \begin{pmatrix} \Delta \Omega_0 \\ \Delta i_0 \\ \Delta \omega_0 \\ \Delta a_0 \\ \Delta e_0 \\ \Delta M_0 \end{pmatrix} + \sum_{n, m} \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} (\Delta C_{nm}) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (P_1, P_2, \dots, P_l)} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_l \end{pmatrix} \Bigg] - \frac{\partial (\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij})}{\partial (x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i. \quad (1.52)$$

Введем далее следующие обозначения для матриц в уравнении (1.52):

$$\left. \begin{aligned} K_{ij} &= \frac{\partial (\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij})}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}; & E_j &= \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}; \\ J'_{ij} &= \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \cdot \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)}; \\ K'_{ij} &= \frac{\partial (\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij})}{\partial (x, y, z)_i}. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

С этими обозначениями уравнение (1.52) запишем в более компактном виде:

$$K_{ij} J'_j \Delta \bar{\Theta}_0 + \left[K_{ij} E_j \sum_{n, m} \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (C_{nm}, S_{nm})} \begin{pmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + K_{ij} E_j \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial (P_1, P_2, \dots, P_l)} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_l \end{pmatrix} \right] - K'_{ij} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i - \Delta (\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij}) = 0 \quad (1.54)$$

Линеаризованное уравнение (1.54) соответствует наиболее общей постановке задачи, когда на основании измерений, выполненных на пунктах наблюдений ИСЗ, определяются координаты этих пунктов, орбита ИСЗ, а также уточняются параметры модели геопотенциала и моделей других сил.

Задача определения всех неизвестных, входящих в уравнение (1.54), соответствует динамическому методу космической геодезии.

Орбитальные методы образуют группу способов определения координат пунктов и орбит ИСЗ, которые являются частными случаями динамического метода. Во всех орбитальных методах предполагается, что коэффициенты C_{nm} и S_{nm} в разложении геопотенциала известны заранее с необходимой точностью и не нуждаются в уточнении, так же, как и параметры P_l моделей других сил, действующих на ИСЗ.

Таким образом, в орбитальных методах модели возмущающих сил всегда заданы а priori. Поэтому положим в уравнении (1.54)

$$\sum_{n, m} \begin{pmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{pmatrix} = 0; \quad \sum_i \Delta P_l = 0.$$

Тогда получим линеаризованную форму фундаментального уравнения (1.34), соответствующую орбитальным методам:

$$K_{ij} J_j \Delta \bar{E}_0 - K'_{ij} \Delta \bar{r}_i - \Delta(\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij}) = 0. \quad (1.55)$$

Если вектор начальных условий $\bar{E}_0$ определяется в форме координат x_0, y_0, z_0 и составляющих скорости $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, то уравнение (1.55) будет иметь вид

$$\Delta(\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij}) = \frac{\partial(\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij})}{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{y}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} - \frac{\partial(\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij})}{\partial(x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i. \quad (1.56)$$

Введем обозначение

$$J_j = \frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}, \quad (1.57)$$

после чего уравнение (1.56) запишем в форме

$$\Delta(\bar{r}_{ij}, \dot{\bar{r}}_{ij}) = J_j \Delta \bar{E}_0 - K'_{ij} \Delta \bar{r}_i. \quad (1.58)$$

§ 4. Уравнения поправок

Как правило, на пунктах наблюдения ИСЗ почти никогда не изменяются все три компоненты топоцентрического вектора $\bar{r}_{ij}$ или вектора топоцентрической скорости.

По результатам фотографических наблюдений определяется единичный топоцентрический вектор $\bar{r}_{ij}^0$ ИСЗ

$$\bar{r}_{ij}^0 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} \cos \delta_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} \cos \delta_{ij} \\ \sin \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (1.59)$$

Лазерные измерения позволяют определить модуль топоцентрического вектора r_{ij} . Измерения радиотехническими системами, основанными на эффекте Доплера, дают значение радиальной составляющей $\dot{r}_{ij}$ топоцентрической скорости ИСЗ.

Таким образом, на пунктах наблюдений измеряются величины, являющиеся некоторыми функциями координат, скорости ИСЗ и положения пунктов наблюдения.

Обозначая любую из измеренных на пункте величин через U_{ij} , на основании линеаризованного уравнения (1.56) получим общую форму уравнений поправок, возникающих при реализации орбитальных методов:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \cdot \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \times \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \Delta \Omega_0 \\ \Delta i_0 \\ \Delta \omega_0 \\ \Delta a_0 \\ \Delta e_0 \\ \Delta M_0 \end{pmatrix} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i + (U_{ij}^0 - U_{ij}^{\text{изм}}) = v_{U_{ij}}, \quad (1.60)$$

где

$$U_{ij}^0 - U_{ij}^{\text{изм}} = l_{ij} \quad (1.61)$$

является свободным членом уравнения поправок, а $v_{U_{ij}}$ — вероятнейшая (в смысле метода наименьших квадратов) поправка к непосредственно измеренному значению $U_{ij}^{\text{изм}}$.

Величина U_{ij}^0 представляет собой вычисленное и точно соответствующее приближенным начальным условиям $\bar{\mathcal{E}}_0^0$ и приближенным координатам пункта x_i^0, y_i^0, z_i^0 значение измеряемого параметра.

Таким образом, для вычисления свободного члена l_{ij} необходимо выполнить точное интегрирование дифференциальных уравнений движения ИСЗ на моменты измерений t_j . При этом предполагается, что ошибки модели и методические ошибки собственно интегрирования пренебрегаемо малы. В действительности ошибки модели будут сказываться на точности решения, поскольку параметры гравитационного поля и других возмущающих сил точно неизвестны. Поэтому при интегрировании дифференциальных уравнений движения стремятся уменьшить интервал экстраполяции координат и скорости ИСЗ, что можно сделать при достаточно высокой плотности измерений на интервале $(t_j - t_0)$.

Если отсутствует корреляция между непосредственно измеряемыми величинами, то каждому уравнению поправок будем приписывать вес

$$P_{ij} = \frac{C}{m_{ij}^2}, \quad (1.62)$$

где m_{ij} — средняя квадратическая ошибка измерения величины, а C — произвольная постоянная.

При решении ряда практических задач иногда полагают, что начальные условия $\bar{\mathcal{E}}_0$ известны с необходимой точностью. В этом случае вектор поправок начальных условий

$$\Delta \bar{\mathcal{E}}_0 = 0 \quad (1.63)$$

и уравнение поправок (1.60) будет иметь вид

$$-\frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i + l_{ij} = v_{U_{ij}}, \quad (1.64)$$

что соответствует упрощенному орбитальному методу, который часто используется при решении навигационных задач.

Наоборот, полагая, что координаты пунктов наблюдений известны, получим уравнение поправок, возникающее при дифференциальном уточнении орбит:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \cdot \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \times \\ & \times \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} \begin{pmatrix} \Delta \Omega_0 \\ \Delta i_0 \\ \Delta \omega_0 \\ \Delta a_0 \\ \Delta e_0 \\ \Delta M_0 \end{pmatrix} + l_{ij} = v_{U_{ij}}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Матрица K_{ij} является матрицей-строкой, составленной из частных производных измеренной величины U_{ij} по координатам и составляющим скорости ИСЗ

$$K_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} = \left| \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \dot{y}_j} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \dot{z}_j} \right|. \quad (1.66)$$

Элементы этой матрицы получаются дифференцированием функций положения и скорости ИСЗ.

Элементами матрицы E_j являются частные производные от текущих координат и составляющих скорости ИСЗ по элементам орбиты

$$E_j = \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Omega} & \frac{\partial x}{\partial i} & \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial e} & \frac{\partial x}{\partial M} \\ \frac{\partial y}{\partial \Omega} & \frac{\partial y}{\partial i} & \frac{\partial y}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial e} & \frac{\partial y}{\partial M} \\ \frac{\partial z}{\partial \Omega} & \frac{\partial z}{\partial i} & \frac{\partial z}{\partial \omega} & \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial e} & \frac{\partial z}{\partial M} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial e} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial M} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial e} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial M} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial e} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial M} \end{bmatrix}_j. \quad (1.67)$$

Элементы этой матрицы получаются в результате дифференцирования основных формул невозмущенного движения. Методы вычисления элементов матрицы (1.67) рассмотрены в главе 2.

Матрица J_j состоит из производных от текущих элементов орбиты по их начальным значениям:

$$J_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega_0} & \frac{\partial \Omega}{\partial i_0} & \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_0} & \frac{\partial \Omega}{\partial a_0} & \frac{\partial \Omega}{\partial e_0} & \frac{\partial \Omega}{\partial M_0} \\ \frac{\partial i}{\partial \Omega_0} & \frac{\partial i}{\partial i_0} & \frac{\partial i}{\partial \omega_0} & \frac{\partial i}{\partial a_0} & \frac{\partial i}{\partial e_0} & \frac{\partial i}{\partial M_0} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \Omega_0} & \frac{\partial \omega}{\partial i_0} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega_0} & \frac{\partial \omega}{\partial a_0} & \frac{\partial \omega}{\partial e_0} & \frac{\partial \omega}{\partial M_0} \\ \frac{\partial a}{\partial \Omega_0} & \frac{\partial a}{\partial i_0} & \frac{\partial a}{\partial \omega_0} & \frac{\partial a}{\partial a_0} & \frac{\partial a}{\partial e_0} & \frac{\partial a}{\partial M_0} \\ \frac{\partial e}{\partial \Omega_0} & \frac{\partial e}{\partial i_0} & \frac{\partial e}{\partial \omega_0} & \frac{\partial e}{\partial a_0} & \frac{\partial e}{\partial e_0} & \frac{\partial e}{\partial M_0} \\ \frac{\partial M}{\partial \Omega_0} & \frac{\partial M}{\partial i_0} & \frac{\partial M}{\partial \omega_0} & \frac{\partial M}{\partial a_0} & \frac{\partial M}{\partial e_0} & \frac{\partial M}{\partial M_0} \end{bmatrix}. \quad (1.68)$$

Элементы матрицы J_j не зависят от времени, поэтому эту матрицу называют матрицей изохронных производных.

Определение элементов матрицы J_j является довольно сложной вычислительной задачей. Теория, свойства и методы вычисления матрицы J_j рассмотрены в главе 3.

Матрица K'_{ij} является матрицей-строкой, составленной из производных измеренной величины U_{ij} по координатам определяемого пункта

$$K'_{ij} = \left[\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial U_{ij}}{\partial y_i} \frac{\partial U_{ij}}{\partial z_i} \right]. \quad (1.69)$$

Выполняя все перемножения матриц в уравнении поправок (1.65), получим уравнение поправок в координатной форме:

$$a_{ij}\Delta\Omega_0 + b_{ij}\Delta i_0 + c_{ij}\Delta\omega_0 + d_{ij}\Delta a_0 + e_{ij}\Delta e_0 + f_{ij}\Delta M_0 + A_{ij}\Delta x_i + B_{ij}\Delta y_i + C_{ij}\Delta z_i + l_{ij} = v_{U_{ij}}, \quad (1.70)$$

где i — номер пункта наблюдений, j — номер мгновенного положения ИСЗ, для которого выполнено измерение U_{ij} в момент t_j .

При определении начальных условий в форме координат и составляющих скорости

$$\bar{E}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

уравнение поправок будет иметь вид

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \cdot \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} - \\ - \frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i + l_{ij} = v_{ij}, \quad (1.72)$$

или

$$a'_{ij}\Delta x_0 + b'_{ij}\Delta y_0 + c'_{ij}\Delta z_0 + d'_{ij}\Delta \dot{x}_0 + e'_{ij}\Delta \dot{y}_0 + f'_{ij}\Delta \dot{z}_0 + A'_{ij}\Delta x_i + \\ + B'_{ij}\Delta y_i + C'_{ij}\Delta z_i + l_{ij} = v_{ij}. \quad (1.73)$$

§ 5. Ньютоновский итерационный процесс и минимизация суммы квадратов поправок результатов измерений

При математической обработке результатов измерений в орбитальных методах космической геодезии возникает задача совместного определения q орбит ИСЗ в начальные моменты t_{0q} и координат пунктов наблюдений. Таким образом, требуется определить $3n+6q$ неизвестных, где q — число орбит, включенных в обработку. При $q=1$ вектор неизвестных будет

$$\bar{\mathbf{X}}^T = (a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots, x_n, y_n, z_n), \quad (1.74)$$

или, что все равно,

$$\bar{\mathbf{X}}^T = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots, x_n, y_n, z_n).$$

При этом измерено N значений функций U_{ij} неизвестных, причем всегда $N > 3n+6$ и, кроме того, всегда известны грубо приближенные значения неизвестных:

$$\bar{\mathbf{X}}_0^T = (\tilde{a}_0, \tilde{e}_0, \tilde{i}_0, \tilde{\Omega}_0, \tilde{\omega}_0, \tilde{M}_0; x_1^0, y_1^0, z_1^0; x_2^0, y_2^0, z_2^0; \dots, x_n^0, y_n^0, z_n^0). \quad (1.76)$$

Измеренные величины связаны с искомыми неизвестными перепределенной и несовместной системой N нелинейных уравнений

$$\varphi(\bar{\mathbf{X}}) = \bar{\mathbf{A}}, \quad (1.77)$$

где $\bar{\mathbf{A}}$ — вектор результатов непосредственных измерений величин U_{ij} , причем $\lambda_{ij} = U_{ij} + \Delta_{ij}$, где Δ_{ij} — истинная ошибка.

Система (1.77), вообще говоря, не удовлетворяется никакими значениями неизвестных, однако всегда можно найти такой вектор $\bar{\mathbf{X}}$, при котором вектор поправок $\bar{\mathbf{V}} = \varphi(\bar{\mathbf{X}}) - \bar{\mathbf{A}}$ обладает свойством минимальности в смысле метода наименьших квадратов, т. е.

$$\bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{V}} = \min, \quad (1.78)$$

где $\bar{\mathbf{V}}$ — вектор поправок из уравнивания, $\mathbf{P}$ — весовая матрица измерений, имеющая диагональную форму.

В методе Ньютона решение нелинейной переопределенной системы (1.78) получается с использованием линеаризованных итераций.

Объединим неизвестные в линейной системе (1.70) или (1.73) вектором неизвестных $\delta \bar{\mathbf{X}}$ и вычислим матрицу ее коэффициентов в соответствии с правилами, указанными в § 4, используя при этом приближенные значения неизвестных $\bar{\mathbf{X}}_0$.

Тогда линейную систему (1.70) или (1.73) получим в виде

$$\bar{\mathbf{A}}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}_0} \delta \bar{\mathbf{X}}^{(1)} + \bar{\mathbf{L}}^{(1)} = \bar{\mathbf{V}}^{(1)}, \quad (1.79)$$

где $\bar{\mathbf{L}}^{(1)}$ — вектор свободных членов; $\bar{\mathbf{V}}^{(1)}$ — вектор поправок в измеренные величины $\bar{\mathbf{A}}$.

Переопределенную систему (1.79) решим по методу наименьших квадратов, т. е. под условием (1.78), при этом получим вектор поправок первого приближения

$$\delta \bar{\mathbf{X}}^{(1)} = - \left(\mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}_0}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}_0} \right)^{-1} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}_0}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{L}}^{(1)}, \quad (1.80)$$

а также вектор неизвестных в первом приближении

$$\bar{\mathbf{X}}^{(1)} = \bar{\mathbf{X}}^{(0)} + \delta \bar{\mathbf{X}}^{(1)}. \quad (1.81)$$

Дальнейшие приближения получаются так:

$$\delta \bar{\mathbf{X}}^{(n+1)} = - \left(\mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}^{(n)}}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}^{(n)}} \right)^{-1} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}^{(n)}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{L}}^{(n)}. \quad (1.82)$$

Вычисления заканчиваются, если для приближения с номером $n+1$ оказалось, что

$$|\delta \bar{\mathbf{X}}|^{n+1} \leq |\bar{\varepsilon}|, \quad (1.83)$$

где ε — критерии сходимости, устанавливаемые а priori.

При выполнении итераций необходимо, чтобы матрица коэффициентов в окрестностях начального приближения $\bar{\mathbf{X}}_0$ была неособенной, т. е.

$$\det | \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}=\bar{\mathbf{X}}_0} | \neq 0. \quad (1.84)$$

Рассмотренная процедура называется немодифицированным методом Ньютона.

Если процесс вычислений ведется так, что элементы матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ не исправляются от приближения к приближению, а фиксированы начальными значениями $\mathbf{X}$

$$\mathbf{A}^{(n+1)} = \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}(0)} = \text{const}, \quad (1.85)$$

то такая процедура называется модифицированным методом Ньютона и выполняется по алгоритму

$$\delta \bar{\mathbf{X}}^{(n+1)} = -(\mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}(0)}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}(0)})^{-1} \mathbf{A}_{\bar{\mathbf{X}}(0)}^T \mathbf{P} \mathbf{L}^{(n)}. \quad (1.86)$$

§ 6. Соображения об установлении весов измерений

При выполнении оценок полученных решений возникает вопрос об их точности, которая существенно зависит от установления весов непосредственно измеренных величин λ_{ij} .

При этом часто точное установление весов измерений является весьма сложной, а иногда и невозможной задачей.

Рассмотрим три случая, которые могут быть в практике.

1. Веса назначены произвольно и не связаны строгими зависимостями с точностью измерительной аппаратуры и отдельных измерений, выполненных этой аппаратурой. Этот случай иногда возникает при отсутствии сведений о точности аппаратуры к началу обработки измерений.

2. Веса назначены обратно пропорционально дисперсиям отдельных измерений по соотношению:

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i^2}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.87)$$

3. Веса назначены обратно пропорционально дисперсиям отдельных измерений:

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.88)$$

где величина σ_0 — ошибка единицы веса; она заранее неизвестна и подлежит определению в процессе уравнивательных вычислений.

Формула (1.80) справедлива для случая, когда минимизируется выражение

$$\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}, \quad (1.89)$$

где $\mathbf{P}$ — диагональная матрица.

В теории математической обработки измерений доказывается, что формула (1.87) остается в силе, когда минимизируется более общее выражение

$$\Phi = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}, \quad (1.90)$$

в котором $\mathbf{K}$ — произвольная симметричная положительно определенная матрица.

Предположим, что вектор непосредственных измерений $\bar{\Lambda}$ является случайным нормальным вектором, т. е. совокупностью случайных величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, многомерная плотность распределения которых имеет вид

$$f(\bar{\Lambda}) = C_1 \exp \left(-\frac{1}{2} \bar{\Lambda}^T K_{\Lambda}^{-1} \bar{\Lambda} \right), \quad (1.91)$$

где C_1 является нормирующим множителем, причем

$$\int_{\bar{\Lambda}} f(\bar{\Lambda}) d\bar{\Lambda} = 1; \quad d\bar{\Lambda} = d\Lambda_1 d\Lambda_2 \dots d\Lambda_n, \quad (1.92)$$

а K_{Λ} — положительно определенная квадратная матрица.

В этом случае можно доказать [33], что

$$C_1 = (2\pi)^{-n/2} \det |K_{\Lambda}^{-1}|, \quad (1.93)$$

а элементами матрицы K_{Λ} являются вторые смешанные центральные моменты случайной величины $\bar{\Lambda}$.

В работе Ю. В. Линника [29] доказывается весьма важная теория, которую мы здесь приведем без доказательства.

Теорема 1. Если $\bar{\Lambda}$ — нормальный случайный вектор с функцией распределения (1.91) и над этим вектором осуществлено линейное преобразование $\bar{X} = Q\bar{\Lambda}$, то в результате такого преобразования получается случайный вектор, который также является нормальным, а его функция распределения имеет следующий вид:

$$f(\bar{X}) = C_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \bar{X}^T K_X^{-1} \bar{X} \right] = C_2 \exp \left[-\frac{1}{2} X^T (Q^T K_{\Lambda} Q)^{-1} X \right], \quad (1.94)$$

так что

$$K_X = Q^T K_{\Lambda} Q. \quad (1.95)$$

Тогда, полагая в выражении (1.94) $Q = (A^T P A)^{-1} A^T P$, получаем формулу для определения ковариационной матрицы вектора неизвестных $\bar{X}$ в случае, когда веса P_{ij} отдельных измерений Λ_{ij} назначены произвольно:

$$K_X = (A^T P A)^{-1} A^T P K_{\Lambda} P^T A [(A^T P A)^{-1}]^T, \quad (1.96)$$

или, обозначая

$$C = A^T P A, \quad (1.97)$$

$$K_X = C^{-1} A^T P K_{\Lambda} P^T A (C^{-1})^T. \quad (1.98)$$

Если известна плотность распределения многомерного нормального вектора $\bar{\Lambda}$, то для решения задачи можно применить метод максимального правдоподобия. В этом случае определяется минимум выражения

$$\Phi_1 = \bar{\Lambda}^T K_{\Lambda}^{-1} \bar{\Lambda}, \quad (1.99)$$

при этом обобщенные оценки имеют максимальную точность, когда

$$P = K_{\Lambda}^{-1}, \quad (1.100)$$

а ковариационная матрица вектора неизвестных X будет иметь на основании (1.98) следующий вид:

$$\begin{aligned} K_X &= C^{-1} A^T K_{\Lambda}^{-1} K_{\Lambda} K_{\Lambda}^{-1} A C^{-1} = C^{-1} A^T K_{\Lambda}^{-1} A C^{-1} = \\ &= C^{-1} A^T P A C^{-1} = C^{-1} C C^{-1} = C^{-1}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Таким образом, если в качестве весовой матрицы выбирается обратная ковариационная матрица непосредственных измерений, то оценки по методу наименьших квадратов являются максимально точными, а ковариационная матрица K_X неизвестных совпадает с обратной матрицей C^{-1} нормальных уравнений. Поэтому назначение весов в соответствии с формулой (1.100) позволяет получить наилучшие оценки как при наличии корреляции между измерениями, так и при ее отсутствии.

Наконец, в случае, если предполагается, что весовая матрица P пропорциональна матрице K_{Λ}^{-1} , причем ошибка единицы веса σ_0^2 заранее неизвестна и подлежит определению из уравнивания, то

$$K_X = \sigma_0^2 C^{-1}, \quad (1.102)$$

и тогда для вычисления ошибки единицы веса σ_0^2 служит формула

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{N - (3n + 6)}, \quad (1.103)$$

где N — число всех использованных измерений, n — число определяемых пунктов.

При обработке измерений в орбитальном методе, помимо ошибок непосредственных измерений, приходится иметь дело и с ошибками описания функций U_{ij} , связывающих измеренные величины с элементами орбиты в начальную эпоху T_0 и координатами определяемых пунктов. Поэтому для того, чтобы обработать измерения корректно, необходимо попытаться определить ковариационную матрицу

$$K_{\Lambda} = K_{\Lambda}^{(1)} + K_{\Lambda}^{(2)}, \quad (1.104)$$

которая представляет собой сумму двух матриц: ковариационной матрицы $K_{\Lambda}^{(1)}$ ошибок измерений и ковариационной матрицы $K_{\Lambda}^{(2)}$ ошибок в описании функции U_{ij} .

Матрица $K_{\Lambda}^{(2)}$, в свою очередь, состоит из двух матриц

$$K_{\Lambda}^{(2)} = K_{\Lambda}^{(21)} + K_{\Lambda}^{(22)}. \quad (1.105)$$

Матрица $K_{\Lambda}^{(21)}$ возникает вследствие неточного знания сил, действующих на спутник (гравитационное поле Земли, притяже-

ние Солнца и Луны, сопротивление атмосферы, давление солнечной радиации). Эти ошибки являются ошибками модели, принятой для описания реального движения ИСЗ, и проявляются в процессе интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Установление ошибок модели является весьма сложной проблемой современного естествознания. Поэтому естественным способом ослабления действия ошибок модели является уменьшение интервала интегрирования $t - t_0$ при условии, что плотность измерений на этом интервале достаточно высока.

Матрица $K_{\Lambda}^{(22)}$ в выражении (1.105) возникает как результат ошибок собственно интегрирования. Вычислительные ошибки интегрирования можно выявить (рис. 4), сравнивая ход интегральных кривых от точки $(t_0, \bar{E}_0)$ до точки $(t_j, \bar{E}_j)$ и назад от $(t_i, \bar{E}_j)$ до $(t_0, \bar{E})$. При этом образуется вектор $\delta \bar{E}_0$, по которому можно судить о величинах вычислительных ошибок при интегрировании.

В работе [33] показано, что проекция этого вектора в пространство измеряемых величин может быть использована для составления ковариационной матрицы $K_{\Lambda}^{(22)}$ и, более того, для косвенного учета ошибок модели и установления матрицы $K_{\Lambda}^{(21)}$.

Пусть изменение вектора $\bar{E}$ состояния ИСЗ во времени описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = f(\bar{E}) + \bar{\alpha}, \quad (1.106)$$

где $\bar{\alpha}$ — ошибка в составлении уравнений.

Интегральные кривые, построенные без учета ошибки $\bar{\alpha}$ и вследствие этого полученные из приближенного интегрирования системы (1.106), имеют вид

$$\bar{E}(t) = \varphi(\bar{E}^{(0)}, t - t_0), \quad (1.107)$$

где $\bar{E}^{(0)} = \bar{E}(t_0)$.

Пусть, кроме того, в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$ измеряются величины $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, являющиеся функциями от $\bar{E}$, так что

$$U_j = \Lambda_j(\bar{E}_j) + \Delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.108)$$

По совокупности λ требуется определить начальные условия $\bar{E}^0$ в момент t_0 .

С этой целью построим выражение

$$\bar{E}^*(t) = \varphi^*(\bar{E}_j, t - t_j), \quad (1.109)$$

приняв в качестве начальных условий значения $[\bar{E}_j, t_j]$.

Если погрешности интегрирования отсутствуют, то кривые (1.107) и (1.109) совпадут. При наличии ошибок интегрирования движение по интегральной кривой (1.109) из $(t_j, \bar{E}_j)$ в $(t_0, \bar{E}_0)$ и

обратное движение по интегральной кривой (1.107) приведет к несовпадению векторов $\bar{\mathbf{E}}_j$ и $\bar{\mathbf{E}}_j^*$ (см. рис. 4).

Подставляя значения $\bar{\mathbf{E}}_j^*$ и $\bar{\mathbf{E}}_j$ в формулу (1.108), можно обобщить полуразность

$$\Delta U_{ij} = 0,5 [\Lambda_j(\mathbf{E}_j) - \Lambda_j(\bar{\mathbf{E}}_j^*)], \quad (1.110)$$

которую при отсутствии сведений о точности интегрирования можно использовать в качестве оценки средней квадратической ошибки, а квадрат этой величины — для оценки дисперсии ошибки, обусловленной неточностью интегрирования, т. е. для определения диагонального элемента матрицы $\mathbf{K}_{\Lambda}^{(22)}$.

Если в момент t_j измерялся вектор $\bar{\lambda}_j$, то $\mathbf{K}_{\Lambda_j}^{(22)}$ определяется по формуле

$$\bar{\mathbf{K}}_{\Lambda_j}^{(22)} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \bar{\Lambda}_j}{\partial \mathbf{E}_j} \right)^T (\delta \bar{\mathbf{E}}^T \delta \bar{\mathbf{E}}) \left(\frac{\partial \bar{\Lambda}_j}{\partial \mathbf{E}_j} \right). \quad (1.111)$$

При этом оказывается [33], что наличие вычислительной ошибки $\bar{\alpha}$ интегрирования во многих случаях играет положительную роль. Причина этого, на первый взгляд, парадоксального утверждения заключается в том, что вследствие трудностей установления ошибок $\bar{\alpha}$, которые возникают из-за ошибок в принятой модели, часто пренебрегают влиянием этой ошибки на установление весов, несмотря на то, что реально это влияние существует.

Вводя вычислительную ошибку и учитывая ее влияние назначением «правильного» веса измерения, мы тем самым косвенно учитываем и наличие ошибок модели, так как оба вида ошибок с качественной стороны обычно ведут себя одинаково, а именно возрастают с увеличением промежутка интегрирования, т. е. интервала $t_j - t_0$. Таким образом, с одной стороны, наличие вычислительной ошибки $\bar{\alpha}$, учитываемой ковариационной матрицей $\mathbf{K}_{\Lambda}^{(22)}$, увеличивает элементы матрицы $\mathbf{K}_{\Lambda}$ в выражении (1.98) и понижает точность оценки, но, с другой стороны, моделируя неописанные стороны явления, эта ошибка способствует более правильному назначению весов в соответствии с формулой $\mathbf{P}_{\Lambda} = \mathbf{K}_{\Lambda}^{-1}$ и поэтому повышает точность оценки. В результате совместного действия этих двух факторов зависимость точностных характеристик оценки, полученной по методу наименьших квадратов, от величины вычислительной ошибки интегрирования принимает вид, который символически показан на рис. 5. При этом минимум лежит в районе, где $\mathbf{K}_{\Lambda}^{(21)} \approx \mathbf{K}_{\Lambda}^{(22)}$.

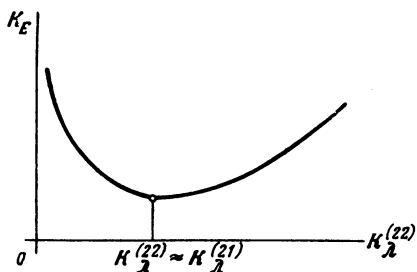


Рис. 5

§ 7. О сходимости итераций в методе Ньютона

Исследование сходимости итераций в методе Ньютона было выполнено в работах акад. Л. В. Кантаровича [18].

Приведем без доказательства теорему Л. В. Кантаровича о сходимости метода Ньютона для нелинейных систем уравнений для случая, когда избыточные уравнения (измерения) отсутствуют, т. е. для систем вида

$$\left. \begin{aligned} U_1(x_1, x_2, \dots, x_k) &= 0, \\ U_2(x_1, x_2, \dots, x_k) &= 0, \\ &\vdots \\ U_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.112)$$

Предполагаем, что имеется начальное приближение

$$\bar{X}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \quad (1.113)$$

к решению системы (1.112), причем $\bar{X}_0$ — вектор с вещественными составляющими. Функции $U_j(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $j=1, 2, \dots, k$ считаем вещественными и дважды непрерывно дифференцируемыми в окрестности начального приближения.

Введем понятие нормы матрицы. Пусть $A = |a_{ij}|$ — некоторая матрица. Нормой матрицы A называется число

$$|A| = \max_{1 \leq i \leq k} \sum_{j=1}^k |a_{ij}|.$$

Матрицу Якоби левых частей системы (1.112) обозначим через $U'(\bar{X})$ так, что элемент матрицы $U'(\bar{X})$ с индексами i и j равен

$$\{U'(\bar{X})\}_{ij} = \frac{\partial U_i(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_j}.$$

Теорема 2. Пусть для системы (1.112) и начального приближения (1.113) выполняются следующие условия:

1) матрица Якоби левых частей системы (1.112) на начальном приближении $U'(\bar{X}_0)$ неособенная и известна норма обратной к ней матрицы

$$|[U'(\bar{X}_0)]^{-1}| \leq B;$$

2) левые части системы на начальном приближении удовлетворяют неравенству

$$\max_{1 \leq i \leq k} |U_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0)| \leq \eta;$$

3) для всех точек k -мерного куба

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq 2B\eta, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.114)$$

имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial^2 U_i(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial x_p \partial x_q} \right| \leq L; \quad i, p, q = 1, 2, \dots, k;$$

4) постоянные B, η, L удовлетворяют условию

$$h = B^2 \eta L k^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда система (1.112) в кубе

$$|x_i - x_i^{(0)}| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} B \eta$$

имеет решение $\bar{\mathbf{X}}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*)$, единственное в кубе (1.114); к нему сходятся последовательные приближения основного метода Ньютона (немодифицированного)

$$\bar{\mathbf{X}}^{(n)}(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

определяемые из решения линейных систем; при этом имеет место оценка ошибки

$$\max |\bar{\mathbf{X}}^{(n)} - \bar{\mathbf{X}}_i^*| = \frac{1}{2^{n-1}} (2h)^{2^{n-1}-1} B \eta.$$

К решению $\bar{\mathbf{X}}^*$ сходятся и последовательные приближения модифицированного метода Ньютона $\bar{\mathbf{X}}_{\text{mod}}^{(n)}$.

Однако скорость сходимости модифицированного метода Ньютона существенно ниже. На основании теоремы Л. В. Кантаровича можно показать, что скорость сходимости основного (немодифицированного) метода Ньютона определяется формулой

$$\bar{\mathbf{X}}^* - \bar{\mathbf{X}}^{(n)} \leq \frac{1}{2^{n-1}} (2h)^{2^{n-1}-1},$$

т. е. что ошибка при переходе от n -го к $(n+1)$ -му приближению, грубо говоря, возводится в квадрат. В таких случаях говорят, что сходимость квадратическая. При этом должно выполняться неравенство $2h < 1$.

Модифицированный метод Ньютона сходится со скоростью геометрической прогрессии, т. е. по формуле

$$|\bar{\mathbf{X}}^* - \bar{\mathbf{X}}^{(n+1)}|_{\text{mod}} \leq q^n (\bar{\mathbf{X}}^* - \bar{\mathbf{X}}_1)_{\text{mod}},$$

где $q = 1 - \sqrt{1 - 2h} < 1$ при $0 < h < \frac{1}{2}$.

Из теоремы Л. В. Кантаровича следует также, что метод Ньютона не обладает абсолютной сходимостью, причем сходимость зависит, в частности, от близости начального приближения $\bar{\mathbf{X}}^{(0)}$ к решению $\bar{\mathbf{X}}$ системы. Поэтому для уменьшения числа итераций n необходимо получить предварительные элементы орбиты $\bar{\mathbf{E}}_0$ по минимальному числу измерений в пределах интервала реализации $t_j - t_0$.

Поскольку модифицированный процесс сходится медленнее основного, то при обработке измерений в орбитальном методе выгоднее использовать основной метод, так как наиболее сложной задачей является вычисление свободных членов уравнений поправок, для чего в каждой итерации приходится выполнять точное интегрирование уравнений движения на моменты t_j ($j = 1, 2, \dots, m$) орбитальных измерений.

Что же касается вопроса о необходимой точности начального приближения $\bar{\mathbf{X}}^{(0)}$, то здесь строгое применение теоремы Л. В. Кантаровича затруднено сложной формой аналитических связей между измерениями и неизвестными. Однако опыт вычисления орбит ИСЗ показывает, что ньютоновский итерационный процесс сходится в широких пределах. Можно утверждать, что во всех случаях практики начальные значения элементов орбиты $\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_0$ и координат пунктов $(x^0, y^0, z^0)_i$ можно получить с достаточной точностью для сходимости процесса итераций.

§ 8. Порядок обработки измерений при определении координат пунктов орбитальными методами

А. Исходные данные

В качестве исходных данных принимаются следующие величины:

Λ_{ij} , t_j — результаты непосредственных измерений на пунктах ($i = 1, 2, \dots, n$) в моменты t_j ($j = 1, 2, \dots, m$);

σ_{ij} — средние квадратические ошибки независимых измерений;

$\mathbf{K}_\Delta$ — корреляционная матрица коррелированной группы измерений;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ — коэффициенты, определяющие необходимую точность сходимости решений из ньютоновских итераций;

$(x^0, y^0, z^0)_i$ — приближенные координаты определяемых пунктов;

$\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_0, \tilde{t}_0$ — приближенные элементы орбиты на момент t_0 , заданные в форме кеплеровских элементов $\tilde{\tilde{\mathbf{E}}} = (\tilde{a}_0, \tilde{e}_0, \tilde{i}_0, \tilde{\omega}_0, \tilde{\Omega}_0, \tilde{M}_0)$ или в форме координат и составляющих скорости $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tilde{\dot{y}}_0, \tilde{\dot{z}}_0)$.

В качестве приближенных начальных значений элементов орбиты $\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_0$ могут быть приняты элементы, полученные на момент t_k отделения космического аппарата (КА) от ракеты-носителя при условии, что момент t_k близок к интервалу реализации $t_j - t_0$. Если такие данные отсутствуют, то необходимо определить предварительную орбиту по минимальному количеству из состава орбитальных измерений (Λ_{ij}, t_j) в промежутке $t_j - t_0$. Обычно элементы $\tilde{\tilde{\mathbf{E}}}_0$ задаются для момента t_0 прохождения КА через восходящий узел или прохождения через перигеум.

- В состав системы измерений (Λ_{ij}, t_j) могут быть включены:
- 1) результаты фотографических наблюдений ИСЗ в форме топоцентрических прямого восхождения и склонения $(\alpha_{ij}, \delta_{ij})$, отнесенных к $T_0 = 1950,0$;
 - 2) результаты лазерных измерений топоцентрических расстояний r_{ij} ;
 - 3) результаты доплеровских измерений радиальной (лучевой) скорости r_{ij} ;
 - 4) результаты автономных измерений, выполненных при помощи специальной аппаратуры, установленной на борту КА; к этому типу измерений относятся показания высотомеров, данные фотограмметрической обработки снимков планеты и звездного неба, полученных на борту КА, а также ряд других.

Если измерения независимы и корреляция между ними отсутствует, то веса отдельных измерений устанавливают обратно пропорционально средним квадратическим ошибкам σ_{ij}^2 и получают диагональную весовую матрицу $\mathbf{P}_\Lambda$.

В большинстве случаев весь объем обрабатываемой информации можно разбить на группы некоррелированных между группами измерений. При этом весовая матрица $\mathbf{P}_\Lambda = \mathbf{K}_\Lambda^{-1}$ будет иметь квазидиагональный вид. В этом случае матрицу нормальных уравнений целесообразно составлять по независимым группам измерений.

Б. Последовательность обработки измерений

1. Если приближенные начальные условия $\tilde{\mathbf{E}}_0$ неизвестны или известны грубо приближенно, то прежде всего из массива измерений $(\Lambda_{ij}, t_j - t_0)$ выбирают ряд необходимых измерений, по которым определяют предварительную орбиту $\tilde{\mathbf{E}}_0$.

2. На все моменты времени t_j ($j = 1, 2, \dots, n$), для которых были выполнены измерения Λ_{ij} , выполняют точное интегрирование уравнений движения (1.37) с учетом всех возмущений, существенно влияющих на точность интегрирования. В результате получают приближенные, но точно соответствующие принятым начальным условиям координаты $(x^0, y^0, z^0)_j$ и составляющие скорости $(\dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0)_j$ КА на моменты измерений $\tilde{t}_j$.

3. По приближенным координатам определяемых пунктов $(x^0, y^0, z^0)_i$ и приближенным координатам КА $(x^0, y^0, z^0)_j$, полученным из интегрирования, вычисляют приближенные, но точно соответствующие координатам $(x^0, y^0, z^0)_i$ и $(x^0, y^0, z^0)_j$ расчетные значения измеренных величин Λ_{ij}^0 .

4. Образуют свободные члены уравнений поправок (1.60)

$$l_{ij} = \Lambda_{ij}^0 - \Lambda_{ij}^{\text{изм}}.$$

5. С целью исключения из обработки грубоошибочных измерений производится проверка каждого измерения Λ_{ij} на выполнение условия

$$|l_{ij}| \leq \delta \Lambda_{ij}^{\text{доп}}, \quad (1.115)$$

где $\delta\Lambda_{ij}^{\text{доп}}$ — допустимые отклонения, расчет которых выполняется в процессе ньютоновских итераций (см. ниже).

6. Для всех измерений Λ_{ij} , которые выдержали экзамен (1.115), вычисляются матрицы производных (1.66), (1.67), (1.68):

от измеренных величин Λ_{ij} по координатам и скорости ИСЗ

$$K_j = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j};$$

от измеренных величин λ_{ij} по координатам определяемых пунктов

$$K_i = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial (x, y, z)_i};$$

от текущих координат и составляющих скорости по элементам орбиты

$$E_j = \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j};$$

от текущих элементов орбиты $\bar{E}_j$ по их начальным значениям $\bar{E}_0$

$$J_j = \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)}.$$

7. Составляются уравнения поправок для каждого измерения Λ_{ij}

$$K_j E_j J_j \Delta \bar{E}_0 - K_i \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + l_{ij} = v_{ij}. \quad (1.116)$$

8. Если задача решается в прямоугольных координатах и отыскиваются поправки к начальным условиям движения в форме координат и составляющих скорости на момент t_0 , то вычисляются матрицы K_j и K_i и матрица производных от текущих координат и скоростей по их начальным значениям

$$J'_j = \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)},$$

после чего для каждого измерения составляется уравнение поправок

$$K_j J'_j \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{y}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} - K_i \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} + l_{ij} = v_{ij}. \quad (1.117)$$

9. Формируются матрица коэффициентов системы уравнений поправок $A_{\bar{X}=\bar{X}(n)}$ и вектор свободных членов $L^{(n)}$ для всей системы измерений λ_{ij} (n — номер итерации), а также весовая матрица P_{Δ} , назначаемая в соответствии с принципом максимального правдоподобия по правилу $P_{\Delta} = K_{\Delta}^{-1}$ и составляется система уравнений поправок

$$A_{\bar{X}=\bar{X}(n)} \delta \bar{X}^{(n+1)} + \bar{L}^{(n)} = \bar{V}^{(n+1)}. \quad (1.118)$$

10. Вычисляется матрица коэффициентов системы нормальных уравнений

$$C = (A_{\bar{X}=\bar{X}(n)}^T P_{\Delta} A_{\bar{X}=\bar{X}(n)}),$$

$n = 1, 2, \dots, N$ — номер ньютоновской итерации.

При вычислении матрицы C следует использовать ее симметричность относительно главной диагонали.

Поэтому можно ограничиться составлением треугольной матрицы

$$C_{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Это позволяет сократить занятость оперативной памяти ЭВМ при запоминании коэффициентов a_{mn} на $\frac{1}{2} n(n-1)$ ячеек, где n — число неизвестных.

11. Любым численным методом (Гаусса, квадратных корней и т. п.) обращается матрица нормальных уравнений C .

$$C^{-1} = (A_{\bar{X}=\bar{X}(n)}^T P_{\Delta} A_{\bar{X}=\bar{X}(n)})^{-1}. \quad (1.119)$$

12. Определяется вектор $\delta \bar{X}^{(n+1)}$ поправок неизвестных

$$\delta \bar{X}^{(n+1)} = C^{-1} (A_{\bar{X}=\bar{X}(n)}^T P_{\Delta} \bar{L}^{(n)}) \quad (1.120)$$

и вектор неизвестных

$$\bar{X}^{(n+1)} = \bar{X}^{(n)} + \delta \bar{X}^{(n+1)}. \quad (1.121)$$

13. Значения поправок неизвестных $\delta \bar{X}^{(n+1)}$ подставляются в систему уравнений (1.118) и вычисляется вектор $\bar{V}^{(n)}$ уравненных поправок измерений.

14. Вычисляется ошибка единицы веса

$$\sigma_0^2 = \frac{[V^T P V]^{(n)}}{N - (3k + 6)}, \quad (1.122)$$

где N — число всех измерений λ_{ij} (кроме измерений, отбракованных по условию (1.115), k — число определяемых пунктов.

15. Если в $(n+1)$ приближении оказалось, что выполнена система неравенства

$$|\delta \bar{\mathbf{X}}^{(n+1)}| \leq \bar{\epsilon}_m, \quad m = 1, 2, \dots, (3k+6), \quad (1.123)$$

где $\bar{\epsilon}_m$ — критерий точности, то переходят к оценке точности неизвестных по формуле

$$\sigma(\mathbf{X}_m) = \sigma_0 \sqrt{u_{mm}}.$$

где u_{mm} — диагональные элементы матрицы $\mathbf{C}^{-1}$.

16. Если в $(n+1)$ приближении условия (1.123) не выполнялись, то весь процесс с вновь полученными неизвестными $\bar{\mathbf{X}}^{(n+1)}$ следует повторить, начиная с интегрирования уравнений движения (пункт 2).

Значение ошибки единицы веса σ_0 используется для отбраковки грубоошибочных измерений по условию (1.115).

Допустимые значения $\delta\Lambda_{ij}$ определяются при этом для приближения с номером $n+1$ по формуле [37]

$$\delta\Lambda_{ij}^{(n+1)} = \mu\sigma_0^{(n)}\sigma_{ij}, \quad (1.124)$$

где $\sigma_0^{(n)}$ — ошибка единицы веса, полученная на предыдущем приближении, σ_{ij} — априорное значение средней квадратической ошибки, полученное еще перед решением задачи, а коэффициент μ принимается равным $1,5 \div 3,0$.

Нижняя граница допустимых значений $\delta\Lambda_{ij}$ назначается по известному правилу « 3σ »:

$$\delta\Lambda_{ij(\min)} = 3\sigma_{ij} + \delta_{ij}, \quad (1.125)$$

где δ_{ij} — определяемое опытным путем слагаемое, которое зависит от неучтенных систематических ошибок измерений, ошибок принятой модели движения и других факторов.

Число ньютоновских приближений, необходимое для получения заданной точности, зависит от точности задания начального приближения $\bar{\mathbf{X}}$, а также от состава и точности траекторных измерений.

От этих же факторов зависит и область сходимости ньютоновских приближений, которую можно охарактеризовать максимально допустимыми значениями суммарных поправок в координаты ИСЗ, его скорость и координаты определяемых пунктов. Обычно решение надежно сходится при суммарных поправках, достигающих нескольких сотен километров в координаты и нескольких сотен метров в секунду к составляющим вектора скорости ИСЗ.

Однако, поскольку задача с вычислительной точки зрения является исключительно сложной и требующей большого количества машинного времени, целесообразно для ускорения сходимости получить предварительно элементы орбиты по необходимому числу измерений в пределах интервала времени $t - t_0$, на котором реализуется орбитальный метод.

Первым приближением при описании реального движения ИСЗ является задача двух тел. В этом приближении пренебрегают действием всех возмущающих сил (сопротивления атмосферы, аномального гравитационного поля Земли, давления солнечной радиации и других) и рассматривают движения ИСЗ относительно сферической Земли с равномерным распределением масс в ее теле. В этом случае Землю и ИСЗ можно рассматривать, как точечные массы.

Движение ИСЗ в задаче двух тел происходит в силовом поле, создаваемом силой земного тяготения

$$F_r = -\mu \frac{m}{r^2}, \quad (2.1)$$

где m — масса ИСЗ, r — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ.

Центральная сила F_r может быть выражена через производную силовой функции

$$\left. \begin{aligned} F_r &= -m \frac{\partial U}{\partial r}, \\ U &= -\frac{\mu}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

В дальнейшем будем использовать величину потенциала V , обратную по знаку силовой функции:

$$V = -U = \frac{\mu}{r}. \quad (2.3)$$

Модель движения, соответствующая условиям задачи двух тел, называется кеплеровым движением, она является необходимым инструментом для описания реального движения ИСЗ.

В этой главе рассмотрим основные соотношения задачи двух тел, необходимые при математической обработке результатов измерений в орбитальном методе.

§ 9. Ускорение в обобщенных криволинейных координатах

В практике при определении орбит и координат пунктов используются самые разнообразные системы координат — прямоугольная инерциальная, сферическая, цилиндрическая, вращающаяся гринвическая, вращающаяся орбитальная и ряд других. Выбор той или иной системы координат обусловлен конкретными условиями поставленной задачи. В соответствии с этим будем иметь несколько адекватных моделей кеплерова движения, понимая под математической моделью объективную схематизацию движения объекта

в виде системы формул, позволяющих выполнить необходимые вычисления для поставленной задачи.

Для записи уравнений движения в любой заданной наперед системе координат введем обобщенные криволинейные координаты q_i ($i=1, 2, 3$) по уравнениям

$$x = x(q_1, q_2, q_3); \quad y = y(q_1, q_2, q_3); \quad z = z(q_1, q_2, q_3); \quad (2.4)$$

При этом будем предполагать, что правые части этих уравнений являются однозначными и непрерывными функциями обобщенных координат q_1, q_2, q_3 . Исключая из уравнений (2.4) прямоугольные координаты, представим геоцентрический радиус-вектор в виде функции криволинейных координат

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(q_1, q_2, q_3). \quad (2.5)$$

Определим модули производных радиуса-вектора по обобщенным координатам

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = H_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.6)$$

Введем единичные векторы $\bar{\mathbf{K}}_i$ в обобщенной системе координат

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \quad (2.7)$$

и составим таблицу (табл. 1).

Таблица 1

	q_1	q_2	q_3
x	$\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_3}$
y	$\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_3}$
z	$\frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_3}$

Условие ортогональности координатных линий системы q_i заключается в требовании

$$(\bar{\mathbf{K}}_i \bar{\mathbf{K}}_j) = 0. \text{ если } i \neq j, \quad (2.8)$$

и в этом случае первая квадратичная форма в обобщенных координатах будет

$$dS^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \quad (2.9)$$

Теперь получим выражение для вектора скорости в обобщенных координатах. Дифференцируя уравнения (2.5) по времени, с учетом формул (2.6) и (2.7) получим

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (2.10)$$

или

$$\bar{\mathbf{v}} = H_1 \dot{q}_1 \bar{\mathbf{K}}_1 + H_2 \dot{q}_2 \bar{\mathbf{K}}_2 + H_3 \dot{q}_3 \bar{\mathbf{K}}_3. \quad (2.11)$$

Поэтому для модуля скорости будем иметь

$$v^2 = H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2. \quad (2.12)$$

На основании уравнения (2.10) получаем

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i}; \quad (2.13)$$

кроме того, по определению полной производной будем иметь

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3; \quad (2.14)$$

из формулы (2.10) получим тот же результат, если составим частную производную по q_i , т. е.

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3. \quad (2.15)$$

Таким образом, приравнивая левые части двух предыдущих выражений, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial q_i}. \quad (2.16)$$

Для составляющих ускорения W_i по осям обобщенной системы будем иметь

$$W_i = (\bar{W}, \bar{K}_i) = \dot{\bar{\mathbf{v}}} \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \quad (2.17)$$

и

$$H_i W_i = \dot{\bar{\mathbf{v}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \right) - \bar{\mathbf{v}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \right). \quad (2.18)$$

После подстановки выражений (2.13) и (2.16) в формулу (2.18) получим

$$H_i W_i = \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial q_i} \right) - \bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial q_i}, \quad (2.19)$$

но, с другой стороны,

$$\bar{\mathbf{v}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right), \quad (2.20)$$

Теперь, если принять

$$T = \frac{v^2}{2}, \quad (2.21)$$

то для составляющих ускорения W_i по координатным линиям обобщенной системы координат получим окончательно выражение

$$W_i = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]. \quad (2.22)$$

Соотношение (2.22) используем для записи дифференциальных уравнений невозмущенного движения в различных системах координат.

1. Дифференциальные уравнения движения в инерциальной системе координат.

В этом случае имеем

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = z; \quad (2.23)$$

$$\dot{q}_1 = \dot{x}; \quad \dot{q}_2 = \dot{y}; \quad \dot{q}_3 = \dot{z}. \quad (2.24)$$

Кинетическая энергия определяется выражением

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{mv^2}{2}.$$

Поэтому на основании выражения (2.22) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\dot{x}) &= \mu m \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} = -\mu \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\mu \frac{mx}{r^3}; \\ \frac{d}{dt} (m\dot{y}) &= \mu m \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} = -\mu \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\mu \frac{my}{r^3}; \\ \frac{d}{dt} (m\dot{z}) &= \mu m \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} = -\mu \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\mu \frac{mz}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

и система дифференциальных уравнений движения будет следующей:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} &= 0; \\ \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} &= 0; \\ \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

или в векторной форме:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

2. Дифференциальные уравнения движения в сферических координатах r, δ, α .

Уравнения связи на основании выражения (1.1) будут:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha; \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha; \\ z &= r \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

где α и δ — соответственно прямое восхождение и склонение ИСЗ.

Положим $q_1=r, q_2=\delta, q_3=\alpha, \dot{q}_1=\dot{r}, \dot{q}_2=\dot{\delta}, \dot{q}_3=\dot{\alpha}$, тогда $H_1=1; H_2=r; H_3=r \cos \delta$.

Для кинетической энергии имеем

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\delta}^2 + r^2 \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2)$$

Далее последовательно получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_1} &= m r \dot{\delta}^2 + m r \cos^2 \delta \dot{\alpha}^2; & \frac{\partial T}{\partial q_1} &= m \dot{r}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= m \ddot{r}; \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= -m r^2 \cos \delta \sin \delta \dot{\alpha}^2; & \frac{\partial T}{\partial q_2} &= m r^2 \dot{\delta}; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) &= \\ & & & & = 2 m r \dot{\delta} \dot{r} + m r^2 \ddot{\delta}; \\ \frac{\partial T}{\partial q_3} &= 0; & \frac{\partial T}{\partial q_3} &= & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) &= \\ & & & & = m r^2 \cos^2 \delta \dot{\alpha}; & = -2 m r^2 \cos \delta \sin \delta \dot{\alpha} \dot{\delta} + \\ & & & & + m r^2 \cos^2 \delta \ddot{\alpha} + \\ & & & & + 2 m r \dot{r} \cos^2 \delta \dot{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Поскольку сила центральная, то на основании выражений (2.1) и (2.2)

$$\left. \begin{aligned} W_r &= -\mu \frac{m}{r^2}; \\ W_\alpha &= 0; \\ W_\delta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

после чего на основании выражения (2.22) получим дифференциальные уравнения движения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\delta}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \cos^2 \delta &= -\frac{\mu}{r^2}; \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\delta}{dt} \right) + r^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 \sin \delta \cos \delta &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\alpha}{dt} \cos^2 \delta \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

3. Дифференциальные уравнения движения в цилиндрических координатах.

Введем систему цилиндрических координат по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \vartheta; \quad y = \rho \sin \vartheta; \quad z = z; \\ r &= \sqrt{\rho^2 + z^2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

тогда

$$q_1 = \rho; \quad q_2 = \vartheta; \quad q_3 = z; \quad \dot{q}_1 = \dot{\rho}; \quad \dot{q}_2 = \dot{\vartheta}; \quad \dot{q}_3 = \dot{z};$$

$$H_1 = 1; \quad H_2 = r; \quad H_3 = 1;$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = \rho \dot{\vartheta}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = \dot{\rho}; \quad W_r = \ddot{\rho} - \rho \dot{\vartheta}^2;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \rho^2 \dot{\vartheta}; \quad W_\vartheta = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\vartheta});$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{dT}{\partial \dot{z}} = \dot{z}; \quad W_z = \ddot{z},$$

после чего дифференциальные уравнения движения получим в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 &= -\frac{\mu \rho}{r^3}; \\ \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right) &= 0. \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

4. Дифференциальные уравнения движения во вращающейся гринвичской системе координат.

Рассмотрим сначала общий случай, когда система координат вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, составляющей углы α , δ и γ с осями координат.

Для вращающейся системы отсчета введем обобщенные координаты по уравнениям

$$q_1 = x'; \quad q_2 = y'; \quad q_3 = z'; \quad \dot{q}_1 = \dot{x}'; \quad \dot{q}_2 = \dot{y}'; \quad \dot{q}_3 = \dot{z}'.$$

Получим проекции абсолютной скорости центра инерции спутника на оси подвижной системы координат. На основании теоремы Эйлера о распределении скоростей имеем

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} + [\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}], \quad (2.34)$$

т. е. вектор скорости $\mathbf{v}$ в подвижной системе координат складывается из скорости начала подвижной системы и скорости, определяемой векторным произведением $[\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}]$, где $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ — вектор угловой скорости вращения.

Напишем уравнение (2.34) в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \dot{x}' - \omega_z y' + \omega_y z'; \\ v_y &= \dot{y}' + \omega_z x' - \omega_x z'; \\ v_z &= \dot{z}' - \omega_y x' + \omega_x y'; \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

и составим выражения для кинетической энергии $T = \frac{v^2}{2}$, отнесенной к единице массы:

$$T = \frac{1}{2} [(\dot{x}' - \omega_z y' + \omega_y z')^2 + (\dot{y}' + \omega_z x' - \omega_x z')^2 + (\dot{z}' - \omega_y x' + \omega_x y')^2]. \quad (2.36)$$

Дифференцируя T по $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$ и x' , y' , z' получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}'} &= \dot{x}' - \omega_z y' + \omega_y z'; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}'} &= \dot{y}' + \omega_z x' - \omega_x z'; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}'} &= \dot{z}' - \omega_y x' + \omega_x y'; \\ \frac{\partial T}{\partial x'} &= (\dot{y}' + \omega_z x' - \omega_x z') \omega_z - (\dot{z}' - \omega_y x' + \omega_x y') \omega_y; \\ \frac{\partial T}{\partial y'} &= -(\dot{x}' - \omega_z y' + \omega_y z') \omega_z + (\dot{z}' - \omega_y x' + \omega_x y') \omega_x; \\ \frac{\partial T}{\partial z'} &= (\dot{x}' - \omega_z y' + \omega_y z') \omega_y - (\dot{y}' + \omega_z x' - \omega_x z') \omega_x. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Теперь, на основании выражения (2.22), можно написать

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2\omega_z \frac{dy'}{dt} + 2\omega_y \frac{dz'}{dt} + \omega_x (\omega_x x' + \omega_y y' + \omega_z z') - \omega^2 x' &= \frac{\partial V}{\partial x'}; \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\omega_z \frac{dx'}{dt} - 2\omega_x \frac{dz'}{dt} + \omega_y (\omega_x x' + \omega_y y' + \omega_z z') - \omega^2 y' &= \frac{\partial V}{\partial y'}; \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} - 2\omega_y \frac{dx'}{dt} + 2\omega_x \frac{dy'}{dt} + \omega_z (\omega_x x' + \omega_y y' + \omega_z z') - \omega^2 z' &= \frac{\partial V}{\partial z'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Мы получили систему дифференциальных уравнений невозмущенного движения во вращающейся системе координат. В этих уравнениях члены, содержащие первые производные координат, являются кориолисовыми ускорениями, наличие которых есть результат одновременного вращения системы координат и движения спутника относительно этой системы; члены, содержащие координаты, учитывают переносную скорость.

Уравнения движения в гринвичской системе координат являются частным случаем уравнений (2.38). Поскольку ось Z гринвичской системы совпадает с осью вращения, то $\omega_x = \omega_y = 0$,

$$\omega_z = \omega_3 = \frac{1 \text{ звездные сутки}}{2\pi} = 0,7292115085 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с.}$$

Тогда в гринвичской системе $oXYZ$ дифференциальные уравнения ИСЗ будут

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} - 2\omega_3 \dot{Y} - \omega_3^2 X &= -\mu \frac{X}{r^3}; \\ \ddot{Y} + 2\omega_3 \dot{X} - \omega_3^2 Y &= -\mu \frac{Y}{r^3}; \\ \ddot{Z} &= -\mu \frac{Z}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

§ 10. Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения

Интегрирование системы трех дифференциальных уравнений второго порядка должно ввести шесть произвольных постоянных.

Запишем систему уравнений движения в прямоугольных инерциальных координатах (2.26) в следующем виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{r} \right); \quad \ddot{y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{r} \right); \quad \ddot{z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{r} \right). \quad (2.40)$$

Эта система представляет движение материальной точки единичной массы под действием центральной силы, имеющей силовую функцию.

1. Интегралы площадей.

В векторной форме уравнения (2.40) будут иметь вид

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}; \quad (2.41)$$

умножим уравнения (2.41) векторно на $\bar{\mathbf{r}}$

$$\left[\bar{\mathbf{r}} \times \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} \right] = 0, \quad (2.42)$$

откуда

$$[\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}}] = \bar{\mathbf{C}}, \quad (2.43)$$

где

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt}; \quad (2.44)$$

через $\bar{\mathbf{C}}$ обозначена постоянная, введенная интегрированием. Уравнение (2.43) выражает постоянство момента количества движения.

Напишем уравнение (2.43) в координатной форме

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix} = C_1 \bar{\mathbf{e}}_x + C_2 \bar{\mathbf{e}}_y + C_3 \bar{\mathbf{e}}_z, \quad (2.45)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= C_1; \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= C_2; \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= C_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Левая часть уравнения (2.43) представляет собой удвоенную секториальную скорость ИСЗ, поэтому интегралы (2.46) выражают постоянство секториальной скорости в координатных плоскостях.

Умножим скалярно уравнение (2.43) на $\bar{\mathbf{r}}$

$$\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{r}} = 0 \quad (2.47)$$

или в координатах

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0. \quad (2.48)$$

Из уравнения (2.48) следует, что движение происходит в плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к вектору $\bar{\mathbf{C}}$. Плоскость (2.48), в которой происходит движение, называется орбитальной плоскостью, а кривая, по которой происходит движение в плоскости (2.48), — орбитой (рис. 6).

Положение плоскости орбиты удобнее определять не коэффициентами ее уравнения, а углами, устанавливающими ориентацию орбиты в пространстве. Этими углами являются долгота восходящего узла Ω и наклонение i орбиты к плоскости экватора.

Из сферических треугольников $xn\Omega$ и $yn\Omega$ (см. рис. 6), в которых сторона $n\Omega = 90^\circ$, по теореме косинуса стороны определим

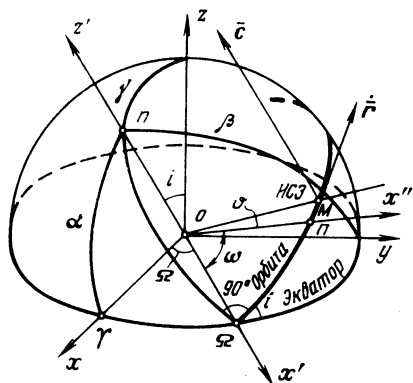


Рис. 6

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= \sin \Omega \sin i; \\ \cos \beta &= -\cos \Omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

где α и β — углы между направлением вектора $\vec{C}$ и осями ox и oy инерциальной системы координат, угол γ между осью oz и вектором $\vec{C}$ равен наклонению орбиты i

$$\cos \gamma = \cos i; \quad (2.50)$$

но так как

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= C \cos \alpha; \quad C_2 = C \cos \beta; \\ C_3 &= C \cos \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

то уравнения (2.46) будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= C \sin \Omega \sin i; \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= -C \cos \Omega \sin i; \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= C \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

2. Интеграл орбиты.

Введем систему координат в плоскости орбиты. Ось ox' орбитальной системы направим в восходящий узел Ω , тогда координаты ИСЗ в плоскости орбиты определятся из выражений

$$x' = r \cos u, \quad y' = r \sin u, \quad (2.53)$$

где координата u отсчитывается в плоскости орбиты от направления в восходящий узел до положения ИСЗ и называется аргументом широты.

Для квадрата скорости v на основании (2.12) можно написать

$$v^2 = H_1^2 q_1^2 + H_2^2 q_2^2, \quad (2.54)$$

где $q_1 = r$, $q_2 = u$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$,
поэтому

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{u}^2. \quad (2.55)$$

Ускорения по координатам r и u получим на основании (2.22):

$$W_r = \ddot{r} - r\dot{u}^2; \quad (2.56)$$

$$W_u = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} (r^2 \dot{u}). \quad (2.57)$$

Поскольку сила центральная, то

$$\left. \begin{aligned} W_r &= -\frac{\mu}{r^2}, \\ W_u &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

поэтому, интегрируя уравнение (2.57), получим выражение

$$r^2 \dot{u} = C, \quad (2.59)$$

которое представляет собой интеграл площадей в плоскости орбиты.

Из уравнения (2.59) будем иметь

$$\dot{u} = \frac{C}{r^2}. \quad (2.60)$$

Далее вычислим $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \dot{u} \frac{dr}{du} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{dr}{du} = -C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{du} = -C \frac{dv}{du}, \quad (2.61)$$

где

$$v = \frac{1}{r}. \quad (2.62)$$

Точно также получим $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{du} = \frac{d\dot{r}}{du} \dot{u} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{d\dot{r}}{du} = -\frac{C^2}{r^2} \cdot \frac{dv^2}{du^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2 v}{du^2}. \quad (2.63)$$

Подставляя $\dot{r}$ и $\ddot{r}$ в выражения (2.55) и (2.56) для скорости v и ускорения W_r , имеем два уравнения:

$$v^2 = C^2 \left[v^2 + \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right], \quad (2.64)$$

$$W_r = -C^2 v^2 \left[v + \frac{d^2 v}{du^2} \right]. \quad (2.65)$$

Уравнения (2.64) и (2.65) известны под названием формул Бине.

Приравнивая правые части уравнений (2.65) и (2.58), получим

$$\frac{d^2 v}{du^2} + v = \frac{\mu}{C^2}. \quad (2.66)$$

Уравнение (2.66) есть дифференциальное уравнение несвободного колебательного движения. Его тривиальное решение

$$v_0 = \frac{\mu}{C^2},$$

поэтому

$$v = v_0 + v_0 e \cos(u - \omega), \quad (2.67)$$

где e и ω — произвольные постоянные, введенные интегрированием, т. е.

$$v = \frac{\mu}{C^2} + \frac{\mu}{C^2} e \cos(u - \omega), \quad (2.68)$$

или

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \frac{\mu}{C^2} e \cos(u - \omega). \quad (2.69)$$

Положим, что

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad (2.70)$$

тогда получим

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(u - \omega)}. \quad (2.71)$$

Уравнение (2.71) представляет собой уравнение конического сечения, где p — параметр, e — эксцентриситет, ω — начальная фаза. Положим, что $u - \omega = 0$ в момент прохождения спутником перигентра орбиты Π (т. е. точки орбиты, ближайшей к фокусу), тогда в общем случае

$$u - \omega = \vartheta, \quad (2.72)$$

где ϑ — угол между направлениями в перигентр (см. рис. 6) и на ИСЗ; этот угол называется истинной аномалией, а постоянная интегрирования ω является угловым расстоянием периметра от узла и называется аргументом периметра. Таким образом, имеем

$$p = \frac{\mu}{C^2} = a(1 - e^2); \quad \vartheta = u - \omega, \quad (2.73)$$

откуда постоянная C будет следующей

$$C = \sqrt{\mu p}, \quad (2.74)$$

интеграл орбиты

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (2.75)$$

а интеграл площадей (2.59) с учетом (2.73) и (2.74) будет иметь вид:

$$r^2 \frac{du}{dt} = r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu} \sqrt{a(1 - e^2)}. \quad (2.76)$$

3. Интеграл энергии.

Дифференцируя уравнение (2.68), найдем

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\mu}{C^2} e \sin(u - \omega) \quad (2.77)$$

или

$$\frac{dv}{du} = -\frac{e}{p} \sin(u - \omega). \quad (2.78)$$

Подставляя выражение (2.78) в формулу Бине (2.64), проделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} v^2 &= C^2 \left[v^2 + \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right] = C^2 \left[v^2 + \frac{e^2}{p^2} \sin^2(u - \omega) \right] = \\ &= C^2 \left[1 + 2e \cos(u - \omega) + e^2 \right] \frac{1}{p^2} = \frac{\mu}{p} \left[1 + e^2 + \frac{2p}{r} - 2 \right] = \\ &= \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p} \right] = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right], \end{aligned} \quad (2.79)$$

таким образом, орбитальная скорость определяется формулой

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]. \quad (2.80)$$

Это выражение запишем в другой форме, полагая

$$H = -2 \frac{\mu}{a}. \quad (2.81)$$

Тогда получим

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = H. \quad (2.82)$$

Из уравнения (2.82) следует, что сумма кинетической и потенциальной энергий при движении ИСЗ в центральном поле постоянны.

4. Динамический интеграл.

Приступим теперь к выводу выражения для истинной аномалии ϑ как функции времени. Но предварительно введем вместо ϑ новую переменную, упрощающую интегрирование.

На большой полуоси орбитального эллипса как на диаметре построим круг (рис. 7). Из точки m , представляющей положение ИСЗ на эллиптической орбите, опустим перпендикуляр mm'' на большую полуось и продолжим его до пересечения с окружностью в точке m' . Соединим точку m' с центром эллипса o . Угол $m'oP$ и примем за новую переменную E . Угол E называется эксцентрической аномалией.

Выразим радиус-вектор r в зависимости от E . Для этого уравнение (2.75) перепишем в виде

$$r + re \cos \vartheta = a - ae^2. \quad (2.83)$$

Заменим $r \cos \vartheta$ на основании следующих соображений: Из треугольника Fmm'' (см. рис. 7) имеем $Fm'' = r \cos \vartheta$, но, с другой стороны,

$$Fm'' = om'' - oF = a \cos E - ae,$$

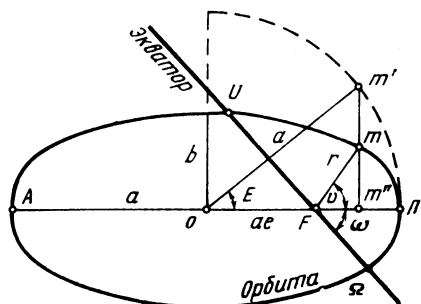


Рис. 7

поэтому

$$r \cos \vartheta = a \cos E - ae,$$

после чего уравнение (2.83) дает

$$r + ae \cos E - ae^2 = a - ae^2;$$

отсюда

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.84)$$

Теперь, приравнявая выражения (2.75) и (2.84), получим

$$e \cos \vartheta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos E} \quad (2.85)$$

и после элементарных преобразований формулы (2.85)

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}. \quad (2.86)$$

При этом, поскольку $\sin \vartheta$ и $\sin E$ имеют всегда одинаковый знак, корень в формуле (2.86) всегда положителен.

Умножая левые части выражений (2.85) и (2.86) на r , а правые на равную ему величину $a(1 - e \cos E)$, получим систему формул для определения r и ϑ в зависимости от E :

$$\left. \begin{aligned} r \sin \vartheta &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E; \\ r \cos \vartheta &= a(\cos E - e). \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

Эти формулы определяют угол ϑ без всякой двойственности.

В небесной механике для определения r и ϑ чаще используют другие формулы, которые получаются на основании следующих соображений.

Пользуясь формулой (2.87) для $\cos \vartheta$, составим выражения

$$1 - \cos \vartheta \text{ и } 1 + \cos \vartheta.$$

Имеем

$$1 - \cos \vartheta = \frac{1 - e \cos E - \cos E + e}{1 - e \cos E}; \quad 1 + \cos \vartheta = \frac{1 - e \cos E + \cos E - e}{1 - e \cos E},$$

но так как

$$1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \text{ и } 1 + \cos \vartheta = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2},$$

то

$$2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{(1 + e)(1 - e \cos E)}{1 - e \cos E}; \quad 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{(1 - e)(1 + e \cos E)}{1 - e \cos E}.$$

Замечая, что

$$1 - \cos E = 2 \sin^2 \frac{E}{2} \text{ и } 1 + \cos E = 2 \cos^2 \frac{E}{2},$$

получим

$$\sin^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{(1+e) \sin^2 \frac{E}{2}}{1-e \cos E}; \quad \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{(1-e) \cos^2 \frac{E}{2}}{1-e \cos E},$$

или, извлекая квадратный корень,

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{1+e} \sin \frac{E}{2}}{\sqrt{1-e \cos E}}; \quad \cos \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{1-e} \cos \frac{E}{2}}{\sqrt{1-e \cos E}},$$

где при извлечении корня удерживается знак плюс. Умножим теперь левые части предыдущих уравнений на $\sqrt{r}$, а правые — на равную ему величину $\sqrt{a(1-e \cos E)}$; находим окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r} \sin \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}; \\ \sqrt{r} \cos \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Теперь для определения r и ϑ можно записать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1-e \cos E); \\ \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

последнее из которых получается делением первого из выражений (2.88) на второе.

Приступим теперь к установлению связи между эксцентрической аномалией и временем t . Дифференцируя второе из выражений (2.89), получим

$$d\vartheta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^2 \frac{E}{2}} dE; \quad (2.90)$$

пользуясь вторым из соотношений (2.88), имеем

$$\frac{\cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\cos^2 \frac{E}{2}} = \frac{a(1-e)}{r}. \quad (2.91)$$

следовательно,

$$d\vartheta = \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2} dE. \quad (2.92)$$

Подставим значение $d\vartheta$, определяемое формулой (2.92), в выражение (2.76) для интеграла площадей

$$r^2 \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2} dE = \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} dt, \quad (2.93)$$

тогда с учетом выражения

$$r = a(1 - e \cos E)$$

будем иметь

$$(1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} dt. \quad (2.94)$$

Введем обозначение

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \quad (2.95)$$

Из выражения (2.94) следует, что величина n , называемая средним движением, является средней скоростью возрастания эксцентрической аномалии E , при этом за период обращения T эксцентрическая аномалия изменится на 2π . Поэтому

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.96)$$

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}. \quad (2.97)$$

Теперь выражения (2.94) можно написать так:

$$(1 - e \cos E) dE = n dt. \quad (2.98)$$

После интегрирования уравнения (2.98) получаем

$$E - e \sin E = n(t - t_n). \quad (2.99)$$

Уравнение (2.99) известно под названием уравнения Кеплера. Когда задана эксцентрическая аномалия, то из уравнения Кеплера легко найти время t . Обратная задача сложнее и будет рассмотрена ниже.

Величина $n(t - t_n)$ обозначается буквой M и называется средней аномалией

$$M = n(t - t_n). \quad (2.100)$$

Постоянная t_n есть время прохождения спутника через перигей, так как при $E=0$ уравнение (2.99) дает $t=t_n$.

Из формул (2.99) и (2.100) следует, что M одновременно с E , а следовательно, и с ϑ , обращается в 0 или 180° . Все три аномалии заключаются одновременно либо между 0 и 180° , либо между 180 и 360° .

При этом в первом случае

$$\vartheta \geq E \geq M,$$

а во втором

$$\vartheta \leq E \leq M.$$

Выражение для средней аномалии (2.100) представим в форме:

$$M = n(t - t_{\Pi}) = n(t - t_0) + n(t_0 - t_{\Pi}), \quad (2.101)$$

где t_0 — совершенно произвольный момент.

В таком случае

$$n(t_0 - t_{\Pi})$$

есть средняя аномалия M_0 , соответствующая моменту t_0 , и мы имеем

$$M = n(t - t_{\Pi}) = n(t - t_0) + M_0. \quad (2.102)$$

Поэтому уравнение Кеплера можно еще написать так:

$$M = M_0 + n(t - t_0) = E - e \sin E. \quad (2.103)$$

Момент t_0 называется эпохой, а M_0 — средней аномалией в эпоху t_0 . Постоянная M_0 вполне заменяет собой постоянную t_{Π} .

Сопоставим теперь еще раз все постоянные, которые определяют движение ИСЗ по эллиптической орбите. Таких постоянных шесть, и они называются элементами эллиптической орбиты. Эти элементы следующие:

i — наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора в пределах от 0 до 180°; Ω — долгота восходящего узла плоскости орбиты по отношению к плоскости экватора, считаемая в направлении с запада через юг на восток от точки весеннего равноденствия от 0 до 360°; ω — угловое расстояние перицентра от узла (аргумент перицентра), считаемое в плоскости орбиты от направления в узел в направлении с запада через юг на восток от 0 до 360°; a — большая полуось эллиптической орбиты; e — эксцентриситет орбиты; t_{Π} — время прохождения ИСЗ через перицентр.

Элементы i и Ω определяют ориентацию орбиты в пространстве. Элемент ω определяет положение самой орбиты в ее плоскости, его можно заменить другим элементом — долготой перицентра π :

$$\pi = \Omega + \omega. \quad (2.104)$$

Большая полуось a определяет размер эллиптической орбиты и может быть заменена средним движением

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \quad (2.105)$$

Элемент e определяет форму эллиптической орбиты и может быть заменен углом эксцентриситета φ по уравнению

$$e = \sin \varphi. \quad (2.106)$$

Наконец, элемент t_{Π} определяет положение ИСЗ на орбите и может быть заменен средней аномалией M_0 эпохи t_0 .

§ 11. Определение координат и составляющих скорости ИСЗ для произвольного момента t по заданным элементам орбиты и начальной эпохе t_0 (прямая задача невозмущенного движения)

Пусть даны элементы кеплеровой орбиты $i, \Omega, \omega, a, e, M_0$ и эпоха t_0 , требуется определить координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ ИСЗ на некоторый момент t .

Задача решается в такой последовательности. Определяется среднее движение n ИСЗ по формуле

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}; \quad \mu = 398\,600,5 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2. \quad (2.107)$$

Вычисляется средняя аномалия M на момент t :

$$M = M_0 + n(t - t_0). \quad (2.108)$$

Решается уравнение Кеплера относительно эксцентрической аномалии E

$$E - e \sin E = M. \quad (2.109)$$

При малых эксцентриситетах уравнение Кеплера можно решать методом простых итераций.

Для этого находим начальное приближение для E по формуле Гюльдена

$$\operatorname{tg} E^{(0)} = \frac{\sin M}{\cos M - e} \quad (2.110)$$

и далее вычисляем последовательно

$$\left. \begin{aligned} E^{(1)} &= E^{(0)} + e \sin E^{(0)}, \\ E^{(2)} &= E^{(1)} + e \sin E^{(1)}, \\ E^{(n)} &= E^{(n-1)} + e \sin E^{(n-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

пока $|E^{(n)} - E^{(n-1)}|$ не станет меньше точности вычислений ϵ . При $e \leq 0,2$ процесс итераций по формулам (2.111) быстро сходится.

При значительных эксцентриситетах метод простых итераций требует большого числа приближений; поэтому уже при $e > 0,3$ лучше использовать ньютоновский итерационный процесс, скорость сходимости которого быстрее. Ньютоновские итерации выполняются по схеме

$$E^{(n)} = E^{(n-1)} - \frac{E^{(n-1)} - e \sin E^{(n-1)} - M}{1 - e \cos E^{(n-1)}}. \quad (2.112)$$

пока E в пределах точности вычислений не перестанет изменяться.

Эксцентрическую аномалию можно выразить в виде ряда

$$E = M + e \sin M + \frac{e^2}{1.2} \sin 2M + \frac{e^3}{1.2 \cdot 3 \cdot 2^2} [3^2 \sin 3M - 3 \sin M] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^3} [4^3 \sin 4M - 4 \cdot 2^3 \sin 2M] + \frac{e^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4} [5^4 \sin 5M - \\
& - 5 \cdot 3^4 \sin 3M + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \sin M] + \dots + \frac{e^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \cdot 2^{k-1}} \left[k^{k-1} \sin kM - \right. \\
& \quad \left. - k(k-2)^{k-1} \sin(k-2)M + \right. \\
& \quad \left. + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} (k-4)^{k-1} \sin(k-4)M + \dots \right] + \dots \quad (2.113)
\end{aligned}$$

Лаплас установил точный предел эксцентриситета, при котором ряд (2.133) перестает быть сходящимся. Этим пределом является значение $e \geq 0,663$.

Вычисляются истинная аномалия ϑ и радиус-вектор по формулам

$$\left. \begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E); \\ \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

при этом углы $\frac{\vartheta}{2}$ и $\frac{E}{2}$ всегда лежат в одной четверти (одно- временно в первой или одновременно во второй).

На этом этапе вычислений мы определили полярные координаты r и ϑ ИСЗ в плоскости орбиты.

Вычисление прямоугольных инерциальных координат x, y, z . Для вывода формул вычисления прямоугольных координат ИСЗ рассмотрим рис. 8, на котором изображена геоцентрическая небесная сфера. Пусть дуга $\Omega\Pi$ есть пересечение плоскости орбиты с этой сферой. Тогда $o\Omega$ есть линия узлов плоскости орбиты. Положение плоскости орбиты $o\Omega M$ фиксировано углами i и Ω .

Координаты ИСЗ в точке M определим из выражений

$$x = r \cos \angle Mox; \quad y = r \cos \angle Moy; \quad z = r \cos \angle Moz. \quad (2.115)$$

В сферическом треугольнике $M\gamma\Omega$ стороны выражаются так:

$$\gamma\Omega = \Omega, \quad \Omega M = \omega + \vartheta = u,$$

$$\angle M\Omega\gamma = 180^\circ - i.$$

Из этого треугольника

$$\begin{aligned} \cos \angle Mox &= \cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega - \\ &- \sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i. \end{aligned} \quad (2.116)$$

В треугольнике $M\Omega y$ стороны $\Omega y = 90^\circ - \Omega$, $\Omega M = \omega + \vartheta = u$, $\angle M\Omega y = i$ откуда

$$\begin{aligned} \cos \angle Moy &= \cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega + \\ &+ \sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i; \end{aligned} \quad (2.117)$$

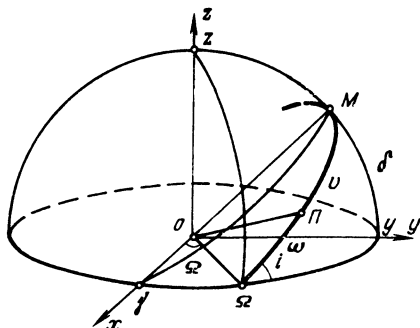


Рис. 8

наконец, для определения $\angle Moz$ обращаемся к треугольнику $M\Omega z$, в котором $z\Omega = 90^\circ$, $\Omega M = \omega + \vartheta = u$.

Из этого треугольника получаем

$$\cos \angle Moz = \sin i \sin (\omega + \vartheta). \quad (2.118)$$

Подставляя значения косинусов углов, определяемых формулами (2.116), (2.117) и (2.118), в уравнения (2.115), получим формулы для вычисления координат:

$$\left. \begin{aligned} x &= r [\cos (\omega + \vartheta) \cos \Omega - \sin (\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i]; \\ y &= r [\cos (\omega + \vartheta) \sin \Omega + \sin (\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i]; \\ z &= r \sin (\omega + \vartheta) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.119)$$

Вычисление составляющих скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

На основании формул

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \vartheta}; \quad r^2 \dot{\vartheta} = C; \quad p = \frac{C^2}{\mu} = a(1-e^2)$$

составляющие скорости можно получить так:

по радиусу-вектору

$$v_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta; \quad (2.120)$$

по трансверсали (перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости орбиты):

$$v_n = r \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \quad (2.121)$$

Отсюда модуль скорости будет

$$v^2 = \frac{\mu}{p} (1 + 2e \cos \vartheta) + e^2, \quad (2.122)$$

скорость в перигеентре (максимальная)

$$v_{\Pi} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e), \quad (2.123)$$

скорость в апогее (минимальная)

$$v_A = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - e). \quad (2.124)$$

Дифференцируя уравнения (2.119) по времени, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \frac{x}{r} - r (\cos \Omega \sin u + \sin \Omega \cos u \cos i) \dot{\vartheta}; \\ \dot{y} &= \dot{r} \frac{y}{r} - r (\sin \Omega \sin u - \cos \Omega \cos u \cos i) \dot{\vartheta}; \\ \dot{z} &= r \cos u \sin i \dot{\vartheta} + \frac{z}{r} \dot{r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

Подставляя в эти формулы значения $\dot{r}$ и $\dot{\vartheta}$, определяемые формулами (2.120) и (2.121), напомним выражения для $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - \\ &\quad - \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i); \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) - \\ &\quad - \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i); \\ \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \sin u \sin i + \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) \cos u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

§ 12. Определение элементов орбиты по координатам и составляющим скорости (обратная задача невозмущенного движения)

Пусть даны координаты x_0 , y_0 , z_0 и составляющие скорости $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ в момент t_0 . По этим данным требуется определить элементы орбиты (i , ω , Ω , a , e , M) $t=t_0$ в эпоху t_0 . Эту задачу, обратную по отношению к задаче, рассмотренной в § 11, можно решить в такой последовательности

1. Вычисляем интегралы площадей:

$$C_1 = y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0; \quad C_2 = z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0; \quad C_3 = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0. \quad (2.127)$$

2. Определяем наклонение i , долготу восходящего узла Ω и параметр орбиты p :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i &= \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{C_3}; \quad \cos i = \frac{C_3}{C}; \quad \operatorname{tg} \Omega = -\frac{C_1}{C_2} \\ C &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}; \quad p = a(1 - e^2) = \frac{C^2}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

3. Вычисляем интеграл энергии

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = v_0^2 = \mu \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right). \quad (2.129)$$

4. Определяем большую полуось орбиты

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}; \quad a = \frac{1}{\frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu}}. \quad (2.130)$$

5. Вычисляем эксцентриситет орбиты

$$e^2 = 1 - \frac{1}{\mu a} (C_1^2 + C_2^2 + C_3^2). \quad (2.131)$$

6. Определяем истинную аномалию ϑ_0 на момент наблюдений t_0

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{(x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0) \sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{\mu} [a(1-e^2) - r_0]}. \quad (2.132)$$

7. Определяем на основании формулы (2.89) эксцентрическую аномалию

$$\operatorname{tg} \frac{E_0}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}. \quad (2.133)$$

8. Определяем на основании уравнения Кеплера среднюю аномалию

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0. \quad (2.134)$$

9. Определяем аргумент широты

$$u_0 = \omega + \vartheta_0. \quad (2.135)$$

Для этого можно было бы воспользоваться одним из уравнений (2.119), однако удобнее использовать их комбинации и определить аргумент широты по формуле

$$\operatorname{tg} u_0 = \frac{z_0 \operatorname{cosec} i}{x_0 \cos \Omega + y_0 \sin \Omega}. \quad (2.136)$$

10. В заключение вычисляем аргумент перицентра

$$\omega = u_0 - \vartheta_0 \quad (2.137)$$

и время прохождения ИСЗ через перицентр

$$t_{\pi} = t_0 - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} M_0. \quad (2.138)$$

На этом решение задачи заканчивается.

§ 13. Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения в виде разложений координат по степеням времени

В предыдущих параграфах этой главы были получены формулы для точного решения дифференциальных уравнений невозмущенного движения, при этом координаты ИСЗ выражаются через неявные и достаточно сложные функции времени. Между тем для ряда приложений, например, при определении элементов матрицы изохронных производных, о которой шла речь в первой главе и которая будет предметом обсуждения в последующем изложе-

нии, часто необходимо иметь приближенные, но достаточно простые явные выражения координат как функций времени. Эта задача может быть решена в виде разложений координат невозмущенного движения по степеням времени.

Прежде чем приступить к решению, введем весьма важное в теории определения орбит понятие модифицированного времени с помощью соотношения

$$\tau = \sqrt{\mu} (t - t_0), \quad (2.139)$$

где μ — по-прежнему геоцентрическая гравитационная постоянная; t — текущее время; t_0 — начальная эпоха, иначе говоря, вводя модифицированное время τ , мы отсчитываем время от начальной эпохи t_0 в единицах, содержащих по $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$ секунд.

Напишем основные уравнения невозмущенного движения в векторной форме

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (2.140)$$

или в эквивалентной записи, предложенной Мультеном,

$$\ddot{\mathbf{r}} = -u \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.141)$$

где

$$u = \frac{\mu}{r^3}. \quad (2.142)$$

Для малых значений модифицированного времени τ можно получить решение уравнения (2.141) в форме степенных рядов на основании теоремы Коши. В самом деле, поскольку при $\tau=0$ радиус-вектор не может быть равен нулю, то правая часть уравнения (2.141) является голоморфной функцией в точке $\tau=0$, $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}$.

Поэтому напомним пока формально решение в виде разложения в ряд Тейлора*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \tau + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_0 \tau^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{r}}_0 \tau^3 + \frac{1}{24} \mathbf{r}_0^{IV} \tau^4 + \frac{1}{120} \mathbf{r}_0^V \tau^5 + \dots \quad (2.143)$$

Последовательно дифференцируя n раз уравнение (2.141), подставляя в полученные выражения значения переменных для начального момента t_0 и учитывая, что $\ddot{\mathbf{r}}_0 = -u_0 \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}$, получим значения производных геоцентрического вектора ИСЗ:

* Здесь и далее обозначаем точкой сверху буквы дифференцирования по модифицированному времени.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{\mathbf{r}}}_0 &= -\dot{u}_0 \bar{\mathbf{r}}_0 - u_0 \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0; \\ \bar{\mathbf{r}}_0^{\text{IV}} &= (-\ddot{u}_0 + u_0^2) \bar{\mathbf{r}}_0 - 2\dot{u}_0 \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0; \\ \bar{\mathbf{r}}_0^{\text{V}} &= (-\ddot{\dot{u}}_0 + 4u_0 \dot{u}_0) \bar{\mathbf{r}}_0 - (3\ddot{u}_0 - u_0^2) \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.144)$$

Если подставить значения полученных производных в уравнение (2.143), получим выражение

$$\bar{\mathbf{r}} = f \bar{\mathbf{r}}_0 + g \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0, \quad (2.145)$$

где функции f и g имеют следующий вид:

$$f = 1 - \frac{1}{2} u_0 \tau^2 - \frac{1}{6} \dot{u}_0 \tau^3 - \frac{1}{24} (\ddot{u}_0 - u_0^2) \tau^4 - \frac{1}{120} (\ddot{\dot{u}}_0 - 4u_0 \dot{u}_0) \tau^5 - \dots, \quad (2.146)$$

$$g = \tau - \frac{1}{6} u_0 \tau^3 - \frac{1}{12} \dot{u}_0 \tau^4 - \frac{1}{120} (3\ddot{u}_0 - u_0^2) \tau^5 - \dots \quad (2.147)$$

Эти выражения для f и g не представляют практического интереса, поскольку в них входят производные высоких порядков от u , которые не определены. Поэтому воспользуемся методом Лагранжа, который ввел две переменные p и q , определяемые соотношениями

$$r^2 p = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{d\tau}; \quad (2.148)$$

$$r^2 q = \frac{1}{2} \frac{d^2(r^2)}{d\tau^2}, \quad (2.149)$$

откуда следует, что

$$p = \frac{\dot{r}r}{r^2} = \frac{\dot{\bar{r}}}{r}; \quad (2.150)$$

$$q = \frac{v^2 - r^2 u}{r^2}, \quad (2.151)$$

где v — орбитальная скорость, поэтому

$$\dot{u} = -\frac{3\mu}{r^4} \frac{dr}{d\tau} = -\frac{3\mu}{r^4} \frac{1}{2r} \frac{d(r^2)}{d\tau}; \quad (2.152)$$

$$\dot{p} = \frac{1}{2r^2} \frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} - \frac{1}{r^3} \frac{d(r^2)}{d\tau} \frac{dr}{d\tau}; \quad (2.153)$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{r^3} \frac{d^2(r^2)}{d\tau^2} \frac{dr}{d\tau} + \frac{1}{2r^2} \frac{d^3(r^2)}{d\tau^3}. \quad (2.154)$$

С учетом формул (2.148) и (2.149) эти выражения приводятся к следующему виду:

$$\dot{u} = -3up; \quad (2.155)$$

$$\dot{p} = q - 2p^2; \quad (2.156)$$

$$\dot{q} = -(up + 2pq). \quad (2.157)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{u} = -3(\dot{u}p + \dot{p}u). \quad (2.158)$$

Если в него подставить переменные из выражений (2.155) — (2.157), то оно не будет содержать первой производной от u :

$$\ddot{u} = -3[u(q - 2p^2) - 3up^2]. \quad (2.159)$$

Повторение этого приема с помощью уравнений (2.155) — (2.157) позволяет каждый раз исключать производные $\dot{u}$, $\dot{p}$, $\dot{q}$. В этом и заключается смысл введения переменных p и q .

Теперь, подставляя значения производных от u по времени для начальной эпохи, получим следующие выражения для f и g :

$$f = 1 - \frac{1}{2}u_0\tau^2 + \frac{1}{2}u_0p_0\tau^3 + \frac{1}{24}(3u_0q_0 - 15u_0p_0^2 + u_0^2)\tau^4 + \\ + \frac{1}{8}(7u_0p_0^3 - 3u_0p_0q_0 - u_0^2p_0)\tau^5 + \dots; \quad (2.160)$$

$$g = \tau - \frac{1}{6}u_0\tau^3 + \frac{1}{4}u_0p_0\tau^4 + \frac{1}{120}(9u_0q_0 - 45u_0p_0^2 + u_0^2)\tau^5 + \dots \quad (2.161)$$

Таким образом, если известны начальные условия для интегрирования дифференциальных уравнений невозмущенного движения, то, определив величины p_0 и q_0 на основании формул (2.150) — (2.151), можно вычислить координаты ИСЗ для текущего момента по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0f + \dot{x}_0g; \\ y &= y_0f + \dot{y}_0g; \\ z &= z_0f + \dot{z}_0g. \end{aligned} \right\} \quad (2.162)$$

Поскольку $\bar{\mathbf{r}}_0$ и $\dot{\bar{\mathbf{r}}}_0$ — величины постоянные, то в результате дифференцирования уравнения (2.145) получим вектор скорости в текущий момент t в виде

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{f}\bar{\mathbf{r}}_0 + \dot{g}\dot{\bar{\mathbf{r}}}_0, \quad (2.163)$$

где

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \tau}, \quad \dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \tau}, \quad (2.164)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x_0 \dot{f} + \dot{x}_0 \dot{g}; \\ \dot{y} &= y_0 \dot{f} + \dot{y}_0 \dot{g}; \\ \dot{z} &= z_0 \dot{f} + \dot{z}_0 \dot{g}. \end{aligned} \right\} \quad (2.165)$$

Область сходимости разложения r как функции модифицированного времени τ в окрестностях перицентра, т. е. сходимости ряда вида

$$r = a(1-e) \left[1 + \frac{e}{2(1-e)^3} \tau^2 - \frac{e(1+3e)}{24(1-e)^6} \tau^4 + \dots \right], \quad (2.166)$$

установлена Мультоном и определяется неравенством

$$\tau < \frac{(1-e^3)(-2e + \sqrt{4e^2 + 3e})(3+2e) - \sqrt{4e^2 + 3e}^3}{108(e + \sqrt{4e^2 + 3e})}. \quad (2.167)$$

Подробно проблема сходимости разложения координат в степенные ряды изложена в работах [12], [47].

Для функций модифицированного времени f и g можно также получить замкнутые выражения. При этом воспользуемся очевидным свойством этих функций — инвариантностью к выбору системы координат. Поэтому будем считать, что инерциальная система координат совпадает с орбитальной.

Пусть в этом случае E и E_0 есть эксцентрические аномалии для моментов t и t_0 , тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} x &= a(\cos E - e); \\ y &= a\sqrt{1-e^2} \sin E; \\ z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.168)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a(\cos E_0 - e); \\ y_0 &= a\sqrt{1-e^2} \sin E_0; \\ z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.169)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= -a \sin E_0 \dot{E}_0; \\ \dot{y}_0 &= a\sqrt{1-e^2} \cos E_0 \dot{E}_0; \\ \dot{z}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.170)$$

Но из формул (2.162) можно выразить функции f и g в виде

$$f = \frac{\dot{x}y_0 - y\dot{x}_0}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0}; \quad g = \frac{y\dot{x}_0 - x\dot{y}_0}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0}; \quad (2.171)$$

кроме того, для $\dot{E}_0$ легко получить выражение

$$\dot{E}_0 = a^{-1/2} (1 - e \cos E_0)^{-1}. \quad (2.172)$$

Тогда на основании формул (2.171) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\cos(E - E_0) - e \cos E_0}{1 - e \cos E_0} \\ g &= a^{1/2} [\sin(E - E_0) - e(\sin E - \sin E_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.173)$$

Функции f и g будут нами широко использоваться при составлении алгоритмов реализации орбитального метода. Таким образом, мы рассмотрели еще один способ интегрирования дифференциальных уравнений невозмущенного движения, при этом доказано, что геоцентрический вектор ИСЗ и вектор его скорости в любой текущий момент t_0 есть линейные комбинации геоцентрического вектора и вектора скорости в начальный момент t_0 . Коэффициенты таких линейных комбинаций можно получить как в виде рядов по степеням модифицированного времени, так и в конечном виде. Заметим, что введение дифференцирования по модифицированному времени дает возможность исключить из большинства динамических уравнений геоцентрическую гравитационную постоянную.

§ 14. Дифференциальные формулы задачи двух тел

Прежде всего получим дифференциальные формулы прямоугольных координат как функций элементов орбиты, т. е. определим коэффициенты a_{mn} в линейных уравнениях:

$$\left. \begin{aligned} dx &= a_{11}d\Omega + a_{12}di + a_{13}d\omega + a_{14}da + a_{15}de + a_{16}dM; \\ dy &= a_{21}d\Omega + a_{22}di + a_{23}d\omega + a_{24}da + a_{25}de + a_{26}dM; \\ dz &= a_{31}d\Omega + a_{32}di + a_{33}d\omega + a_{34}da + a_{35}de + a_{36}dM, \end{aligned} \right\} \quad (2.174)$$

где a_{mn} — соответствующие частные производные. Установление этих соотношений нужно для вычисления элементов матрицы производных от координат ИСЗ по элементам орбиты

$$\frac{\partial(x, y, z)_j}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{vmatrix}. \quad (2.175)$$

Вычисление производных $a_{11} \dots a_{36}$ сводится к последовательному дифференцированию основных уравнений невозмущенного движения. При выводе формул для производных будем исходить из основных соотношений, устанавливающих связь координат и элементов кеплеровой орбиты, полученных в § 11:

$$\left. \begin{aligned} x &= r[\cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega - \sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i]; \\ y &= r[\cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega + \sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i]; \\ z &= r \sin(\omega + \vartheta) \sin i; \end{aligned} \right\} \quad (2.176)$$

При этом разделим элементы на две группы — на внутренние и внешние элементы. Внутренними являются элементы, определяющие движение ИСЗ в плоскости орбиты, т. е. a , e и M_0 .

Внешними будут элементы Ω , i , ω , определяющие ориентацию орбиты относительно осей координатной системы $oxyz$.

1. Производные от координат по внешним элементам. Дифференцируя частным образом формулы (2.176), получим:

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -y; \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = x; \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = 0; \quad (2.177)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial i} &= r \sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega \sin i; & \frac{\partial y}{\partial i} &= -r \sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega \sin i; \\ \frac{\partial z}{\partial i} &= r \sin(\omega + \vartheta) \cos i; \end{aligned} \right\} \quad (2.178)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \omega} &= r [-\sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega - \cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i]; \\ \frac{\partial y}{\partial \omega} &= r [-\sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega + \cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i]; \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} &= r \cos(\omega + \vartheta) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.179)$$

2. Производные от координат по внутренним элементам.

Из формулы

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (2.180)$$

которая устанавливает связь средней аномалии со временем, следует

$$\dot{x} = n \frac{\partial x}{\partial M}; \quad \dot{y} = n \frac{\partial y}{\partial M}; \quad \dot{z} = n \frac{\partial z}{\partial M}, \quad (2.181)$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial M} = \frac{\dot{x}}{n}; \quad \frac{\partial y}{\partial M} = \frac{\dot{y}}{n}; \quad \frac{\partial z}{\partial M} = \frac{\dot{z}}{n}, \quad (2.182)$$

далее, обозначая через $\left(\frac{\partial x}{\partial n} \right) \dots$ частные производные взятые по n , которое входит в координаты явным образом, а не через большую полуось, имеем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right) &= \frac{\dot{x}}{n} (t - t_0); & \left(\frac{\partial y}{\partial n} \right) &= \frac{\dot{y}}{n} (t - t_0); \\ \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right) &= \frac{\dot{z}}{n} (t - t_0); \\ \frac{\partial x}{\partial M_0} &= \frac{\dot{x}}{n}; & \frac{\partial y}{\partial M_0} &= \frac{\dot{y}}{n}; & \frac{\partial z}{\partial M_0} &= \frac{\dot{z}}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.183)$$

Чтобы получить производные от координат по большой полуоси, необходимо учесть, что, во-первых, координаты пропорциональны r , а, следовательно, и большой полуоси a , и, во-вторых, что они зависят от n , связанного с большой полуосью уравнением

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}, \quad (2.184)$$

из которого следует

$$\frac{dn}{da} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{n}{a},$$

поэтому

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} + \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right) \frac{dn}{da}, \quad (2.185)$$

или с учетом формул (2.183) для $\left(\frac{\partial x}{\partial n} \right) \dots$ окончательно будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{x - \frac{3}{2} \dot{x}(t-t_0)}{a}; \\ \frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{y - \frac{3}{2} \dot{y}(t-t_0)}{a}; \\ \frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{z - \frac{3}{2} \dot{z}(t-t_0)}{a}; \end{aligned} \right\} \quad (2.186)$$

Определим производные от координат по эксцентриситету и времени t_{II} прохождения ИСЗ через перигей. Поскольку от этих элементов зависят радиус-вектор r и истинная аномалия ϑ , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial e} + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial e}; \\ \frac{\partial x}{\partial t_{II}} &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t_{II}} + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t_{II}}; \end{aligned} \right\} \quad (2.187)$$

точно такой же структурой будут обладать и формулы производных от y и z по элементам e и t_{II} .

Производные $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial r}$ и $\frac{\partial x}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial y}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial z}{\partial \vartheta}$ получают дифференцированием основных формул (2.176) и имеют вид

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r};$$

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = r [-\sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega - \cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i];$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r [-\sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega + \cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i];$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = r \cos(\omega + \vartheta) \sin i.$$

Будем исходить из основного уравнения (2.89), связывающего радиус-вектор с эксцентрической аномалией,

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (2.188)$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$dr = (1 - e \cos E) da + ae \sin E dE - a \cos E de. \quad (2.189)$$

Поскольку

$$1 - e \cos E = \frac{r}{a}; \quad a \sin E = \frac{r \sin \vartheta}{\sqrt{1 - e^2}},$$

то

$$dr = \frac{r}{a} da + \frac{r \sin \vartheta}{\sqrt{1 - e^2}} dE - a \cos E de. \quad (2.190)$$

Заменим в этом выражении dE через da , de и dt_{Π} ; дифференцируя уравнение Кеплера, получим

$$(1 - e \cos E) dE - \sin E de = -\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} dt_{\Pi} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu}}{a^{5/2}} (t - t_{\Pi}) da,$$

откуда

$$\frac{r}{a} dE = \sin E de - \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} dt_{\Pi} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{a^{5/2}} (t - t_{\Pi}) da. \quad (2.191)$$

Подставляя на основании этой формулы выражение для rdE в формулу (2.190), имеем

$$dr = \left[\frac{r}{a} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mu} \sin \vartheta}{a^{3/2} \sqrt{1 - e^2}} (t - t_{\Pi}) \right] da + \left[\frac{ae \sin \vartheta \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} - a \cos E \right] de - \frac{ae \sin \vartheta}{\sqrt{a(1 - e^2)}} dt_{\Pi}. \quad (2.192)$$

В результате несложных преобразований коэффициент при de можно привести к виду

$$\frac{ae \sin \vartheta \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} - a \cos E = -a \cos \vartheta,$$

после чего получим

$$dr = \left[\frac{r}{a} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mu} e \sin \vartheta}{a^{3/2} \sqrt{1 - e^2}} (t - t_{\Pi}) \right] da - a \cos \vartheta de - \frac{\sqrt{\mu} e \sin \vartheta}{\sqrt{a(1 - e^2)}} dt_{\Pi}. \quad (2.193)$$

Из этого уравнения определим следующие производные:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a} &= \frac{r}{a} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} e \sin \vartheta}{a^{3/2} \sqrt{1-e^2}} (t-t_{\Pi}); \\ \frac{\partial r}{\partial e} &= -a \cos \vartheta; \\ \frac{\partial r}{\partial t_{\Pi}} &= -\frac{e \sqrt{\mu} \sin \vartheta}{\sqrt{a(1-e^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.194)$$

Для вывода производных от истинной аномалии ϑ по a , e и t_{Π} воспользуемся уравнением

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \vartheta}, \quad (2.195)$$

из которого следует, что

$$e \cos \vartheta = \frac{a(1-e^2)}{r} - 1. \quad (2.196)$$

Дифференцируя это выражение, находим

$$\cos \vartheta de - e \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1-e^2}{r} da - \frac{2ae}{r} de - \frac{a(1-e^2)}{r^2} dr,$$

откуда получим формулу

$$d\vartheta = -\frac{1-e^2}{re \sin \vartheta} da + \frac{1}{e \sin \vartheta} \left[\cos \vartheta + \frac{2ae}{r} \right] de + \frac{a(1-e^2)}{r^2 e \sin \vartheta} dr,$$

которая с учетом выражения (2.193) для dr будет иметь вид

$$\begin{aligned} d\vartheta = & -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{1-e^2}}{r^2 \sqrt{a}} (t-t_{\Pi}) da + \frac{1}{e \sin \vartheta} \left[\cos \vartheta + \frac{2ae}{r} - \right. \\ & \left. - \frac{a^2(1-e^2) \cos \vartheta}{r^2} \right] de - \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)}}{r^2} dt_{\Pi}. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Преобразуем коэффициент при de . Приведем выкладки полностью:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta + \frac{2ae}{r} - \frac{a^2(1-e^2) \cos \vartheta}{r^2} &= \cos \vartheta + \frac{2e(1+e \cos \vartheta)}{1-e^2} - \\ & - \frac{(1+e \cos \vartheta)^2 \cos \vartheta}{(1-e^2)} = \\ &= \frac{\cos \vartheta(1-e^2) + 2e(1+e \cos \vartheta) - (1+2e \cos \vartheta + e^2 \cos^2 \vartheta) \cos \vartheta}{1-e^2} = \\ &= \frac{\cos \vartheta - e^2 \cos^3 \vartheta + 2e + 2e^2 \cos \vartheta - \cos \vartheta - 2e \cos^2 \vartheta - e^2 \cos^3 \vartheta}{1-e^2} = \\ &= \frac{2e + e^2 \cos \vartheta - 2e \cos^2 \vartheta - e^2 \cos^3 \vartheta}{1-e^2} = \\ &= \frac{2e(1-\cos^2 \vartheta) + e^2 \cos \vartheta(1-\cos^2 \vartheta)}{1-e^2} = \frac{e \sin^2 \vartheta (2+e \cos \vartheta)}{1-e^2}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$d\vartheta = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{1-e^2}}{r^2 \sqrt{a}} (t-t_{\Pi}) da + (2+e \cos \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{1-e^2} de - \\ - \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)}}{r^2} dt_{\Pi},$$

откуда искомые производные получим в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial a} &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mu} \sqrt{1-e^2}}{r^2 \sqrt{a}} (t-t_{\Pi}); \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial e} &= (2+e \cos \vartheta) \frac{\sin \vartheta}{1-e^2}; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t_{\Pi}} &= -\frac{\sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)}}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.198)$$

3. Производные от составляющих скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ по элементам орбиты.

При решении некоторых задач необходимо располагать формулами для производных от составляющих скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в инерциальной прямоугольной системе координат по элементам орбиты, т. е. знать структуру дифференциальных формул вида

$$\left. \begin{aligned} d\dot{x} &= a_{41}d\Omega + a_{42}di + a_{43}d\omega + a_{44}da + a_{45}de + a_{46}dM; \\ d\dot{y} &= a_{51}d\Omega + a_{52}di + a_{53}d\omega + a_{54}da + a_{55}de + a_{56}dM; \\ d\dot{z} &= a_{61}d\Omega + a_{62}di + a_{63}d\omega + a_{64}da + a_{65}de + a_{66}dM. \end{aligned} \right\} \quad (2.199)$$

Чтобы сделать дальнейшие формулы более компактными, введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} (1) &= \cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega - \sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i; \\ (2) &= \cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega + \sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i; \\ (3) &= \sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega + \cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega \cos i; \\ (4) &= \sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega - \cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (2.200)$$

С этими обозначениями составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}(1) - \dot{\vartheta}r(3); & \dot{y} &= \dot{r}(2) - r\dot{\vartheta}(4); \\ \dot{z} &= \dot{r} \sin(\omega + \vartheta) \sin i + r\dot{\vartheta} \cos(\omega + \vartheta) \sin i; \\ \dot{r} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta; & \dot{\vartheta} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \cdot \frac{(1+e \cos \vartheta)}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.201)$$

Непосредственным дифференцированием формул (2.201) получаем производные от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ по внешним элементам Ω , i , ω

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \Omega} = -\dot{r}(2) + r\dot{\vartheta}(4); \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \Omega} = \dot{r}(1) - \vartheta \dot{r}(3); \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \Omega} = 0; \quad (2.202)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial i} &= \dot{r} \sin(\omega + \vartheta) \sin \Omega \sin i + r\dot{\vartheta} \cos(\omega + \vartheta) \sin \Omega \sin i; \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial i} &= -\dot{r} \sin(\omega + \vartheta) \cos \Omega \sin i - r\dot{\vartheta} \cos(\omega + \vartheta) \cos \Omega \sin i; \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial i} &= \dot{r} \sin(\omega + \vartheta) \cos i + r\dot{\vartheta} \cos(\omega + \vartheta) \cos i; \end{aligned} \right\} \quad (2.203)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \omega} &= -\dot{r}(3) - r\dot{\vartheta}(1); \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \omega} &= -\dot{r}(4) - r\dot{\vartheta}(2); \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial \omega} &= \dot{r} \cos(\omega + \vartheta) \sin i - r\dot{\vartheta} \sin(\omega + \vartheta) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.204)$$

Производные от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ по внутренним элементам a , e , t_{Π} имеют одинаковую структуру. Поэтому, обозначая через $\mathcal{E}$ любой из внутренних элементов a , e , t_{Π} , можно написать такие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathcal{E}} &= \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \mathcal{E}} - r \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathcal{E}} \dot{\vartheta} \right) (1) - \left(\frac{\partial r}{\partial \mathcal{E}} \dot{\vartheta} + \dot{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathcal{E}} + r \frac{\partial \ddot{\vartheta}}{\partial \mathcal{E}} \right) (3); \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \mathcal{E}} &= \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \mathcal{E}} - r \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathcal{E}} \dot{\vartheta} \right) (2) - \left(\frac{\partial r}{\partial \mathcal{E}} \dot{\vartheta} + \dot{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathcal{E}} + r \frac{\partial \ddot{\vartheta}}{\partial \mathcal{E}} \right) (4); \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial \mathcal{E}} &= \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \mathcal{E}} - r \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathcal{E}} \dot{\vartheta} \right) \sin(\omega + \vartheta) \sin i + \\ &\quad + \left(\frac{\partial r}{\partial \mathcal{E}} \dot{\vartheta} + \dot{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathcal{E}} + r \frac{\partial \ddot{\vartheta}}{\partial \mathcal{E}} \right) \cos(\omega + \vartheta) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (2.205)$$

Входящие в эти формулы производные $\frac{\partial r}{\partial a}$, $\frac{\partial r}{\partial e}$, $\frac{\partial r}{\partial t_{\Pi}}$ и $\frac{\partial \vartheta}{\partial a}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial e}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial t_{\Pi}}$ получены нами выше и определяются из выражений (2.194) и (2.198). Производные $\frac{\partial \dot{r}}{\partial a}$, $\frac{\partial \dot{r}}{\partial e}$, $\frac{\partial \dot{r}}{\partial t_{\Pi}}$ и $\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial a}$, $\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial e}$ и $\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial t_{\Pi}}$ вычисляются по следующим формулам [17], которые мы приведем без вывода:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{r}}{\partial a} &= \frac{ae(1-e^2)}{(1+e \cos \vartheta)^2} \left[\sin \vartheta \left(\frac{\dot{\vartheta}}{a} + \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial a} \right) + \frac{e + \cos \vartheta + e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \dot{\vartheta} \frac{d\vartheta}{da} \right]; \\
\frac{\partial \dot{r}}{\partial e} &= \frac{ae \sin \vartheta}{(1+e \cos \vartheta)^2} \left[(1-3e^2) \frac{\dot{\vartheta}}{e} + (1-e^2) \frac{d\vartheta}{de} \right] + \\
&+ \frac{[ae(1-e^2)]}{[(1+e \cos \vartheta)^2]} \frac{e + \cos \vartheta + e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \dot{\vartheta} \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial e}; \\
\frac{\partial \dot{r}}{\partial t_{\Pi}} &= \frac{[ae(1-e^2)]}{1 + e \cos \vartheta} \left[\sin \vartheta \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial t_{\Pi}} + \frac{e + \cos \vartheta + e \sin^2 \vartheta}{1 + e \cos \vartheta} \dot{\vartheta} \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial t_{\Pi}} \right]; \\
\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial a} &= -\frac{3}{2} \frac{V\bar{\mu}}{a^{5/2}} \left[1 + 2e \cos \frac{V\bar{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_{\Pi}) + \right. \\
&\left. + \frac{3\mu e}{a^4} (t - t_{\Pi}) \sin \sqrt{\frac{\mu}{a^{3/2}}} (t - t_{\Pi}) \right]; \\
\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial e} &= 2 \frac{V\bar{\mu}}{a^{5/2}} \cos \frac{V\bar{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_{\Pi}); \\
\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial t_{\Pi}} &= 2 \frac{\mu e}{a^3} \sin \frac{V\bar{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_{\Pi}).
\end{aligned} \tag{2.206}$$

При выводе формул группы (2.206) исходили из приближенного представления истинной аномалии двумя первыми членами ряда

$$\vartheta = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} e^2 \sin 3M + \dots, \tag{2.207}$$

т. е. исходной была формула

$$\vartheta - M \approx 2e \sin M, \tag{2.208}$$

поэтому формулы этой группы являются приближенными и могут быть использованы лишь для орбит, близких к круговым.

Сохранение в ряду (2.207) члена $\frac{5}{4} e^2 \sin 2M$ и членов более высоких порядков привело бы к гораздо более громоздким выражениям для производных.

Таким образом, приходим к выводу, что непосредственное дифференцирование соотношений задачи двух тел приводит к громоздким формулам для вычисления производных от $\dot{r}$ и $\dot{\vartheta}$ по внутренним элементам даже при ограничении (2.208) на значение эксцентриситета. Это заставляет изыскивать другие, более экономичные методы вычисления элементов матрицы

$$\frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)},$$

которые рассмотрим ниже. Однако дифференциальные формулы, полученные в этом параграфе, могут быть использованы для формирования матрицы

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)},$$

а также для выполнения различных оценочных расчетов.

§ 15. Векторные элементы орбиты

Если для некоторого момента t_0 заданы значения геоцентрического вектора $\vec{r}_0$ и вектора скорости $\vec{v}_0$, то тем самым определены шесть постоянных, полностью определяющих кеплерово движение ИСЗ.

Однако выбор произвольных постоянных существенно зависит от характера задачи и особенностей орбитального движения ИСЗ.

Выше мы ввели два основных способа задания орбиты. Первый из них — способ задания прямоугольных инерциальных координат и компонент скорости:

$$\vec{X}^T = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \quad (2.209)$$

второй заключается в задании элементов орбиты в виде системы кеплеровых элементов

$$\vec{E}^T = (\Omega, i, \omega, a, e, M)_{t=t_0} \quad (2.210)$$

или в эквивалентной форме

$$\vec{E}^T = (\Omega, i, \omega, a, e, t_{\Pi}). \quad (2.211)$$

Несмотря на наглядность системы элементов (2.210), она иногда теряет свои преимущества, например, когда наклонение орбиты равно 0 или 180°, в этом случае не определена долгота линии узлов. В случае же круговой орбиты с наклонением, равным нулю, система элементов (2.210) вообще теряет смысл.

Поэтому рассмотрим другие способы задания элементов орбиты, которые будем использовать при решении многих задач орбитального метода.

1. Введение векторных элементов.

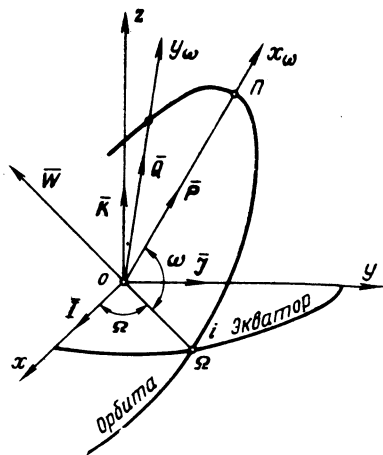


Рис. 9

Рассмотрим две ортогональные связки единичных векторов — связку $\bar{\mathbf{I}}, \bar{\mathbf{J}}, \bar{\mathbf{K}}$ и связку $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{W}}$. Пусть направление единичного вектора $\bar{\mathbf{I}}$ совпадает с направлением оси ox инерциальной системы координат, а направления векторов $\bar{\mathbf{J}}$ и $\bar{\mathbf{K}}$ — соответственно с направлениями осей oy и oz (рис. 9). Что же касается ориентации ортогональных единичных векторов $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{W}}$, то вектор $\bar{\mathbf{P}}$ лежит в плоскости орбиты и направлен из центра масс в ее перигелий, вектор $\bar{\mathbf{Q}}$ также лежит в плоскости орбиты, составляет прямой угол с вектором $\bar{\mathbf{P}}$ и направлен в сторону возрастания истинной аномалии Φ , вектор $\bar{\mathbf{W}}$ перпендикулярен к плоскости орбиты и дополняет векторы $\bar{\mathbf{P}}$ и $\bar{\mathbf{Q}}$ до правой системы (см. рис. 9).

Для совмещения системы $\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{K}}$ и $\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{W}}$, т. е. чтобы направления $\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{W}}$ совпали соответственно с направлениями $\bar{\mathbf{I}}\bar{\mathbf{J}}\bar{\mathbf{K}}$, необходимо выполнить три последовательных поворота на эйлеровы углы, которыми являются долгота восходящего узла Ω , наклон орбиты i и аргумент перигелия ω .

Выполним последовательно указанные повороты.

а. Произведем поворот на угол Ω вокруг оси

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}' \\ \bar{\mathbf{J}}' \\ \bar{\mathbf{K}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{J}} \\ \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\Omega) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{J}} \\ \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix},$$

здесь штрихами отмечены векторы, полученные в результате первого поворота;

б. Далее произведем поворот векторов $\bar{\mathbf{I}}', \bar{\mathbf{J}}', \bar{\mathbf{K}}'$ на угол i вокруг оси $\bar{\mathbf{I}}'$:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}'' \\ \bar{\mathbf{J}}'' \\ \bar{\mathbf{K}}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}' \\ \bar{\mathbf{J}}' \\ \bar{\mathbf{K}}' \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}(i) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}' \\ \bar{\mathbf{J}}' \\ \bar{\mathbf{K}}' \end{bmatrix},$$

здесь двумя штрихами отмечен результат второго вращения;

в. Наконец, в результате последнего вращения на угол ω вокруг оси $\bar{\mathbf{K}}''$ получим

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}} \\ \bar{\mathbf{Q}} \\ \bar{\mathbf{W}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}'' \\ \bar{\mathbf{J}}'' \\ \bar{\mathbf{K}}'' \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\omega) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}}'' \\ \bar{\mathbf{J}}'' \\ \bar{\mathbf{K}}'' \end{bmatrix}$$

Объединяя все эти операции и выполняя перемножение матриц, получим

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}} \\ \bar{\mathbf{Q}} \\ \bar{\mathbf{W}} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} \\ \bar{\mathbf{J}} \\ \bar{\mathbf{K}} \end{bmatrix},$$

где матрица $\mathbf{R}$ имеет вид

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\omega) \mathbf{R}(i) \mathbf{R}(\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i & \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i & \sin \omega \sin i \\ -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i & \cos \omega \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\sin i \cos \Omega & \cos i \end{bmatrix}, \quad (2.212)$$

здесь символами $\mathbf{R}(\Omega)$, $\mathbf{R}(i)$, $\mathbf{R}(\omega)$ обозначены матрицы вращения на углы Ω , i , ω .

Рассмотренные ортогональные преобразования можно еще представить так:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{I} + P_y \mathbf{J} + P_z \mathbf{K}, \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{I} + Q_y \mathbf{J} + Q_z \mathbf{K}, \\ \mathbf{W} &= W_x \mathbf{I} + W_y \mathbf{J} + W_z \mathbf{K}, \end{aligned} \right\} \quad (2.213)$$

где

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (2.214)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (2.215)$$

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \sin \omega \sin i, \\ W_y &= -\cos \omega \sin i, \\ W_z &= \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (2.216)$$

Координаты в плоскости орбиты при принятой нами ориентации осей триедра $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$, $\bar{\mathbf{W}}$ определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_\omega &= r \cos \vartheta, \\ y_\omega &= r \sin \vartheta, \\ z_\omega &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.217)$$

или, если ввести вместо истинной аномалии ϑ эксцентрическую аномалию E , по формулам (см. формулы 2.87)

$$\left. \begin{aligned} x_\omega &= a(\cos E - e), \\ y_\omega &= a\sqrt{1-e^2} \sin E, \\ z_\omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.218)$$

Тогда на основании выражений (2.212) и (2.213) получим формулы связи орбитальных и прямоугольных геоцентрических коор-

динат x, y, z

$$\begin{bmatrix} x_{\omega} \\ y_{\omega} \\ z_{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.219)$$

а также формулы для обратного перехода

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} x_{\omega} \\ y_{\omega} \\ z_{\omega} \end{bmatrix}, \quad (2.220)$$

которые можно написать еще в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{\omega} P_x + y_{\omega} Q_x + z_{\omega} W_x, \\ y &= x_{\omega} P_y + y_{\omega} Q_y + z_{\omega} W_y, \\ z &= x_{\omega} P_z + y_{\omega} Q_z + z_{\omega} W_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.221)$$

Уравнения (2.221) можно заменить одним векторным уравнением

$$\bar{\mathbf{r}} = x_{\omega} \bar{\mathbf{P}} + y_{\omega} \bar{\mathbf{Q}} + z_{\omega} \bar{\mathbf{W}}, \quad (2.222)$$

но так как движение в нашем случае происходит по законам задачи двух тел, то $z_{\omega} = 0$ и, следовательно,

$$\bar{\mathbf{r}} = x_{\omega} \bar{\mathbf{P}} + y_{\omega} \bar{\mathbf{Q}}. \quad (2.223)$$

Последняя формула устанавливает окончательную связь геоцентрических пространственных координат с орбитальными координатами x_{ω} и y_{ω} .

Теперь можно ввести новую систему элементов

$$[\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{W}}, a, e, t_n], \quad (2.224)$$

в которой векторные величины $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{W}}$ играют роль внешних элементов. При задании этой системы элементов необходимо располагать избыточными данными, поскольку каждая из векторных величин $\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{W}}$ задается тройкой чисел; однако следует иметь в виду, что каждое из этих чисел вполне определено комбинацией тригонометрических функций все тех же трех эйлеровых углов Ω, ω, i .

2. Введение векторных элементов $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{W}}$.

Рассмотрим еще одну ортогональную связку единичных векторов $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{\mathbf{W}}$ (рис. 10), для которой установим следующую ориентацию: вектор $\bar{\mathbf{U}}$ направлен из центра масс в мгновенное положение ИСЗ, вектор $\bar{\mathbf{V}}$ составляет с вектором $\bar{\mathbf{U}}$ прямой угол, лежит в плоскости мгновенной орбиты и направлен в сторону возрастания истинной аномалии, а вектор $\bar{\mathbf{W}}$ перпендикулярен к плоскости орбиты и дополняет связку до правой.

Таким образом, триедр $\bar{V}$, $\bar{U}$, $\bar{W}$ постоянно вращается вокруг направления $\bar{W}$ и совпадает с введенным выше триедром $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{W}$ лишь в момент, когда ИСЗ находится в перицентре.

Положим, что начальной эпохе t_0 соответствует фиксированное положение триедра $\bar{U}_0$, $\bar{V}_0$, $\bar{W}_0$, причем, конечно, направление $\bar{W}$ всегда постоянно и индекс нуль здесь поставлен только для общности. Введем вращающуюся систему орбитальных координат, обозначив ее оси соответственно x_ϑ , y_ϑ , z_ϑ , и будем считать, что направления осей совпадают с направлениями $\bar{U}_0$, $\bar{V}_0$, $\bar{W}_0$ в начальную эпоху t_0 . Тогда координаты орбитальной вращающейся системы получим на основании формул

$$\left. \begin{aligned} x_\vartheta &= r \cos(\vartheta - \vartheta_0), \\ y_\vartheta &= r \sin(\vartheta - \vartheta_0), \\ z_\vartheta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.225)$$

Считая направления $\bar{U}_0$, $\bar{V}_0$, $\bar{W}_0$ известными, по аналогии с выводами, которые были сделаны ранее для триедра $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{W}$, можно сразу написать формулы для связи геоцентрических пространственных координат x , y , z и вращающихся орбитальных x_ϑ , y_ϑ , $z_\vartheta = 0$:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x_\vartheta \bar{U}_0 + y_\vartheta \bar{V}_0. \quad (2.226)$$

Обратное преобразование выполняется по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_\vartheta &= xU_x + yU_y + zU_z; \\ y_\vartheta &= xV_x + yV_y + zV_z; \\ z_\vartheta &= xW_x + yW_y + zW_z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.227)$$

Введение векторов $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ позволяет получить еще одну форму задания элементов орбиты в виде

$$[\bar{U}, \bar{V}, a, e \cos E, e \sin E]_{t=t_0}, \quad (2.228)$$

или

$$[\bar{U}, \bar{V}, a, C_e, S_e]_{t=t_0}, \quad (2.229)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_e &= (e \cos E)_0, \\ S_e &= (e \sin E)_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.230)$$

Достоинством такой системы элементов является удобство ее использования для круговых и близких к круговым орбитам.

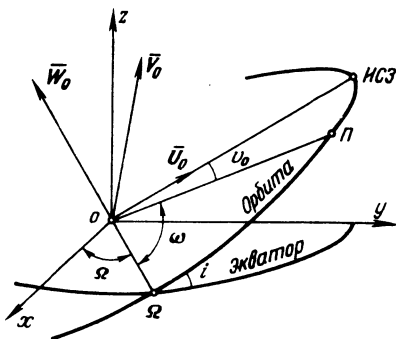


Рис. 10

Получим формулы для вычисления элементов орбиты, заданных в форме (2.229). Пусть для эллиптической орбиты заданы векторы $\bar{\mathbf{r}}_0$ и $\dot{\bar{\mathbf{r}}}_0$ для момента t_0 , тогда, вводя операцию скалярного умножения векторов, можно написать формулы

$$\left. \begin{aligned} r_0^2 &= \bar{\mathbf{r}}_0 \bar{\mathbf{r}}_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2; \\ r \dot{r}_0 &= \bar{\mathbf{r}}_0 \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0 = x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0; \\ \frac{v_0^2}{\mu} &= \frac{\dot{\bar{\mathbf{r}}}_0 \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0}{\mu} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{\mu}; \end{aligned} \right\} \quad (2.231)$$

с другой стороны, интеграл энергии (2.80) дает выражение

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_0} - \frac{v_0^2}{\mu}. \quad (2.232)$$

Выражение для C_e получим на основании уравнения (2.84)

$$C_e = (e \cos E_0) = 1 - \frac{r_0}{a}, \quad (2.233)$$

а дифференцируя выражение (2.84), получим также

$$\dot{r} = ae\dot{E} \sin E. \quad (2.234)$$

откуда выразим элемент S_e :

$$S_e = (a \sin E_0) = \frac{\dot{r}_0}{e\dot{E}_0}. \quad (2.235)$$

Для получения аналитического выражения производной $\dot{E}$ будем исходить из уравнения Кеплера

$$M = M_0 + n(t - t_0) = M_0 + \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \tau = E - e \sin E,$$

дифференцирование которого по модифицированному времени τ приводит к выражению

$$\dot{M} = \sqrt{\mu} a^{-3/2} = (1 - e \cos E) \dot{E}$$

или

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a} = a(1 - e \cos E) \dot{E}.$$

Из последнего выражения получим

$$\dot{E} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{a}},$$

теперь, полагая $\dot{E}_0 = \dot{E}$ при $t = t_0$, имеем выражение (2.235) для S_e в окончательном виде

$$S_e = \frac{r_0 \dot{r}_0}{\sqrt{\mu a}}. \quad (2.236)$$

Эксцентриситет определим теперь на основании формулы

$$e^2 = S_e^2 + C_e^2, \quad (2.237)$$

единичный вектор $\bar{U}_0$ определится из выражения

$$\bar{U}_0 = \frac{\bar{r}_0}{r_0}. \quad (2.238)$$

Связь между векторами $\bar{U}$ и $\bar{V}$ следует непосредственно из рис. 11, на котором вектор $\dot{\bar{r}}$ есть равнодействующая векторов $\dot{r}\bar{U}$ и $r\dot{\theta}\bar{V}$, первый из которых коллинеарен с вектором $\bar{U}$, а второй — с вектором $\bar{V}$.

На основании рис. 11 имеем

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{U} + r\dot{\theta}\bar{V}, \quad (2.239)$$

или

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r} \frac{\bar{r}}{r} + r\dot{\theta}\bar{V},$$

поэтому

$$\bar{V} = \frac{r\dot{\bar{r}} - \dot{r}\bar{r}}{r^2\dot{\theta}}, \quad (2.240)$$

Однако поскольку из интеграла площадей (2.76) следует

$$r^2\dot{\theta} = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (2.241)$$

то

$$\mu = fM, \quad (2.242)$$

и окончательно выражение для $\bar{V}_0$ получим на основании формулы (2.242) в виде

$$\bar{V}_0 = \frac{r_0 \dot{\bar{r}}_0 - \dot{r}_0 \bar{r}_0}{\sqrt{\mu p}}. \quad (2.243)$$

Таким образом, получены все необходимые выражения для переычисления начальных условий в форму (2.229), т. е. для выполнения преобразования

$$\begin{aligned} [x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0] \rightarrow \\ \rightarrow [\bar{U}, \bar{V}, a, C_e, S_e]. \end{aligned}$$

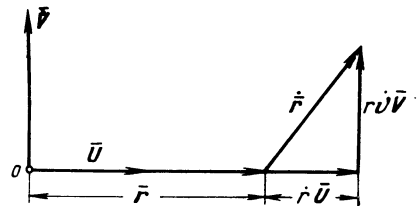


Рис. 11

§ 16. Метод вычисления элементов матрицы производных от координат и составляющих скорости по элементам орбиты, основанный на использовании векторных элементов

Ранее, при выводе дифференциальных формул для координат и составляющих скорости, мы убедились в громоздкости выражений, которые получаются при непосредственном дифференцировании формул связи координат и скорости с элементами орбиты. При этом пришлось наложить ограничения на эксцентриситет, полагая, что $\vartheta - M = e \sin 2M$. Рассмотрим более мощный аппарат для вычисления элементов матрицы

$$E_j = \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j},$$

основанный на использовании векторных элементов $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{W}$ и свободный от ограничений на значение эксцентриситета [20].

Воспользовавшись преобразованием (2.220), запишем его в виде

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{bmatrix} = R(-\Omega) R(-i) R(-\omega) \begin{bmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{bmatrix}, \quad (2.244)$$

где матрицы вращения на отрицательные углы равны транспонированным матрицам вращения $R^T(\Omega)$, $R^T(i)$, $R^T(\omega)$ в формулах (2.12 а, б, в)

$$\left. \begin{aligned} R(-\omega) &= R^T(\omega), \\ R(-i) &= R^T(i), \\ R(-\Omega) &= R^T(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (2.245)$$

Матрица R^T определяет также и преобразование скоростей при переходе от орбитальной к инерциальной геоцентрической системе координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} \dot{x}_\omega \\ \dot{y}_\omega \\ \dot{z}_\omega \end{bmatrix}; \quad (2.246)$$

значения составляющих скорости $\dot{x}_\omega$, $\dot{y}_\omega$, $\dot{z}_\omega$ в орбитальной системе координат получаются дифференцированием по времени выражений (2.218), в результате которого имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_\omega &= -a\dot{E} \sin E; \\ \dot{y}_\omega &= a\dot{E} \sqrt{1-e^2} \cos E; \\ \dot{z}_\omega &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.247)$$

Эти формулы с учетом выражения (2.236) для $\dot{E}$ напомним еще в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_\omega &= -\frac{1}{r} \sqrt{\mu a} \sin E; \\ \dot{y}_\omega &= \frac{1}{r} \sqrt{\mu p} \cos E; \\ \dot{z}_\omega &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.248)$$

где

$$P = a(1 - e^2). \quad (2.249)$$

Теперь матрица производных от координат и составляющих скорости может быть получена дифференцированием формул (2.244) и (2.246)

$$\mathbf{E} = \frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial(\Omega, i, \omega)} \begin{bmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{bmatrix} & \mathbf{R}^T \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, e, M)} \\ \hline \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial(\Omega, i, \omega)} \begin{bmatrix} \dot{x}_\omega \\ \dot{y}_\omega \\ \dot{z}_\omega \end{bmatrix} & \mathbf{R}^T \frac{\partial(\dot{x}_\omega, \dot{y}_\omega, \dot{z}_\omega)}{\partial(a, e, M)} \end{array} \right]. \quad (2.250)$$

Транспонируя матрицы вращения (2.212а, б, в), имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}(-\Omega) &= \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{R}(-i) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}; \\ \mathbf{R}(-\omega) &= \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (2.251)$$

Теперь получим производные $\frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \Omega}$, $\frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial i}$ и $\frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \omega}$, последовательно дифференцируя матрицу $\frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial (\Omega, i, \omega)}$ по ее элементам, каждый из которых зависит только от одного из углов Ω, i, ω

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \Omega} &= \frac{\partial \mathbf{R}(-\Omega)}{\partial \Omega} \mathbf{R}(-i) \mathbf{R}(-\omega) = \begin{bmatrix} -\sin \Omega & -\cos \Omega & 0 \\ \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}(-i) \mathbf{R}(-\omega); \\ \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial i} &= \mathbf{R}(-\Omega) \frac{\partial \mathbf{R}(-i)}{\partial i} \mathbf{R}(-\omega) = \mathbf{R}(-\Omega) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin i & -\cos i \\ 0 & \cos i & -\sin i \end{bmatrix} \mathbf{R}(-\omega); \\ \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \omega} &= \mathbf{R}(-\Omega) \mathbf{R}(-i) \frac{\partial \mathbf{R}(-\omega)}{\partial \omega} = \mathbf{R}(-\Omega) \mathbf{R}(-i) \begin{bmatrix} -\sin \omega & -\cos \omega & 0 \\ \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (2.252)$$

Матрицы $\frac{\partial (x_\omega, y_\omega, z_\omega)}{\partial (a, e, M)}$ и $\frac{\partial (\dot{x}_\omega, \dot{y}_\omega, \dot{z}_\omega)}{\partial (a, e, M)}$ получаются дифференцированием формул (2.218) и (2.248), в результате которого имеем

$$\frac{\partial (x_\omega, y_\omega, z_\omega)}{\partial (a, e, M)} = \begin{bmatrix} \frac{x_\omega}{a} & -a \frac{y_\omega^2}{r(1-e^2)} & -\frac{ay_\omega}{r\sqrt{1-e^2}} \\ \frac{y_\omega}{a} & \frac{x_\omega y_\omega}{r(1-e^2)} & \frac{a}{r} \sqrt{1-e^2} (x_\omega + ae) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.253)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial (\dot{x}_\omega, \dot{y}_\omega, \dot{z}_\omega)}{\partial (a, e, M)} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\dot{x}_\omega}{2a} & \dot{x}_\omega \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[2 \left(\frac{x_\omega}{a}\right) + \frac{e}{1-e} \left(\frac{y_\omega}{a}\right)^2 \right] & -n \left(\frac{a}{r}\right)^3 x_\omega \\ -\frac{\dot{y}_\omega}{2a} & \frac{n}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[\frac{x_\omega^2}{r} - \frac{1}{a(1-e^2)} y_\omega^2 \right] & -n \left(\frac{a}{r}\right)^3 y_\omega \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.254)$$

Таким образом, мы получили все необходимые соотношения для вычисления элементов матрицы $\mathbf{E}$, производных от координат и составляющих скорости по элементам орбиты.

§ 17. Преобразование координат и составляющих скорости при переходе от инерциальной системы координат к гринвичской системе и наоборот

Если результаты измерений получены в гринвичской системе координат $oXYZ$, то для перехода к инерциальной системе $oxyz$ необходимо выполнить преобразование координат и составляющих скорости, для чего необходимо знать элементы матрицы

$$\mathbf{P} = \frac{(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})}{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}, \quad (2.255)$$

Часто необходимо выполнять и обратное преобразование, т. е. осуществлять перевычисление координат и составляющих скорости из инерциальной в гринвичскую систему координат, для чего необходимо знать матрицу

$$\mathbf{M} = \frac{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})}, \quad (2.256)$$

при помощи которой осуществляется обратное преобразование. Вращение гринвичской системы координат происходит против часовой стрелки вокруг положительного направления оси Z . Угловую скорость вращения земли ω_3 будем считать практически постоянной, причем

$$\omega_3 = \frac{dS}{dt} = 0,729211508 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с.} \quad (2.257)$$

Тогда связь инерциальных и гринвичских координат определится из выражения

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.258)$$

Дифференцируя матрицу связи $\mathbf{S}$, получим

$$\dot{\mathbf{S}} = \frac{dS}{dt} \begin{bmatrix} -\sin S & \cos S & 0 \\ -\cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.259)$$

Теперь для составляющих скорости в гринвичской системе координат будем иметь

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \frac{dS}{dt} \dot{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (2.260)$$

или

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \\ + \omega_3 \begin{bmatrix} -\sin S & \cos S & 0 \\ -\cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.261)$$

С учетом выражений (2.258) и (2.261) получим матрицу **M** в виде

$$\mathbf{M} = \frac{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})} = \\ = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos S & \sin S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\omega_3 \sin S & -\omega_3 \cos S & 0 & \cos S & \sin S & 0 \\ -\omega_3 \cos S & -\omega_3 \sin S & 0 & -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (2.262)$$

Для получения элементов матрицы **P** поступаем аналогично. Прежде всего имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \quad (2.263)$$

дифференцируя матрицу **S^T** получим

$$\dot{\mathbf{S}}^T = \frac{dS}{dt} \begin{bmatrix} -\sin S & -\cos S & 0 \\ \cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.264)$$

Составляющие скорости в инерциальной системе координат будут определяться из выражения

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} + \frac{dS}{dt} \dot{\mathbf{S}}^T \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad (2.265)$$

или, на основании формулы (2.264)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} -\sin S & -\cos S & 0 \\ \cos S & -\sin S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \quad (2.266)$$

Формулы (2.263) и (2.266) позволяют определить элементы матрицы

$$\mathbf{P} = \frac{(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})}{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\omega_3 \sin S & -\omega_3 \cos S & 0 & \cos S & -\sin S & 0 \\ \omega_3 \cos S & -\omega_3 \sin S & 0 & \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.267)$$

ГЛАВА 3

МОДЕЛИ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

Все выводы второй главы относились к задаче двух тел, при решении которой предполагается, что движение происходит в центральном поле под действием постоянной центральной силы тяготения с потенциалом

$$V = \frac{\mu}{r}. \quad (3.1)$$

Реальное движение ИСЗ отличается от идеализированного движения в центральном поле вследствие наличия большого числа других сил, суммарное действие которых значительно меньше силы тяготения, создающей центральное поле. Однако именно вследствие действия этих сил шесть элементов кеплеровского эллипса непрерывно изменяются, являясь сложными функциями времени.

Для системы дифференциальных уравнений невозмущенного кеплерова движения

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0; \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0; \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0 \quad (3.2)$$

всегда известно общее решение, которое можно написать в форме

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\Omega, i, \omega, a, e, M, t); \\ y &= f_2(\Omega, i, \omega, a, e, M, t); \\ z &= f_3(\Omega, i, \omega, a, e, M, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

По аналогии с невозмущенным кеплеровым движением, дифференциальные уравнения возмущенного движения формально должны иметь вид

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = W_x; \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = W_y; \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = W_z, \quad (3.4)$$

где W_x , W_y и W_z — компоненты возмущающих ускорений по осям инерциальной системы координат.

Решение этой системы дифференциальных уравнений можно искать в форме

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1[\Omega(t), i(t), \omega(t) \dots M_0(t), t]; \\ y &= f_2[\Omega(t), i(t), \omega(t) \dots M_0(t), t]; \\ z &= f_3[\Omega(t), i(t), \omega(t) \dots M_0(t), t], \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где элементы уже не постоянны, а являются некоторыми соответствующим образом выбранными функциями времени. Полученные таким образом элементы $\Omega(t)$, $i(t)$... $M_0(t)$ называются мгновен-

ными, и их совокупность определяет мгновенную орбиту. Если известны мгновенные элементы, то соответствующие им мгновенные координаты в любой момент t вычисляются по формулам задачи двух тел.

Для невозмущенного движения элементы q_i сохраняют постоянные значения, поэтому подстановка выражений (3.3) в уравнения (3.4) дает три уравнения, которым должны удовлетворять шесть функций: $a(t)$, $e(t)$, ..., $M_0(t)$. Следовательно, мгновенные элементы не определяются однозначно. Для получения однозначного решения мгновенные элементы необходимо подчинять трем дополнительным условиям.

В невозмущенном движении элементы Ω , e ... M_0 постоянны, поэтому формулы (3.3) дают

$$\dot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t}; \quad \dot{y} = \frac{\partial f_2}{\partial t}; \quad \dot{z} = \frac{\partial f_3}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Если мгновенные элементы $q_i(t)$ подчинить условиям

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.7)$$

то формулы (3.6) могут быть использованы для вычисления составляющих скорости и в случае возмущенного движения. Мгновенные элементы, однозначно определяемые уравнениями (3.6) и (3.7), называются оскулирующими.

Таким образом, оскулирующими элементами для момента называется такая система элементов $q_i(t)$, которая дает возможность получить координаты и составляющие скорости по формулам невозмущенного движения.

Соответственно орбита, определяемая оскулирующими элементами в момент t , называется оскулирующей, а t — моментом или эпохой оскуляции. Следовательно, оскулирующая орбита в момент t есть кеплерова орбита, которая соответствует положению и скорости точки в этот момент. Она может быть вычислена по формулам, полученным во второй главе. Введение оскулирующих элементов наиболее эффективно, когда возмущающие ускорения малы по сравнению с ускорением, создаваемым постоянной центральной силой.

Аналитические методы теории возмущений решают задачу построения бесконечных рядов или замкнутых выражений относительно соответствующим образом выбранной переменной для определения положения и скорости спутника в любой момент в будущем или прошлом. Аналитические исследования показывают, что элементы орбиты могут иметь либо вековые, либо периодические возмущения. Вековые возмущения связаны с равномерным отклонением (неколебательного характера) элементов от их значений в эпоху, периодические возмущения вызывают колебания элементов около их значений в эпоху. Периодические возмущения

элементов обычно делят на короткопериодические и долгопериодические. Короткопериодические возмущения накладываются на долгопериодические возмущения и являются тригонометрическими функциями линейных комбинаций истинной аномалии ϑ и аргумента перигея ω , долгопериодические возмущения связаны с тригонометрическими функциями ω и кратных значений ω . Таким образом, возмущенное значение некоторого элемента q может быть символически представлено в виде ряда

$$q = q_0 + \dot{q}_0(t - t_0) + K_1 \cos 2\omega + K_2 \sin (2\vartheta + 2\omega) + \dots, \quad (3.8)$$

где q_0 — среднее значение элемента в эпоху; $\dot{q}_0(t - t_0)$ — вековое возмущение; $k_1 \cos 2\omega$ — долгопериодическое возмущение; $k_2 \sin (2\vartheta + 2\omega)$ — короткопериодическое возмущение.

В зависимости от принятой системы координат или элементов, а также полноты учета возмущающих факторов можно иметь практически неограниченное число моделей возмущенного движения.

Для математика, работающего в области аналитической небесной механики, важно построить аналитическую теорию возмущений, интерпретированную на всей совокупности возможных моделей; таким образом, аналитик идет от теории к реальным системам. В приложениях небесной механики к решению задач космической геодезии необходимо исходить из реальных, конкретных ситуаций, при исследовании которых следует найти и использовать адекватные им математические теории. Замена реальной системы соответствующей моделью позволяет использовать для решения поставленной задачи методы адекватной математической теории, которой для нас может служить теория методов численного интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Помимо нелинейных моделей возмущенного движения, рассмотрим также и линеаризованные модели, которые могут быть получены из нелинейных моделей на основании принципа малых отклонений, последний использует невозмущенное движение в качестве опорного.

§ 18. Модель возмущенного движения в инерциальных прямоугольных координатах

Пусть, кроме центральной силы притяжения сферической Земли, на ИСЗ действуют еще n сил.

Тогда уравнения (2.26), описывающие невозмущенное движение ИСЗ в инерциальных координатах, следует формально записать в виде

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = \sum_1^n X_i; \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = \sum_1^n Y_i; \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = \sum_1^n Z_i, \quad (3.9)$$

где $\sum_1^n X_i$, $\sum_1^n Y_i$ и $\sum_1^n Z_i$ — составляющие возмущающих ус-

корений, создаваемых дополнительными силами. К числу основных дополнительных ускорений, вызывающих возмущения элементов орбит, относятся а) ускорения от аномального гравитационного поля Земли; б) ускорения, вызванные притяжением Луны и Солнца; в) ускорения, вызванные сопротивлением атмосферы; г) ускорения от давления солнечной радиации.

Помимо этих основных источников возмущений, имеется и ряд других, действие которых весьма слабо и учитывается редко. К числу таких факторов относится, например, действие теплового поля Земли и электромагнитных сил.

а. Учет влияния аномального гравитационного поля Земли.

Запишем выражение гравитационного потенциала Земли в виде

$$V = \frac{\mu}{r} + R_V, \quad (3.10)$$

где R_V — возмущающая часть геопотенциала.

Если в дифференциальных уравнениях (3.9) учитывать только действие гравитационного поля Земли и пока пренебречь другими источниками возмущений, то с учетом формулы (3.10) их следует написать в виде

$$\ddot{x} + \mu \frac{x}{r^3} = \frac{\partial R_V}{\partial x}; \quad \ddot{y} + \mu \frac{y}{r^3} = \frac{\partial R_V}{\partial y}; \quad \ddot{z} + \mu \frac{z}{r^3} = \frac{\partial R_V}{\partial z}. \quad (3.11)$$

Величину R_V будем в дальнейшем называть возмущающей или пертурбационной функцией.

Обычно пертурбационная функция представляется в виде разложения по сферическим функциям геоцентрических координат внешней точки

$$R_V = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Phi), \quad (3.12)$$

где, как и в формуле (1.13), a_e — экваториальный радиус Земли; r , Φ и λ — геоцентрический радиус-вектор, геоцентрическая широта и долгота ИСЗ; C_{nm} и S_{nm} — безразмерные коэффициенты, которые часто называют еще гармоническими коэффициентами или стоксовыми постоянными, $P_{nm}(\sin \Phi)$ — присоединенные функции Лежандра.

Присоединенные функции Лежандра относятся к классу сферических функций и возникают при некоторых частных решениях уравнения Лапласа

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (3.13)$$

Присоединенные функции Лежандра определяются выражением

$$P_{nm}(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_{n0}(t)}{dt^m}, \quad (3.14)$$

где $t = \sin \Phi$.

Функции $P_{n0}(t)$ представляют собой полиномы Лежандра, которые в свою очередь определяются на основании формулы Родрига

$$P_{n0}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (3.15)$$

Для полиномов Лежандра $P_{n0}(t)$ справедливо рекуррентное соотношение

$$P_{n+1,0}(t) = \frac{2n+1}{n+1} t P_{n0}(t) - \frac{n}{n+1} P_{0,n-1}(t), \quad (3.16)$$

а для вычисления присоединенных функций Лежандра $P_{nm}(t)$ служит рекуррентное соотношение

$$(2n+1)tP_{nm}(t) = (n-m+1)P_{n+1,m}(t) + (n+m)P_{n-1,m}(t). \quad (3.17)$$

Сферические функции подразделяются на зональные, секториальные и тессеральные в зависимости от линий на сфере, которыми разграничены значения гармоник с различными знаками:

1. Полиномы $P_{n0}(\sin \Phi)$ обращаются в нуль на n параллелях, симметричных относительно экватора, при этом поверхность сферы разбивается на зоны (кольца), при переходе от зоны к зоне знаки полиномов чередуются. Поэтому гармоники с $P_{n0}(t)$ называются зональными.

2. Члены разложения вида $P_{nn}(\sin \Phi) \cos n\lambda$ и $P_{nn}(\sin \Phi) \sin n\lambda$ обращаются в нуль на меридианах сферы, имеющих долготы, при которых $\cos n\lambda = 0$ и $\sin n\lambda = 0$. Этими меридианами сфера разбивается на двугольники, при переходе через границы которых меняется и знак гармоники. Такие члены разложения называются секториальными.

3. Все остальные члены разложения сохраняют знак в пределах сферических трапечий, образованных меридианами и параллелями, на которых они обращаются в нуль. Эти члены разложения называются тессеральными гармониками.

Часто используется и другая форма записи пертурбационной функции, при которой выделяется зональная часть

$$R_V = \frac{\mu}{r} \left[- \sum_{n=2}^{\infty} J_{n0} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \right], \quad (3.18)$$

где $J_{n0} = -C_{n0}$.

Заметим, что различие геоцентрической и геодезической широт существенно лишь для первого члена разложения (3.18), содержащего коэффициент J_2 , который характеризует сжатие Земли и на два порядка превышает остальные члены разложения

$$\begin{aligned} J_2 &= 1082,636 \pm 0,001; & J_3 &= -2,540 \pm 0,003; \\ J_4 &= -1,619; & J_5 &= -0,230; \\ J_6 &= +0,552; & J_7 &= -0,345. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты убывают очень медленно, поэтому при интегрировании уравнений движения низких спутников в разложениях (3.12) и (3.18) приходится учитывать большое число членов. Но при этом быстро возрастают числовые значения коэффициентов в формулах для вычисления полиномов Лежандра $P_{n0}(t)$ и присоединенных функций $P_{nm}(t)$. Ниже приводятся формулы для вычисления функций Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} &t = \sin \Phi; \\ n=0 & \quad P_{00} = 1; \\ n=1 & \quad P_{10} = t; \\ & \quad P_{11} = (1-t^2)^{1/2}; \\ n=2 & \quad P_{20} = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}, \\ & \quad P_{21} = 3t(1-t^2)^{1/2}, \\ & \quad P_{22} = 3(1-t^2); \\ n=3 & \quad P_{30} = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t, \\ & \quad P_{31} = (1-t^2)^{1/2} \left(\frac{15}{2}t^2 - \frac{3}{2} \right), \\ & \quad P_{32} = 15t(1-t^2), \\ & \quad P_{33} = 15(1-t^2)^{3/2}; \\ n=4 & \quad P_{40} = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8}, \\ & \quad P_{41} = (1-t^2)^{1/2} \left(\frac{35}{2}t^3 - \frac{15}{2}t \right), \\ & \quad P_{42} = (1-t^2) \left(\frac{105}{2}t^2 - \frac{15}{2} \right), \\ & \quad P_{43} = 105t(1-t^2)^{3/2}, \\ & \quad P_{44} = 105(1-t^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Дальнейшие вычисления можно продолжать, используя рекуррентные формулы (3.16) и (3.17). Но уже при $n=8$ функция P_{88} принимает значение $P_{88}=2027025(1-t^2)^4$, полиномы более высоких порядков выражаются числами, число разрядов которых уже превышает возможности разрядной сетки ЭВМ. Поэтому возникает необходимость нормирования сферических функций. Нормирую-

щий множитель можно выбирать различным образом, однако удобнее всего такой выбор, при котором интегральная средняя величина квадрата нормированной функции $P_{nm}(t) \frac{\cos m\lambda}{\sin m\lambda}$ была бы равна единице на сфере.

При таком способе нормирования (полное нормирование) коэффициенты в разложениях потенциала вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{nm} &= \frac{C_{nm}}{\sqrt{\frac{(2-\delta_m^0)(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1)}}, \\ \bar{S}_{nm} &= \frac{S_{nm}}{\sqrt{\frac{(2-\delta_m^0)(n-m)!}{(n+m)!} (2n+1)}} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где $\delta_m^0 = 0$, если $m \neq 0$
 1 , если $m = 0$ } есть символ Кронекера.

Поскольку в разложениях (3.12) и (3.18) потенциал и пертурбационная функция заданы через геоцентрические координаты и, следовательно, относительно вращающейся Земли, то в инерциальном пространстве они будут являться функциями звездного времени S .

Для перехода к инерциальным координатам r, α, δ достаточно принять

$$\left. \begin{aligned} \alpha - S &= \lambda, \\ \Phi &= \delta; \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

при этом выражения $\cos m\lambda$ и $\sin m\lambda$ можно вычислять на основании формул

$$\left. \begin{aligned} \cos m\lambda &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} i^n \cos^{m-n} \lambda \sin^n \lambda, \\ \sin m\lambda &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} i^{n-1} \cos^{m-n} \lambda \sin^n \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

где R_e — действительная часть, $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$; $i = \sqrt{-1}$.

Для дальнейшего необходимо располагать производными от пертурбационной функции R_V по инерциальным координатам.

Запишем формулы связи прямоугольных и криволинейных инерциальных координат:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha; \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha; \\ z &= r \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Дифференцируя формулы (3.23) по r , δ , α и решая полученную систему уравнений относительно dr , $d\delta$, $d\alpha$, получим

$$\left. \begin{aligned} dr &= \cos \delta \cos \alpha dx + \cos \delta \sin \alpha dy + \sin \delta dz, \\ d\delta &= -\frac{1}{r} \sin \delta \cos \alpha dx - \frac{1}{r} \sin \delta \sin \alpha dy + \frac{1}{r} \cos \delta dz, \\ d\alpha &= -\frac{1}{r \cos \delta} \sin \alpha dx + \frac{1}{r \cos \delta} \cos \alpha dy. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

Далее запишем выражение $\frac{\partial R_V}{\partial x}$, $\frac{\partial R_V}{\partial y}$, $\frac{\partial R_V}{\partial z}$ как сложные функции r , δ , α :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_V}{\partial x} &= \frac{\partial R_V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial R_V}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial R_V}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}; \\ \frac{\partial R_V}{\partial y} &= \frac{\partial R_V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial R_V}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial R_V}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \\ \frac{\partial R_V}{\partial z} &= \frac{\partial R_V}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial R_V}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial R_V}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

С учетом формул (3.24) эти выражения представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_V}{\partial x} &= \frac{\partial R_V}{\partial r} \cos \delta \cos \alpha - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R_V}{\partial \delta} \sin \delta \cos \alpha - \frac{1}{r \cos \delta} \cdot \frac{\partial R_V}{\partial \alpha} \sin \alpha; \\ \frac{\partial R_V}{\partial y} &= \frac{\partial R_V}{\partial r} \cos \delta \sin \alpha - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R_V}{\partial \delta} \sin \delta \sin \alpha + \frac{1}{r \cos \delta} \cdot \frac{\partial R_V}{\partial \alpha} \cos \alpha; \\ \frac{\partial R_V}{\partial z} &= \frac{\partial R_V}{\partial r} \sin \delta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial R_V}{\partial \delta} \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Найдем производные $\frac{\partial R_V}{\partial r}$, $\frac{\partial R_V}{\partial \delta}$, $\frac{\partial R_V}{\partial \alpha}$. Дифференцируя выражение (3.2) по r , α , δ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_V}{\partial r} &= -\frac{\mu}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+1) \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \times \right. \\ &\times \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \left. \right]; \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial R_V}{\partial \delta} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{a_e}{r} \right) \times \right.$$

$$\times \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \Bigg]; \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial R_V}{\partial \alpha} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{a_e}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=0}^n m (-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right]. \quad (3.29)$$

Производную $\frac{\partial R_V}{\partial \delta}$ удобнее преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial R_V}{\partial \delta} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n \frac{dP_{n0}(\sin \varphi)}{d\varphi} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{a_e}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^m (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \right]. \quad (3.30)$$

Далее необходимо учесть, что на основании формулы (3.14) при $m=1$ можно написать

$$\cos \varphi \frac{dP_{n0}(\sin \varphi)}{d \sin \varphi} = P_{n1}(\sin \varphi) = \frac{dP_{n0}(\sin \varphi)}{d\varphi}, \quad (3.31)$$

а поэтому

$$\frac{\partial R_V}{\partial \delta} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_{n1}(\sin \varphi) + \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{a_e}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) \frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} \right]. \quad (3.32)$$

При этом первые производные функций $\frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi}$ можно получить на основании формулы (3.14)

$$\frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} = -m \sin \varphi \cos^{m-1} \varphi \frac{d^m P_{n0}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^m} + \\ + \kappa \cos^m \varphi \frac{d^{m+1} P_{n0}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^{m+1}} \cos \varphi, \quad (3.33)$$

где $\kappa=1$, если $m \leq n-1$,

$\kappa=0$, если $m=n$.

Для получения производных высших порядков удобнее вывести рекуррентное соотношение.

Поскольку на основании формулы (3.14) можно написать

$$\frac{d^m P_{n0}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^m} = \frac{P_{nm}(\sin \varphi)}{\cos^m \varphi}, \quad (3.34)$$

а также

$$\frac{d^{m+1} P_{n0}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^{m+1}} = \frac{P_{n, m+1}(\sin \varphi)}{\cos^{m+1} \varphi}, \quad (3.35)$$

то рекуррентное соотношение для производных получим в виде

$$\frac{dP_{nm}(\sin \varphi)}{d\varphi} = -m \operatorname{tg} \varphi P_{nm}(\sin \varphi) + \chi P_{n, m+1}^{m+1}(\sin \varphi). \quad (3.36)$$

Теперь, если подставить соотношение (3.36) в формулу (3.30), то получим формулу для вычислений производной $\frac{\partial R_V}{\partial \delta}$ в удобном для вычислений виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_V}{\partial \delta} = & -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n J_n P_{n1}(\sin \varphi) - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \times \right. \\ & \times \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) [m \operatorname{tg} \varphi P_{nm}(\sin \varphi) - \chi P_{n, m+1}(\sin \varphi)] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Таким образом, мы получили все необходимые соотношения для учета аномального гравитационного поля в дифференциальных уравнениях возмущенного движения ИСЗ.

б. Учет влияния притяжения Луны и Солнца.

Если орбита ИСЗ имеет сравнительно небольшую высоту перицентра (например, если высота перицентра лежит в пределах 200—1000 км), то влияние Луны и Солнца на элементы орбиты очень невелико. Хорошей иллюстрацией этого утверждения является табл. 2, которая приводится в работе [36]. В этой таблице даны возмущения в элементах орбиты, вызванные притяжением Луны и Солнца. В качестве примера была взята орбита ИСЗ с большой полуосью $a=7350$ км и эксцентриситетом $e=0,1$.

Как видно из табл. 2, для длительных промежутков времени (порядка года) высота перицентра может измениться на несколько километров, а положение восходящего узла — на 5—7 угловых минут. Как правило, реализация орбитального метода происходит на небольших промежутках времени и эпоха оскуляции отстоит от эпохи последнего орбитального измерения не более чем на 3—5 дней, при этом редко используются ИСЗ с высотой перицентра более 1000 км. При этих условиях вместо точных выражений для

Элемент орбиты	Изменения за один оборот ИСЗ		Изменения за один оборот возмущающего тела	
	влияние Луны	влияние Солнца	влияние Луны	влияние Солнца
Долгота узла	0,17	0,08	34	3,2
Аргумент перицентра	0,29	0,14	2	11,3
Наклонение орбиты	0,17	0,08	0,43	2,4
Эксцентриситет	$2 \cdot 10^{-7}$	$0,93 \cdot 10^{-7}$	$0,41 \cdot 10^{-4}$	$2,31 \cdot 10^{-4}$
Высота перигея	1,5 м	0,6 м	0,3 км	1,7 км
	Суммарное воздействие 2,1 м		Суммарное воздействие за год 5,1 км	

потенциалов сил притяжения Луны и Солнца можно использовать приближенные выражения, соответствующие точечным центральным полям:

$$\left. \begin{aligned} V_{\zeta} &= \frac{fM_{\zeta}}{r_{\zeta}} = \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}}; \\ V_{\odot} &= \frac{fM_{\odot}}{r_{\odot}} = \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где M_{ζ} и $M_{\odot}$ — соответственно массы Луны и Солнца, r_{ζ} и $r_{\odot}$ — расстояния от ИСЗ до центров Луны и Солнца.

Разложим величины, обратные расстояниям r_{ζ} и $r_{\odot}$, в ряды по сферическим функциям. Если обозначить через $r_{\oplus\zeta}$ и $r_{\oplus\odot}$ расстояния между центром масс Земли и центрами масс Луны и Солнца, а через θ_{ζ} и $\theta_{\odot}$ — углы между направлениями из центра масс Земли на спутник и соответственно Луну и Солнце, то разложения по сферическим функциям будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_{\zeta}} &= \frac{1}{r_{\oplus\zeta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{\oplus\zeta}} \right)^n P_{n0}(\cos \theta_{\zeta}); \\ \frac{1}{r_{\odot}} &= \frac{1}{r_{\oplus\odot}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{\oplus\odot}} \right)^n P_{n0}(\cos \theta_{\odot}). \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Тогда, ограничиваясь в разложениях (3.39) степенью $n=4$, выражения потенциалов V_{ζ} и $V_{\odot}$ представим так:

$$\left. \begin{aligned} V_{\zeta} &= \frac{M_{\zeta}}{r_{\oplus \zeta}} \sum_{n=0}^4 \left(\frac{r}{r_{\oplus \zeta}} \right)^n P_{n0}(\cos \theta_{\zeta}); \\ V_{\odot} &= \frac{M_{\odot}}{r_{\oplus \odot}} \sum_{n=0}^4 \left(\frac{r}{r_{\oplus \odot}} \right)^n P_{n0}(\cos \theta_{\odot}). \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Далее нам придется рассмотреть ограниченную задачу n тел, поскольку при выводе значений пертурбационных функций R_{ζ} и $R_{\odot}$ мы не можем игнорировать влияние Солнца для пертурбационной функции Луны и, наоборот, Луны для пертурбационной функции от Солнца. Поэтому рассмотрим системы дифференциальных уравнений движения ИСЗ и центра масс Земли в некоторой произвольной инерциальной прямоугольной системе координат $o\xi\eta\zeta$:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{\mu}{r^3} (\xi_{\oplus} - \xi) + \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} (\xi_{\zeta} - \xi) + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^3} (\xi_{\odot} - \xi); \\ \ddot{\eta} &= \frac{\mu}{r^3} (\eta_{\oplus} - \eta) + \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} (\eta_{\zeta} - \eta) + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^3} (\eta_{\odot} - \eta); \\ \ddot{\zeta} &= \frac{\mu}{r^3} (\zeta_{\oplus} - \zeta) + \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} (\zeta_{\zeta} - \zeta) + \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^3} (\zeta_{\odot} - \zeta); \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_{\oplus} &= \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^3} (\xi_{\odot} - \xi_{\oplus}) + \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} (\eta_{\zeta} - \eta_{\oplus}) + \frac{\mu}{r^3} (\xi - \xi_{\oplus}); \\ \ddot{\eta}_{\oplus} &= \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^3} (\eta_{\odot} - \eta_{\oplus}) + \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} (\eta_{\zeta} - \eta_{\oplus}) + \frac{\mu}{r^3} (\eta - \eta_{\oplus}); \\ \ddot{\zeta}_{\oplus} &= \frac{\mu_{\odot}}{r_{\odot}^3} (\zeta_{\odot} - \zeta_{\oplus}) + \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\zeta}^3} (\zeta_{\zeta} - \zeta_{\oplus}) + \frac{\mu}{r^3} (\zeta - \zeta_{\oplus}). \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

В дифференциальных уравнениях (3.41) и (3.42) величины, относящиеся к ИСЗ, не имеют индекса, а величины, относящиеся к Земле, Луне и Солнцу, снабжены соответственно индексами $\oplus$, ζ и $\odot$.

Если теперь принять, что оси геоцентрической системы координат $oxyz$ и оси системы $o\xi\eta\zeta$ параллельны, и выполнить параллельный перенос системы $o\xi\eta\zeta$ к центру масс Земли, то

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_{\oplus} + x, \\ \eta &= \eta_{\oplus} + y, \\ \zeta &= \zeta_{\oplus} + z. \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Поэтому с учетом уравнений (3.41) и (3.42) в инерциальной геоцентрической системе координат $oxyz$ уравнения движения ИСЗ будут следующими (массой спутника пренебрегают):

$$\ddot{x} = -\mu_{\oplus} \frac{x}{r^3} + \mu_{\zeta} \left(\frac{x_{\zeta} - x}{r_{\zeta}^3} - \frac{x_{\zeta}}{r_{\oplus \zeta}^3} \right) + \mu_{\odot} \left(\frac{x_{\odot} - x}{r_{\odot}^3} - \frac{x_{\odot}}{r_{\oplus \odot}^3} \right) \quad (3.44)$$

(точно такие же уравнения для $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$).

Учтем, кроме того, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2]^{-1/2} = \frac{1}{r^3} (x_1 - x), \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r^3} = \frac{x_1}{r^3};$$

тогда уравнение (3.44) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu_{\oplus} \frac{x}{r^3} = & \mu_{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r_{\zeta}} - \frac{xx_{\zeta} + yy_{\zeta} + zz_{\zeta}}{r_{\oplus \zeta}^3} \right] + \\ & + \mu_{\odot} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{r_{\odot}} - \frac{xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}}{r_{\oplus \odot}^3} \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

и точно такие же уравнения для $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$.

Далее, поскольку

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_{\zeta} &= \frac{1}{rr_{\oplus \zeta}} (xx_{\zeta} + yy_{\zeta} + zz_{\zeta}) = \sin \delta \sin \delta_{\zeta} + \\ &+ \cos \delta \cos \delta_{\zeta} \cos (\alpha - \alpha_{\zeta}), \\ \cos \varphi_{\odot} &= \frac{1}{rr_{\oplus \odot}} (xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}) = \sin \delta \sin \delta_{\odot} + \\ &+ \cos \delta \cos \delta_{\odot} \cos (\alpha - \alpha_{\odot}), \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

то уравнению (3.46) придадим окончательный вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu_{\oplus} \frac{x}{r^3} = & \mu_{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{\zeta}} - \frac{r}{r_{\oplus \zeta}^2} \cos \theta_{\zeta} \right) + \\ & + \mu_{\odot} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{\odot}} - \frac{r}{r_{\oplus \odot}^2} \cos \theta_{\odot} \right). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Из этого уравнения следует, что пертурбационные функции R_{ζ} и $R_{\odot}$, обусловленные притяжением Луны и Солнца, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_{\zeta} &= \mu_{\zeta} \left(\frac{1}{r_{\zeta}} - \frac{r}{r_{\oplus \zeta}^2} \cos \theta_{\zeta} \right), \\ R_{\odot} &= \mu_{\odot} \left(\frac{1}{r_{\odot}} - \frac{r}{r_{\oplus \odot}^2} \cos \theta_{\odot} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

или с учетом членов четвертого порядка в разложении по сферическим функциям

$$\left. \begin{aligned} R_{\zeta} &= \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\oplus \zeta}} \left[1 + \sum_{n=2}^4 \left(\frac{r}{r_{\oplus \zeta}} \right)^n P_{n0}(\cos \theta_{\zeta}) \right] \\ R_{\odot} &= \frac{\mu_{\odot}}{r_{\oplus \odot}} \left[1 + \sum_{n=2}^4 \left(\frac{r}{r_{\oplus \odot}} \right)^n P_{n0}(\cos \theta_{\odot}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Получим теперь производные от пертурбационных функций R_{ζ} и $R_{\odot}$ по координатам. Прежде всего, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial x} &= \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}; \\ \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial y} &= \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y}; \\ \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial z} &= \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Развернув значение R_{ζ} и подставив значение полиномов Лежандра, получим

$$\begin{aligned} R_{\zeta} &= \frac{\mu_{\zeta}}{r_{\oplus \zeta}} \left[1 + \left(\frac{r}{r_{\oplus \zeta}} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta_{\zeta} - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ &\quad + \left(\frac{r}{r_{\oplus \zeta}} \right)^3 \left(\frac{5}{2} \cos^3 \theta_{\zeta} - \frac{3}{2} \cos \theta_{\zeta} \right) + \\ &\quad \left. + \left(\frac{r}{r_{\oplus \zeta}} \right)^4 \left(\frac{35}{8} \cos^4 \theta_{\zeta} - \frac{15}{4} \cos^2 \theta_{\zeta} + \frac{3}{8} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

откуда легко получить производные $\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial r}$, $\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial R_{\zeta}}{\partial \delta}$ с учетом того, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\cos \theta_{\zeta})}{dr} &= 0; \\ \frac{d(\cos \theta_{\zeta})}{d\delta} &= \cos \delta \sin \delta_{\zeta} - \sin \delta \cos \delta_{\zeta} \cos(\alpha - \alpha_{\zeta}); \\ \frac{d(\cos \theta_{\zeta})}{d\alpha} &= -\cos \delta \cos \delta_{\zeta} \sin(\alpha - \alpha_{\zeta}). \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Отметим, что главные члены пертурбационных функций R_{ζ} и $R_{\odot}$, $\frac{\mu_{\zeta}}{r_{\oplus \zeta}}$ и $\frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus \odot}}$ не влияют на движение ИСЗ, так как производные от них по r , δ , α равны нулю.

в. Учет сопротивления атмосферы.

Сила сопротивления, которая возникает при движении тела в молекулярном потоке газа, выражается известной из аэродинамики формулой

$$F = C_x \rho \frac{\bar{v}_{\text{отн}}^2}{2} S_m. \quad (3.54)$$

В формуле (3.54) C_x — коэффициент аэродинамического сопротивления, который принимается постоянным для всех значений скоростей и высот. Как правило, C_x принимается таким, как у сферы. При этом для сферы C_x полагают равным $2,1 \div 2,15$.

Величина ρ в формуле (3.54) представляет собой плотность воздуха, которая является сложной функцией высоты полета, географической широты ИСЗ, изменения солнечной активности, вращения Солнца вокруг своей оси, а также ряда других факторов. Однако, как отмечается в работе [37], зависимость плотности воздуха от того, на дневной или ночной стороне Земли находится перигей, становится заметной при высотах, превышающих 300 км. И только на высотах более 500 км появляются изменения плотности в зависимости от географической широты ИСЗ и солнечной активности. Рассмотрение всех особенностей аппроксимации плотности воздуха как функции указанных факторов выходит за рамки этой книги.

Поэтому рассмотрим аппроксимацию плотности атмосферы как функции только высоты h ИСЗ над Землей

$$\rho = \rho(h). \quad (3.55)$$

Модель атмосферы M1 дает зависимость плотности атмосферы от высоты полета. При этом $\ln \rho(h)$ аппроксимируется квадратной параболой с вершиной в области низких высот

$$\ln \rho = \bar{a}_0 + \chi \sqrt{h - h_0}. \quad (3.56)$$

Числовые значения коэффициентов и параметров в формуле (3.56) следующие [36]:

$$\bar{a}_0 = -20,051; \quad h_0 = 125\,700 \text{ м}; \quad \chi = 0,01449.$$

Высоту полета можно определить по формуле

$$h = \frac{z}{\sin B} - N(1 - \bar{e}^2), \quad (3.57)$$

где N — длина внутренней нормали эллипсоида вращения, $\bar{e}$ — его эксцентриситет. Длина нормали определяется из выражения

$$N = a_e (1 - \bar{e}^2 \sin^2 B)^{-1/2}, \quad (3.58)$$

геодезическую широту B можно определить по приближенной формуле

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} \delta (1 - \bar{e}^2)^{-1}, \quad (3.59)$$

причем для общего земного эллипсоида $a_e = 6378160$ км, $\bar{e}^2 = 0,00669$.

Величина $v_{\text{отн}}$ в формуле (3.54), выражающей силу сопротивления атмосферы, представляет собой скорость ИСЗ относительно атмосферы, вращающейся вместе с Землей.

Относительную скорость ИСЗ $v_{\text{отн}}$ можно вычислить по формуле, которая приводится в работе [37]:

$$v_{\text{отн}} = v \left(1 - \frac{\omega_3 r_\pi}{v_n} \cos i \right), \quad (3.60)$$

где $\omega_3 = 0,000072921$ рад/с — угловая скорость вращения Земли, r_π — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ в перигее орбиты,

$$r_\pi = a(1 - e), \quad (3.61)$$

v — абсолютная скорость ИСЗ, определяемая формулой

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{1 + 2e \cos \vartheta + e^2}, \quad (3.62)$$

а v_n — составляющая абсолютной скорости ИСЗ по трансверсали,

$$v_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta). \quad (3.63)$$

Наконец, величина S_m , входящая в основную формулу (3.54), является площадью миделевого сечения ИСЗ, которая легко определяется для ориентировочного спутника, исходя из его геометрической формы.

Проектируя теперь возмущающее ускорение, вызванное сопротивлением атмосферы, на оси инерциальной системы координат получим

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{F}{m_{\text{ИСЗ}}} \cdot \frac{\dot{x}}{v} = -C_{\text{хр}} \frac{v_{\text{отн}}^2}{2m_{\text{ИСЗ}}} S_m \frac{\dot{x}}{v}; \\ Q_y &= -\frac{F}{m_{\text{ИСЗ}}} \cdot \frac{\dot{y}}{v} = -C_{\text{хр}} \frac{v_{\text{отн}}^2}{2m_{\text{ИСЗ}}} S_m \frac{\dot{y}}{v}; \\ Q_z &= -\frac{F}{m_{\text{ИСЗ}}} \cdot \frac{\dot{z}}{v} = -C_{\text{хр}} \frac{v_{\text{отн}}^2}{2m_{\text{ИСЗ}}} S_m \frac{\dot{z}}{v}, \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

где знак минус в правых частях уравнений (3.64) поставлен в соответствии с тормозящим характером действия атмосферы.

г. Учет светового давления.

Давление солнечного света было, как известно, открыто П. Н. Лебедевым, который одновременно установил, что силы гравитационного и светового полей Солнца эквивалентны в том смысле, что могут с количественной стороны быть описаны одними и теми же уравнениями. Результирующая сила F , с которой Солнце притягивает тело, равна разности между силой ньютоновского притяжения G и силой светового давления H . Таким образом, результирующую силу F можно выразить в долях ньютоновской силы:

$$F = \frac{G-H}{G} = 1 - \frac{3P_c}{4Q_{\text{р}}\rho_{\text{т}}}, \quad (3.65)$$

где Q — ускорение силы тяготения Солнца на расстоянии в одну астрономическую единицу; $r_{\text{т}}$ — радиус сферического тела; $\rho_{\text{т}}$ — массовая плотность тела; P_c — сила давления солнечного света на единицу площади, ориентированной перпендикулярно к направлению солнечных лучей, на расстоянии в одну астрономическую единицу ($A=149\,600 \cdot 10^6$ м). Сила давления $P_c=0,6 \cdot 10^{-6}$ кг/м² для поглощающей поверхности со степенью черноты $A_s=0,72$.

Для ИСЗ отношение $\frac{H}{G}$ — всегда постоянная величина, которая не зависит от расстояния до Солнца, так как P_c и $Q_{\text{т}}$ одинаково зависят от этого расстояния, т. е. обратно пропорциональны его квадрату.

Если заменить в формуле (3.65) P_c и $Q_{\text{т}}$ их числовыми значениями, то получим

$$F = 1 - \frac{0,75 \cdot 10^{-4}}{r_{\text{т}}\rho_{\text{т}}}, \quad (3.66)$$

т. е. отталкивающая лучей $\frac{H}{G} = \frac{0,75 \cdot 10^{-4}}{r_{\text{т}}\rho_{\text{т}}}$ обратно пропорциональна произведению радиуса тела на его плотность.

В более общей форме уравнение (3.65) записывается так:

$$F = 1 - \frac{\chi}{\mu_{\odot} m_{\text{к.а}}} = \frac{f_1}{f}, \quad (3.67)$$

где $\mu_{\odot} = fM_{\odot}$ — гелиоцентрическая гравитационная постоянная; $m_{\text{к.а}}$ — масса космического аппарата; f_1 — новая постоянная,

$$f_1 = f - \frac{\chi}{M_{\odot} m_{\text{к.а}}}, \quad (3.68)$$

константа χ определяется из условия

$$\chi = Hr_{\odot}^2, \quad (3.69)$$

где $r_{\odot}$ — расстояние от ИСЗ до Солнца.

Формула (3.67) принадлежит Ф. Э. Цандеру.

Результирующая сила притяжения аппарата Солнцем будет

$$G_1 = G - H = \frac{f_1 m_{\text{к.а}} M_{\odot}}{r_{\odot}^2}, \quad (3.70)$$

т. е. формула (3.70) имеет точно такой же вид, как и для закона всемирного тяготения, на что также указал Цандер. Поэтому силу светового давления можно учитывать по формулам для учета притяжения ИСЗ Солнцем. Если заменить в выражении для пертурбационной от Солнца $R_{\odot}$ (3.50) величину $\mu_{\odot} = fM_{\odot}$ величиной

$\mu'_{\odot} = f_1 M_{\odot}$, то тем самым будет учтен совместный эффект притяжения Солнца и светового давления.

Сила давления света H для данного ИСЗ рассчитывается по формуле

$$H = \frac{3P_{\text{с}}G}{4Qr_{\text{т}}\rho_{\text{т}}}, \quad (3.71)$$

но при этом ИСЗ, как правило, не является сферой. В первом приближении величину r_m можно вычислить как радиус круга, площадь которого равна площади проекции ИСЗ на плоскость, перпендикулярную к направлению солнечных лучей. Это справедливо только для ориентированного ИСЗ; если же ИСЗ полностью не ориентирован, то необходимо исходить из некоторой средневероятной площади этой проекции. Вообще точный учет сил солнечного давления сделать очень трудно, так как солнечное давление зависит от состояния поверхности тела. Имеет также место и давление земного излучения. В среднем 36% полной инсоляции отражается или рассеивается, а 64% поглощается и затем перераспределяется по широте излучения вновь. Отраженная часть (36%) в основном направлена противоположно непосредственному солнечному излучению. Все это создает дополнительные трудности для учета светового давления.

Солнечное давление на высоте 550 км становится примерно одинаковым с силой сопротивления атмосферы, и его имеет смысл учитывать только для орбит с высотой перицентра более 450 км. Величина возмущений от солнечного давления в значительной ме-

ре зависит от отношения σ -поверхность ИСЗ/масса ИСЗ. Так, например, американский спутник-баллон «Эхо» (сфера диаметром 30 м, масса 70,4 кг), имевший почти круговую орбиту с высотой перигея 1500 км, уменьшил свою высоту за 60 дней на 350 км только вследствие светового давления. При этом орбита вытягивается и перигей опускается в плотные слои атмосферы, где из-за сопротивления воздуха ИСЗ быстро снижается. При определении координат орбитальными методами, как правило, используются спутники с малым отношением поверхности к массе.

Мы рассмотрели все основные источники возмущений, которые необходимо учитывать при составлении дифференциальных уравнений возмущенного движения ИСЗ в прямоугольных инерциальных координатах, и указали правила для вычисления соответствующих возмущающих ускорений. Здесь необходимо отметить, что в зависимости от типа орбиты, интервала времени, на котором реализуется орбитальный метод, а также физических и геометрических свойств самого ИСЗ изменяется и действие тех или иных возмущающих факторов. Так, очевидно, что для высоких ИСЗ с почти круговой орбитой становятся незначительными возмущения, вызванные гармониками высоких порядков в разложении геопотенциала, а также возмущения от сопротивления атмосферы, но зато возрастают возмущения от притяжения Солнцем и Луной; наоборот, для низких спутников существенно влияние атмосферы и высоких гармоник геопотенциала, в то время как возмущениями от Луны, Солнца и солнечного давления часто можно пренебречь. Наиболее сложными в смысле учета возмущающих факторов являются орбиты с большими эксцентриситетами и высотами апогеев. Такими, например, являются орбиты «полусуточных» спутников, имеющих примерно двенадцатичасовой период обращения и эксцентриситет, находящийся за пределом Лапласа.

Следовательно, не может быть как универсальных моделей, обеспечивающих одинаковую точность определения координат и скоростей различных ИСЗ при неизменном порядке учета возмущений, так и универсальных алгоритмов и программ интегрирования уравнений движения.

Тем не менее, предполагая, что в каждом случае вопрос полноты учета различных возмущающих факторов решается отдельно, можно написать окончательно формулы модели возмущенного движения в прямоугольных инерциальных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial R_V}{\partial x} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial x} + \frac{\partial R'_{\odot}}{\partial x} + Q_x; \\ \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial R_V}{\partial y} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial y} + \frac{\partial R'_{\odot}}{\partial y} + Q_y; \\ \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{\partial R_V}{\partial z} + \frac{\partial R_{\zeta}}{\partial z} + \frac{\partial R'_{\odot}}{\partial z} + Q_z, \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

где R_V — часть пертурбационной функции, обусловленная аномальным гравитационным полем Земли, R_ζ — возмущения от притяжения Луны, $R_\odot$ — от совместного действия притяжения Солнца и светового давления; Q_x , Q_y и Q_z — составляющие возмущающего ускорения, вызванного сопротивлением атмосферы.

§ 19. Модели возмущенного движения в оскулирующих элементах

Как уже было сказано выше, возмущающие силы, действующие на спутник, значительно меньше основной, центральной силы, следовательно, и изменение элементов орбиты как функции времени будет происходить медленно. Поэтому для получения моделей возмущенного движения в оскулирующих элементах наиболее плодотворным является принцип вариации производных постоянных, созданный Лагранжем, в котором возмущенное движение рассматривается как непрерывно изменяющееся кеплеровское движение, а истинная орбита — как постоянно и непрерывно изменяющаяся оскулирующая орбита. Идея Лагранжа заключается в использовании шести постоянных интегрирования ($a, e, i, \omega, \Omega, M$) системы уравнений невозмущенного движения в качестве новых переменных. В результате получается система шести дифференциальных уравнений (но уже первого порядка) относительно шести неизвестных функций времени $a(t), e(t), i(t), \omega(t), \dots$, которая, так же как и система уравнений движения в прямоугольных координатах (3.72), не интегрируется в конечном виде. Но преимуществом этой новой системы является то, что при малых возмущающих силах для их решения можно применить метод последовательных приближений. Поэтому аналитические решения в методе Лагранжа можно представить в общей форме

$$q_i = q_i(t_0) + \delta_1 q_i + \delta_2 q_i + \dots + \delta_n q_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

где $\delta_n q_i$ — возмущения n -го порядка относительно возмущающих ускорений, а через $q_i(t_0)$ обозначены значения оскулирующих элементов в начальный момент t_0 .

Если в этих уравнениях отделить вековую часть от периодических членов, то получим

$$q_i = Q_i(t) + P_i,$$

где через $Q_i(t)$ обозначена сумма постоянных начальных значений $q_i(t_0)$ и соответствующих вековых членов, а через P_i — совокупность смешанных и периодических членов. Величины $Q_i(t)$ называются средними элементами, и их применение иногда более удобно, чем применение оскулирующих элементов при построении решений ряда задач небесной механики и теории движения ИСЗ. Формальный путь вывода системы дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах может заключаться в подстановке интегралов задачи двух тел в систему дифференциальных уравнений

(3.72), считая при этом элементы $a, e, i, \dots$ функциями времени. Но такой подход приводит к очень сложным и утомительным преобразованиям, поэтому в небесной механике разработаны специальные методы, которые позволяют получить решение более простыми путями. Такого рода решения приводятся во всех подробностях в работах и учебниках по небесной механике [12], [47], [36], здесь же мы рассмотрим уже готовые результаты и обсудим пути их использования при реализации орбитального метода космической геодезии.

а. Модель Лагранжа — Ньютона.

Система дифференциальных уравнений Лагранжа — Ньютона в оскулирующих элементах имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= W \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i}; \\ \frac{dp}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} r T; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \cos u; \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left(S \sin \vartheta + \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \cos \vartheta + e \frac{r}{p} T \right); \\ \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{1}{e} S \cos \vartheta + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \sin \vartheta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{p} W \operatorname{ctg} i \sin u \right]; \\ \frac{d\bar{u}}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left[1 - \frac{r^3}{\mu p} W \operatorname{ctg} i \sin u - \frac{r^3}{(r)^3} \sqrt{\frac{(p)}{p}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.73)$$

где $\bar{u} = u - (u)$, через (u) обозначено значение аргумента широты в невозмущенном движении, аналогично (r) и (p) — невозмущенные значения параметра p и радиуса-вектора r , при этом для невозмущенного движения на основании выводов второй главы имеем

$$\left. \begin{aligned} (u) &= (\omega) + (\vartheta); \quad r = \frac{(p)}{1 + (e) \cos (\vartheta)}; \\ \operatorname{tg} \frac{(\vartheta)}{2} &= \sqrt{\frac{1 + (e)}{1 - (e)}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}; \\ (E) - (e) \sin (E) - (E_0) + e \sin (E_0) &= \sqrt{\mu} (a)^{-3/2} (t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (3.74)$$

Величины T, S и W есть проекции возмущающего ускорения на оси координатной системы, совпадающей с движущимся спутником, ось S направлена по радиусу-вектору спутника, ось T находится в плоскости оскулирующей орбиты (по трансверсали), а ось W дополняет систему до правой (по бинормали).

Для интегрирования системы уравнений (3.73) необходимо знать начальные условия $\Omega_0, p_0, i_0, e_0, \omega_0, \bar{u}_0$ при $t = t_0$.

В случае, когда эксцентриситет орбиты мал, вместо e и ω вводят другие элементы орбиты:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= e \sin \omega, \\ q_2 &= e \cos \omega, \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

а уравнения для $\frac{de}{dt}$ и $\frac{d\omega}{dt}$ заменяют соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \left[-S \cos u + T \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) \sin u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{\rho} (Tq_1 - Wq_2 \operatorname{ctg} i \sin u) \right], \\ \frac{dq_2}{dt} &= \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \left[S \sin u + T \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) \cos u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{\rho} (Tq_2 + Wq_1 \operatorname{ctg} i \sin u) \right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Вместо времени t в качестве независимой переменной часто используют аргумент широты u или истинную аномалию ϑ .

Переход к u в качестве аргумента происходит на основании формулы [38]:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{\Gamma_u r^2}; \quad \text{или} \quad \frac{dt}{du} = \Gamma_u \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}}, \quad (3.77)$$

где

$$\Gamma_u = \frac{1}{1 - \frac{r^3}{\mu p} W \operatorname{ctg} i \sin u}, \quad (3.78)$$

после чего система уравнений в оскулирующих элементах по переменной u приобретает такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{du} &= W \frac{r^3 \Gamma_u}{\mu p} \cdot \frac{\sin u}{\sin i}; \\ \frac{dp}{du} &= \frac{2\Gamma_u}{\mu} r^3 T; \\ \frac{di}{du} &= \frac{r^3 \Gamma_u}{\mu p} W \cos u; \\ \frac{de}{du} &= \frac{r^2 \Gamma_u}{\mu} \left[S \sin \vartheta + \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) T \cos \vartheta + \frac{er}{\rho} T \right]; \\ \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2 \Gamma_u}{\mu e} \left[-S \cos \vartheta + \left(1 + \frac{r}{\rho} \right) T \sin \vartheta - e \frac{r}{\rho} W \operatorname{ctg} i \sin u \right]; \\ \frac{d\bar{u}}{du} &= 1 - \frac{r^2 \Gamma_u}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{(r^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

Если в качестве переменной используется ϑ , то

$$\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{r^2 \Gamma_{\vartheta}}{\sqrt{\mu p}}, \quad (3.80)$$

где

$$\Gamma_{\vartheta} = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\mu e} S \cos \vartheta - \frac{r^2}{\mu e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \sin \vartheta}. \quad (3.81)$$

Уравнения по ϑ будут иметь точно такой же вид, как и уравнения (3.79), но с заменой Γ_u на Γ_{ϑ} .

Пусть W_r , W_{φ} и W_{λ} — проекции возмущающего ускорения по направлению меридиана (на север) и параллели (на восток), тогда составляющие ускорения по осям S , T , W будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} S &= -W_r; \\ T &= W_{\varphi} \cos \theta + W_{\lambda} \sin \theta; \\ W &= -W_{\lambda} \cos \theta + W_{\varphi} \sin \theta; \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \sin i \frac{\cos u}{\cos \Phi}, \\ \sin \theta &= \frac{\cos i}{\cos \Phi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Например, для пертурбационной функции R_v от аномального гравитационного поля Земли величины W_r , W_{φ} и W_{λ} определяются по формулам (3.27) — (3.29). Аналогично можно получить формулы составляющих S , T , W и для других возмущающих сил.

Подставим значения W_r , W_{φ} и W_{λ} в правые части системы дифференциальных уравнений (3.73) и будем полагать при этом оскулирующие элементы в правых частях в первом приближении постоянными; тогда система уравнений распадается на отдельные уравнения, которые могут быть решены с помощью квадратурных формул:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Omega &= \Omega - \Omega_0 = \int_{i_0}^i \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{\sin u}{\sin i} (-W_{\lambda} \cos \Phi + W_{\varphi} \sin \Phi) dt; \\ \Delta p &= p - p_0 = \int_{i_0}^i 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} r (W_{\varphi} \cos \Phi + W_{\lambda} \sin \Phi) dt; \\ \Delta i &= i - i_0 = \int_{i_0}^i \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u (-W_{\lambda} \cos \Phi + W_{\varphi} \sin \Phi) dt; \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta e &= e - e_0 = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\sin \vartheta W_r + \left[\cos \vartheta + \frac{r}{p} (\cos \vartheta + e) \times \right. \right. \\
 &\times (W_\varphi \cos \Phi + W_\lambda \sin \Phi) \left. \right\} dt; \\
 \Delta \omega &= \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{1}{e} \cos \vartheta W_r + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta \times \right. \\
 &\times (W_\varphi \cos \Phi + W_\lambda \sin \Phi) - \\
 &- \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u (-W_\lambda \cos \Phi + W_\varphi \sin \Phi) \left. \right] dt; \\
 \Delta u &= \bar{u} - \bar{u}_0 = \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left[1 - \frac{r^2}{(r)^2} \sqrt{\frac{(p)}{p}} - \right. \\
 &- \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u (-W_\lambda \cos \Phi + W_\varphi \sin \Phi) \left. \right] dt.
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Интегрирование теперь можно выполнить методом последовательных приближений. Дифференциальные уравнения Лагранжа — Ньютона являются наиболее общим методом описания возмущенного движения в оскулирующих элементах и пригодны для учета действия любых возмущающих сил, в частности и возмущений от сопротивления атмосферы — силы, для которой нельзя составить потенциальный функции.

б. Уравнения Лагранжа.

В одном весьма важном для приложений и анализа случае уравнения Лагранжа — Ньютона могут быть упрощены.

Пусть составляющие возмущающего ускорения по осям инерциальной системы координат являются производными от пертурбационной функции R , т. е.

$$W_x = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad W_y = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad W_z = \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{3.85}$$

где

$$R = R(x, y, z, t).$$

Тогда, как показал Лагранж, дифференциальные уравнения Лагранжа — Ньютона (3.72) можно преобразовать так, чтобы вместо составляющих S , T , W возмущающего ускорения на подвижные оси входили частные производные от пертурбационной функции по элементам оскулирующей орбиты.

В этом случае имеем систему дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial M}; \\
 \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega}; \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}; \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \omega}; \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}; \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R}{\partial a}.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

Таким образом, система (3.86) уравнений Лагранжа предполагает, что возмущающие силы имеют силовую функцию. Из всех рассмотренных нами возмущающих факторов силовой функции не имеет сила сопротивления атмосферы.

Уравнения (3.86) представляют собой весьма удобный аппарат для анализа гравитационных возмущений в элементах орбит.

§ 20. Вековые возмущения первого порядка в элементах орбиты, обусловленные сжатием Земли

Пользуясь уравнениями Лагранжа, получим формулы для вычисления вековых возмущений первого порядка в элементах орбиты, которые вызваны сжатием Земли. С этой целью запишем выражение (3.18) пертурбационной функции R_V , сохранив в ней только основной член с коэффициентом J_2 , характеризующим сжатие Земли:

$$R_2 = -\frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 P_2(\sin \Phi). \quad (3.87)$$

Раскрывая значение $P_2(\sin \Phi)$, на основании формул (3.19) получим

$$R_2 = -\frac{\mu}{r} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \Phi - \frac{1}{2} \right),$$

или

$$R_2 = \mu J_2 \left(\frac{a_e^2}{r^3} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \Phi \right); \quad (3.88)$$

из сферического прямоугольного треугольника орбита — экватор — круг склонений (рис. 12) выразим геоцентрическую широту через элементы орбиты:

$$\begin{aligned}\sin \Phi &= \sin \delta = \sin i \sin (\omega + \vartheta) = \\ &= \sin i \sin u,\end{aligned}\quad (3.89)$$

после чего выражение для пертурбационной функции примет вид

$$R_2 = \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 i \sin^2 (\omega + \vartheta) \right], \quad (3.90)$$

или, поскольку

$$\sin^2 (\omega + \vartheta) = \frac{1}{2} [1 - \cos 2 (\omega + \vartheta)], \quad (3.91)$$

то

$$R_2 = \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i [1 - \cos 2 (\omega + \vartheta)] \right\}. \quad (3.92)$$

Поскольку нас интересуют вековые изменения элементов, то в выражении (3.92) опустим периодический член $\frac{3}{4} \sin^2 i \cos 2 (\omega + \vartheta)$, тогда для R_2 будем иметь

$$R_2 = \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{a_e^2}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right); \quad (3.93)$$

при этом i не испытывает вековых возмущений, так как $\frac{\partial R_2}{\partial \omega} = 0$. Для того, чтобы выявить непериодические возмущения элементов, выражение (3.93) необходимо осреднить на одном обороте. Осреднение будет выполнено, если R_2 предварительно представить в виде

$$R_2 = \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{1}{a^3} \left[\frac{a}{r} \right]_{\text{cp}}^3 a_e^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \quad (3.94)$$

и получить значение интеграла

$$F(M) = \left[\frac{a}{r} \right]_{\text{cp}}^3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r} \right)^3 dM, \quad (3.95)$$

где $F(M)$ — есть средняя величина $\left(\frac{a}{r} \right)^3$ на витке.

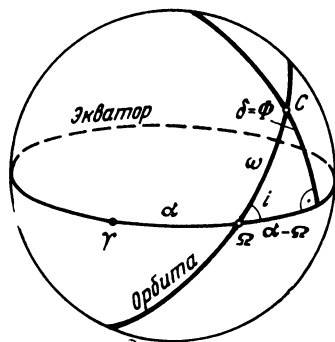


Рис. 12

Для вычисления интеграла (3.95) произведем замену переменных

$$\frac{d\vartheta}{dM} = \frac{dE}{dM} \cdot \frac{d\vartheta}{dE}, \quad (3.96)$$

в результате которой имеем

$$\frac{dM}{d\vartheta} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, \quad (3.97)$$

после чего интеграл (3.95) возьмем в виде

$$\begin{aligned} F(M) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{1+e \cos \vartheta}{(1+e^2)^{3/2}} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1-e^2)^{-3/2} d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e \cos \vartheta}{(1-e^2)^{3/2}} d\vartheta = (1-e^2)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

После всех этих преобразований окончательно получим значение R_2 , подставив в выражение (3.94) вместо величины $F(M)$ ее среднее значение $F(M) = \left[\frac{a}{r}\right]_{\text{ср}}^3 = (1-e^2)^{-3/2}$:

$$R_2 = \frac{3}{2} \mu J_2 \frac{(1-e^2)^{-3/2}}{a^3} a_e^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right). \quad (3.99)$$

Теперь приступим к выводу вековых возмущений первого порядка.

Напишем на основании уравнений Лагранжа (3.86) уравнение для средней аномалии

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1-e^2}{na^2e} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial e} - \frac{2}{na} \cdot \frac{\partial R_2}{\partial a} \quad (3.100)$$

и, дифференцируя выражение (3.99), найдем производные от R_2 по e и a :

$$\frac{\partial R_2}{\partial e} = \mu \left[2 \left(\frac{3}{2} \right)^2 J_2 \frac{a_e^2}{a^3} e (1-e^2)^{-5/2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \right]. \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial a} = \mu \left[-2 \left(\frac{3}{2} \right)^2 J_2 \frac{a_e^2}{a^4} (1-e^2)^{-3/2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 i \right) \right]. \quad (3.102)$$

Тогда с учетом того, что $\mu = n^2 a^3$ и $p = a(1-e^2)$, получим

$$\bar{n} = \frac{dM}{dt} = n \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{p^2} a_e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right], \quad (3.103)$$

где n — невозмущенное среднее движение, p — параметр орбиты. Поскольку средняя аномалия определяется выражением

$$M = n(t - t_\pi), \quad (3.104)$$

где t_π — время последнего прохождения через перигейтр, то в случае кеплерова движения $n = \frac{dM}{dt} = \text{const}$. Для вычисления

же возмущенного значения средней аномалии относительно некоторой произвольной начальной эпохи t_0 следует написать выражение

$$M = M_0 + \dot{M}_0(t - t_0) + n_0(t - t_0), \quad (3.105)$$

где

$$\dot{M}_0 = \bar{n} = \frac{dM_0}{dt},$$

т. е. в виде

$$M = M_0 + \left[\frac{3}{2} J_2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{p^2} a_e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right] n_0(t - t_0) + n_0(t - t_0), \quad (3.106)$$

где M_0 и n_0 — невозмущенные значения средней аномалии и среднего движения в эпоху t_0 .

Для определения вековых возмущений первого порядка в долготе восходящего узла прежде всего напомним соответствующее уравнение Лагранжа:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}. \quad (3.107)$$

Дифференцируя пертурбационную функцию R_2 (3.99) по i , имеем

$$\frac{\partial R_2}{\partial i} = -\frac{3}{2} \mu \frac{J_2}{a^3} a_e^2 (1 - e^2)^{-3/2} \sin i \cos i, \quad (3.108)$$

тогда уравнение (3.107) дает

$$\int d\Omega = \int \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left[-\frac{3}{2} \mu \frac{J_2}{a^3} a_e^2 (1 - e^2)^{-3/2} \right] \sin i \cos i dt, \quad (3.109)$$

но n связано с a соотношением $n^2 a^3 = \mu$, с учетом которого получим предыдущее выражение в виде

$$\int d\Omega = -\frac{3}{2} \cdot \frac{J_2}{p^2} a_e^2 \cos i \int n dt. \quad (3.110)$$

Теперь, принимая во внимание соотношения

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 + \bar{n}(t - t_0), \\ \int n dt &= M - M_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.111)$$

и интегрируя (3.110), получим

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}_0(t - t_0) = \Omega_0 - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{J_2}{p^2} a_e^2 \cos i \right) \bar{n}(t - t_0). \quad (3.112)$$

Рассматривая далее уравнение Лагранжа для $\frac{d\omega}{dt}$ и интегрируя его точно таким же способом, получим формулу для учета вековых возмущений первого порядка в аргументе перицентра ω :

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}_0(t - t_0) = \omega_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{J_2}{p^2} a_e^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \bar{n}(t - t_0). \quad (3.113)$$

На основании проведенного анализа вековых возмущений первого порядка можно сделать следующие выводы.

1. Элементы a , e , i вообще не имеют вековых возмущений первого порядка (от сжатия Земли), поскольку соответствующие производные от пертурбационной функции R_2 по элементам M и ω равны нулю.

2. Возмущения в элементах M , Ω и ω вычисляются в следующем порядке:

а) аномалистическое среднее движение и период

$$\left. \begin{aligned} \bar{n} &= n_0 \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{p^2} a_e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \right]; \\ \bar{T} &= \frac{2\pi}{\bar{n}}; \end{aligned} \right\} \quad (3.114)$$

б) возмущенная средняя аномалия M

$$M = M_0 + \dot{M}_0(t - t_0) + n_0(t - t_0) = M_0 + \bar{n}(t - t_0), \quad (3.115)$$

в) возмущенная долгота восходящего узла

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} \left(\frac{J_2}{p^2} a_e^2 \cos i \right) \bar{n}(t - t_0) = \Omega_0 + \dot{\Omega}_0(t - t_0), \quad (3.116)$$

г) возмущенный аргумент перицентра

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{J_2}{p^2} a_e^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \bar{n}(t - t_0) = \omega_0 + \dot{\omega}_0(t - t_0). \quad (3.117)$$

3. Сжатие Земли вызывает вековые уходы долготы восходящего узла и аргумента перицентра почти для всех орбит. Исключением являются полярные орбиты ($i=90^\circ$), у которых отсутствует вековое возмущение узла, а также орбиты с так называемым критическим наклонением

$$i = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = 63,43^\circ,$$

у которых, как следует из (3.117), нет векового движения перицентра.

Вековое движение узла (прецессия) происходит так, что линия узлов непрерывно отступает, вращаясь в сторону, противоположную движению спутника. Поэтому при прямом движении ИСЗ, т. е. при таком, которое происходит в направлении от оси x к оси y (если смотреть со стороны положительного направления оси z), спутник, совершив один оборот, будет всегда пересекать экватор западнее, чем раньше, даже если предположить, что Земля не вращается. Происходит регрессия (отступление) восходящего узла. При обратном движении восходящий узел отступает с запада на восток. Для круговых орбит, близких к экваториальным, регрессия узла происходит быстрее всего. Например, для низких орбит оно составляет $0,6^\circ$ по экватору за 1 виток, т. е. примерно $9'$ в сутки. При этом спутник смещается за один виток на 34 км в направлении, перпендикулярном к плоскости орбиты. Вековое движение аргумента перицентра заставляет большую полуось непрерывно поворачиваться в плоскости орбиты. При наклонениях i , меньших критического $69,43^\circ$, перигей смещается в направлении движения спутника, а при наклонениях больших критического — в противоположном.

4. Вековые возмущения, обусловленные сжатием, в основных чертах определяют эволюцию орбит ИСЗ, поскольку остальные члены разложения пертурбационной функции R_V в несколько сот раз меньше основного члена разложения, содержащего J_2 .

§ 21. Линеаризованные модели возмущенного движения. Метод Энке

Будем считать опорным полностью определенное движение, относительно которого рассматриваются близкие к нему возмущенные движения. Орбиту, соответствующую опорному движению, назовем промежуточной. Наиболее простой промежуточной орбитой является орбита невозмущенного (кеплерова) движения. Учитывая вековые возмущения первого порядка на основании правил, изложенных в предыдущем параграфе, получим уже более сложную модель опорного движения, относительно которой возмущения элементов будут значительно меньше. Этот процесс можно продолжать, получая некоторую последовательность опорных движений и соответствующих им промежуточных орбит. Таким образом, понятие промежуточной орбиты включает в себе принцип последовательного перехода от самой простой формы орбиты к более сложным, которые уже не выражаются конечными формулами, но более точно характеризуют истинное движение.

Запишем модели опорного движения в общем виде. Для этого представим совокупность меняющихся во времени параметров (координат и скоростей или элементов) n -мерным вектором фазовых координат

$$\bar{\mathbf{X}}(t) = \begin{vmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{vmatrix}. \quad (3.118)$$

Кроме того, введем k -мерный вектор характеристик модели движения ИСЗ.

$$\bar{\mathbf{\Lambda}}(t) = \begin{vmatrix} \Lambda_1(t) \\ \Lambda_2(t) \\ \vdots \\ \Lambda_n(t) \end{vmatrix}. \quad (3.119)$$

Под характеристиками модели $\Lambda_1(t)$, $\Lambda_2(t)$, ..., $\Lambda_k(t)$ будем понимать компоненты вектора $\bar{\mathbf{\Lambda}}(t)$, учитывающие действие гравитационного поля Земли, сопротивления атмосферы и другие условия полета ИСЗ. В общем случае характеристики являются функциями времени. Однако, на интервале реализации орбитального метода $t-t_0$ переменные характеристики можно представить линейной комбинацией известных функций времени и постоянных. Поэтому вместо переменного вектора $\mathbf{\Lambda}(t)$ будем рассматривать постоянный k -мерный вектор

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{vmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_k \end{vmatrix}; \quad (3.120)$$

тогда модель опорного движения можно представить в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{X}_j = f_j(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{\Lambda}} | t), \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3.121)$$

где $f_j(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{\Lambda}} | t)$ являются известными функциями времени и векторов $\bar{\mathbf{X}}$, $\bar{\mathbf{\Lambda}}$, при этом время не входит в f_j явно. Такие системы называются автономными.

Модель возмущенного движения представим следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = f_j(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{\lambda}} | t), \quad (3.122)$$

где $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{\lambda}}$ — векторы параметров и характеристик возмущенного движения; $f_j(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{\lambda}} | t)$ — известные функции $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{\lambda}}$ и t .

Решением системы уравнений (3.121) опорного движения при начальных условиях

$$t = t_0; \quad X_1 = X_{10}; \quad X_2 = X_{20}; \quad \dots; \quad X_n = X_{n0} \quad (3.123)$$

будут величины

$$X_1 = X_1(t), X_2 = X_2(t); \dots; X_n = X_n(t), \quad (3.124)$$

характеризующие изменения параметров опорного движения во времени.

Точно так же для возмущенного движения, определяемого системой уравнений (3.122), будем иметь начальные условия

$$t = t_0; \quad x_1 = x_{10}; \quad x_2 = x_{20}; \dots; x_n = x_{n0} \quad (3.125)$$

и решение

$$x_1 = x_1(t); \quad x_2 = x_2(t); \dots; x_n = x_n(t). \quad (3.126)$$

Тогда параметры $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ возмущенного движения определяются формулами

$$x_1 = X_1 + \Delta x_1; \quad x_2 = X_2 + \Delta x_2; \dots; x_n = X_n + \Delta x_n, \quad (3.127)$$

а характеристики λ_j получаются в виде

$$\lambda_1 = \Lambda_1 + \Delta \lambda_1; \quad \lambda_2 = \Lambda_2 + \Delta \lambda_2; \dots; \lambda_k = \Lambda_k + \Delta \lambda_k. \quad (3.128)$$

Если теперь подставить соотношения (3.127) и (3.128) в дифференциальные уравнения (3.122), допуская при этом, что правые части этих уравнений могут быть разложены в ряды по степеням отклонений $\Delta x_j (j=1, 2, \dots, n)$ и $\Delta \lambda_k (k=1, 2, \dots, m)$, то система (3.122) получится в виде

$$\begin{aligned} \dot{X}_j + \dot{\Delta x}_j = f_j(\bar{X}, \bar{\Lambda} | t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(\bar{X}, \bar{\Lambda} | t)}{\partial x_i} \Delta x_i + \\ + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j(\bar{X}, \bar{\Lambda} | t)}{\partial \lambda_k} \Delta \lambda_k + R_j, \end{aligned} \quad (3.129)$$

где R_j — остаточный член разложения.

Вычитая из уравнений (3.129) уравнения опорного движения (3.121) и пренебрегая остаточным членом R_j , будем иметь линеаризованную модель движения

$$\dot{\Delta x}_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(\bar{X}, \bar{\Lambda} | t)}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j(\bar{X}, \bar{\Lambda} | t)}{\partial \lambda_k} \Delta \lambda_k. \quad (3.130)$$

Если выполнить линеаризацию модели возмущенного движения в инерциальных координатах, то получим линеаризованную модель, соответствующую методу Энке, который был им детально разработан в 1857 г. для аналитического определения возмущений в элементах орбит малых планет и комет.

Для вывода уравнений метода Энке в векторной и матричной форме воспользуемся методикой, приведенной в работе [5].

Моделью опорного движения в данном случае будет кеплерово движение, которое в векторной форме представляется следующей системой уравнений:

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}_0 = -\mu \frac{\bar{\mathbf{r}}_0}{r_0^3}; \quad \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_0, \quad (3.131)$$

где нуль указывает на принадлежность векторов к опорному движению; модель возмущенного движения представим с учетом возмущений от аномального гравитационного поля Земли в виде

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = \mu \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} + \bar{\mathbf{g}}^*; \quad \Delta \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \Delta \bar{\mathbf{v}}, \quad (3.132)$$

где

$$\bar{\mathbf{g}}^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_V}{\partial x} \\ \frac{\partial R_V}{\partial y} \\ \frac{\partial R_V}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (3.133)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_0 + \Delta \bar{\mathbf{v}}; \quad \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + \Delta \bar{\mathbf{r}}.$$

Теперь, применяя к системе уравнений (3.132) формулу (3.130), получим

$$\Delta \dot{\bar{\mathbf{v}}} = 3 \frac{\mu}{r^4} \bar{\mathbf{r}} \Delta r - \frac{\mu}{r^3} \Delta \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{g}}^*, \quad \Delta \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \Delta \bar{\mathbf{v}}. \quad (3.134)$$

Исключим из формулы (3.134) скалярное приращение Δr , для чего введем единичный вектор $\bar{\mathbf{e}}_r = \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r}$

$$\frac{3\mu}{r^4} (\bar{\mathbf{r}} \Delta r) = \frac{3\mu}{r^5} \bar{\mathbf{r}} (\bar{\mathbf{r}} \Delta \bar{\mathbf{r}}) = \frac{3\mu}{r^3} \bar{\mathbf{e}}_r (\bar{\mathbf{e}}_r \Delta \bar{\mathbf{r}}); \quad (3.135)$$

тогда получим систему дифференциальных уравнений метода Энке в векторной форме

$$\Delta \dot{\bar{\mathbf{v}}} = \frac{\mu}{r^3} [3\bar{\mathbf{e}}_r (\bar{\mathbf{e}}_r \Delta \bar{\mathbf{r}}) - \Delta \bar{\mathbf{r}}] + \bar{\mathbf{g}}^*; \quad \Delta \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \Delta \bar{\mathbf{v}}. \quad (3.136)$$

В координатной форме уравнениям (3.136) будет соответствовать система трех дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{x}{r} \delta r - \delta x \right) + \frac{\partial R_V}{\partial x}; \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{y}{r} \delta r - \delta y \right) + \frac{\partial R_V}{\partial y}; \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{z}{r} \delta r - \delta z \right) + \frac{\partial R_V}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

где

$$\delta r = \frac{x}{r} \delta x + \frac{y}{r} \delta y + \frac{z}{r} \delta z. \quad (3.138)$$

Если возмущения второго порядка значительны и ими нельзя пренебречь, то уравнения метода Энке будут иметь более сложный вид [8]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} (Fqx - \delta x) + \frac{\partial R_V}{\partial x}; \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} (Fqy - \delta y) + \frac{\partial R_V}{\partial y}; \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} (Fqz - \delta z) + \frac{\partial R_V}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.139)$$

где

$$q = \frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r^2}, \quad (3.140)$$

$$F = \frac{1 - (1 + 2q)^{-3/2}}{q} \approx 3 - \frac{15}{2} q. \quad (3.141)$$

Интегрирование системы (3.137) или (3.139) возможно только методом последовательных приближений. Поскольку в первом приближении величины δx , δy и δz неизвестны, правые части дифференциальных уравнений (3.137) или (3.139) будут вычисляться с координатами x_0 , y_0 , z_0 , соответствующими невозмущенному движению; если ввести обозначения

$$\left(\frac{\partial R_V}{\partial x} \right)_{x=x_0} = F_x(t); \quad \left(\frac{\partial R_V}{\partial y} \right)_{y=y_0} = F_y(t); \quad \left(\frac{\partial R_V}{\partial z} \right)_{z=z_0} = F_z(t), \quad (3.142)$$

то уравнения Энке, соответствующие первому приближению, будут

$$\frac{d^2(\delta x)}{dt^2} = F_x(t); \quad \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} = F_y(t); \quad \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} = F_z(t), \quad (3.143)$$

решение которых с точностью до постоянных интегрирования приводится к квадратурам:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \int dt \int F_x(t) dt; \\ \delta y &= \int dt \int F_y(t) dt; \\ \delta z &= \int dt \int F_z(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (3.144)$$

Представим теперь уравнения (3.136) метода Энке в матричной форме. С этой целью спроектируем левые и правые части уравнений (3.136) на оси инерциальной системы координат. При этом векторам $\overline{\Delta \mathbf{v}}, \overline{\Delta \mathbf{r}}, \overline{\Delta \mathbf{v}}, \overline{\Delta \mathbf{r}}, \overline{\mathbf{g}^*}, \overline{\mathbf{e}_r}$ ставятся в соответствие векторы-столбцы $\overline{\Delta \mathbf{v}}, \overline{\Delta \mathbf{r}}, \overline{\Delta \mathbf{v}}, \overline{\Delta \mathbf{r}}, \overline{\mathbf{G}^*}, \overline{\mathbf{e}_r}$, элементами которых будут составляющие этих векторов по осям инерциальной системы координат.

Тогда получим [6]

$$\left. \begin{aligned} \overline{\Delta \dot{\mathbf{v}}} &= \frac{\mu}{r^3} (3\overline{\mathbf{e}_r} \overline{\mathbf{e}_r}^T + \mathbf{E}) \overline{\Delta \mathbf{r}} + \overline{\mathbf{G}^*}, \\ \overline{\Delta \dot{\mathbf{r}}} &= \overline{\Delta \mathbf{v}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.145)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица третьего порядка; $\overline{\mathbf{e}_r}^T$ — транспонированный вектор-столбец $\overline{\mathbf{e}_r}$.

Система матричных уравнений (3.145) может быть получена в виде одного матричного уравнения [6]:

$$\overline{\Delta \dot{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t) \overline{\Delta \mathbf{x}} + \overline{\mathbf{Q}}(t), \quad (3.146)$$

где

$$\overline{\Delta \mathbf{x}} = \begin{vmatrix} \overline{\Delta \mathbf{r}} \\ \overline{\Delta \mathbf{v}} \end{vmatrix}; \quad \overline{\Delta \dot{\mathbf{x}}} = \begin{vmatrix} \overline{\Delta \dot{\mathbf{r}}} \\ \overline{\Delta \dot{\mathbf{v}}} \end{vmatrix}, \quad (3.147)$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ \overline{\Gamma}(t) & 0 \end{vmatrix}; \quad \overline{\mathbf{Q}}(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ \overline{\mathbf{g}^*} \end{vmatrix}, \quad (3.148)$$

$\overline{\Gamma}(t)$ — симметрическая матрица (3×3) , имеющая вид

$$\overline{\Gamma}(t) = \frac{\mu}{r^3} \begin{vmatrix} 3l^2 - 1 & 3lm & 3nl \\ 3ml & 3m^2 - 1 & 3mn \\ 3nl & 3nm & 3n^2 - 1 \end{vmatrix}, \quad (3.149)$$

где l, m, n — направляющие косинусы вектора $\overline{\mathbf{e}_r}$ в инерциальной системе координат.

§ 22. Промежуточная орбита, основанная на решении задачи двух неподвижных центров. Метод Е. П. Аксенова

1. Теория задачи.

Задача двух неподвижных центров состоит в исследовании движения спутника с пренебрегаемо малой массой, притягиваемого двумя конечными неподвижными точечными массами. Эта задача была впервые решена Эйлером (1760 г.), который показал, что решение можно выразить через эллиптические интегралы, не прибегая к бесконечным рядам. В дальнейшем задаче двух неподвижных центров было посвящено много работ и специальных исследований. В 1961 г. Е. П. Аксенов, Е. А. Гребенников и В. Г. Демин [2, 3] предложили использовать задачу двух неподвижных центров для построения теории движения ИСЗ в гравитационном поле Земли. В результате была получена наиболее общая форма промежуточного потенциала, допускающая интегрирование уравнений движения в квадратурах.

В процессе этих исследований было установлено, что потенциал поля притяжения двух неподвижных точек M_1 и M_2 , имеющих равные массы и удаленных друг от друга на расстояние $2c$, где $i = \sqrt{-1}$, а c — положительное действительное число, можно представить в форме

$$V_{2c} = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) \right], \quad (3.150)$$

где V_{2c} — потенциал задачи двух неподвижных центров. Если в модели потенциала Земли сохранить лишь четные зональные гармоники, то такая модель гравитационного поля Земли будет иметь вид

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \Phi) \right], \quad (3.151)$$

где

$$J_n = -C_{n0}.$$

Сравнивая выражения (3.150) и (3.151), убеждаемся в их формальной аналогии. Поэтому, если принять

$$c = \sqrt{-C_{20}} a_e, \quad (3.152)$$

то в разложениях (3.150) и (3.151) совпадут первые два члена, а третьи члены ($n=2$) будут почти равны. Если теперь строить теорию движения ИСЗ с потенциалом, соответствующим задаче двух неподвижных центров, то надо принять, что точечные массы M_1 и M_2 равны между собой и соответствуют половине массы Земли, т. е. $M_1 = M_2 = \frac{M}{2}$, а расстояние между неподвижными центрами равно $2ic$, где $c \approx 209,8$ км.

Такая промежуточная орбита будет значительно лучшим приближением к реальной орбите, чем кеплерова, так как будет учитывать не только возмущения от полярного сжатия Земли, но и основные возмущения от зональной гармоник с коэффициентом J_4 .

Следующий шаг в развитии этой проблемы был сделан Е. П. Аксеновым, показавшим, что если обобщить проблему двух неподвижных центров, полагая, что массы их составляют $\frac{M}{2} (1 + i\sigma)$ и $\frac{M}{2} (1 - i\sigma)$, а расстояние между ними $2ic$, то потенциал притяжения является действительной функцией, имеющей вид

$$V'_{2c} = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) \right], \quad (3.153)$$

где коэффициенты J'_n получаются на основании уравнения

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{c}{a_e} \right)^n \{ (1 + i\sigma)(\sigma + i)^n + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^n \}. \quad (3.154)$$

Если теперь написать выражение для потенциала Земли с учетом лишь зональной части

$$V_3 = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) \right], \quad (3.155)$$

то опять убеждаемся в формальной аналогии выражений (3.153) и (3.155). Выбирая значения произвольных постоянных c и σ так, чтобы они удовлетворяли равенствам $J'_2 = J_2$ и $J'_3 = J_3$, на основании (3.147) получим систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} c^2 (1 + \sigma^2) &= J_2 a_e^2, \\ 2c^3 \sigma (1 + \sigma^2) &= J_3 a_e^3, \end{aligned} \right\} \quad (3.156)$$

из решения которой для определения постоянных c и σ имеем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} c &= a_e \sqrt{J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2}, \\ \sigma &= \frac{J_3}{2J_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.157)$$

Так как для Земли $J_2 > 0$, а $|J_2| > \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2$, то σ и c являются действительными числами, равными

$$c = 209,729 \text{ км}; \quad \sigma = -0,035647;$$

при этом J'_n для $n \geq 6$ уже будут меньше 10^{-9} .

Введем теперь пертурбационную функцию

$$R'_V = V_3 - V_{2c}, \quad (3.158)$$

где V_3 — потенциал Земли с учетом только его зональной части (формула (3.155), а V_{2c} — потенциал обобщенной задачи двух неподвижных центров (формула 3.153), тогда

$$R'_V = \frac{\mu}{r} \sum_{n=4}^{\infty} k_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi), \quad (3.159)$$

где

$$k_n = -(J_n - J'_n). \quad (3.160)$$

Постоянные k_n имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} k_4 &= 0,427 \cdot 10^{-6}; & k_5 &= 0,236 \cdot 10^{-6}; \\ k_6 &= -0,502 \cdot 10^{-6}; & k_7 &= 0,361 \cdot 10^{-6}; \\ k_8 &= 0,118 \cdot 10^{-6}; & k_9 &= 0,100 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Таким образом, если выбрать c и σ на основании условий (3.157), то первые три члена формулы (3.155) будут совпадать с соответствующими членами разложения (3.153).

Очевидно, что промежуточная орбита, полученная на основании обобщенной задачи двух неподвижных центров, будет с высокой точностью приближаться к реальной орбите.

Если в качестве опорного принять движение ИСЗ в поле тяготения двух неподвижных центров, то линеаризованная модель, соответствующая методу Энке, будет представлять весьма удобный аппарат для численного интегрирования при определении остаточных возмущений от гравитационного поля Земли и других возмущений.

Существуют и другие модели потенциала, соответствующие замкнутым решениям для промежуточных орбит. Однако можно показать, что они являются частным случаем потенциала задачи двух неподвижных центров. Методы построения опорных движений исследованы в работах Дж. Винти, М. Д. Кислика, И. Ижака, Р. Баррара.

Рассмотрим теперь в основных чертах интегрирование дифференциальных уравнений движения ИСЗ в гравитационном поле двух неподвижных центров.

Для этого необходимо ввести так называемые сжатые сфероидальные координаты ξ, η, α . Начало координат этой системы совпадает с центром масс Земли, основная плоскость — с плоскостью экватора, а основная ось направлена в точку весеннего равноденствия.

Поверхности $\xi = \text{const}$ есть сжатые сфероиды, сечениями которых являются круги, перпендикулярные к оси z , и эллипсы в ме-

ридиональных сечениях; поверхности $\eta = \text{const}$ — однополостные гиперболоиды вращения; поверхности $\alpha = \text{const}$ — плоскости, через которые проходит полярная ось.

В этой системе координат положение ИСЗ определится следующими координатами:

ξ — псевдорADIUS — вектор, одна из координат которого при больших значениях радиуса-вектора, приближенно с ним совпадает; η — псевдосклонение — координата, имеющая для больших значений модуля радиуса-вектора тот же смысл, что и синус склонения ($\eta = \sin \delta$); α — прямое восхождение.

Связь сжатых сфероидальных координат ξ, η, α с прямоугольными инерциальными координатами устанавливается формулами

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos \alpha, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin \alpha, \\ z &= c\sigma + \xi\eta, \end{aligned} \right\} \quad (3.161)$$

где c и σ — постоянные задачи двух неподвижных центров. Вообще величина c представляет собой аппликату шаровой точки инерции сфероидальной планеты. Подробное изложение сведений о сфероидальных координатах приводится в книге В. Г. Демина [11].

Кинетическая энергия T и потенциал W в сжатых сфероидальных координатах имеют вид

$$T = \frac{J}{2} \left[\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 + c^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} + \frac{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)}{J} \dot{\alpha}^2 \right], \quad (3.162)$$

$$W = \frac{\mu(\xi - c\sigma\eta)}{J}, \quad (3.163)$$

где

$$J = \xi^2 + c^2\eta^2.$$

С помощью выражений для кинетической энергии и потенциала можно составить дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2 + c^2}{2J} \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1 - \eta^2}{2J} \left(\frac{\partial S}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{2(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)^2 = \\ = \frac{\mu(\xi - c\sigma\eta)}{J} + \bar{C}_1, \end{aligned} \quad (3.164)$$

где S — некоторая неизвестная функция ξ, η, α и t , а $\bar{C}_1$ — постоянная. Это уравнение является дифференциальным уравнением Гамильтона—Якоби, и в теории возмущенного движения [44] доказывается, что полный интеграл S этого уравнения можно получить методом разделения переменных в следующем виде:

$$S = \int \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2 + c^2} d\xi + \int \frac{\sqrt{\Phi(\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta + \bar{C}_3 \alpha; \quad (3.165)$$

здесь

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\xi) &= (\xi^2 + c^2)(2\bar{C}_1\xi^2 + 2\mu\xi - \bar{C}_2^2) + c^2\bar{C}_3^2, \\ F(\eta) &= (1 - \eta^2)(2\bar{C}_1c^2\eta^2 - 2\mu\sigma\eta + \bar{C}_2^2) - \bar{C}_3^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.166)$$

где $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$ — произвольные постоянные.

На основании формулы (3.165) определяются три первых интеграла задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{J}; \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\sqrt{F(\eta)}}{J}; \\ (1 - \eta^2)^2 (\xi^2 + c^2) \frac{d\alpha}{dt} &= \bar{C}_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.167)$$

Если ввести новую независимую переменную τ по уравнению

$$dt = Jd\tau, \quad (3.168)$$

то на основании формул (3.167) получим

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} &= \tau + \bar{q}_1; \quad \int \frac{d\eta}{\sqrt{F(\eta)}} = \tau + \bar{q}_2; \\ \alpha &= \bar{C}_3 \int \frac{\xi^2 + c^2\eta^2}{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} d\tau + \bar{q}_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.169)$$

где $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ — произвольные постоянные, введенные интегрированием. Таким образом, первые три произвольные постоянные ($\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3$) есть результат решения уравнения Гамильтона — Якоби, а постоянные $\bar{q}_1, \bar{q}_2$ и $\bar{q}_3$ вводятся интегрированием независимых уравнений (3.167). Теперь, чтобы получить ξ, η и α как явные функции времени, необходимо обратить квадратуры (3.169). Для этого находим ξ и η как явные функции τ из первых двух уравнений (3.169), после чего третье уравнение дает α как функцию τ , а при помощи формулы (3.168) связываем переменную τ с временем t .

2. Алгоритм вычисления координат ИСЗ для промежуточной орбиты, основанной на задаче двух неподвижных центров [3, 44].

Пусть на начальную эпоху t_0 заданы элементы кеплеровой орбиты $(a, e, i, \Omega, \omega, M)_{t=t_0}$. Требуется определить возмущенные инерциальные координаты ИСЗ x, y, z для произвольного момента t при условии, что движение происходит в поле тяготения двух неподвижных центров с потенциалом, определяемым формулой (3.153) и с таким выбором произвольных постоянных c и σ , при котором $J'_2 = J_2$ и $J'_3 = I_3$. Пусть заданы численные значения a_e, J_2 и J_3 , тогда

1) вычисляются

$$c = a_e \sqrt{J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2} \approx 209,729 \text{ км},$$

$$\sigma = \frac{J_3}{2J_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2 - \left(\frac{J_3}{J_2}\right)^2}} \approx -0,035674 \text{ км};$$

2) вычисляются величины

$$\varepsilon = \frac{c}{\rho}; \quad p = a(1 - e^2); \quad \bar{S} = \sin i; \quad \bar{C} = \cos i;$$

3) определяются величины

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 (1 - e^2) (1 - \bar{S}^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \varepsilon^4 (1 - e^2) (1 - \bar{S}^2) (1 + 11\bar{S}^2 - e^2 + 5e^2\bar{S}^2) \right\},$$

$$e^* = e \{ 1 - \varepsilon^2 (1 - e^2) (1 - \bar{S}^2) + \varepsilon^4 \bar{S}^2 (1 - \bar{S}^2) (1 - e^2) (3 + e^2) \},$$

$$\lambda = -\frac{\varepsilon^4}{16} (1 - e^2)^{3/2} (24 - 96\bar{S}^2 + 75\bar{S}^4),$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \varepsilon^3 \sigma \bar{S} (4 - 5\bar{S}^2) (1 - e^2)^{3/2},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4} \varepsilon^2 \bar{S}^2 (1 - e^2)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} [(12 - 13\bar{S}^2) - e^2 (4 - 5\bar{S}^2)] \right\},$$

$$\nu = \frac{1}{4} \varepsilon^2 (1 + \sigma^2) (12 - 15\bar{S}^2) + \frac{\varepsilon^4}{64} [(288 - 1296\bar{S}^2 + 1035\bar{S}^4) - \\ - e^2 (144 + 288\bar{S}^2 - 510\bar{S}^4)],$$

$$\bar{e} = e \{ 1 + \varepsilon^2 (1 - e^2)^2 (1 - 2\bar{S}^2) + \varepsilon^4 (1 - e^2) [(3 - 16\bar{S}^2 + 14\bar{S}^4) - \\ - 2e^2 (1 - \bar{S}^2)^2] \};$$

4) вычисляется величина ψ

$$M = n_0 (t - t_0) + M_0,$$

$$E = M + e^* \sin E + \lambda \psi - \lambda_1 \cos \theta - \lambda_2 \sin 2\theta,$$

$$\theta = (1 + \nu) \psi + \omega_{t=t_0}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \bar{e}}{1 - \bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

Вычисление ψ производится методом последовательных приближений, причем в качестве нулевого приближения полагают

$$\psi = E = M;$$

5) вычисляются величины

$$\xi = a(1 - e \cos E),$$

$$\varphi = \theta + \frac{k_1^2}{8} \sin 2\theta - \frac{k_2^2}{8} \sin 2\psi,$$

где

$$k_1^2 = \varepsilon^2 \bar{S}^2 [1 - e^2 + \sigma^2] - 4e^4 \bar{S}^2 (1 - \bar{S}^2) (1 - e^2),$$

$$k_2^2 = \varepsilon^2 e^2 \bar{S}^2 - e^4 e^2 (1 - 10\bar{S}^2 + 11\bar{S}^4 + e^2 \bar{S}^4);$$

6) вычисляется величина

$$\bar{\Omega} = b_0 \psi + \Omega_{t=t_0} + b_1 \sin \psi + b_2 \sin 2\psi + b_3 \cos \theta,$$

где

$$b_0 = -\frac{3}{2} \varepsilon^2 (1 + \sigma^2) \bar{C} - \frac{3}{16} \varepsilon^4 (6 - 17\bar{S}^2 - 24e^2 \bar{S}^2) \bar{C},$$

$$b_1 = -2e^2 e \bar{C} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} [(4 - 28\bar{S}^2) - e^2 (6 + 7\bar{S}^2)] \right\},$$

$$b_2 = -\frac{1}{4} \varepsilon^2 e^2 \bar{C} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} [(22 + \bar{S}^2) + e^2 (2 + \bar{S}^2)] \right\},$$

$$b_3 = \varepsilon^3 \sigma \bar{C} \bar{S} (1 - e^2);$$

7) вычисляются величины

$$d = \varepsilon \sigma \bar{S} \{1 - \varepsilon^2 [(5 - 6\bar{S}^2) - e^2 (1 - 2\bar{S}^2)]\},$$

$$\rho = \frac{\sqrt{(\xi^2 + c^2) (1 - \varepsilon^2 \sigma^2)}}{1 + d \sin \varphi},$$

$$\rho' = \frac{\xi}{1 + d \sin \varphi};$$

8) вычисляются величины

$$\beta = 2\varepsilon \sigma \bar{C} \bar{S} \{1 - \varepsilon^2 (4 - 5\bar{S}^2 + e^2 \bar{S}^2)\},$$

$$\gamma = -\varepsilon \sigma \{(1 - 2\bar{S}^2) - \varepsilon^2 [(3 - 12\bar{S}^2 + 10\bar{S}^4) + e^2 (1 - 2\bar{S}^4)]\};$$

9) Вычисляются прямоугольные инерциальные координаты

$$x = \rho (\cos \varphi \cos \bar{\Omega} - \bar{C} \sin \varphi \sin \bar{\Omega} - \beta \sin \bar{\Omega}),$$

$$y = \rho (\cos \varphi \sin \bar{\Omega} + \bar{C} \sin \varphi \cos \bar{\Omega} + \beta \cos \bar{\Omega}),$$

$$z = c\sigma + \rho' (\bar{S} \sin \varphi + \gamma).$$

В первой главе были рассмотрены уравнения поправок, возникающие при реализации орбитального метода. При этом было установлено, что каждое орбитальное измерение дает уравнение, которое можно записать, вводя в качестве неизвестных инерциальные координаты и составляющие скорости, в следующем виде:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \cdot \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{y}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i + (U_{ij}^0 - U_{ij}) = v_{U_{ij}} \quad (4.1)$$

или

$$K_{ij} J_j \begin{pmatrix} \Delta \bar{X}_0 \\ \Delta \dot{\bar{X}}_0 \end{pmatrix} - K'_{ij} \Delta \bar{X}_i + l_{ij} = v_{ij}. \quad (4.2)$$

Если же в качестве неизвестных принять поправки к элементам орбиты, то уравнение (4.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \cdot \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \times \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} \begin{pmatrix} \Delta \Omega_0 \\ \Delta i_0 \\ \Delta \omega_0 \\ \Delta a_0 \\ \Delta e_0 \\ \Delta M_0 \end{pmatrix} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i + (U_{ij}^0 - U_{ij}) = v_{U_{ij}}; \quad (4.3)$$

его также можно записать короче:

$$K_{ij}J'_{ji}\Delta\bar{\Xi}_{ij} - K'_{ij}\Delta\bar{X}_i + l_{jj} = v_{U_{ij}}, \quad (4.4)$$

где

$$J'_j = \frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \cdot \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial(\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)}. \quad (4.5)$$

Как следует из выражений (4.4) и (4.5), в любом случае, независимо от выбора формы задания уточняемых начальных условий, приходится определять квадратную матрицу изохронных производных (порядка 6×6), элементами которой являются производные от текущих параметров движения по их начальным значениям. Как будет показано ниже, элементы матриц изохронных производных получаются в результате дифференцирования решения системы линейных дифференциальных уравнений по их начальным условиям.

Такие математические объекты называются матрицантами. Понятие матрицанта играет важную роль при решении многих задач определения и корректировки орбит космических аппаратов, космической геодезии и космической баллистики.

Методам вычисления матрицанта посвящено значительное число работ, среди которых следует назвать прежде всего работы П. Е. Эльясберга [59], П. Эскобала [61], В. И. Чарного [57], а также работу В. Н. Брандина, А. А. Васильева и С. Т. Худякова [5], в которой даются теория и свойства матрицанта. Метод вычисления матрицанта в кеплеровых элементах с учетом возмущений от второй зональной гармоники принадлежит В. М. Кауле [19]. Он был исследован и усовершенствован Г. А. Устиновым и В. В. Бойковым [7].

В этой главе рассмотрим теорию матрицанта и методы вычисления его элементов.

§ 23. Матрицант и общее решение для однородных линеаризированных моделей

Как было показано в § 21, любую линеаризованную модель движения можно представить в виде системы неоднородных дифференциальных уравнений, которая записывается в матричной форме в виде

$$\dot{\Delta\bar{x}} = A(t)\Delta\bar{x} + Q(t), \quad (4.6)$$

где матрицы $A(t)$ и $Q(t)$ определяются формулами (3.147). При $Q(t)=0$ получим систему однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{\Delta\bar{x}} = A(t)\Delta\bar{x}. \quad (4.7)$$

Для дальнейшего несущественно происхождения системы, поэтому, отбросив в обеих частях символ Δ , будем записывать систему (4.7) так:

$$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}, \quad (4.8)$$

где

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Задача отыскания общего решения системы (4.8), удовлетворяющего начальным условиям $t=t_0$ и $\bar{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}|_{t=0}$, называется задачей Коши. Напомним, что общим решением однородной системы является вектор

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{C}}e^{\lambda t}, \quad (4.10)$$

где $\bar{\mathbf{C}}$ — вектор-столбец произвольных постоянных. Если подставим решение $\bar{\mathbf{x}}$ в исходное уравнение (4.8), то получим

$$\bar{\mathbf{C}}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{C}}e^{\lambda t}; \quad (4.11)$$

или, сокращая на скаляр $e^{\lambda t}$ и перенося $\mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{C}}$ в левую часть равенства,

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}(t))\bar{\mathbf{C}} = 0. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) имеет нетривиальное решение при условии, что определитель матрицы $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}(t))$ обращается в нуль, т. е. $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}(t)| = 0$ или

$$\Delta(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \lambda - a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & \lambda - a_{nn}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Так как порядок матрицы $\mathbf{A}(t)$ равен n , то $\Delta(\lambda)$ — многочлен n -й степени относительно λ — равен

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n(t) = 0. \quad (4.14)$$

Корни уравнения (4.14), а их число равно n , дадут те значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, при которых исходная система (4.8) имеет нетривиальные решения.

Запись общего решения системы (4.8) можно выполнить еще следующим образом.

Пусть для системы уравнений (4.7) n раз проведено решение задачи Коши для n значений начальных условий, выбранных так:

$$\bar{\mathbf{x}}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{x}}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dots \quad \bar{\mathbf{x}}_0^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

и для каждого столбца начальных условий получено решение системы (4.8)

$$\bar{\mathbf{x}}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(1)}(t) \end{bmatrix}; \quad (4.16)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(2)}(t) \\ x_2^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(2)}(t) \end{bmatrix}; \quad (4.17)$$

$$\dots\dots\dots \bar{\mathbf{x}}^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(n)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

Совокупность всех решений (4.16) составляет фундаментальную систему решений. Матрицант $\Phi(t, t_0) = \mathbf{J}$ есть квадратная $n \times n$ матрица, составленная из фундаментальной системы решений

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \dots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \dots & x_2^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

удовлетворяющая системе линейных однородных уравнений (4.8)

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \quad (4.20)$$

и начальным условиям при $t=t_0$

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{E}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Таким образом, если для системы (4.8) известен матрицант (4.19), то ее общее решение записывается в виде

$$\bar{\mathbf{x}} = \Phi(t, t_0) \bar{\mathbf{x}}_0. \quad (4.22)$$

Справедливость записи (4.22) легко доказывается решением для момента $t=t_0$. В этом случае имеем

$$\bar{x} = E\bar{x}_0 = \bar{x}_0. \quad (4.23)$$

§ 24. Решение в случае неоднородной линеаризированной модели

Если решение для однородной линеаризированной модели известно, то можно получить решение и для неоднородной модели

$$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{Q}(t), \quad (4.24)$$

в которой $\bar{Q}(t)$ — вектор-столбец возмущений

$$\bar{Q}(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

а $A(t)$ — матрица частных производных правых частей нелинейной модели по параметрам x_j ($j=1,2,\dots,n$).

Решение будем выполнять на основании следующей теоремы теории дифференциальных уравнений.

Теорема. Общее решение на отрезке $[t, t_0]$ неоднородного дифференциального уравнения (4.22) с непрерывной правой частью равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}$ и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге [60]. При этом общее решение будет выражаться формулой Коши

$$\bar{x}(t) = \bar{C}e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \quad (4.26)$$

в которой первое слагаемое есть решение однородного уравнения, а второе — частное решение соответствующего неоднородного уравнения. Общее решение удовлетворяет начальному условию $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ при $\bar{C} = \bar{x}_0$,

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (4.27)$$

Если подбор частного решения неоднородного уравнения труден, но общее решение соответствующего однородного уравнения найдено, то линейное однородное уравнение можно проинтегрировать методом вариации постоянных, т. е. будем искать решение в виде [5]

$$\bar{x} = \Phi(t, t_0) \bar{u}, \quad (4.28)$$

где $\bar{\mathbf{u}}$ — неизвестный вектор-столбец, зависящий от времени:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Подставим решение (4.28) в уравнение (4.22). Тогда получим

$$\Phi(t, t_0) \bar{\mathbf{u}} + \Phi(t, t_0) \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) + \bar{\mathbf{Q}}(t), \quad (4.30)$$

но ранее мы получили выражение

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0), \quad (4.31)$$

подставив которое в (4.30), получим

$$\mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \bar{\mathbf{u}} + \Phi(t, t_0) \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) + \bar{\mathbf{Q}}(t),$$

откуда

$$\Phi(t, t_0) \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{Q}}(t); \quad (4.32)$$

на основании (4.32) имеем

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}} = \Phi^{-1}(t, t_0), \quad (4.33)$$

где Φ^{-1} — обратный матрицант.

Проинтегрируем выражение (4.33) в пределах от t_0 до t

$$\bar{\mathbf{u}} = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \bar{\mathbf{Q}}(\tau) d\tau + \bar{\mathbf{u}}_0, \quad (4.34)$$

где $\bar{\mathbf{u}}_0$ — произвольный постоянный вектор.

Таким образом, определена новая переменная. Подставляя выражение (4.34) в (4.28), получим

$$\bar{\mathbf{x}} = \Phi(t, t_0) \bar{\mathbf{u}}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \bar{\mathbf{Q}}(\tau) d\tau; \quad (4.35)$$

так как при $t=t_0$ $\bar{\mathbf{u}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$, то окончательно будем иметь

$$\bar{\mathbf{x}} = \Phi(t, t_0) \bar{\mathbf{x}}_0 + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) \bar{\mathbf{Q}}(\tau) d\tau. \quad (4.36)$$

Таким образом, решение для неоднородной линеаризированной модели выражается в квадратурах, причем возмущения в выражение под знаком интеграла входят линейно.

Матрицант при условии, что используется сферическая модель гравитационного поля, принадлежит к классу симплектических матриц, обладающих свойством

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{vmatrix} \Phi^T(t, t_0) \begin{vmatrix} 0 & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & 0 \end{vmatrix}, \quad (4.37)$$

т. е. обращение матрицанта сводится к перестановке и транспонированию его подматриц.

Вообще, любая матрица Q четной размерности называется симплектической в случае выполнения равенства

$$\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Q} = \boldsymbol{\varepsilon}.$$

где

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{bmatrix},$$

E — единичная матрица.

Так как $\varepsilon^2 = -\mathbf{E}$, то матрица ε является аналогом мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$, используемой в алгебре комплексных чисел.

Пусть, например, матрицант представлен в блочном виде

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

тогда в соответствии с его свойством (4.37) для обратного матрианта будем иметь

$$\Phi^{-1}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{22}^T & -\Phi_{12}^T \\ -\Phi_{21}^T & \Phi_{11}^T \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Покажем, что матрицант является матрицей Якоби.

Если задана система функциональных зависимостей

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

то для таких зависимостей можно составить матрицу Якоби

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}; \quad (4.41)$$

Следствие. Из свойства II вытекает важная формула, выражающая матрицант на интервале $[t_0, t]$, произвольным образом разбитом на k участков $[t_\psi, t_{\psi+1}]$, через произведение матрицантов этих участков

$$\Phi(t, t_0) = \prod_{\psi=k-1}^{\psi=0} \Phi(t_{\psi+1}, t_\psi); \quad t_k = t. \quad (4.50)$$

Свойство III.

$$\Phi^{-1}(t_1, t_0) = \Phi(t_0, t_1). \quad (4.51)$$

Для доказательства воспользуемся свойством II и примем в формуле (4.45) $t=t_0$, тогда получим

$$\Phi(t_0, t_0) = \Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0),$$

но по свойству I $\Phi(t_0, t_0) = E$, поэтому

$$\Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0) = E,$$

что и требовалось доказать.

Свойство IV.

Пусть $\bar{x}(t)$ — вектор-столбец, характеризующий движение ИСЗ в старой системе координат, а $\bar{X}(t)$ — вектор-столбец, характеризующий движение в новой системе координат, причем вектор $\bar{X}(t)$ связан с вектором $\bar{x}(t)$ линейным соотношением

$$\bar{X}(t) = L(t) \bar{x}(t), \quad (4.52)$$

где $L(t)$ — матрица линейного преобразования; пусть также $\Phi(t, t_0)$ — матрицант в старой системе координат, а $\theta(t, t_0)$ — матрицант в новой системе, тогда

$$\theta(t, t_0) = L(t) \Phi(t, t_0) L^{-1}(t_0). \quad (4.53)$$

Доказательство.

На основании формулы (4.22) имеем

$$L^{-1}(t) \bar{X}(t) = \Phi(t, t_0) L^{-1}(t_0) \bar{X}(t_0),$$

или

$$\bar{X}(t) = L(t) \Phi(t, t_0) L^{-1}(t_0) \bar{X}(t_0),$$

откуда

$$\bar{X}(t) = \theta(t_0, t_0) \bar{X}(t_0).$$

§ 26. Представление матрицанта в виде мультипликативного интеграла

Разобьем основной интервал $[t_0, t]$ на n частей промежуточными точками $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$, причем $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$; $t_n = t$). В этом случае на основании свойства II матрицанта можно написать

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, t_{n-1}) \Phi(t_{n-1}, t_{n-2}) \dots \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0). \quad (4.54)$$

В каждом интервале $[t_{i-1}, t_i]$ возьмем промежуточную точку τ_i ($i=1, 2, \dots, n$). Если считать Δt_i величинами первого порядка малости, то при вычислении $\Phi(t_i, t_{i-1})$ с точностью до величин второго порядка малости можно принять $A(t) \approx A(\tau_i)$, а также

$$A(\tau_i) = \frac{A(t_{i-1}) + A(t_i)}{2}. \quad (4.55)$$

Тогда

$$\Phi(t_i, t_{i-1}) = e^{A(\tau_i)\Delta t_i} + \delta^2\Phi, \quad (4.56)$$

где $\delta^2\Phi$ — сумма членов, начиная со второго порядка малости.

Выражение (4.56) можно также представить так:

$$\Phi(t_i, t_{i-1}) = E + A(\tau_i)\Delta t_i + \delta^2\Phi. \quad (4.57)$$

С учетом выражения (4.57) формула (4.54) для вычисления матрицанта $\Phi(t, t_0)$ будет иметь вид

$$\Phi(t, t_0) = [E + A(\tau_n)\Delta t_n][E + A(\tau_{n-1})\Delta t_{n-1}] \dots [E + A(\tau_2)\Delta t_2] \times \\ \times (E + A(\tau_1)\Delta t_1) + \delta^2\Phi. \quad (4.58)$$

Пусть число n интервалов Δt_i неограниченно возрастает, тогда длина каждого из них будет стремиться к нулю. Осуществляя таким образом предельный переход, получим полное предельное соотношение

$$\Phi(t, t_0) = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \{[E + A(\tau_n)\Delta t_n][E + A(\tau_{n-1})\Delta t_{n-1}] \times \\ \times [E + A(\tau_2)\Delta t_2][E + A(\tau_1)\Delta t_1]\}. \quad (4.59)$$

Выражение под знаком предела в равенстве (4.59) является интегральным произведением. Его предел называется мультипликативным интегралом, или интегралом Вольтерра. Вольтерра ввел этот интеграл в процессе разработки методов решения интегральных уравнений.

Таким образом, матрицант есть предел интегрального произведения (4.59), или интеграл Вольтерра.

Формула (4.58) может быть использована для приближенного вычисления матрицанта. При этом ошибку вычисления матрицанта можно всегда сделать допустимой, увеличивая число n интервалов Δt_i , на которые разбивается основной интервал $[t_0, t]$.

§ 27. Точные аналитические методы расчета матрицанта. Алгоритм Де Беллиса и Эскобала

При разработке точных методов определения матрицанта исходят из возможности получения модели движения в замкнутой форме. В случае движения ИСЗ замкнутую форму имеет лишь модель кеплерова (невозмущенного) движения. Таким образом, все точные аналитические методы расчета матрицанта основаны на использовании основных соотношений задачи двух тел.

Представление матрицанта в наиболее удобной и простой форме достигается рациональным выбором системы координат, заданием элементов орбиты, а также выбором аргумента при определении взаимного положения начальной и конечной точек на основном интервале $[t_0, t]$. В качестве аргумента используют время, модифицированное время, истинную и эксцентрическую аномалии, а также их разности.

Основным недостатком точных методов вычисления матрицанта являются ошибки, которые возникают из-за отличия возмущенного движения от опорного кеплерового движения. Эти ошибки возрастают с увеличением основного интервала $[t_0, t]$. Кроме того, формулы для вычисления матрицанта имеют весьма громоздкий вид. Преимущество точных методов перед другими способами заключается в возможности определения матрицанта по конечным зависимостям, что значительно сокращает затраты машинного времени. Поэтому точные методы расчета матрицанта эффективно применять на сравнительно небольших промежутках интервалов $[t_0, t]$, когда можно пренебречь действием возмущающих факторов.

Рассмотрим точный метод расчета матрицанта, предложенный Де Беллисом и Эскобалом, основанный на формулах задачи двух тел. Достоинство этого метода заключается в том, что решение получено в инерциальных прямоугольных координатах с использованием универсальных элементов, пригодных для описания как эллиптических, так и круговых орбит [61].

В качестве системы элементов в алгоритме Де Беллиса — Эскобала используется система $[a, C_e = e \cos E_0, S_e = e \sin E_0, \bar{U}_0, \bar{V}_0]$, которую мы подробно рассмотрели в § 14, лишь с той разницей, что векторный элемент $\bar{V}_0$ заменяется на векторный элемент $\bar{S}_0$, определяемый выражением

$$\bar{S}_0 = \sqrt{\mu} \sqrt{a(1-e^2)} \bar{V}_0.$$

Формулы преобразования начальных условий $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ в систему $[a, C_e = e \cos E_0, S_e = e \sin E_0, \bar{U}_0, \bar{V}_0]$ приводятся в § 14.

Для любого элемента q_i можно написать уравнение

$$q_i = q_i(\bar{X}_0), \quad (4.60)$$

полагая, что $\bar{X}_0$ есть вектор начальных условий в инерциальной системе прямоугольных координат.

Полный дифференциал имеет вид

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial q}{\partial y_0} dy_0 + \dots + \frac{\partial q}{\partial z_0} dz_0. \quad (4.61)$$

Точно так же вектор $\bar{X}$ текущих координат и скоростей можно рассматривать как обратную функцию элементов

$$\bar{X} = \bar{X}(q_i), \quad (4.62)$$

откуда

$$d\bar{X} = \frac{\partial \bar{X}}{\partial a} da + \frac{\partial \bar{X}}{\partial C_e} dC_e + \frac{\partial \bar{X}}{\partial S_e} dS_e + \dots + \frac{\partial \bar{X}}{\partial S_{z_0}} dS_{z_0}. \quad (4.63)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\Phi = \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{X}_0} = \sum_{i=1}^{i=9} \frac{\partial \bar{X}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \bar{X}_0}, \quad (4.64)$$

так, например, частная производная $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ будет вычислена в виде

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial C_e} \cdot \frac{\partial C_e}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial S_e} \cdot \frac{\partial S_e}{\partial x_0} + \dots + \frac{\partial x}{\partial S_{z_0}} \cdot \frac{\partial S_{z_0}}{\partial x_0}. \quad (4.65)$$

Таким образом, необходимо получить производные от элементов орбиты по начальным условиям и производные от текущих координат по начальным условиям.

I. Производные $\frac{\partial q_i}{\partial \bar{X}_0}$ от элементов орбиты по начальным условиям

Эта группа производных получается дифференцированием соотношений задачи двух тел для орбиты, заданной системой элементов $(a, C_e, S_e, \bar{U}_0, \bar{S}_0)$. Значения $\frac{\partial q_i}{\partial \bar{X}_0}$ производных вычисляются по следующему алгоритму.

Группа 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x_0} &= \frac{2a^2 x_0}{r_0^3}; & \frac{\partial a}{\partial y_0} &= \frac{2a^2 y_0}{r_0^3}; & \frac{\partial a}{\partial z_0} &= \frac{2a^2 z_0}{r_0^3}; \\ \frac{\partial a}{\partial \dot{x}_0} &= \frac{2a^2 \dot{x}}{\mu}; & \frac{\partial a}{\partial \dot{y}_0} &= \frac{2a^2 \dot{y}_0}{\mu}; & \frac{\partial a}{\partial \dot{z}_0} &= \frac{2a^2 \dot{z}_0}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (1.A)$$

Группа 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C_e}{\partial x_0} &= \frac{v_0^2 x_0}{\mu r_0}; & \frac{\partial C_e}{\partial y_0} &= \frac{v_0^2 y_0}{\mu r_0}; & \frac{\partial C_e}{\partial z_0} &= \frac{v_0^2 z_0}{\mu r_0}; \\ \frac{\partial C_e}{\partial \dot{x}_0} &= \frac{2r_0 \dot{x}_0}{\mu}; & \frac{\partial C_e}{\partial \dot{y}_0} &= \frac{2r_0 \dot{y}_0}{\mu}; & \frac{\partial C_e}{\partial \dot{z}_0} &= \frac{2r_0 \dot{z}_0}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (2A)$$

Группа 3

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_e}{\partial x_0} &= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{aS_e x_0}{r_0^3}; & \frac{\partial S_e}{\partial y_0} &= \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{aS_e y_0}{r_0^3}; & \frac{\partial S_e}{\partial z_0} &= \\ &= \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{aS_e z_0}{r_0^3}; \\ \frac{\partial S_e}{\partial \dot{x}_0} &= \frac{x_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{aS_e x_0}{\mu}; & \frac{\partial S_e}{\partial \dot{y}_0} &= \frac{y_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{aS_e y_0}{\mu}; & \frac{\partial S_e}{\partial \dot{z}_0} &= \\ &= \frac{z_0}{\sqrt{\mu a}} - \frac{aS_e z_0}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (3A)$$

Группа 4

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_{x0}}{\partial x_0} &= \left(\frac{1}{r_0} - \frac{x_0^2}{r_0^3} \right); & \frac{\partial U_{x0}}{\partial y_0} &= -\frac{x_0 y_0}{r_0^3}; & \frac{\partial U_{x0}}{\partial z_0} &= -\frac{x_0 z_0}{r_0^3}; \\ \frac{\partial U_{x0}}{\partial \dot{x}_0} &= 0; & \frac{\partial U_{x0}}{\partial \dot{y}_0} &= 0; & \frac{\partial U_{x0}}{\partial \dot{z}_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4A)$$

Группа 5

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_{y0}}{\partial \dot{x}_0} &= -\frac{x_0 y_0}{r_0^3}; & \frac{\partial U_{y0}}{\partial y_0} &= \frac{1}{r_0} - \frac{y_0^2}{r_0^3}; & \frac{\partial U_{y0}}{\partial z_0} &= -\frac{y_0 z_0}{r_0^3}; \\ \frac{\partial U_{y0}}{\partial \dot{x}_0} &= 0; & \frac{\partial U_{y0}}{\partial \dot{y}_0} &= 0; & \frac{\partial U_{y0}}{\partial \dot{z}_0} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5A)$$

Группа 6

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_{z0}}{\partial x_0} &= -\frac{x_0 z_0}{r_0^3}; & \frac{\partial U_{z0}}{\partial y_0} &= -\frac{y_0 z_0}{r_0^3}; & \frac{\partial U_{z0}}{\partial z_0} &= \frac{1}{r_0} - \frac{z_0^2}{r_0^3}; \\ \frac{\partial U_{z0}}{\partial \dot{x}_0} &= 0; & \frac{\partial U_{z0}}{\partial \dot{y}_0} &= 0; & \frac{\partial U_{z0}}{\partial \dot{z}_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6A)$$

Группа 7

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_{x_0}}{\partial x_0} &= \dot{r}_0 \left(\frac{\dot{x}_0^2}{r_0^2} - 1 \right); & \frac{\partial S_{x_0}}{\partial y_0} &= \frac{y_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{y}_0}{r_0} + \frac{x_0 y_0 \dot{r}_0}{r_0^2}; \\ \frac{\partial S_{x_0}}{\partial z_0} &= \frac{z_0 \dot{x}_0 - x_0 \dot{z}_0}{r_0} + \frac{x_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2}; \\ \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{x}_0} &= r_0 - \frac{x_0^2}{r_0}; & \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{y}_0} &= -\frac{x_0 y_0}{r_0}; & \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{z}_0} &= -\frac{x_0 z_0}{r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (7A)$$

Группа 8

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_{y_0}}{\partial x_0} &= \frac{x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0}{r_0} + \frac{x_0 y_0 \dot{r}_0}{r_0^2}; & \frac{\partial S_{y_0}}{\partial y_0} &= \dot{r}_0 \left(\frac{y_0^2}{r_0^2} - 1 \right); \\ \frac{\partial S_{y_0}}{\partial z_0} &= \frac{z_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{z}_0}{r_0} + \frac{y_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2}; \\ \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{x}_0} &= -\frac{x_0 y_0}{r_0}; & \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{y}_0} &= r_0 - \frac{y_0^2}{r_0}; & \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{z}_0} &= -\frac{y_0 z_0}{r_0}. \end{aligned} \right\}$$

Группа 9

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_{z_0}}{\partial x_0} &= \frac{x_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{x}_0}{r_0} + \frac{x_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2}; & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial y_0} &= \frac{y_0 \dot{z}_0 - z_0 \dot{y}_0}{r_0} + \\ &+ \frac{y_0 z_0 \dot{r}_0}{r_0^2}; & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial z_0} &= \dot{r}_0 \left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - 1 \right); \\ \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{x}_0} &= -\frac{x_0 z_0}{r_0}; & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{y}_0} &= -\frac{y_0 z_0}{r_0}; & \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{z}_0} &= r_0 - \frac{z_0^2}{r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (8A)$$

Входящая в формулы (7A—8A) величина $\dot{r}_0$ вычисляется на основании соотношения

$$\dot{r}_0 = \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{r_0} = \frac{\overline{\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0}}{r_0}. \quad (9A)$$

II. Производные от текущих координат

по элементам орбиты $\frac{\partial \bar{\mathbf{X}}}{\partial q_i}$

Производные этой группы получаются в результате гораздо более сложных и утомительных выкладок. При анализе соответствующих формул следует иметь в виду, что с необходимой точностью радиус-вектор $\bar{\mathbf{r}}$ и вектор скорости $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ всегда известны еще

до расчета матрицанта, например на основании численного интегрирования уравнений движения с приближенно принятыми начальными условиями.

Аргументом всех формул, приведенных ниже, является разность истинных аномалий $(\vartheta - \vartheta_0)$, которая вычисляется на основании формул

$$\cos(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_0}{rr_0}; \quad (10A)$$

$$\sin(\vartheta - \vartheta_0) = \sqrt{1 - \cos^2(\vartheta - \vartheta_0)}, \quad (11A)$$

При этом знак перед радикалом в формуле (11A) совпадает со знаком выражения $x_0 y - x y_0$ в случае прямого движения ИСЗ и является противоположным в случае обратного движения.

Группа 10. Формулы для производных x, y, z по большой полуоси a .

1. Вычисляются составляющие векторных элементов $\bar{U}_0$ и $\bar{S}_0$ по осям координат:

$$\left. \begin{aligned} U_{x0} &= \frac{x_0}{r_0}; & U_{y0} &= \frac{y_0}{r_0}; & U_{z0} &= \frac{z_0}{r_0}; \\ S_{x0} &= r_0 \dot{x}_0 - \dot{r}_0 x_0; & S_{y0} &= r_0 \dot{y}_0 - \dot{r}_0 y_0; & S_{z0} &= r_0 \dot{z}_0 - \dot{r}_0 z_0. \end{aligned} \right\} \quad (12A)$$

2. Коэффициенты k_1 и k_2 :

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{r}{a} \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{3}{2} a (M - M_0) \left\{ \frac{1}{\sqrt{ap}} \left(\frac{p}{r_0} - C_e \right) \sin(\vartheta - \vartheta_0) + S_e \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_0} \right) [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] - \frac{S_e}{r} \right\}; \\ k_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left\{ \frac{r}{2a} \sin(\vartheta - \vartheta_0) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{ap}}{r_0} (M - M_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{p}} (M - M_0) [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (13A)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos(\vartheta - \vartheta_0) &= 1 - \frac{ap}{rr_0} [1 - \cos(E - E_0)], \\ \sin(\vartheta - \vartheta_0) &= \frac{a\sqrt{ap}}{rr_0} [M - M_0 - (E - E_0) + \sin(E - E_0)], \\ M - M_0 &= E - E_0 + S_e [1 - \cos(E - E_0)] - C_e \sin(E - E_0). \end{aligned} \right\} \quad (14A)$$

3. Вычисляются частные производные $\frac{\partial x}{\partial a}; \frac{\partial y}{\partial a}; \frac{\partial z}{\partial a}$:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = k_1 U_{x0} + k_2 S_{x0};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial a} &= k_1 U_{y0} + k_2 S_{y0}; \\ \frac{\partial z}{\partial a} &= k_1 U_{z0} + k_2 S_{z0}.\end{aligned}\quad (15A)$$

Группа 11. Формулы для вычисления производных x , y , z по элементу $C_e = e \cos E_0$

1. Вычисляются коэффициенты k_3 и k_4 :

$$\left. \begin{aligned}k_3 &= -a + \frac{a^2 S_e}{\sqrt{ap}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \left(\frac{rr_0 - a^2 S_e^2 + 2arC_e}{p} - \frac{ar}{r_0} \right) \times \\ &\times [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] + ar \left(\frac{C_e}{p} - \frac{1}{r_0} \right) \sin^2(\vartheta - \vartheta_0) + \\ &+ \frac{a^2 r S_e}{\sqrt{ap}} \left[\frac{2}{r_0} - \frac{1}{p} (1 + C_e) [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \right. \\ &+ \left. \frac{a^2 S_e^2 r}{p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r_0} \right) [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^2 \right]; \\ k_4 &= \frac{ar}{\sqrt{\mu p}} \left\{ \frac{\sin(\vartheta - \vartheta_0)}{r_0} + \frac{1}{p} \sqrt{\frac{a}{p}} S_e [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^2 - \right. \\ &- \left. \frac{\sin(\vartheta - \vartheta_0)}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \right\}.\end{aligned}\right\} \quad (16A)$$

2. Вычисляются частные производные $\frac{\partial x}{\partial C_e}$, $\frac{\partial y}{\partial C_e}$, $\frac{\partial z}{\partial C_e}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_e} &= k_3 U_{x0} + k_4 S_{x0}; \\ \frac{\partial y}{\partial C_e} &= k_2 U_{y0} + k_4 S_{y0}; \\ \frac{\partial z}{\partial C_e} &= k_3 U_{z0} + k_4 S_{z0}.\end{aligned}\quad (17A)$$

Группа 12. Формулы для вычисления производных от x , y , z по элементу $S_e = e \sin E_0$

1. Вычисляются коэффициенты k_5 и k_6 :

$$\left. \begin{aligned}k_5 &= \frac{ar}{\sqrt{ap}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) \left\{ 1 + [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \left(1 - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{r_0}{p} C_e \right) \right\} + S_e \frac{ar}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \\ &+ S_e \frac{ar_0}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \left\{ \frac{r}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] - 1 \right\}; \\ k_6 &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left\{ \frac{rr_0 \sqrt{ap}}{p^2} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^2 \right\}.\end{aligned}\right\} \quad (18A)$$

2. Вычисляются производные $\frac{dx}{dS_e}$; $\frac{dy}{dS_e}$; $\frac{dz}{dS_e}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial S_e} &= k_5 U_{x0} + k_6 S_{x0}; & \frac{\partial y}{\partial S_e} &= k_5 U_{y0} + k_6 S_{y0}; \\ \frac{\partial z}{\partial S_e} &= k_5 U_{z0} + k_6 S_{z0}.\end{aligned}\quad (19A)$$

Г р у п п а 13. Формулы для вычисления частных производных x, y, z по векторному элементу $\bar{U}_0$

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial U_{x0}} &= r \cos(\vartheta - \vartheta_0); & \frac{\partial x}{\partial U_{y0}} &= 0; & \frac{\partial x}{\partial U_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial y}{\partial U_{x0}} &= 0; & \frac{\partial y}{\partial U_{y0}} &= r \cos(\vartheta - \vartheta_0); & \frac{\partial y}{\partial U_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial z}{\partial U_{x0}} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial U_{y0}} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial U_{z0}} &= r \cos(\vartheta - \vartheta_0).\end{aligned}\right\} \quad (20A)$$

Г р у п п а 14. Формулы для вычисления частных производных x, y, z по векторному элементу $\bar{S}_0$

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial S_{x0}} &= \frac{r \sin(\vartheta - \vartheta_0)}{\sqrt{\mu p}}; & \frac{\partial x}{\partial S_{y0}} &= 0; & \frac{\partial x}{\partial S_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial y}{\partial S_{x0}} &= 0; & \frac{\partial y}{\partial S_{y0}} &= \frac{r \sin(\vartheta - \vartheta_0)}{\sqrt{\mu p}}; & \frac{\partial y}{\partial S_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial z}{\partial S_{x0}} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial S_{y0}} &= 0; & \frac{\partial z}{\partial S_{z0}} &= \frac{r \sin(\vartheta - \vartheta_0)}{\sqrt{\mu p}}.\end{aligned}\right\} \quad (21A)$$

Для вычисления частных производных составляющих скорости x, y, z по элементам $a, C_e = e \cos E_0, S_e = e \sin E_0, \bar{U}_0, \bar{S}_0$ предварительно вычисляются производные вспомогательной функции $r\dot{r}$ по каждому из элементов.

Г р у п п а 15

$$\begin{aligned}\frac{\partial (r\dot{r}_x)}{\partial a} &= k_7 U_{x0} + k_8 S_{x0}; & \frac{\partial (r\dot{r}_y)}{\partial a} &= k_7 U_{y0} + k_8 S_{y0}; \\ \frac{\partial (r\dot{r}_z)}{\partial a} &= k_7 U_{z0} + k_8 S_{z0},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}k_7 &= \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{M - M_0}{r} \sqrt{\mu p} a D \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\mu p}}{a} \right\} \sin(\vartheta - \\ &\quad - \vartheta_0) - \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{M - M_0}{r^2} \sqrt{\mu a} a D^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{M - M_0}{r r_0} \sqrt{\mu a} a D S_e + \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2} (M - M_0) \sqrt{\frac{\mu}{a}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} D \Big\} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] + \\
& + \left\{ \frac{3}{2} (M - M_0) \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(1 - \frac{a}{r}\right) + \frac{3}{2} \cdot \frac{(M - M_0)}{rr_0} \times \right. \\
& \times p \sqrt{\mu a} + \left. \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} D \right\}; \\
k_8 = & \left\{ \frac{3}{2} \cdot \frac{(M - M_0)}{a} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \sqrt{\frac{a}{p}} + \frac{3}{2} \frac{(M - M_0)}{r^2} \times \right. \\
& \times \sqrt{\frac{a}{p}} a D^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(M - M_0)}{rr_0} \sqrt{ap} \Big\} \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \left\{ \frac{3}{2} \times \right. \\
& \times \frac{(M - M_0)}{r} \cdot \frac{aD}{p} - \frac{3}{2} \cdot \frac{(M - M_0)}{rr_0} a S_e - \frac{3}{2} \times \\
& \times \left. \frac{(M - M_0)}{r^2} a D \right\} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] - \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{(M - M_0)}{rr_0} a D \right].
\end{aligned} \tag{22A}$$

Величина D , входящая в выражения (22A) для определения коэффициентов k_7 и k_8 , определяется по формуле

$$D = \frac{rr}{\sqrt{\mu a}}. \tag{23A}$$

Группа 16

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (rr_x)}{\partial C_e} &= k_9 U_{x0} + k_{10} S_{x0}; & \frac{\partial (rr_y)}{\partial C_e} &= k_9 U_{y0} + k_{10} S_{y0}; \\
\frac{\partial (rr_z)}{\partial C_e} &= k_9 U_{z0} + k_{10} S_{z0}.
\end{aligned} \tag{24A}$$

где

$$\begin{aligned}
k_9 &= \left\{ \beta_1 a \sqrt{\mu a} \cos(\vartheta - \vartheta_0) + a \sqrt{\frac{\mu}{a}} C_e \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \right. \\
& + \left. \beta_3 D \sqrt{\mu a} - \beta_4 \sqrt{\mu p} \right\}, \\
k_{10} &= \left\{ \beta_1 a \sqrt{\frac{a}{p}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{a^2 D C_e}{p \sqrt{ap}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \right. \\
& + \left. \beta_3 + \beta_4 D \sqrt{\frac{a}{p}} \right\};
\end{aligned} \tag{25A}$$

вспомогательные коэффициенты β_1 , β_3 , β_4 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\sin(\vartheta - \vartheta_0)}{\sqrt{ap}} - \frac{S_e}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]; \\
\beta_3 &= a \left\{ \frac{aD}{r \sqrt{ap}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) - \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{1}{p} \left(\frac{r_0}{a} - \frac{aDS_e}{r} \right) [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \Big\}; \\ \beta_3 &= \left(\beta_2 + \frac{2aC_e}{p} \right) [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] - \frac{pa\beta_1^2}{r_0}; \\ \beta_4 &= - \left(\frac{aC_e}{p} + \beta_2 \right) \sin(\vartheta - \vartheta_0) - a \sqrt{\frac{a}{p}} \beta_1 [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]. \end{aligned} \right\} \quad (26A)$$

Группа 17

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r\dot{r}_x)}{\partial S_e} &= k_{11}U_{x0} + k_{12}S_{x0}; & \frac{\partial (r\dot{r}_y)}{\partial S_e} &= k_{11}U_{y0} + k_{12}S_{y0}; \\ \frac{\partial (r\dot{r}_z)}{\partial S_e} &= k_{11}U_{z0} + k_{12}S_{z0}, \end{aligned} \quad (27A)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \left\{ \gamma_1 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + a \sqrt{\frac{\mu}{p}} S_e \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\mu a} D\gamma_3 - \sqrt{\mu p} \gamma_4 \right\}, \\ k_{12} &= \left\{ \frac{\gamma_1}{\sqrt{\mu p}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{a^2 S_e D}{p \sqrt{ap}} \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \gamma_3 + \right. \\ & \quad \left. + D\gamma_4 \sqrt{\frac{a}{p}} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (28A)$$

вспомогательные коэффициенты γ_1 , γ_3 и γ_4 вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{\mu a} \left\{ 1 - \frac{r_0}{p} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \right\}; \\ \gamma_2 &= a \left\{ \beta_1 - \frac{r_0}{rp} D [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \right\}; \\ \gamma_3 &= \left(\frac{2aS_e}{p} + \gamma_2 + a\beta_1 \right) [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]; \\ \gamma_4 &= - \left(\frac{aS_e}{p} + \gamma_2 \right) \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{r_0 \sqrt{ap}}{p^2} [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)]^2. \end{aligned} \right\} \quad (29A)$$

Группа 18. Производные $\dot{r}\vec{r}$ по векторному элементу $\vec{U}_0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r\dot{x})}{\partial U_{x0}} &= \tilde{u}; & \frac{\partial (r\dot{x})}{\partial U_{y0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{x})}{\partial U_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial (r\dot{y})}{\partial U_{x0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{y})}{\partial U_{y0}} &= \tilde{u}; & \frac{\partial (r\dot{y})}{\partial U_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial (r\dot{z})}{\partial U_{x0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{z})}{\partial U_{y0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{z})}{\partial U_{z0}} &= \tilde{u}, \end{aligned} \right\} \quad (30A)$$

где

$$\tilde{u} = \sqrt{\mu a} D \cos(\vartheta - \vartheta_0) - \sqrt{\mu p} \sin(\vartheta - \vartheta_0). \quad (31A)$$

Группа 19. Производные $\bar{r}\bar{r}$ по векторному элементу $\bar{S}_0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r\dot{x})}{\partial S_{x0}} &= \tilde{s}; & \frac{\partial (r\dot{x})}{\partial S_{y0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{x})}{\partial S_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial (r\dot{y})}{\partial S_{x0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{y})}{\partial S_{y0}} &= \tilde{s}; & \frac{\partial (r\dot{z})}{\partial S_{z0}} &= 0; \\ \frac{\partial (r\dot{z})}{\partial S_{x0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{z})}{\partial S_{y0}} &= 0; & \frac{\partial (r\dot{z})}{\partial S_{z0}} &= \tilde{s}, \end{aligned} \right\} \quad (32A)$$

где

$$\tilde{s} = \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \sqrt{\frac{\mu}{p}} D \sin(\vartheta - \vartheta_0). \quad (33A)$$

Группа 20. Формулы вычисления производных от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ по элементам a , C_e , S_e , $\bar{U}_0$, $\bar{S}_0$

После того, как на основании формул (22A)–(33A) вычислены значения вспомогательных частных производных от $(\bar{r}\bar{r})$ по элементам a , C_e , S_e , $\bar{U}_0$, $\bar{S}_0$, вычисляются производные от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ по элементам

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r\dot{\bar{r}})}{\partial q} - \dot{\bar{r}} \frac{\partial r}{\partial q} \right], \quad (34A)$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial x}{\partial q} + y \frac{\partial y}{\partial q} + z \frac{\partial z}{\partial q} \right). \quad (35A)$$

Для вычисления производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ по элементам в формулы (34A) и (35A) вместо q следует подставить поочередно a , C_e , S_e , U_{x0} , U_{y0} , U_{z0} , S_{x0} , S_{y0} , S_{z0} .

Группа 21. Формирование векторов производных от координат и составляющих скорости по элементам

На основании формул (12A)–(35A) формируются матрицы-строчки

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}^T &= \left[\frac{\partial x}{\partial a}; \frac{\partial x}{\partial C_e}; \frac{\partial x}{\partial S_e}; \frac{\partial x}{\partial U_{x0}}; 0; 0; \frac{\partial x}{\partial S_{x0}}; 0; 0 \right]; \\ \tilde{\mathbf{Y}}^T &= \left[\frac{\partial y}{\partial a}; \frac{\partial y}{\partial C_e}; \frac{\partial y}{\partial S_e}; 0; \frac{\partial y}{\partial U_{y0}}; 0; 0; \frac{\partial y}{\partial S_{y0}}; 0 \right]; \\ \tilde{\mathbf{Z}}^T &= \left[\frac{\partial z}{\partial a}; \frac{\partial z}{\partial C_e}; \frac{\partial z}{\partial S_e}; 0; 0; \frac{\partial z}{\partial U_{z0}}; 0; 0; \frac{\partial z}{\partial S_{z0}} \right]; \\ \dot{\mathbf{X}}^T &= \left[\frac{\partial \dot{x}}{\partial a}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial C_e}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial S_e}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial U_{x0}}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial U_{y0}}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial U_{z0}}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial S_{x0}}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial S_{y0}}; \frac{\partial \dot{x}}{\partial S_{z0}} \right]; \\ \dot{\mathbf{Y}}^T &= \left[\frac{\partial \dot{y}}{\partial a}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial C_e}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial S_e}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial U_{x0}}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial U_{y0}}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial U_{z0}}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial S_{x0}}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial S_{y0}}; \frac{\partial \dot{y}}{\partial S_{z0}} \right]; \\ \dot{\mathbf{Z}}^T &= \left[\frac{\partial \dot{z}}{\partial a}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial C_e}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial S_e}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial U_{x0}}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial U_{y0}}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial U_{z0}}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial S_{x0}}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial S_{y0}}; \frac{\partial \dot{z}}{\partial S_{z0}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (36A)$$

Группа 22. Формирование векторов производных от элементов по начальным значениям координат x_0 , y_0 , z_0 и составляющим скорости $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$.

На основании формул (1A) — (9A) формируются матрицы-строчки

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Q}_x &= \left[\frac{\partial a}{\partial x_0}; \frac{\partial C_e}{\partial x_0}; \frac{\partial S_e}{\partial x_0}; \frac{\partial U_{x_0}}{\partial x_0}; \frac{\partial U_{y_0}}{\partial x_0}; \frac{\partial U_{z_0}}{\partial x_0}; \frac{\partial S_{x_0}}{\partial x_0}; \frac{\partial S_{y_0}}{\partial x_0}; \frac{\partial S_{z_0}}{\partial x_0} \right]; \\ \mathbf{Q}_y &= \left[\frac{\partial a}{\partial y_0}; \frac{\partial C_e}{\partial y_0}; \frac{\partial S_e}{\partial y_0}; \frac{\partial U_{x_0}}{\partial y_0}; \frac{\partial U_{y_0}}{\partial y_0}; \frac{\partial U_{z_0}}{\partial y_0}; \frac{\partial S_{x_0}}{\partial y_0}; \frac{\partial S_{y_0}}{\partial y_0}; \frac{\partial S_{z_0}}{\partial y_0} \right]; \\ \mathbf{Q}_z &= \left[\frac{\partial a}{\partial z_0}; \frac{\partial C_e}{\partial z_0}; \frac{\partial S_e}{\partial z_0}; \frac{\partial U_{x_0}}{\partial z_0}; \frac{\partial U_{y_0}}{\partial z_0}; \frac{\partial U_{z_0}}{\partial z_0}; \frac{\partial S_{x_0}}{\partial z_0}; \frac{\partial S_{y_0}}{\partial z_0}; \frac{\partial S_{z_0}}{\partial z_0} \right]; \\ \dot{\mathbf{Q}}_x &= \left[\frac{\partial a}{\partial \dot{x}_0}; \frac{\partial C_e}{\partial \dot{x}_0}; \frac{\partial S_e}{\partial \dot{x}_0}; 0; 0; 0; \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{x}_0}; \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{x}_0}; \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{x}_0} \right]; \\ \dot{\mathbf{Q}}_y &= \left[\frac{\partial a}{\partial \dot{y}_0}; \frac{\partial C_e}{\partial \dot{y}_0}; \frac{\partial S_e}{\partial \dot{y}_0}; 0; 0; 0; \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{y}_0}; \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{y}_0}; \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{y}_0} \right]; \\ \dot{\mathbf{Q}}_z &= \left[\frac{\partial a}{\partial \dot{z}_0}; \frac{\partial C_e}{\partial \dot{z}_0}; \frac{\partial S_e}{\partial \dot{z}_0}; 0; 0; 0; \frac{\partial S_{x_0}}{\partial \dot{z}_0}; \frac{\partial S_{y_0}}{\partial \dot{z}_0}; \frac{\partial S_{z_0}}{\partial \dot{z}_0} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (37A)$$

Группа 23. Вычисление элементов матрицанта

Матрицант представляют в блочной форме

$$\Phi = \begin{vmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M}^* & \mathbf{N}^* \end{vmatrix} \quad (38A)$$

и вычисляют элементы его подматриц $\mathbf{M}^*$, $\mathbf{N}^*$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, используя матрицы-строчки (36A) и (37A):

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{Q}_x^T & \tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{Q}_y^T & \tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{Q}_z^T \\ \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{Q}_x^T & \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{Q}_y^T & \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{Q}_z^T \\ \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{Q}_x^T & \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{Q}_y^T & \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{Q}_z^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial x}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial z}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial z}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{Q}}_x^T & \tilde{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{Q}}_y^T & \tilde{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{Q}}_z^T \\ \tilde{\mathbf{Y}}^T \dot{\mathbf{Q}}_x^T & \tilde{\mathbf{Y}}^T \dot{\mathbf{Q}}_y^T & \tilde{\mathbf{Y}}^T \dot{\mathbf{Q}}_z^T \\ \tilde{\mathbf{Z}}^T \dot{\mathbf{Q}}_x^T & \tilde{\mathbf{Z}}^T \dot{\mathbf{Q}}_y^T & \tilde{\mathbf{Z}}^T \dot{\mathbf{Q}}_z^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{M}^* &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{X}}}^T \mathbf{Q}_x^T & \dot{\bar{\mathbf{X}}}^T \mathbf{Q}_y^T & \dot{\bar{\mathbf{X}}}^T \mathbf{Q}_z^T \\ \dot{\bar{\mathbf{Y}}}^T \mathbf{Q}_x^T & \dot{\bar{\mathbf{Y}}}^T \mathbf{Q}_y^T & \dot{\bar{\mathbf{Y}}}^T \mathbf{Q}_z^T \\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}}^T \mathbf{Q}_x^T & \dot{\bar{\mathbf{Z}}}^T \mathbf{Q}_y^T & \dot{\bar{\mathbf{Z}}}^T \mathbf{Q}_z^T \end{bmatrix} \\
 \mathbf{N}^* &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{X}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_x^T & \dot{\bar{\mathbf{X}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_y^T & \dot{\bar{\mathbf{X}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_z^T \\ \dot{\bar{\mathbf{Y}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_x^T & \dot{\bar{\mathbf{Y}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_y^T & \dot{\bar{\mathbf{Y}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_z^T \\ \dot{\bar{\mathbf{Z}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_x^T & \dot{\bar{\mathbf{Z}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_y^T & \dot{\bar{\mathbf{Z}}}^T \dot{\mathbf{Q}}_z^T \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (39A)$$

Таким образом, матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}^*$ и $\mathbf{N}^*$ позволяют получить точные значения элементов матрицанта $\Phi(t_0, t)$ для кругового или эллиптического движения в задаче двух тел.

Замечательным свойством алгоритма Де Беллиса—Эскобала является возможность его использования почти без изменений в случае движения гиперболического типа. Таким образом, рассмотренный алгоритм в силу свойств используемой формы представления орбиты является универсальным для задачи двух тел. На основании алгоритма Де Беллиса—Эскобала можно вычислить матрицант для орбит с любыми наклонениями и эксцентриситетами, включая предельные случаи $i=0$, $e=0$, а также для случая гиперболических орбит.

§ 28. Вычисление матрицанта в случае неоднородной линеаризованной модели. Метод В. М. Каулы

Метод вычисления матрицанта по алгоритму Де Беллиса—Эскобала нельзя применять на больших интервалах, когда возмущения приводят к существенному отличию элементов оскулирующей орбиты от элементов кеплеровой орбиты. В этом случае надо получить решение уже для неоднородной линеаризованной модели

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t) \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{Q}}(t). \quad (4.66)$$

Получение точного значения матрицанта для модели (4.66) в общем случае невозможно. Однако для некоторых частных моделей можно получить замкнутое решение.

Рассмотрим метод В. М. Каулы [20], в котором используется

модель движения в средних элементах с учетом вековых возмущений первого порядка от второй зональной гармоник.

Теория вековых возмущений первого порядка рассмотрена в § 20. Как следует из этой теории, большая полуось, эксцентриситет и наклонение вообще не содержат вековых возмущений первого порядка.

Если учитывать только вековые возмущения первого порядка, то линеаризованная модель движения в элементах орбиты будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} \Omega \\ i \\ \omega \\ a \\ e \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_0 \\ i_0 \\ \omega_0 \\ a_0 \\ e_0 \\ M_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{M} + n_0 \end{bmatrix} (t - t_0). \quad (4.67)$$

Если взять в качестве пертурбационной функции выражение (3.99), которое получено в главе 3 для второй зональной гармоник как результат осреднения на одном обороте, то, вводя $C_{20} = -J_2$, будем иметь

$$R_2 = \frac{\mu}{a} C_{20} \left(\frac{a_e}{a} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \sin^2 i - \frac{1}{2} \right) (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.68)$$

С этим значением R_2 , а также учитывая формулы (3.105) — (3.113), получим уравнения Лагранжа в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{3nC_{20}a_e^2}{2(1-e^2)^2a^2} \cos i = \dot{\Omega}; \\ \frac{di}{dt} &= 0; \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^2a^2} (1 - 5\cos^2 i) = \dot{\omega}; \\ \frac{da}{dt} &= 0; \\ \frac{de}{dt} &= 0; \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{3nC_{20}a_e^2}{4(1-e^2)^{3/2}a^2} (3\cos^2 i - 1). \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Если задать начальные условия $(\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)$ на момент t_0 , то при принятом значении пертурбационной функции R_2 (4.68) правые части уравнений Лагранжа будут постоянными, а в результате интегрирования уравнений Лагранжа получим средние элементы орбиты на момент t :

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0); \\ i &= i_0; \\ \omega &= \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0); \\ a &= a_0; \\ e &= e_0; \\ M &= M_0 + \dot{M}_0(t - t_0) + n_0(t - t_0), \end{aligned} \right\}, \quad (4.70)$$

т. е. уравнения (4.67).

Матрицант

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial(\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)}$$

получится дифференцированием (4.70) с учетом значений производных $\dot{M}_0$, $\dot{\omega}$, $\dot{\Omega}$, определяемых формулами (4.69)

$$\Phi'(t, t_0) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial(a, e, i)}{\partial(a_0, e_0, i_0)} & \frac{\partial(a, e, i)}{\partial(M_0, \omega_0, \Omega_0)} \\ \hline \frac{\partial(M, \omega, \Omega)}{\partial(a_0, e_0, i_0)} & \frac{\partial(M, \omega, \Omega)}{\partial(M_0, \omega_0, \Omega_0)} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{E} & 0 \\ \hline \Phi_1(t, t_0) & \mathbf{E} \end{array} \right]. \quad (4.71)$$

В. М. Каула [20] в результате дифференцирования (4.70) получил для подматрицы Φ_1 следующее выражение:

$$\Phi_1(t, t_0) = \left[\begin{array}{cc} -\left(\frac{3n}{2a} + \frac{21\mu a_e^2 C_{20}(3\sin^2 i - 2)}{8na^6(1-e^2)^{3/2}} \right) \Delta t & \frac{9\mu a_e^2(3\sin^2 i - 2) C_{20}e}{4na^5(1-e^2)^{3/2}} \Delta t \\ -\frac{21\mu a_e^2 C_{20}(1-5\cos^2 i)}{8na^6(1-e^2)^2} \Delta t & \frac{3\mu a_e^2 C_{20}e(1-5\cos^2 i)}{na^5(1-e^2)^3} \Delta t \\ -\frac{21\mu a_e^2 C_{20} \cos i}{4na^6(1-e^2)^2} \Delta t & \frac{6\mu a_e^2 C_{20}e \cos i}{na^5(1-e^2)^3} \Delta t \\ & \frac{9\mu a_e^2 C_{20} \sin 2i}{4na^5(1-e^2)^{3/2}} \Delta t \\ & \frac{15\mu a_e^2 C_{20} \sin 2i}{4na^5(1-e^2)^2} \Delta t \\ & -\frac{3\mu a_e^2 C_{20} \sin i}{2na^5(1-e^2)^2} \Delta t \end{array} \right]. \quad (4.72)$$

Переставляя элементы матрицы (4.72) в соответствии с принятым в этой книге порядком написания компонент вектора элементов орбиты $[\Omega, i, \omega, a, e, M]$, получим окончательное выражение для матрицанта:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial(\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3\mu a_e^2 C_{20} \sin i}{2na^5(1-e^2)} \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15\mu a_e^2 C_{20} \sin 2i}{4na^5(1-e^2)^3} \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu a_e^2 C_{20} \sin 2i}{4na^5(1-e^2)^{3/2}} \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - \frac{21\mu a_e^2 C_{20} \cos i \Delta t}{4na^6(1-e^2)^2} & \frac{6\mu a_e^2 C_{20} e \cos i \Delta t}{na^5(1-e^2)^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{21\mu a_e^2 C_{20} (1-5\cos^2 i)}{8na^6(1-e^2)^2} \Delta t & \frac{3\mu a_e^2 C_{20} e (1-5\cos^2 i)}{na^5(1-e^2)^3} \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 - \left[\frac{3n}{2a} + \frac{21\mu a_e^2 C_{20} (3\sin^2 i - 2)}{8na^6(1-e^2)^{3/2}} \right] \Delta t & \frac{9\mu a_e^2 (3\sin^2 i - 2) C_{20} e}{4na^5(1-e^2)^{5/2}} \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Г. А. Устинов и В. В. Бойков в работе [7] исходили из другого представления пертурбационной функции R_2 , в которое входит точное значение радиуса-вектора r :

$$R_2 = \frac{\mu}{r} \left[1 - \frac{C_{20}}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \delta) \right], \quad (4.74)$$

где

$$\sin \delta = \sin u \sin i. \quad (4.75)$$

Если подставить функцию (4.74) в уравнение Лагранжа и выполнить их интегрирование, то получим также средние элементы, соответствующие начальным условиям $(\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)$, но в отличие от формул (4.70) производная $\frac{dM}{dt}$ будет иметь вид

$$\dot{M} = n(1 - \gamma), \quad (4.76)$$

где

$$\gamma = \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{a_0}{r_0} \right)^3 \left(\frac{a_e}{a_0} \right)^2 (1 - 3\sin^2 \delta). \quad (4.77)$$

Дифференцирование в этом случае приводит к другому выражению для матрицанта:

$$\Phi'(t, t_0) = \left[\frac{\mathbf{E}}{\Phi_2(t, t_0)} \middle| \frac{0}{\mathbf{E}} \right] = \left[\frac{\mathbf{E}}{\frac{\partial(M, \omega, \Omega)}{\partial(a_0, e_0, i_0)}} \middle| \frac{0}{\mathbf{E}} \right], \quad (4.78)$$

где

$$\Phi_2(t, t_0) = \begin{bmatrix} -\frac{(3-7\gamma)n\Delta t}{2a_0} & -\frac{3n\gamma \cos E_0 \Delta t}{1-e_0 \cos E_0} & 6n\gamma \frac{\operatorname{ctg} i_0 \sin^2 \delta_0 \Delta t}{1-3 \sin^2 \delta_0} \\ -\frac{7\dot{\omega}}{2a_0} \Delta t & \frac{4e_0 \dot{\omega} \Delta t}{1-e_0^2} & 5\dot{\Omega} \sin i_0 \Delta t \\ -\frac{7\dot{\Omega}}{2a_0} \Delta t & \frac{4e_0 \dot{\Omega}}{1-e_0^2} \Delta t & -\dot{\Omega} \operatorname{tg} i_0 \Delta t \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Как показывают исследования [17], использование матрицы (4.79) позволяет с большей точностью рассчитать элементы матрицанта, чем (4.71), так как выражение (4.78) более полно учитывает составляющую векового смещения перицентра.

Переставляя элементы матрицы (4.79) в соответствии с принятым порядком компонент вектора элементов орбиты, получим матрицант в следующем виде:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial(\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\dot{\Omega} \operatorname{tg} i_0 \Delta t & 0 & -\frac{7\dot{\Omega}}{2a_0} \Delta t & \frac{4e_0 \dot{\Omega}}{1-e_0^2} \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5\dot{\Omega} \sin i_0 \Delta t & 1 & -\frac{7\dot{\omega}}{2a_0} \Delta t & \frac{4e_0 \dot{\omega}}{1-e_0^2} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6n\gamma \frac{\operatorname{ctg} i_0 \sin^2 \delta_0}{1-3 \sin^2 \delta_0} \Delta t & 0 & -\frac{(3-7\gamma)n\Delta t}{2a_0} & -\frac{3n\gamma \cos E_0 \Delta t}{1-e_0 \cos E_0} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

§ 29. О вычислении матрицы коэффициентов вектора поправок начальных условий движения ИСЗ

1. Прямоугольные инерциальные координаты и скорости.

Пусть вектор поправок в начальные условия движения ИСЗ нужно определить в форме

$$\Delta \bar{\mathbf{X}}_0 = \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{y}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

где $\Delta x_0, \Delta y_0, \dots, \Delta \dot{z}_0$ — вероятнейшие поправки инерциальных координат и составляющих скорости в начальную эпоху t_0 .

Случай I. Положим, что матрицант $\mathbf{J} = \Phi(t, t_0)$ получен по алгоритму Де Беллиса — Эскобала, а результаты орбитальных измерений заданы в гринвичской системе координат.

Тогда матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов вектора поправок $\Delta \bar{\mathbf{X}}_0$ рассчитывается по формуле

$$\mathbf{A}_j = \frac{\partial U_{ij}}{\partial (X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})_j} \cdot \frac{(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})_j}{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \times \\ \times \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)} = \mathbf{U}_{ij}^{(G)} \mathbf{P}_j \Phi(t_j, t_0), \quad (4.82)$$

где $\mathbf{U}_{ij}^{(G)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial (X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})_j}$ — матрица производных от из-

мерений величины U_{ij} по координатам и составляющим скорости ИСЗ в гринвичской системе координат; $\mathbf{P}_j = \frac{(X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})_j}{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}$

— матрица перехода от положения и скорости в гринвичской системе координат к положению и скорости в инерциальной системе координат, элементы которой вычисляются по формуле (2.267);

$\Phi(t_j, t_0) = \frac{(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)_j}$ — матрицант для момента t_j ,

полученный на основании алгоритма Де Беллиса — Эскобала.

Случай II. Результаты измерений получены в инерциальной системе координат. Тогда матрица $\mathbf{P}_j$ единичная, и формула (4.80) принимает вид

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{U}_{ij}^{(ин)} \Phi(t_j, t_0), \quad (4.83)$$

где

$$\mathbf{U}_{ij}^{(ин)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}. \quad (4.84)$$

Случай III. Матрицант $\Phi(t_j, t_0)$ рассчитан в средних элементах орбиты по алгоритму Каулы или Устинова — Бойкова, результаты измерений получены в гринвичской системе координат, а решение необходимо получить в инерциальной системе координат в форме (4.81).

В этом случае на основании свойства IV матрицанта (4.53) имеем

$$\Theta(t_j, t_0) = \frac{\partial (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{\partial (\Omega_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)} \right]^{-1} = E_j \Phi(t_j, t_0) E_0^{-1}, \quad (4.85)$$

где E_0^{-1} — обратная матрица производных от начальных значений координат и скорости по начальным значениям элементов орбиты, а матрицант $\Phi(t_j, t_0)$ вычисляется по формуле (4.73) или по формуле (4.80).

Матрицы E_j и E_0 рассчитываются по алгоритму, который получен в главе 3 [см. формулы (2.244) — (2.254)]:

$$E = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial R^T}{\partial (\Omega, i, \omega)} \begin{pmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ z_\omega \end{pmatrix} & R^T \frac{\partial (x_\omega, y_\omega, z_\omega)}{\partial (a, e, M)} \\ \hline \frac{\partial R^T}{\partial (\Omega, i, \omega)} \begin{pmatrix} \dot{x}_\omega \\ \dot{y}_\omega \\ \dot{z}_\omega \end{pmatrix} & R^T \frac{\partial (\dot{x}_\omega, \dot{y}_\omega, \dot{z}_\omega)}{\partial (a, e, M)} \end{array} \right], \quad (4.86)$$

после чего матрица A определяется по формуле

$$A = U_{ij}^{(G)} P_j E_j \Phi(t, t_0) E_0^{-1}. \quad (4.87)$$

2. Элементы орбиты.

Рассмотрим случай, когда поправки в начальные условия требуется определить в форме

$$\Delta \bar{\Xi}_0 = \begin{pmatrix} \Delta \Omega_0 \\ \Delta i_0 \\ \Delta \omega_0 \\ \Delta a_0 \\ \Delta e_0 \\ \Delta M_0 \end{pmatrix}, \quad (4.88)$$

где $\Delta \bar{\Xi}_0$ — вектор вероятнейших поправок в элементы орбиты.

Случай IV. Результаты измерений U_{ij} получены в гринвичской системе координат, решение требуется получить в форме (4.88). Матрицант получен по алгоритму Каулы или Устинова — Бойкова, т. е. по формулам (4.73) или (4.80).

Матрица A_j коэффициентов при векторе $\Delta \bar{\Xi}_0$ тогда вычисляется на основании выражения

$$A = U_{ij}^{(G)} P_j E_j \Phi(t_j, t_0). \quad (4.89)$$

Возможны и другие варианты вычисления матрицы A_j , но все они являются следствиями рассмотренных четырех случаев и свойств матрицанта $\Phi(t, t_0)$.

§ 30. Приближенные аналитические методы расчета матрицанта

Приближенные аналитические методы расчета матрицанта основаны на разложении в ряды Тейлора интегралов моделей движения ИСЗ. При этом могут быть использованы как нелинейные [5], так и линеаризованные модели [6].

Пусть, например, на основном интервале $[t, t_0]$ моделью движения является кеплерово движение

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu \frac{x}{r^3}; & \ddot{y} &= -\mu \frac{y}{r^3}; & \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3}; \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt}; & \dot{y} &= \frac{dy}{dt}; & \dot{z} &= \frac{dz}{dt}; \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

с начальными условиями

$$\bar{\mathbf{X}}^T = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)_{t=t_0}. \quad (4.91)$$

Предполагая, что правые части уравнений (4.90) являются аналитическими функциями, разложим каждую из компонент q_k ($k=1, 2, \dots, 6$) вектора $\bar{\mathbf{X}}_0$ в ряд Тейлора:

$$q_k = q_{0k} + \frac{dq_{0k}}{dt_0}(t-t_0) + \frac{d^2q_{0k}}{dt_0^2} \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots \quad (4.92)$$

Если в формуле (4.92) ограничиться лишь членами, содержащими $(t-t_0)$ в первой степени, то получим

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 (t-t_0); & y &= y_0 + \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 (t-t_0); \\ z &= z_0 + \left(\frac{dz}{dt} \right)_0 (t-t_0); \\ \dot{x} &= \dot{x}_0 - \frac{\mu x_0}{r^3} (t-t_0); & \dot{y} &= \dot{y}_0 - \frac{\mu y_0}{r^3} (t-t_0); \\ \dot{z} &= \dot{z}_0 - \frac{\mu z_0}{r^3} (t-t_0). \end{aligned} \right\} \quad (4.93)$$

Дифференцируя выражения (4.93) по начальным условиям $\bar{\mathbf{X}}_0$, получим матрицант $\Phi(t, t_0)$:

$$\Phi(t, t_0) = \left| \begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{E}(t-t_0) \\ \hline \mathbf{A}(t-t_0) & \mathbf{E} \end{array} \right|, \quad (4.94)$$

где подматрица $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ($i, j=1, 2, 3$) получается с учетом формул (4.90), причем

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{\mu}{r_0^3} \left(\frac{3x_0^2}{r_0^2} - 1 \right); & a_{12} &= a_{21} = \frac{3\mu}{r_0^5} x_0 y_0; \\ a_{13} &= a_{31} = \frac{3\mu}{r_0^5} x_0 z_0; & a_{23} &= a_{32} = \frac{3\mu}{r_0^5} y_0 z_0; \\ a_{22} &= \frac{\mu}{r_0^3} \left(\frac{3y_0^2}{r_0^2} - 1 \right); & a_{33} &= \frac{\mu}{r_0^3} \left(\frac{3z_0^2}{r_0^2} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.95)$$

Точность расчета матрицанта рассмотренным методом можно было бы повысить, удерживая в разложении (4.92) члены высших порядков, однако даже при учете членов второго порядка формулы для расчета элементов матрицанта становятся громоздкими. При этом, как показывают исследования [17], для ИСЗ с высотами перицентров $1000 \div 1500$ км вычисление с учетом членов второго порядка возможно лишь на интервалах $t - t_0$, не превышающих $5 - 7^m$. Дальнейшее увеличение $t - t_0$ приводит к резкому падению точности вычисления производных, что объясняется плохой сходимостью рядов (4.92) на значительных интервалах времени.

Условия сходимости таких рядов рассмотрены в главе 2. Однако метод расчета матрицанта, основанный на разложениях решений в ряды Тейлора, можно успешно применять в сочетании с одним из точных методов расчета, например методом Де Беллиса—Эскобала.

Пусть интервал $[t_k, t_0]$ разбит узловыми точками на ряд небольших интервалов при помощи узловых точек ψ_i (рис. 13). В этом случае на каждом небольшом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ ($\Delta t \leq 5 - 7^m$) можно применить разложения (4.92) с удержанием членов второго порядка и получить матрицант $\Phi(t_j, t_i)$, где t_j — момент, принадлежащий интервалу $[t_i, t_{i+1}]$. Если, используя точный аналитический метод, получить значение матрицанта $\Phi(t_i, t_0)$ в узловой точке ψ_i , то матрицант для момента t_j вычислится на основании его второго свойства:

$$\Phi(t_j, t_0) = \Phi(t_j, t_i) \Phi(t_i, t_0). \quad (4.96)$$

Соответствующим подбором узловых точек можно добиться значительной экономии машинного времени по сравнению с применением точных методов для каждого момента t_j выполнения орбитальных измерений.

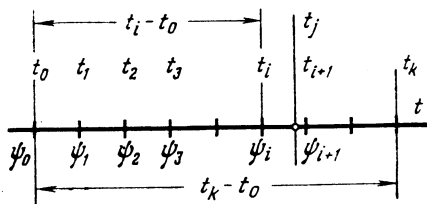


Рис. 13

§ 31. Численные методы расчета матрицанта

Численные методы расчета матрицанта основаны на численном интегрировании дифференциальных уравнений, представляющих модель движения ИСЗ. При этом начальные условия $\bar{X}_0$ подбира-

1. Метод конечных разностей.

Задача вычисления матрицанта методом конечных разностей приводит к многократному интегрированию дифференциальных уравнений движения ИСЗ, соответствующих заданной нелинейной модели. При этом могут быть использованы методы двусторонних и односторонних конечных разностей.

циальных прямоугольных координатах с учетом возмущений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial x}; & \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial y}; & \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z} \\ \dot{x} &= \frac{dx}{dt}; & \dot{y} &= \frac{dy}{dt}; & \dot{z} &= \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

условиях выбранных следующим образом:

$$\bar{\mathbf{X}}_0^+ = \bar{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{E}_{n \times n} \delta \bar{\mathbf{X}}_0, \quad (4.98)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_0^- = \bar{\mathbf{X}}_0 - \mathbf{E}_{n \times n} \delta \bar{\mathbf{X}}_0, \quad (4.99)$$

небольшое приращение начальных условий.

текущих значений координат и скоростей:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}_1^T &= q_{t_j}^0(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \bar{\mathbf{X}}_2^T &= q_{t_j}^{+\delta x}(x_0 + \delta x, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ \bar{\mathbf{X}}_3^T &= q_{t_j}^{-\delta x}(x_0 - \delta x, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{\mathbf{X}}_{12}^T &= q_{t_j}^{\delta z}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 + \delta z); \\ \bar{\mathbf{X}}_{13}^T &= q_{t_j}^{-\delta z}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0 - \delta z), \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

после чего частные производные определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x_0} &= \frac{q_{t_j}^{\delta x} + q_{t_j}^{-\delta x} - 2q_{t_j}^0}{2\delta x_0}; \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} &= \frac{q_{t_j}^{\delta y} + q_{t_j}^{-\delta y} - 2q_{t_j}^0}{2\delta y_0}; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}_0} &= \frac{q_{t_j}^{\delta \dot{z}} + q_{t_j}^{-\delta \dot{z}} - 2q_{t_j}^0}{2\delta \dot{z}_0} \end{aligned} \right\} \quad (4.101)$$

Остается не вполне определенным вопрос о выборе величин приращений начальных условий $\delta x_0, \delta y_0, \dots, \delta \dot{z}_0$, при котором частные производные будут получены с требуемой точностью.

Общего ответа, разумеется, не существует. Можно только утверждать, что в большинстве случаев приращения следует брать в пределах нескольких процентов от величины параметра. При этом выбор очень малых приращений приводит к большим ошибкам округления. С другой стороны, слишком большие приращения нарушают условия, при которых еще можно считать, что в пределах требуемой точности выполняются приближенные равенства типа

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} \approx \frac{f(x_0 + \delta x, y_0 \dots \dot{z}_0) - f(x_0, y_0 \dots \dot{z}_0)}{\delta x_0},$$

вытекающие из формального определения производной.

С целью экономии времени для моделей со слабыми нелинейностями иногда применяют метод односторонних конечных разностей. В этом методе производится шестикратное интегрирование для нелинейной модели с начальными условиями вида (4.98) и однократное интегрирование для начальных условий опорного движения. При использовании односторонних конечных разностей элементы матрицанта определяются по формуле

$$\Phi(t_j, t_0) = \frac{\partial \bar{X}_j}{\partial \bar{X}_0} = \frac{\bar{X}_j^+ - \bar{X}_j}{\delta \bar{X}_0}, \quad (4.102)$$

где $\bar{X}_j$ — вектор параметров движения в момент t_j для опорной модели.

Достоинством метода конечных разностей является прежде всего его универсальность и хорошая точность. Однако необходимость тринадцатикратного интегрирования приводит к очень большим затратам машинного времени. Это часто заставляет изыскивать другие, более экономичные численные методы расчета матрицанта.

Метод конечных разностей подробно рассмотрен в работах [36, 5].

2. Метод вариаций.

Метод вариаций получил распространение в результате стремления снизить затраты машинного времени при численных расчетах матрицанта.

Этот метод заключается в n -кратном решении задачи Коши, но (в отличие от метода конечных разностей) для линеаризированной модели движения с единичной матрицей $E_{6 \times 6}$ и в однократном интегрировании уравнений нелинейной модели опорного движения при начальных условиях $\bar{X}_0$.

Рассмотрим в качестве примера метод вариаций для случая модели движения в гринвичской системе координат [7]. Дифференциальные уравнения движения с учетом возмущений только от второй зональной гармоники и сопротивления атмосферы в гринвичской системе координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= (\omega_3^2 - A)x + 2\omega_3 \frac{dy}{dt} - \frac{\chi}{v} \frac{dx}{dt}; \\ \ddot{y} &= (\omega_3^2 - A)y - 2\omega_3 \frac{dx}{dt} - \frac{\chi}{v} \frac{dy}{dt}; \\ \ddot{z} &= (\omega_3^2 - A)z - \frac{\chi}{v} \frac{dz}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

где

$$A = B \left[\frac{\mu}{a_e} + C(D-1) \right]; \quad (4.104)$$

$$B = \frac{a_e}{r^3}; \quad C = \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2; \quad (4.105)$$

величина χ есть модуль ускорения силы лобового сопротивления атмосферы:

$$\chi = S \rho v_{\text{атм}}^2, \quad (4.106)$$

где $S = \frac{C_X F_m}{2m}$ — баллистический коэффициент, $v_{\text{атм}}$ — модуль вектора скорости ИСЗ относительно атмосферы. Линеаризация модели (4.103) приводит к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x}_k &= (\omega_3^2 - A) \delta x_k + (3AE_k + F_h)x + 2\omega_3 \delta \dot{y}_k; \\ \delta \ddot{y}_k &= (\omega_3^2 - A) \delta y_k + (3AE_k + F_h)y - 2\omega_3 \delta \dot{x}_k; \\ \delta \ddot{z}_k &= (2BC - A) \delta z_k + (3AE_k + F_h - 10BCE_k)z_k; \\ \delta \dot{x}_k &= \delta \left(\frac{dx}{dt} \right)_k; \\ \delta \dot{y}_k &= \delta \left(\frac{dy}{dt} \right)_k; \\ \delta \dot{z}_k &= \delta \left(\frac{dz}{dt} \right)_k, \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

где

$$\left. \begin{aligned} E_k &= \frac{x_k \delta x_k + y_k \delta y_k + z_k \delta z_k}{r_k^2} ; \\ F_k &= 2BC \left[(2D - 1) E_k - D \frac{\delta z}{z} \right] . \end{aligned} \right\} \quad (4.108)$$

Система линейных дифференциальных уравнений численно интегрируется при $k=1, 2, \dots, 6$ совместно с системой дифференциальных уравнений (4.103). В результате одновременно определяются текущие параметры движения и элементы матрицанта. Исследования метода вариаций показывают [5], что его применение сокращает расход машинного времени для расчета матрицанта в 1,5—2 раза по сравнению с методом конечных разностей. Еще более можно сократить машинное время, если использовать метод вариаций в сочетании с приближенными аналитическими методами или использованием свойств матрицанта как мультипликативного интеграла.

Заканчивая рассмотрение теории и методов расчета матрицанта, следует отметить, что выбор метода всегда связан со спецификой решаемой задачи, как и при построении адекватной модели движения; здесь нельзя дать каких-либо общих рекомендаций.

ГЛАВА 5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

Наиболее ответственной частью задачи определения координат пунктов орбитальными методами является точное интегрирование дифференциальных уравнений движения ИСЗ на моменты траекторных измерений t_j , что необходимо для вычисления свободных членов уравнений поправок, а также для численного расчета элементов матрицанта. Точность интегрирования прежде всего зависит от полноты учета сил, действующих на ИСЗ в полете, к числу которых относятся сила тяжести, притяжение спутника Луной и Солнцем, сопротивление атмосферы, давление солнечной радиации, электромагнитные силы, тепловое излучение Земли и ряд других. С другой стороны, точность интегрирования зависит и от метода интегрирования, от рационального выбора системы координат, числа членов, удерживаемых в формулах аналитических методов, шага интегрирования и числа разностей, удерживаемых при численных методах. Оба эти обстоятельства, действуя одновременно, приводят к неустранимой ошибке интегрирования, которая присутствует в свободных членах уравнений поправок и в конечном итоге приводит к ошибкам в определении элементов орбит и координат пунктов.

Принципиально имеются две возможности интегрирования уравнений движения, первая из них основана на аналитических методах, а вторая — на численных. Аналитические методы дают интересные нас интегралы в буквенном виде, т. е. в виде формул, предписывающих выполнение системы математических операций, при помощи которой интегралы (решения) могут быть получены для любых значений независимой переменной t .

В численных методах результатом решения являются таблицы числовых значений элементов орбит или координат и составляющих вектора скорости для равностоящих, как правило, значений независимой переменной.

Преимущества аналитических методов состоят в том, что только они приводят к совершенно общим результатам, справедливым для всех значений независимых переменных. Что же касается численных методов, то их достоинства заключаются в том, что они всегда применимы и позволяют наиболее точно учесть возмущения различного характера.

Теория движения ИСЗ является новой и достаточно специфической проблемой, требующей учета действия весьма разнородных сил. Поэтому построение аналитических теорий движения ИСЗ с учетом всех действующих сил приводит к весьма сложным системам формул. Это часто дает повод утверждать, что с развитием вычислительной техники значение аналитических методов вообще

будет уменьшаться. С таким утверждением согласиться нельзя, поскольку построение любого алгоритма, реализующего численный метод, будет эффективно лишь тогда, когда уже имеется некоторая априорная информация об аналитической природе задачи.

Численные методы особенно выгодно использовать, когда промежуток интегрирования невелик. При больших промежутках изменения независимой переменной более выгодными становятся аналитические методы интегрирования. Однако при решении практических задач космической геодезии, как показывает практика, наиболее эффективными являются решения, основанные на разумном сочетании численных и аналитических методов.

Выскажем некоторые предварительные соображения о трудоемкости методов численного интегрирования в зависимости от выбора той или иной модели движения. В качестве основных будем рассматривать три класса моделей:

модели в оскулирующих элементах,

модели в прямоугольных координатах,

модели в криволинейных координатах (сферических, цилиндрических, сжатых эллипсоидальных и т. д.).

Интегрирование в оскулирующих элементах ввиду их медленного изменения со временем дает возможность значительного увеличения шага численного интегрирования. Выигрыш во времени по сравнению с решением задачи в прямоугольных координатах может достигать до трех-четырех раз. Но правые части дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах значительно сложнее правых частей уравнений в прямоугольных координатах, что снимает выигрыш во времени.

В работе [5] приводится критерий для примерной оценки соотношения затрат времени в процессе интегрирования при различных выборах моделей движения.

Пусть m — число арифметических операций, необходимых для вычисления правых частей уравнений в прямоугольных координатах, l — число дополнительных операций при вычислении правых частей дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах. Пусть далее n_1 — количество шагов при численном интегрировании дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, а n_2 — количество шагов при интегрировании в оскулирующих элементах, обеспечивающее на рассматриваемом интервале $[t_0, t]$ такую же точность, как и при решении в прямоугольных координатах. При этих условиях приблизительное соотношение времен расчетов для сравниваемых методов выражается формулой

$$\frac{n_2(m+l)}{n_1 m} = \frac{n_2}{n_1} \left(1 + \frac{l}{m}\right). \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) следует, что ускорение расчетов при интегрировании в оскулирующих элементах будет иметь место при выполнении неравенства

$$\frac{l}{m} < \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right). \quad (5.2)$$

Если неравенство (5.2) выполняется, то средний выигрыш во времени расчета при интегрировании в оскулирующих элементах будет возрастать по мере увеличения сложности расчета возмущающих сил. Как правило, неравенство (5.2) не выполняется, и интегрирование в прямоугольных координатах является более экономичным.

Точно такое же сравнение может быть выполнено на основании неравенства (5.2) для интегрирования в прямоугольных и криволинейных координатах. Сравнение показывает, что при сохранении эквивалентной точности интегрирование в цилиндрических координатах значительно эффективнее, чем в прямоугольных координатах. При выборе модели для численного интегрирования также имеет значение оценка невырожденности модели. При этом невырожденными являются такие модели, которые допускают получение интегралов уравнений движения во всей области их возможных значений. Если это условие нарушено, то правая часть хотя бы одного из дифференциальных уравнений терпит разрыв второго рода при некоторых значениях параметров и модель становится вырожденной по этому параметру.

Модели движения в прямоугольных координатах всегда невырождены независимо от характера системы координат и выбора начала отсчета. Невырожденность сохраняется при преобразованиях прямоугольных координат.

Модель движения в оскулирующих элементах в кеплеровой форме $(\Omega, i, \omega, a, e, M)$ вырождается при $e \rightarrow 0, i \rightarrow 0$, откуда следует нецелесообразность применения этой модели для почти круговых экваториальных орбит.

Модель движения в сферической экваториальной системе координат (α, δ, r) вырождается при $\delta \rightarrow \frac{\pi}{2}$; модели в цилиндрических координатах всюду невырождены.

§ 32. Метод Рунге — Кутты

Все методы численного интегрирования целесообразно рассматривать на примере одной нелинейной модели, поскольку сам по себе выбор модели несуществен с точки зрения изучения процесса численного интегрирования. В качестве такой модели возьмем модель движения в инерциальных прямоугольных координатах, которую в интересах понижения порядка будем записывать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} + Q_x; & \dot{x} &= v_x; \\ \dot{v}_y &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} + Q_y; & \dot{y} &= v_y; \\ \dot{v}_z &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z} + Q_z; & \dot{z} &= v_z, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где пертурбационная функция R учитывает все гравитационные возмущения, а Q_x, Q_y, Q_z — возмущающие ускорения от негравитационных сил.

Системе (5.3) будет соответствовать вектор начальных условий

$$\bar{\mathbf{X}}^T = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)_{t=t_0}.$$

Метод Рунге—Кутты для одного дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть на отрезке $[t_0, t]$ требуется найти численное решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (5.4)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (5.5)$$

Разобьем интервал $[t_0, t]$ на n равных частей точками $t_j = t_0 + jh$, где $h = \frac{t_0 - t_j}{n}$ — шаг численного интегрирования. Будем искать последовательные значения функции $x(t_j)$ по формуле

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x_j. \quad (5.6)$$

Если разложить функцию x в ряд Тейлора и ограничиться членами четвертого порядка, то приращение Δx можно представить в виде

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = h\dot{x}(t) + \frac{h^2}{2!}\ddot{x}(t) + \frac{h^3}{3!}\dddot{x}(t) + \frac{h^4}{4!}x^{IV}(t), \quad (5.7)$$

где производные $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $x^{IV}(t)$ определяются последовательным дифференцированием уравнения (5.4).

Вместо непосредственных вычислений по формуле (5.7) в методе Рунге—Кутты на каждом шаге h определяются четыре числа

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(j)} &= hf(t_j, x_j); \\ k_1^{(j)} &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_1^{(j)}}{2}\right); \\ k_3^{(j)} &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_2^{(j)}}{2}\right); \\ k_4^{(j)} &= hf(t_j + h, x_j + k_3^{(j)}), \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

а величина

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6}(k_1^{(j)} + 2k_2^{(j)} + 2k_3^{(j)} + k_4^{(j)}) \quad (5.9)$$

принимается за приближенное решение уравнения (5.4) на j -м шаге.

Приближенное равенство

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) \approx \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.10)$$

представляет собой обобщение известной квадратурной формулы Симпсона. В самом деле, можно написать

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = \int_t^{t+h} x'(t) dt = \int_t^{t+h} f[t, x(t)] dt. \quad (5.11)$$

Если $f(t, x) = f(t)$ не зависит от x , то интеграл в правой части (5.11) можно вычислить по формуле Симпсона. Получим

$$x(t+h) - x(t) \approx \frac{h}{6} \left[f(t) + 4f\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) + f(t_0 + h) \right], \quad (5.12)$$

что формально совпадает с выражением (5.9).

Доказывается [60], что в общем случае, когда правая часть дифференциального уравнения (5.4) зависит от x , имеет место аналогичное утверждение, т. е. если разложить левую и правую части приближенного равенства (5.10) в ряды Тейлора по степеням h в окрестности $h=0$, то у этих разложений будут совпадать коэффициенты при h^k для $k=0, 1, 2, 3, 4$. При этом предполагается, что правая часть дифференциального уравнения (5.4) имеет достаточное число производных в некоторой области $[D^*]$ плоскости (t, x) , содержащей решения $x=x(t)$.

Таким образом, в методе Рунге — Кутта отрезок ряда Тейлора (5.7) для функции $x(t)$ преобразуется к виду, не содержащему производных. Вообще, метод Рунге — Кутта называется методом m -го порядка, если он соответствует отрезку ряда Тейлора, содержащему производные функции $x=x(t)$ до m -го порядка включительно. Рассмотренная нами процедура (5.8), (5.9) является методом Рунге — Кутта четвертого порядка.

Отметим достоинства и недостатки метода Рунге — Кутта применительно к задаче интегрирования дифференциальных уравнений (5.3) движения ИСЗ.

Основное достоинство метода Рунге — Кутта заключается в том, что интегрирование можно производить, имея в качестве исходных данных только начальные условия $\bar{X}_0$. Иначе говоря, метод можно применять без наличия так называемых «разгонных» точек, т. е. начала таблицы, содержащего численные решения, соответствующие выбранным значениям t . Второе важное достоинство метода Рунге — Кутта состоит в возможности изменения шага интегрирования в процессе расчетов без всяких дополнительных вычислений. Наконец, повышение точности расчетов в методе Рунге — Кутта можно повысить уменьшением шага интегрирования, а не увеличением порядка собственно метода.

К числу недостатков метода Рунге — Кутта относится прежде всего его трудоемкость. В главе 3 было установлено, что правые

части дифференциальных уравнений движения ИСЗ (5.3) имеют очень сложный вид, а в методе Рунге — Кутта приходится вычислять по четыре значения правых частей в каждом шаге по каждой из шести переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. В этих условиях метод Рунге — Кутта трудно реализовать для больших интервалов $[t, t_0]$ даже на современных ЭВМ с быстродействием порядка миллиона арифметических операций в секунду. Таким образом, приходится сделать вывод, что метод Рунге — Кутта выгоднее всего использовать в комбинации с каким-либо другим методом численного интегрирования, который не обладает его достоинствами, но компенсирует его недостатки. Поэтому метод Рунге — Кутта используют чаще всего в сочетании с экстраполяционными методами, для применения которых необходимы «разгонные» точки, но которые значительно менее трудоемки.

Недостатком метода Рунге — Кутта является также невозможность оценки точности решения. Можно только утверждать, что он имеет (для четвертого порядка) ошибку $\epsilon \approx h^4$ на всем интервале $[t, t_0]$.

Грубую оценку ошибки можно получить с помощью метода «двойного просчета» по формуле

$$|x_j^* - x(t_j)| \approx \frac{x_j^* - x_j}{15}. \quad (5.13)$$

где $x(t_j)$ — точное решение уравнения (5.4) в точке t_j , а x_j^* и x_j — решения, полученные методом Рунге — Кутта с шагом $h/2$ и h .

Вообще, если ϵ — заданная точность решения, то число n (число делений основного интервала $[t, t_0]$) для определения шага $h = \frac{t - t_0}{n}$ выбирается таким образом, чтобы

$$h^4 < \epsilon.$$

Для оценки правильности выбора шага можно также использовать равенство

$$\sigma = \left| \frac{k_2^{(j)} - k_3^{(j)}}{k_1^{(j)} - k_2^{(j)}} \right| \approx 0,03 \div 0,06. \quad (5.14)$$

если же σ оказывается больше, то шаг h уменьшают.

§ 33. Алгоритм численного интегрирования уравнений движения ИСЗ методом Рунге — Кутта

Метод Рунге — Кутта обобщается для решения системы дифференциальных уравнений движения ИСЗ следующим образом.

1. Записываем систему (5.3) в виде

$$\dot{x}_i = f_i(t | x_1, x_2, \dots, x_6); \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (5.15)$$

где

$$x_1(t), x_2(t) \dots x_6(t) — \text{искомые функции}; \quad (5.16)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}; x_2(t_0) = x_{20} \dots x_6(t_0) = x_{60} — \text{начальные условия.} \quad (5.17)$$

Требуется для значений t_j ($j=1, 2, \dots, N$), расположенных в порядке монотонного возрастания, вычислить значения функции $x_1(t), x_2(t), \dots, x_6(t)$, т. е. составить шесть таблиц вида

$$\{x_i(t_0); x_i(t_1), x_i(t_2) \dots x_i(t_j)\} \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, 6 \\ j=1, 2, \dots, N. \end{matrix} \quad (5.18)$$

Введем для краткости обозначения

$$\left. \begin{aligned} x_{ij} &= x_i(t_j); \quad j=1, 2 \dots N, \\ f_{ij} &= f_i(t_j | x_{1j}, x_{2j} \dots x_{Nj}), \\ (j &= 1, 2, \dots, N) \\ (i &= 1, 2, \dots, 6) \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Тогда формулы метода Рунге—Кутта для решения системы (5.15) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{i,j+1} &= x_{ij} + \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}); \\ k_1^{(i)} &= hf_i(t_j, x_{1j}, x_{2j} \dots x_{6j}); \\ k_2^{(i)} &= hf_i\left(t_j + \frac{1}{2}h, x_{1j} + \frac{1}{2}k_1^{(1)}; x_{2j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}k_1^{(2)}; \dots; x_{6j} + \frac{1}{2}k_1^{(6)}\right); \\ k_3^{(i)} &= hf_i\left(t_j + \frac{1}{2}h, x_{1j} + \frac{1}{2}k_2^{(1)}; x_{2j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}k_2^{(2)}; \dots; x_{6j} + \frac{1}{2}k_2^{(6)}\right); \\ k_4^{(i)} &= hf_i(t_j + h; x_{1j} + k_3^{(1)}; x_{2j} + k_3^{(2)}; \dots; x_{6j} + k_3^{(6)}). \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

В формулах (5.20) индекс $i=1, 2, \dots, 6$ относится к номеру переменной (уравнения) в системе (5.15), а индекс j —к моменту t_j ($j=1, 2, \dots, N$) интегрирования.

В качестве примера для пояснения процесса интегрирования уравнений движения методом Рунге—Кутта рассмотрим следующую вычислительную задачу, упрощенную по сравнению с реальными задачами, но сохраняющую основные особенности интегрирования уравнений возмущенного движения ИСЗ. Условия этой задачи приводятся в работе [33].

Задача. Пусть движение тяжелой материальной точки происходит в плоскости под действием постоянной центральной силы гравитационного притяжения с потенциалом $V = \frac{\mu}{r}$ и некото-

рой возмущающей силы $\bar{F}$, пропорциональной вектору скорости. Примем, что $\mu = fM = 398\,603 \text{ м}^3/\text{с}^2$, составляющие возмущающего ускорения от возмущающей силы $\bar{F}$ равны соответственно $\alpha\dot{x}$ и $\alpha\dot{y}$, где $\alpha = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ мин}^{-1}$. Пусть также в начальную эпоху t_0 координаты и составляющие скорости имели значения

$$x_0 = 7500 \text{ км}; \quad \dot{x}_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad \dot{y} = 540 \text{ км/мин.}$$

Определить координаты и составляющие скорости в конце третьей минуты движения из интегрирования уравнений движения методом Рунге — Кутта с шагом h .

Решение. Модель движения представим системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v_x; \quad \dot{y} = v_y; \\ \dot{v}_x &= -\frac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{1,5}}; \quad \dot{v}_y = -\frac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{1,5}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

На основании общего алгоритма (5.20) составим алгоритм интегрирования модели (5.21).

Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t+h) &= \dot{x}(t) + \frac{1}{6} (k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)}); \\ \dot{y}(t+h) &= \dot{y}(t) + \frac{1}{6} (k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)}); \\ x(t+h) &= x(t) + \frac{1}{6} (k_1^{(3)} + 2k_2^{(3)} + 2k_3^{(3)} + k_4^{(3)}); \\ y(t+h) &= y(t) + \frac{1}{6} (k_1^{(4)} + 2k_2^{(4)} + 2k_3^{(4)} + k_4^{(4)}), \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_1^{(1)} &= \left\{ -\frac{\mu x(t)}{[x^2(t) + y^2(t)]^{1,5}} + \alpha\dot{x}(t) \right\} h; \\ k_1^{(2)} &= \left\{ -\frac{\mu y(t)}{[x^2(t) + y^2(t)]^{1,5}} + \alpha\dot{y}(t) \right\} h; \\ k_1^{(3)} &= \dot{x}(t) h; \\ k_1^{(4)} &= \dot{y}(t) h; \end{aligned} \right\} \quad (5.22')$$

$$k_2^{(1)} = \left(-\frac{\mu \left[x(t) + \frac{k_1^{(3)}}{2} \right]}{\left\{ \left[x(t) + \frac{k_1^{(3)}}{2} \right]^2 + \left[y(t) + \frac{k_1^{(4)}}{2} \right]^2 \right\}^{1,5}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \left[\dot{x}(t) + \frac{k_1^{(4)}}{2} \right] h; \\
k_2^{(2)} = & \left(- \frac{\mu \left[y(t) + \frac{k_1^{(4)}}{2} \right]}{\left\{ \left[x(t) + \frac{k_1^{(3)}}{2} \right]^2 + \left[y(t) + \frac{k_1^{(4)}}{2} \right]^2 \right\}^{1,5}} + \right. \\
& \left. + \alpha \left[\dot{y}(t) + \frac{k_1^{(2)}}{2} \right] h; \right. \\
k_2^{(3)} = & \left[\dot{x}(t) + \frac{k_1^{(1)}}{2} \right] h; \\
k_2^{(4)} = & \left[\dot{y}(t) + \frac{k_1^{(2)}}{2} \right] h; \\
k_3^{(1)} = & \left(- \frac{\mu \left[x(t) + \frac{k_2^{(3)}}{2} \right]}{\left\{ \left[x(t) + \frac{k_2^{(3)}}{2} \right]^2 + \left[y(t) + \frac{k_2^{(4)}}{2} \right]^2 \right\}^{1,5}} + \right. \\
& \left. + \alpha \left[\dot{x}(t) + \frac{k_2^{(4)}}{2} \right] h; \right. \\
k_3^{(2)} = & \left(- \frac{\mu \left[y(t) + \frac{k_2^{(4)}}{2} \right]}{\left\{ \left[x(t) + \frac{k_2^{(3)}}{2} \right]^2 + \left[y(t) + \frac{k_2^{(4)}}{2} \right]^2 \right\}^{1,5}} + \right. \\
& \left. + \alpha \left[\dot{y}(t) + \frac{k_2^{(2)}}{2} \right] h; \right. \\
k_3^{(3)} = & \left[\dot{x}(t) + \frac{k_2^{(1)}}{2} \right] h; \\
k_3^{(4)} = & \left[\dot{y}(t) + \frac{k_2^{(2)}}{2} \right] h;
\end{aligned}
\tag{5.22''}$$

$$\left. \begin{aligned} k_4^{(1)} &= \left(-\frac{\mu [x(t) + k_3^{(3)}]}{\{[x(t) + k_3^{(3)}]^2 + [y(t) + k_3^{(4)}]^2\}^{1,5}} + \alpha [\dot{x}(t) + k_3^{(4)}] \right) h; \\ k_4^{(2)} &= \left(-\frac{\mu [y(t) + k_3^{(4)}]}{\{[x(t) + k_3^{(3)}]^2 + [y(t) + k_3^{(4)}]^2\}^{1,5}} + \alpha [\dot{y}(t) + k_3^{(2)}] \right) h; \\ k_4^{(3)} &= [\dot{x}(t) + k_3^{(1)}] h; \\ k_4^{(4)} &= [\dot{y}(t) + k_3^{(2)}] h. \end{aligned} \right\} \quad (5.22^{IV})$$

Результаты вычислений приводятся в следующей схеме (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

t_j	k_t^1	k_t^2	k_t^3	k_t^4
1^m	—25,51058	0,00032	0	540,00000
	—25,46091	—0,91627	—12,75528	540,00032
	—25,41775	—0,91443	—12,73046	539,54187
	—25,39899	—1,82998	—25,41775	539,08557
	$\dot{x} = -25,4445$	$\dot{y} = +539,0848$	$x = 7487,2685$	$y = 539,6950$
2^m	—25,39920	—1,83050	—25,44448	539,08483
	—25,23942	—2,73226	—38,14408	538,16733
	—25,28210	—2,73766	—38,06419	537,71870
	—25,06864	—3,62552	—50,72658	536,34717
	$\dot{x} = 50,6963$	$\dot{y} = 536,3522$	$x = 7449,1706$	$y = 1077,5622$
3^m	—25,06898	—3,62604	—50,69629	536,35219
	—24,80409	—4,49601	—63,23077	534,50390
	—24,84566	—4,50426	—63,09834	534,10419
	—24,53067	—5,35242	—75,54195	531,84793
	$\dot{x} = -75,5128$	$\dot{y} = 531,8557$	$x = 7386,0212$	$y = 1611,7982$

Точно так же строится алгоритм для случая шести переменных и учета возмущений любого вида. Но вычисления будут, конечно, значительно сложнее.

§ 34. Метод Адамса

Предположим, что методом Рунге — Кутта получено решение системы (5.3) для нескольких равноотстоящих моментов времени t_k ($k=1, 2, \dots, m$). Тогда, векторы-решения $\bar{X}_k$ вместе с начальными

условиями $\bar{X}_0$ образуют начало таблицы (систему «разгонных» точек)

$$\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k. \quad (5.23)$$

Чтобы получить решение на всем интервале $[t_j, t_0]$, далее выгоднее применить какой-нибудь разностный метод, так как метод Рунге — Кутта требует больших затрат машинного времени.

Для продолжения вычислений при наличии начала таблицы (5.23) чаще всего используют разностный метод Адамса.

1. Левые разности.

Рассмотрим значения функции $x(t)$, вычисленные с постоянным шагом $h = \frac{t-t_0}{n}$. Имеем последовательность

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{il}, x_l, x_i, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n.$$

Первой левой разностью в точке i называется разность

$$\nabla x_i = x_i - x_l. \quad (5.24)$$

Вторая левая разность функции $x(t)$ в точке i определяется как разность первых левых разностей

$$\nabla(\nabla x_i) = \nabla^2 x_i = (x_i - x_l) - (x_l - x_{il}) = x_i - 2x_l + x_{il}. \quad (5.25)$$

Вообще, n -я левая разность есть разность $(n-1)$ -х левых разностей:

$$\nabla^n(\nabla x_i) = \nabla(\nabla^{n-1} x_i). \quad (5.26)$$

Легко проверить, что коэффициенты, с которыми узловые значения функции $x(t)$ входят в выражение для n -й разности, совпадают с коэффициентами биномиального разложения $(a-b)^n$. Например,

$$\nabla^3 x_i = x_i - 3x_{i-1} + 3x_{i-2} - x_{i-3}; \quad (5.27)$$

$$\nabla^4 x_i = x_i - 4x_{i-1} + 6x_{i-2} - 4x_{i-3} + x_{i-4}. \quad (5.28)$$

Левые разности обычно записываются в следующей форме (табл. 4):

Таблица 4

Левые разности

i	x_i	∇x_i	$\nabla^2 x_i$	$\nabla^3 x_i$	$\nabla^4 x_i$	$\nabla^5 x_i$
0	x_0					
1	x_1	∇x_1				
2	x_2	∇x_2	$\nabla^2 x_2$			
3	x_3	∇x_3	$\nabla^2 x_3$	$\nabla^3 x_3$		
4	x_4	∇x_4	$\nabla^2 x_4$	$\nabla^3 x_4$	$\nabla^4 x_4$	
5	x_5	∇x_5	$\nabla^2 x_5$	$\nabla^3 x_5$	$\nabla^4 x_5$	$\nabla^5 x_5$

Далее введем оператор $D = \frac{d}{dx}$. Известно, что этот оператор подчиняется основным законам алгебры. Поэтому он может рассматриваться как некоторое символическое число. С другой стороны, для оператора ∇ , который мы ввели через определения левых разностей, верны равенства

$$\left. \begin{aligned} \nabla(x_i + x_j) &= \nabla x_i + \nabla x_j = \nabla x_j + \nabla x_i \\ \nabla(Cx_i) &= C\nabla x_i; \\ \nabla^m(\nabla^n x_i) &= \nabla^{m+n} x_i; \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

на основании свойств операторов D и ∇ можно получить формулы для вычисления производных функции $x(t)$.

2. Выражение производных функции $x(t)$ через левые разности.

Воспользуемся оператором $D = \frac{d}{dx}$ и свойствами (5.29) оператора ∇ для разложения оператора D по степеням оператора ∇ и, наоборот, ∇ по степеням D .

Для этого разложим функцию $x(t+h)$ в ряд Тейлора в окрестностях точки t :

$$x(t+h) = x(t) + hx(t) + \frac{h^2}{2!} \ddot{x}(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t). \quad (5.30)$$

Будем далее обозначать символом D производную, тогда разложение (5.30) примет вид

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hDx(t) + \frac{h^2}{2!} D^2x(t) + \frac{h^3}{3!} D^3x(t) + \dots = \\ &= \left(1 + hD + \frac{h^2}{2!} D^2 + \frac{h^3}{3!} D^3 + \dots\right)x(t). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Рассматривая ряд (5.31), замечаем формальное сходство выражения в скобках с разложением e^x в степенной ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad (5.32)$$

поэтому выражение в скобках может быть записано в следующей символической форме:

$$1 + \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 + \frac{h^3}{3!} D^3 + \dots = e^{hD}, \quad (5.33)$$

после чего формула (5.31) будет представлена в виде

$$x(t+h) = e^{hD}x(t). \quad (5.34)$$

Полагая $t=t_i$ и обозначая, как и ранее, $x(t_i)$ через x_i , а $x(t_i+h)$ через x_r , получим

$$x_t = e^{hD} x_i. \quad (5.35)$$

Заменим в формуле (5.35) h на $-h$:

$$x(t-h) = e^{-hD} x(t). \quad (5.36)$$

Если принять в этом равенстве $x(t_i) = x_i$ и $x(t_i-h) = x_l$, то оно будет записано в виде

$$x_l = e^{-hD} x_i. \quad (5.37)$$

Теперь первую левую разность, определяемую формулой (5.24), представим так:

$$\nabla x_i = x_i - x_l = (1 - e^{-hD}) x_i \quad (5.38)$$

или в силу равенства (5.33), в котором следует h заменить на $-h$, так:

$$\begin{aligned} \nabla x_i &= \left[\frac{hD}{1!} - \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} - \frac{h^4 D^4}{4!} + \dots \right] x_i = \\ &= \left[1 - \frac{hD}{2!} + \frac{h^2 D^2}{3!} - \frac{h^3 D^3}{4!} + \dots \right] hD x_i. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Формула (5.39) дает правило разложения оператора ∇ по степеням $x(t)$. Зная функцию $x(t)$ и все ее производные в точке i , можно вычислить первую левую разность ∇x_i .

Для того чтобы получить аналогичные выражения для второй, третьей и т. д. разностей, запишем соотношение (5.38) в операторной форме:

$$\nabla = 1 - e^{-hD}. \quad (5.40)$$

Возводя это равенство в квадрат и опять воспользовавшись формулой (5.33), в которой следует h заменить на $-h$, получим разложение для второй разности

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= (1 - e^{-hD})^2 = 1 + e^{-2hD} - 2e^{-hD} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{2hD}{1!} + \frac{4h^2 D^2}{2!} - \frac{8h^3 D^3}{3!} + \dots \right) - \\ &- 2 \left(1 - \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} - \frac{h^3 D^3}{3!} + \dots \right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

или

$$\nabla^2 = h^2 D^2 - h^3 D^3 + \frac{7}{12} h^4 D^4 - \dots$$

Возводя выражение (5.40) в куб, найдем разложение, для ∇^3 и т. д.

Однако нас будет больше интересовать обратная задача — получить разложение n -й производной функции $x(t)$ в точке t в ряд по левым разностям, т. е. разложить D^n по степеням оператора ∇ .

Для этого выражение (5.40) разрешим относительно e^{-hD}

$$e^{-hD} = 1 - \nabla \quad (5.42)$$

и прологарифмируем полученное равенство

$$\ln e^{-hD} = -hD = \ln(1 - \nabla). \quad (5.43)$$

Раскладывая $\ln(1 - \nabla)$ в ряд, получим

$$-hD = \ln(1 - \nabla) = -\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots\right). \quad (5.44)$$

Таким образом, первая производная функции $x(t)$ разлагается в следующий ряд по левым разностям

$$hD = \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots \quad (5.45)$$

Возводя выражение (5.45) в квадрат, куб и т. д., получим формулы для вычисления высших производных:

$$\left. \begin{aligned} h^2 D^2 &= \nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \dots; \\ h^3 D^3 &= \nabla^3 + \frac{3}{2} \nabla^4 + \frac{7}{5} \nabla^5 + \dots; \\ h^4 D^4 &= \nabla^4 + 2\nabla^5 + \frac{17}{16} \nabla^6 + \dots; \\ h^5 D^5 &= \nabla^5 + \frac{5}{2} \nabla^6 + \frac{25}{6} \nabla^7 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

3. Метод Адамса для одного дифференциального уравнения 1 порядка.

Обратимся снова к дифференциальному уравнению (5.4)

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (5.47)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (5.48)$$

Будем полагать, что для ряда значений t_k решение уравнения (5.47) $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_j)$ уже получено методом Рунге — Кутты. Для отыскания решений на моменты $t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{j+l}$ можно воспользоваться формулой Адамса, выражающей $x(t)$ через левые разности функции $\dot{f}(t, x)$, являющейся правой частью дифференциального уравнения (5.47).

Для вывода этой формулы разложим $x(t+h)$ в окрестностях точки t в степенной ряд:

$$x(t+h) = x(t) + h\dot{x}(t) + \frac{h^2}{2!} \ddot{x}(t) + \frac{h^3}{3!} \dddot{x}(t) +$$

$$+ \dots + \frac{h^n}{n!} x^{(n)}(t) \quad (5.49)$$

и подставим в правую часть (5.49) вместо производной $x^{(n)}(t)$ ее значение $\frac{d^{n-1}f(t, x)}{dt^{n-1}}$, полученное из (5.47):

$$x(t+h) = x(t) + h \left[f(t, x) + \frac{h}{2} f'(t, x) + \frac{h^2}{6} f''(t, x) + \right. \\ \left. + \frac{h^3}{24} f^{\text{III}}(t, x) + \frac{h^4}{120} f^{\text{IV}}(t, x) + \frac{h^5}{720} f^{\text{V}}(t, x) + \dots \right]. \quad (5.50)$$

Каждую из входящих в разложение (5.50) полных производных функции $f(t, x)$ по t заменим ее разложением по левым разностям на основании формул (5.46).

Предварительно для сокращения записи введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} t_j &= jh \quad (j = 1, 2, \dots, N); \\ x(t_j) &= x_j; \\ x(t_j + h) &= x_{j+1}; \\ f(t_j, x_j) &= f_j. \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Тогда с учетом формул (5.46) и обозначений (5.51) получим выражение

$$x_{j+1} = x_j + h \left[f_j + \frac{1}{2} \left(\nabla + \frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{3} \nabla^3 + \frac{1}{4} \nabla^4 + \frac{1}{5} \nabla^5 + \dots \right) f_j + \right. \\ + \frac{1}{6} \left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \dots \right) f_j + \\ + \frac{1}{24} \left(\nabla^3 + \frac{3}{2} \nabla^4 + \frac{7}{4} \nabla^5 + \dots \right) f_j + \\ + \frac{1}{120} (\nabla^4 + 2\nabla^5 + \dots) f_j + \\ \left. + \frac{1}{720} (\nabla^5 + \dots) f_j \right]. \quad (5.52)$$

Если теперь сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями ∇ , то получим рекуррентную формулу Адамса:

$$x_{j+1} = x_j + h \left[1 + \frac{1}{2} \nabla + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \frac{251}{720} \nabla^4 + \right. \\ \left. + \frac{95}{288} \nabla^5 + \dots \right] f_j. \quad (5.53)$$

Эту формулу называют первой, или экстраполяционной, формулой Адамса.

Представим формулу (5.53) в виде

$$x_{j+1} = x_j + h \sum_{p=0}^r \beta_p \nabla^p f_j, \quad (5.54)$$

где r — порядок удерживаемых левых разностей, а β_p — коэффициенты при разностях ∇^p p -го порядка.

Доказано [24], что погрешность формулы (5.54) определяется выражением

$$R_j = \beta_{r+1} h^{r+2} x^{(r+2)}(\xi), \quad (5.55)$$

где

$$t_{j-r} \leq \xi \leq t_{j+1}. \quad (5.56)$$

Коэффициенты β_p экстраполяционной формулы (5.54) определяются в общем виде соотношениями

$$\beta_0 = 0; \quad \beta_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 u(u+1)(u+2) \dots (u+p-1) du. \quad (5.57)$$

Первые десять коэффициентов следующие:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} = 0,5; \quad \beta_2 = \frac{5}{12} = 0,41666 \dots; \quad \beta_3 = \frac{3}{8} = 0,375;$$

$$\beta_4 = \frac{251}{720} = 0,3486111 \dots; \quad \beta_5 = \frac{95}{288} = 0,32986111 \dots;$$

$$\beta_6 = \frac{19087}{60480} = 0,315591193217; \quad \beta_7 = \frac{5257}{17280} = 0,304224537037;$$

$$\beta_8 = \frac{1070017}{3628800} = 0,294868000441;$$

$$\beta_9 = \frac{2082753}{7257600} = 0,286975446429;$$

$$\beta_{10} = \frac{26842253}{95800320} = 0,280189596444.$$

Для уточнения решения, полученного по экстраполяционной формуле (5.54), используется вторая, или интерполяционная, формула Адамса, которая записывается в виде

$$x_{j+1}^* = x_j + h \sum_{p=0}^r \beta_p^* \nabla^p f_{j+1}, \quad (5.58)$$

где $f_{j+1} = f(t_{j+1}, x_{j+1})$, x_{j+1}^* — новое, более точное решение по сравнению с решением x_{j+1} , полученным на основании формулы (5.54). Погрешность формулы (5.58) равна

$$R^* = \beta_{r+1} h^{r+2} x^{(r+2)}(\eta), \quad (5.59)$$

причем

$$t_{j-r} \leq \eta \leq t_{j+1}, \quad (5.60)$$

коэффициенты β_p^* интерполяционной формулы Адамса (5.58) определяются соотношениями

$$\beta_0^* = 0; \quad \beta_p^* = \frac{1}{p!} \int_0^1 (u-1)u(u+1) \dots (u+p-2) du; \quad (5.61)$$

коэффициенты β_p и β_p^* связаны формулой

$$\beta_p^* = \beta_p - \beta_{p-1}. \quad (5.62)$$

Первые десять коэффициентов β_p^* следующие:

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= -\frac{1}{2} = -0,5; \quad \beta_2^* = -\frac{1}{12} = -0,0833 \dots; \quad \beta_3^* = -\frac{1}{24} = \\ &= -0,04166 \dots; \quad \beta_4^* = -\frac{19}{720} = -0,026388 \dots; \end{aligned}$$

$$\beta_5^* = -\frac{3}{160} = -0,01875;$$

$$\beta_6^* = -\frac{863}{60480} = -0,014269179894;$$

$$\beta_7^* = -\frac{1375}{120960} = -0,011367394180;$$

$$\beta_8^* = -\frac{33953}{3628800} = -0,009356536596;$$

$$\beta_9^* = -\frac{57281}{7257600} = -0,007892554012;$$

$$\beta_{10}^* = -\frac{3250433}{479001600} = -0,006785849985.$$

Формулами Адамса (5.54) и (5.58) пользуются в том случае, когда в процессе вычислений приходится изменять порядок r удерживаемых разностей. Если же порядок удерживаемых разностей фиксирован, то значительная экономия машинного времени достигается применением ординатных формул Адамса в которых для различных значений r коэффициенты α_p и α_p^* имеют также различные значения. При $r=7$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} x_{j+1} &= x_j + h \sum_{p=0}^7 \alpha_p f_j; \\ x_{j+1}^* &= x_j + h \sum_{p=0}^7 \alpha_p^* f_{j+1}; \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 0,358995535 \cdot 10^1; & \alpha_0^* &= 0,304224537 \cdot 10^0; \\
\alpha_1 &= -0,952520668 \cdot 10^1; & \alpha_1^* &= 0,115615906 \cdot 10^1; \\
\alpha_2 &= 0,180545387 \cdot 10^2; & \alpha_2^* &= -0,100691964 \cdot 10^1; \\
\alpha_3 &= -0,220277530 \cdot 10^2; & \alpha_3^* &= +0,101796461 \cdot 10^1; \\
\alpha_4 &= 0,017379654 \cdot 10^2; & \alpha_4^* &= -0,732035384 \cdot 10^0; \\
\alpha_5 &= -0,861212797 \cdot 10^1; & \alpha_5^* &= 0,343080357 \cdot 10^0; \\
\alpha_6 &= 0,244516369 \cdot 10^1; & \alpha_6^* &= -0,938409392 \cdot 10^{-1}; \\
\alpha_7 &= -0,304224537 \cdot 10^0; & \alpha_7^* &= 0,113673942 \cdot 10^{-1}.
\end{aligned}$$

4. Метод Адамса для интегрирования системы дифференциальных уравнений движения.

Если в j -х точках получены решения $\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_j$ системы уравнений движения (5.3), то решение можно продолжить на основании формул Адамса, которые теперь следует записывать в виде

$$x_{i,j+1} = x_{ij} + h \sum_{p=0}^r \beta_p \nabla^p f_{ij}, \quad (5.64)$$

$$x_{i,j+1}^* = x_{ij} + h \sum_{p=0}^r \beta_p^* \nabla^p f_{i,j+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.65)$$

где

$$x_{ij} = x_i(t_j); \quad f_{ij} = f_i(t_j | x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{6j}), \quad (5.66)$$

причем по-прежнему индекс i относится к номеру уравнения, а индекс j — к моменту времени.

§ 35. Метод последовательных приближений

Недостатком метода Адамса является необходимость заранее располагать решениями $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_j$ в ряде узлов $t_1, t_2, \dots, t_j$. Количеством решений в узлах определяется и порядок r разностей, удерживаемых в формулах Адамса. Таким образом, при реализации метода Адамса на ЭВМ необходимо иметь две программы: одну для получения «разгонных точек» по методу Рунге — Кутты, вторую для применения разностных формул Адамса. Гораздо удобнее для организации вычислений такое решение, в котором используются только формулы Адамса как для построения начала таблицы, так и для дальнейшего решения.

Рассмотрим в связи с этим итерационный процесс, в котором экстраполяционная формула Адамса используется для построения начала таблицы.

Полагая последовательно в экстраполяционной формуле Адамса (5.53) $j=0, 1, 2, \dots$ и приняв число удерживаемых разностей равным $r-1$, получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + h[f_0 + \beta_1 \nabla f_0 + \beta_2 \nabla^2 f_0 + \dots + \beta_r \nabla^r f_0]; \\ x_2 &= x_1 + h[f_1 + \beta_1 \nabla f_0 + \beta_2 \nabla^2 f_1 + \dots + \beta_r \nabla^r f_1]; \\ &\vdots \\ x_r &= x_{r-1} + h[f_{r-1} + \beta_1 \nabla f_{r-1} + \beta_2 \nabla^2 f_{r-1} + \dots + \beta_r \nabla^r f_{r-1}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

Если в формуле Адамса ограничиваются разностями порядка r , то это значит, что в пределах заданной точности полагают разности более высоких порядков равными нулю. Следовательно, разности порядка r можно считать постоянными, т. е.

$$\nabla^r f_0 = \nabla^r f_1 = \nabla^r f_2 = \dots = \nabla^r f_{r-1} = \Delta^r f_r = \text{const.}$$

На этом основании в системе (5.67) все разности порядка r можно заменить на $\nabla^r f_r$. Но поскольку

$$\nabla^{p-1} f_{j-1} = \nabla^{p-1} f_j - \Delta^p f_j,$$

то формулы (5.67) можно преобразовать так, чтобы для вычисления входящих в них разностей достаточно было знать только значения функций $x_0, x_1, x_2, \dots, x_r$.

В результате такого преобразования получаются формулы метода последовательных приближений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \{ f_0 + \beta_1 \nabla f_1 + \bar{b}_2^{(1)} \nabla^2 f_2 + \bar{b}_3^{(1)} \nabla^3 f_3 + . . . + \bar{b}_r^{(1)} \nabla^r f_r \}; \\ x_2 &= x_1 + h \{ f_1 + \beta_1 \nabla f_1 + \beta_2 \nabla^2 f_2 + \bar{b}_3^{(2)} \nabla^3 f_3 + . . . + \bar{b}_r^{(2)} \nabla^r f_r \}; \\ x_3 &= x_2 + h \{ f_2 + \beta_1 \nabla f_2 + \beta_2 \nabla^2 f_2 + \beta_3 \nabla f_3 + . . . + \bar{b}_r^{(3)} \nabla^r f_r \}; \\ . &. \\ x_{r+1} &= x_{r-1} + h \{ f_{r-1} + \beta_1 \nabla f_{r-1} + \beta_2 \Delta^2 f_{r-i} + \beta_3 \nabla^3 f_{r-1} + . . . + \beta_r \nabla^r f_r \}. \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

Вычисления в методе последовательных приближений выполняются в два этапа.

На первом этапе вычисляются приближенные значения функции:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_r^{(0)};$$

при этом вычисления можно выполнять в двух вариантах.

1 вариант

1. Поскольку значения начальных x_0 и f_0 известны, то, ограничиваясь двумя слагаемыми в первой формуле (5.68), вычисляют

$$x_1^{(0)} \approx x_0 + hf_0 \quad (5.69)$$

и, зная $x_1^{(0)}$, находят $f_1^{(0)}$ и $\nabla f_1^{(0)}$.

2. Ограничиваясь во второй из формул (5.68) тремя слагаемыми, вычисляют

$$x_2^{(0)} \approx x_1^{(0)} + hf_1^{(0)} + \beta_1 \nabla f_1^{(0)}. \quad (5.70)$$

3. Продолжают этот процесс, при этом в последнем уравнении (5.68) используют все слагаемые, кроме последнего:

$$x_r^{(0)} = x_{r-1}^{(0)} + x_{f_{r-1}}^{(0)} + h\beta_1 \nabla f_{r-1}^{(0)} + h\beta_2 \nabla^2 f_{r-1}^{(0)} + \dots + h\beta_{r-1} \nabla^{r-1} f_{r-1}^{(0)}. \quad (5.71)$$

В результате получают приближенные значения.

2 вариант

1. Ограничиваясь в первой формуле (5.68) двумя слагаемыми, вычисляют $x_1^{(0)}$, $f_1^{(0)}$ и $\nabla f_1^{(0)}$.

2. Ограничиваясь в первых двух формулах (5.68) тремя слагаемыми, вычисляют $x_1^{(0)}$, $f_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $f_2^{(0)}$, $\nabla f_2^{(0)}$ и $\nabla^2 f_2^{(0)}$.

3. Взяв в первых трех формулах (5.68) по четыре слагаемых, вычисляют

$$x_1^{(0)}, f_1^{(0)}, \nabla f_1^{(0)}, x_2^{(0)}, f_2^{(0)}, \Delta^2 f_2^{(0)}, x_3^{(0)}, f_3^{(0)}, \nabla f_3^{(0)}, \nabla^2 f_3^{(0)}, \nabla^3 f_3^{(0)} \text{ и т. д.}$$

После того как получены приближенные значения всех этих величин, приступают к итерациям на основании формул (5.68), причем в качестве исходных данных для итерации с номером N берут значения неизвестных, полученные в $(N-1)$ -й итерации. Итерационный процесс заканчивается, когда совпадут в пределах требуемой точности значения $x_1, x_2, \dots, x_r$, полученные в последней и предпоследней итерациях.

Выбор варианта вычисления приближенных значений зависит от конкретных условий задачи. Первый вариант проще, но значения $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ получаются с меньшей точностью, и в итерационном процессе приходится делать больше приближений, чем во втором варианте. Коэффициенты $\bar{b}_j^{(l)}$, входящие в уравнения метода последовательных приближений, вычисляются по формуле

$$\bar{b}_j^{(l)} = \sum_{i=0}^{j-l} (-1)^i C_{j-l}^i \beta_{j-l-i} \quad (j = l+1, l+r). \quad (5.72)$$

В частности,

$$l = 1$$

$$\bar{b}_2^{(1)} = -\frac{1}{12} = -0,083\dots; \quad \bar{b}_3^{(1)} = \frac{1}{24} = 0,0416\dots; \quad \bar{b}_4^{(1)} =$$

$$= -\frac{19}{720} = -0,02638;$$

$$\bar{b}_5^{(1)} = \frac{27}{1440} = 0,01875;$$

$$\bar{b}_6^{(1)} = -\frac{863}{60480} = -0,014269179894;$$

$$l = 2$$

$$\bar{b}_3^{(2)} = -\frac{1}{24} = -0,04166\dots; \quad \bar{b}_4^{(2)} = 0,0115277\dots; \quad \bar{b}_5^{(2)} =$$

$$= -\frac{11}{1440} = -0,0076388\dots;$$

$$\bar{b}_6^{(2)} = \frac{271}{60\,480} = 0,004480820106.$$

$$l = 3$$

$$\bar{b}_4^{(3)} = -\frac{19}{720} = -0,026388\dots; \quad \bar{b}_5^{(3)} = \frac{11}{1440} = 0,0076388\dots;$$

$$\bar{b}_6^{(3)} = -\frac{191}{60\,480} = -0,003158068763.$$

$$l = 4$$

$$\bar{b}_5^{(4)} = -\frac{27}{1440} = -0,01875; \quad \bar{b}_6^{(4)} = \frac{271}{60\,480} = 0,004480820106.$$

$$l = 5$$

$$\bar{b}_6^{(5)} = -\frac{863}{60\,480} = -0,014269179894.$$

Метод последовательных приближений легко обобщается на систему дифференциальных уравнений движения.

Если ограничиться для простоты записи четырьмя удерживаемыми разностями ($r=4$), то значения каждой из функций $x_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, 6$) вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_{i,1} &= x_{i,0} + h \{ \dot{f}_{i,0} + \beta_1 \nabla f_{i,1} + \bar{b}_2^{(1)} \nabla^2 f_{i,2} + \bar{b}_3^{(1)} \nabla^3 f_{i,3} + \bar{b}_4^{(1)} \nabla^4 f_{i,4} \}; \\ x_{i,2} &= x_{i,1} + h \{ \dot{f}_{i,1} + \beta_1 \nabla f_{i,1} + \beta_2 \nabla^2 f_{i,2} + \bar{b}_3^{(2)} \nabla^3 f_{i,2} + \bar{b}_4^{(2)} \nabla^4 f_{i,4} \}; \\ x_{i,3} &= x_{i,2} + h \{ \dot{f}_{i,2} + \beta_1 \nabla f_{i,2} + \beta_2 \nabla^2 f_{i,2} + \beta_3 \nabla^3 f_{i,3} + \bar{b}_4^{(3)} \nabla^4 f_{i,4} \}; \\ x_{i,4} &= x_{i,3} + h \{ \dot{f}_{i,3} + \beta_1 \nabla f_{i,3} + \beta_2 \nabla^2 f_{i,3} + \beta_3 \nabla^3 f_{i,3} + \beta_4 \nabla^4 f_{i,4} \}. \end{aligned} \right\} (5.73)$$

Всего получается 6 систем вида (5.73). Для каждой переменной $x_i(t)$ вычисления ведутся так же, как и в случае одного уравнения. Сначала находят приближенные значения $x_{i,1}^{(0)}, x_{i,2}^{(0)}, x_{i,3}^{(0)}, \dots, x_{i,r}^{(0)}$, используя первый или второй вариант вычислений, а затем эти величины уточняют на основании итерационного процесса для системы уравнений (5.73).

§ 36. Применение методов численного интегрирования для линеаризованных моделей движения

Как отмечалось выше, наиболее эффективным способом интегрирования уравнений движения является рациональное сочетание аналитических и численных методов.

Последовательность алгоритмизации вычислений в этом случае такова.

В качестве модели опорного движения при интегрировании могут быть, например, использованы модель кеплерова невозмущен-

ного движения, модель, учитывающая возмущения от второй зональной гармоники, модель, основанная на задаче двух неподвижных центров, и целый ряд других промежуточных орбит.

Наиболее совершенным из типов опорного движения следует считать движение, основанное на задаче двух неподвижных центров. Выражение для потенциала (3.151) в задаче двух неподвижных центров является наиболее общей формой для промежуточного потенциала, допускающего интегрирование в квадратурах, и содержит в себе как частные, так и предельные случаи промежуточные потенциалы других известных промежуточных орбит.

Пусть на основании формул алгоритма вычисления координат для промежуточной орбиты двух неподвижных центров (см. § 22) получены векторы-решения $\bar{\mathbf{X}}_1^*, \bar{\mathbf{X}}_2^* \dots \bar{\mathbf{X}}_j^*$ в узлах сетки $t_1, t_2, \dots, t_j$ ($j=1, 2, \dots, N$) с шагом $h = \frac{t_0 - t_j}{n}$; тогда точное решение

уравнений движения (5.3) в этих же узлах будет

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \bar{\mathbf{X}}_1^* + \delta\bar{\mathbf{X}}_1; \quad \bar{\mathbf{X}}_2 = \bar{\mathbf{X}}_2^* + \delta\bar{\mathbf{X}}_2; \quad \dots; \quad \bar{\mathbf{X}}_j = \bar{\mathbf{X}}_j^* + \delta\bar{\mathbf{X}}_j, \quad (5.74)$$

где векторы $\delta\bar{\mathbf{X}}_1, \delta\bar{\mathbf{X}}_2, \dots, \delta\bar{\mathbf{X}}_j$ с малыми компонентами следует получить из интегрирования дифференциальных уравнений линеаризованной модели, соответствующей методу Энке;

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2(\delta x)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{x}{r} \delta r - \delta x \right) + \frac{\partial R_V^*}{\partial x} + Q_x; \\ \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{y}{r} \delta r - \delta y \right) + \frac{\partial R_V^*}{\partial y} + Q_y; \\ \frac{d^2(\delta z)}{dt^2} &= \frac{\mu}{r^3} \left(3 \frac{z}{r} \delta r - \delta z \right) + \frac{\partial R_V^*}{\partial z} + Q_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

В уравнениях (5.75) R_V^* — пертурбационная функция, учитывающая гравитационные возмущения, которые остались после получения решений $\bar{\mathbf{X}}_1^*, \bar{\mathbf{X}}_2^*, \dots, \bar{\mathbf{X}}_j^*$ с потенциалом задачи двух неподвижных центров,

$$R_V^* = V - V_{2c}, \quad (5.76)$$

где V — гравитационный потенциал Земли, а V_{2c} — потенциал в задаче двух неподвижных центров.

Запишем эти потенциалы в виде

$$V = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_c}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) + \right.$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \Big\}, \quad (5.77)$$

$$V_{2c} = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) \right\}, \quad (5.78)$$

где

$$J'_n = -\frac{\lambda}{2} \left(\frac{c}{a_e} \right)^n \{ (1 + i\sigma)(\sigma + i)^n + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^n \}. \quad (5.79)$$

Вычитая из выражения (5.77) выражение (5.78), получим

$$R_V^* = \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} k_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \right], \quad (5.80)$$

где

$$k_n = -(J_n - J'_n). \quad (5.81)$$

Но в задаче двух неподвижных центров произвольные постоянные c и σ выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$J'_2 = J_2 \text{ и } J'_3 = J_3. \quad (5.82)$$

Поэтому выражение для потенциала R_V^* будет иметь вид

$$R_V^* = \frac{\mu}{r} \left[\sum_{n=4}^{\infty} k_n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \Phi) \right], \quad (5.83)$$

где коэффициенты k_n получаются на основании формул (5.79) и (5.81), полагая в них $c = 209,729$ км; $\sigma = -0,035647$.

Из численного интегрирования дифференциальных уравнений линеаризованной модели (5.75) с потенциалом R_V^* , определяемым формулой (5.83), получаются векторы $\delta \bar{\mathbf{X}}_1, \delta \bar{\mathbf{X}}_2, \dots, \delta \bar{\mathbf{X}}_j$.

Поскольку компоненты векторов-поправок $\delta \bar{\mathbf{X}}_1, \delta \bar{\mathbf{X}}_2, \dots, \delta \bar{\mathbf{X}}_j$ малы, то вычислительные схемы методов численного интегрирования приобретают особенно простой вид. Так, в разностных схемах можно в этом случае часто ограничиваться тремя разностями даже на больших промежутках $[t, t_0]$ времени численного интегриро-

вания. При этом шаг интегрирования можно значительно увеличить (по сравнению с шагом для нелинейных моделей (5.3)) без всякой потери в точности решения. Все это ведет к значительной экономии машинного времени и увеличению оперативности получения решений.

§ 37. Интерполирование координат и составляющих скорости ИСЗ на моменты t_v орбитальных измерений

В результате численного интегрирования по каждой из шести переменных $x_i(t_j)$ ($i=1, 2, \dots, 6$) получается таблица (табл. 5),

Таблица 5

t_j	x	∇x	$\nabla^2 x$	$\nabla^3 x$	$\nabla^4 x$	$\nabla^5 x$
0	x_0					
1	x_1	∇x_1				
2	x_2	∇x_2	$\Delta^2 x_2$			
3	x_3	∇x_3	$\nabla^2 x_3$	$\nabla^3 x_3$		
4	x_4	∇x_4	$\Delta^2 x_4$	$\nabla^3 x_4$	$\Delta^4 x_4$	
5	x_5	∇x_5	$\nabla^2 x_5$	$\nabla^3 x_5$	$\Delta^4 x_5$	$\nabla^5 x_5$

где $x_0, x_1, \dots, x_5, \dots$ — значения соответствующей переменной, $\nabla^r x_j$ — левые разности. При этом значения функции в узлах даны для моментов $t_0, t_1=t_0+h; t_2=t_0+2h; \dots; t_j=t_0+jh$.

Пусть необходимо определить значение x_v для момента t_v , не совпадающего с узлами $t_0, t_1, \dots, t_j$. Если t_j — значение времени в j -м узле таблицы, то

$$x(t_v) = x(t_j \pm \xi h), \quad (5.84)$$

где

$$\xi = \pm \frac{t_v - t_j}{h}. \quad (5.85)$$

Напишем разложение $x(t_v)$ в ряде в окрестности точки t_j

$$x(t_v) = x(t_j) \pm \xi h \dot{x}(t_j) \pm \frac{\xi^2 h^2}{2!} \ddot{x}(t_j) \pm \frac{\xi^3 h^3}{3!} \ddot{\ddot{x}}(t_j) + \dots \quad (5.86)$$

Найдем теперь формулу Ньютона для интерполяции назад, воспользовавшись выводами для левых разностей, полученными в § 39.

С этой целью воспользуемся операторным уравнением (5.42)

$$e^{-hD} = 1 - \nabla \quad (5.87)$$

и уравнением (5.36); получим

$$x(t_j - \zeta h) = (1 - \nabla)^\zeta x(t_j). \quad (5.88)$$

Разложив бином $(1 - \nabla)^\zeta$ в правой части уравнения (5.88), получим формулу Ньютона для интерполирования назад, в которую входят левые разности функции:

$$x(t_v) = x(t_j - \zeta h) = \left[1 - \zeta \Delta + \frac{\zeta(\zeta-1)}{2!} \nabla^2 - \frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)}{3!} \nabla^3 + \dots \right] x(t_j). \quad (5.89)$$

Аналогичную формулу можно получить и для интерполирования вперед, если ввести правые разности Δ для функции $x(t_j)$ в соответствии с табл. 6.

Т а б л и ц а 6

t_j	x_j	Δx_j	$\Delta^2 x_j$	$\Delta^3 x_j$	$\Delta^4 x_j$	$\Delta^5 x_j$
0	x_0	Δx_0	$\Delta^2 x_0$	$\Delta^3 x_0$	$\Delta^4 x_0$	$\Delta^5 x_0$
1	x_1	Δx_1	$\Delta^2 x_1$	$\Delta^3 x_1$	$\Delta^4 x_1$	
2	x_2	Δx_2	$\Delta^2 x_2$	$\Delta^3 x_2$		
3	x_3	Δx_3	$\Delta^2 x_3$			
4	x_4	Δx_4				
5	x_5					

В формуле для интерполирования вперед используются правые разности $\Delta^r x_j$:

$$x(t_v) = x(t_j + \zeta h) = \left[1 + \zeta \Delta + \frac{\zeta(\zeta-1)}{2!} \Delta^2 + \frac{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)}{3!} \Delta^3 + \dots \right] x(t_j). \quad (5.90)$$

В качестве примера рассмотрим таблицы правых (табл. 7) и левых разностей (табл. 8) функции $x = \sin t$ на отрезке $[10-13^\circ]$ с шагом $h=1^\circ$.

1. Таблица правых разностей.

Т а б л и ц а 7

t_j	$x = \sin t_j$	Δx_j	$\Delta^2 x_j$	$\Delta^3 x_j$
10	0,17365	0,01716	-0,00006	0
11	0,19081	0,01710	-0,00006	
12	0,20791	0,01704		
13	0,22495			

2. Таблица левых разностей.

Т а б л и ц а 8

t_j	$x = \sin t_j$	∇x_j	$\nabla^2 x_j$	∇x^3_j
10	0,17365			
11	0,19081	0,01716		
12	0,20791	0,01710	-0,00006	
13	0,22495	0,01704	-0,00006	0

Пусть требуется получить значение $\sin 10^\circ 20'$. Воспользуемся сначала формулой для правых разностей (5.90). В нашем случае

$$\zeta = \frac{20'}{1^\circ} = \frac{1}{3}.$$

Полагая в таблице правых разностей $t_j = 10^\circ$, вычисляем по формуле (5.90)

$$\sin 10^\circ 20' = 0,17365 + \frac{0,01716}{3} + \frac{\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{3} \right)}{2} (-0,00006) = 0,17938.$$

Полагая в таблице левых разностей

$$\zeta = \frac{2^\circ 40'}{1^\circ} = \frac{8}{3}; \quad t_j = 13^\circ,$$

получаем тот же результат по формуле (5.89):

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ 20' &= 0,22495 - \frac{8}{3} (0,01704) + \frac{\left(\frac{8}{3} \right) \left(\frac{5}{3} \right)}{2} (-0,00006) = \\ &= 0,17938. \end{aligned}$$

§ 38. Выводы и рекомендации по численному интегрированию дифференциальных уравнений движения ИСЗ

1. Наиболее эффективным при численном интегрировании уравнений движения является использование линеаризированных моделей. В качестве опорного движения (промежуточной орбиты) лучше всего выбрать орбиту, основанную на задаче двух неподвижных центров. В этом случае происходит значительная экономия машинного времени за счет увеличения шага численного интегрирования и уменьшения порядка r учитываемых разностей.

2. Если интегрирование ведется с переменным шагом, то при высокой точности вычислений из рассмотренных методов пригоден только метод Рунге — Кутты. Достоинствами этого метода являются достаточно высокая точность и возможность вести вычисления

без «разгонных» точек, недостаток метода — большие затраты вычислительного времени. Поскольку правые части дифференциальных уравнений движения имеют сложный вид, то вычисления по методу Рунге — Кутта вчетверо более трудоемки, чем в методе Адамса.

3. При интегрировании с постоянным шагом наиболее выгоден метод Адамса. Недостаток метода — необходимость иметь разгонные точки. Поэтому метод Адамса применяют в сочетании с методом Рунге — Кутта или методом последовательных приближений, которые в этом случае используются для построения начала таблицы.

4. Метод последовательных приближений выгоднее всего применять в сочетании с методом Адамса для получения «разгонных» точек. Особенно эффективно его применение для линеаризованных моделей движения. Недостаток метода последовательных приближений — его громоздкость. Тем не менее он имеет следующее преимущество по сравнению с методом Рунге — Кутта: если шаг h вычислений фиксирован, то значения функций $x_1, x_2, \dots, x_r$ можно получить с очень высокой точностью, взяв число учитываемых разностей r достаточно большим. Метод Рунге — Кутта в этом случае потребует уменьшения шага интегрирования для получения той же точности, и затраты вычислительного времени в общем случае будут большими. При $r=3$ точность метода последовательных приближений примерно та же, что и в методе Рунге — Кутта четвертого порядка, при приблизительно одинаковых затратах времени.

5. В формулах метода Рунге — Кутта точность может быть повышена только за счет уменьшения шага интегрирования. В методе Адамса, как это следует из формулы (5.55), при $h < 1$ и ограниченной производной $x^{(r+2)}$ ошибка уменьшается как с уменьшением h , так и с увеличением r . В этом случае добавляются лишь разности более высоких порядков, а вид формулы остается без изменений.

6. При $r=3$ и одинаковом шаге метод Адамса дает ту же точность, что и метод Рунге — Кутта четвертого порядка.

7. Точность и быстродействие методов численного интегрирования в значительной мере зависят от параметров орбит и прежде всего от значения эксцентриситета e .

Для орбит с $e \leq 0,2$ на интервале $[t, t_0]$ в 15—20 сут удовлетворительная точность достигается при использовании метода Адамса с $r=7 \div 9$ и шагом $h=90 \div 120$ с. Для получения «разгонных» точек в этом случае следует использовать метод Рунге — Кутта с шагом $h=15 \div 30$ с.

§ 39. Новые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ

Существенным недостатком, свойственным всем рассмотренным выше численным методам интегрирования, является быстрое накопление ошибок округления. Грубо говоря, ошибки в координатах и скорости пропорциональны

нений движения методом Шенкса необходимо 42 раза обращаться к вычислению правых частей на каждом шаге, что при сложности правых частей уравнений приводит к очень большим затратам машинного времени даже на современных ЭВМ.

2. Метод Булирша и Штора.

Метод, предложенный Р. Булиршем и И. Штором и получивший в литературе сокращенное название метода Бульсто, основан на применении экстраполяции рациональными функциями для получения интегралов дифференциальных уравнений.

Рассмотрим метод Бульсто на примере одного дифференциального уравнения

$$x = f(t, x) \quad (5.91)$$

с начальным условием

$$x_0 = x(t_0), \quad (5.92)$$

при этом все выводы остаются справедливыми и для системы уравнений.

Пусть требуется получить некоторое приближение $\eta(t, h)$ к точному решению $x(t)$, причем $H = t - t_0$ — исходная величина шага. Для экстраполяции искомой функции в точке t используется модифицированное правило средней точки. Для этого на системе точек

$$k_i = \frac{H}{n_i} ;$$

где n_i — целые числа, строится функция $\eta(t, h)$ по следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= x_0; \\ \eta_1 &= \eta_0 + \frac{h}{2}(t_0, \eta_0); \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_{i+1} &= \eta_{i-1} + h(t_i, \eta_i); \quad i = 1, 2, \dots, 2n-1; \\ u(t, h) &= \frac{1}{2} \left[\eta_{2n} + \eta_{2n-1} + \frac{h}{2} f(t_{2n}, \eta_{2n}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

где

$$t_i = t_0 + i \frac{h}{2}; \quad i = 0, 1, \dots$$

В алгоритме Бульсто для образования системы точек, на которой строится экстраполяционный полином, выбрана последовательность $F = \{n_i\}$, где n_i — натуральные числа:

$$F = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, \dots\},$$

а соответствующая последовательность подшагов

$$h_i = \frac{H}{n_i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

По исследованиям Грагга, для $\eta(t, h)$ имеет место асимптотическое разложение по h^2 в форме

$$\eta(t, h) \approx x(t) + e_1(t)h^2 + e_2(t)h^4,$$

где $e_i(t)$ — некоторые дифференцируемые функции с $e_i(t_0)=0$, такие, что

$$e_i(t) = H\dot{e}_i'(t_0) + v(H^2).$$

В качестве аппроксимирующей функции в методе Бульсто выбрана рациональная функция вида

$$\widehat{T}_{i,k} = \frac{P_0^{(i)} + P_1^{(i)}h^2 + \dots + P_\mu^{(i)}h^{2\mu}}{q_0^{(i)} + q_1^{(i)}h^2 + \dots + q_\nu^{(i)}h^{2\nu}}, \quad (5.94)$$

удовлетворяющая условию

$$\widehat{T}_{i,k} = (h_j) = \eta(t, h_j); \quad j = i, i-1, \dots, i-k. \quad (5.95)$$

Индексы при $\widehat{T}$ означают, что функция построена по точкам $i, i-1, \dots, i-k$, где k определяет степень рациональной функции. В алгоритме Бульсто (1966 г.)

выбирается функция, для которой $\mu = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, $\nu = \mu$. Как показали Булирш и

Штор, такой выбор показателей числителя и знаменателя обеспечивает наименьшую ошибку аппроксимации. Для достаточно широкого класса функций $\widehat{T}_{i,k}(0)$ сходится к точному значению $x(t)$, $h \rightarrow 0$ с увеличением k .

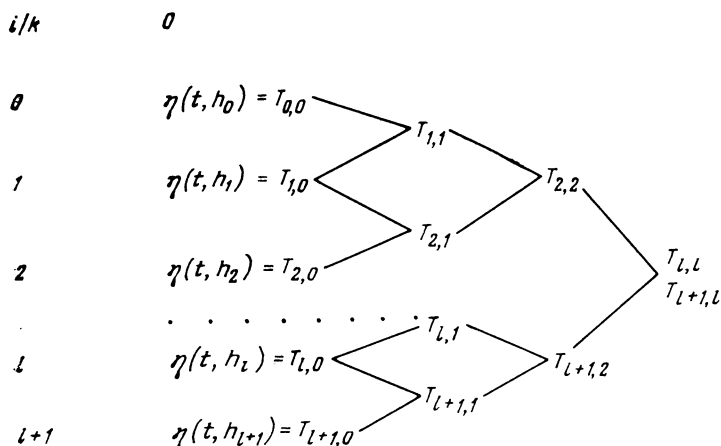
При этом значения $T_{i,k}$ (где $T_{i,k}$ есть последовательные приближения к $\widehat{T}_{i,k}$) вычисляют рекуррентно, располагая значениями $T_{i+1,k-1}$, $T_{i,k-1}$, $T_{i,k-2}$. Поэтому можно выбрать степень экстраполяционной функции в процессе интегрирования в зависимости от требуемой точности вычислений.

Рекуррентные формулы для вычисления рациональной функции в методе Бульсто имеют вид

$$\left. \begin{aligned} T_{i,-1} &= 0; \\ T_{i,0} &= T(h_i, t) = \eta(t, h_i); \\ T_{i,k} &= T_{i+k,k-1} + \frac{T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}{\left(\frac{h_i}{h_{i+k}}\right)^2 \left[1 - \frac{T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}{T_{i+1,k-1} - T_{i,k-1}}\right] - 1}, \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

где $k \geq 1$.

Само интегрирование можно представить так:



Контроль точности производится путем сравнения двух последовательных приближений для искомой функции $T_{i,k}$ и $T_{i,k-1}$. Для прекращения итерационного процесса используют условие

$$|bs(\Delta x_i)| \leq \Sigma S_i,$$

где

$$\Delta x_i = T_{i,k} - T_{i,k-1}$$

$$\varepsilon = 10^{(-D+3)},$$

D — число десятичных разрядов, реализуемых на ЭВМ,

$$S_i = \max \{S_{i-1} | x_i(\xi)\},$$

$$\xi \in (t, t+h)$$

т. е. изменение функции при добавлении следующей степени не должно превышать заданной точности. При этом перед первым шагом интегрирования в массиве S_i должны стоять нули.

Оптимальный режим работы машины достигается автоматической коррекцией шага. Опыт вычислений показал, что для большинства функций степень экстраполяции полинома, обеспечивающая оптимальный режим работы ЭВМ, равна 6. Если же увеличивать степень экстраполяции, то резко увеличивается и расход машинного времени из-за необходимости большого числа обращений к правым частям; с другой стороны, малая степень экстраполяции приводит к уменьшению шага и, следовательно, тоже к увеличению затрат машинного времени. На каждом шаге ЭВМ прогнозирует величину следующего шага по алгоритму

$$H = 0,9H_0 (0,6)^{m-7}, \text{ если } m \geq 7,$$

$$H = 1,5H_0, \text{ если } m < 7,$$

где H_0 — первоначальный шаг, m — степень экстраполяции на данном шаге.

Метод Бульсто был исследован в институте теоретической астрономии АН СССР Е. Н. Макаровой и Т. К. Никольской.

В качестве модели для исследований был взят ИСЗ ЭХО-1, орбита которого обладает умеренным эксцентриситетом. Подпрограмма вычисления правых частей учитывала гравитационное поле Земли до гармоник 7-го порядка, а также лунно-солнечные возмущения и световое давление.

Е. Н. Макаровой и Т. К. Никольской приводится сравнение затрат машинного времени на БЭСМ-6 различными методами для промежутка в 1 сут с точностью вычислений 10^{-9} .

Метод Коуэлла	5^h
Стандартный метод Рунге — Кутта	$2,5^h$
Модифицированный метод Рунге — Кутта	50^m
Метод Бульсто	10^m

Ошибка интегрирования методом Бульсто составила всего 0,03 м, в то время как эта ошибка при методе Рунге — Кутта составила 6 м.

3. Метод Эверхарта.

В методе Эверхарта интегрируются временные ряды, которые получаются с использованием некоторой эмпирической кривой. Эта кривая в свою очередь определяется по значениям интегрируемой функции в нескольких точках, разделенных неодинаковыми промежутками. Метод Эверхарта является одношаговым. Особенность метода Эверхарта в том, что его точность на несколько порядков выше, чем та, которую можно было ожидать от порядка аппроксимирующего полинома.

Рассмотрим дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\ddot{x} = F(x, t), \quad (5.97)$$

для которого известны начальные условия

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(t_0) \text{ и } x_0 = x(t_0); \quad t_0 = 0.$$

Разложим уравнение (5.97) в начальный момент t_0 по степеням времени

$$\ddot{x} = F = F_1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_N t^N. \quad (5.98)$$

Интегрируя уравнение (5.98), получим

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + F t + A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 \frac{t^3}{3} + \dots + A_N \frac{t^{N+1}}{N+1}; \quad (5.99)$$

$$x = x_1 + \dot{x}_1 t + F_1 \frac{t^2}{2} + A_1 \frac{t^3}{6} + \dots + A_N \frac{t^{N+2}}{(N+1)(N+2)}. \quad (5.100)$$

Ряд (5.98) не является рядом Тейлора, поскольку выбор коэффициентов $A_1, A_2, \dots, A_N$ не дает возможности одинаково хорошо представить функцию F для всех значений t , но зато обеспечивает наиболее точное вычисление x и $\dot{x}$ на основании выражений (5.99) и (5.100) для некоторого заранее выбранного момента T .

Таким образом, неизвестными являются коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_N$. Для их определения в методе Эверхарта используется способ, аналогичный методу Рунге — Кутты.

Исследуются значения функции F на некоторых неравномерно расположенных подшагах t_2, t_3 и t_4 , начиная с $t_1=0$.

С использованием этих данных определяются такие значения коэффициентов $A_1, A_2, \dots, A_N$, при которых уравнения (5.99) и (5.100) становятся точными для конечной точки T временного интервала.

Для установления связи коэффициентов A_i с соответствующими значениями функции F напомним еще одно дополнительное разложение:

$$F = F_1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t-t_2) + \alpha_3 t(t-t_2)(t-t_3) \dots \quad (5.101)$$

Числу членов в этом ряду ограничено степенью разложения (5.98). Поскольку ку последним членом ряда (5.101) будет выражение, содержащее t_n , то

$$\left. \begin{aligned} F_2 &= F_1 + \alpha_1 t_2; \\ F_3 &= F_1 + \alpha_1 t_3 + \alpha_3 t_3(t_3 - t_2); \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5.102)$$

Если ввести обозначение $t_{ij} = t_i - t_j$, то на основании (5.102) получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (F_2 - F_1)/t_2; \\ \alpha_2 &= ((F_3 - F_1)/t_3 - \alpha_1)/t_{32}; \\ \alpha_3 &= (((F_4 - F_1)/t_4 - \alpha_1)/t_{42} - \alpha_2)/t_{43}; \\ \alpha_4 &= (((((F_5 - F_1)/t_5 - \alpha_1)/t_{52} - \alpha_2)/t_{53} - \alpha_3)/t_{54}; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5.103)$$

Поскольку значения функции F заданы в неравноотстоящих узлах интерполяции, то величины $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ являются разделенными разностями. При этом каждое новое значение F добавит новое α без всякого изменения их предыдущих значений. Для того, чтобы установить связь между α и A , достаточно приравнять члены с одинаковыми степенями в разложениях (5.98) и (5.101):

$$\left. \begin{aligned} A &= \alpha_1 + [-t_2] \alpha_2 + [t_2 t_3] \alpha_3 + \dots = c_{11} \alpha_1 + c_{21} \alpha_2 + c_{31} \alpha_3 + \dots; \\ A &= \alpha_2 + [-t_2 - t_3] \alpha_3 + \dots = c_{22} \alpha_2 + c_{32} \alpha_3 + \dots; \\ A &= \alpha_3 + \dots = c_{33} \alpha_3 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5.104)$$

где

$$[t_i, t_{i+1}] = \frac{F_{i+1} - F_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

При этом коэффициенты c_{ij} связаны рекуррентными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} c_{ii} &= 1; \\ c_{i1} &= -t_i c_{i-1,1} \quad (i > 1); \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j} \quad (1 < j < i); \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

После установления значений α_i сразу же получаются коэффициенты A_i по формулам (5.104), при этом каждое предшествующее значение A корректируется.

На основании сказанного процесс интегрирования в методе Эверхарта строится следующим образом.

Располагая в начальный момент $t_1=0$ значениями x_1 , $\dot{x}_1$ и F_1 , строим три приближенных последовательности для каждого узла:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + \dot{x}_1 t_2 + F_1 t_2^2/2 + [A_1 t_2^3/6 + A_2 t_2^4/12 + A_3 t_2^5/20]; \\ x_3 &= x_1 + \dot{x}_1 t_3 + F_1 t_3^2/2 + A_1 t_3^3/6 + [A_2 t_3^4/12 + A_3 t_3^5/20]; \\ x_4 &= x_1 + \dot{x}_1 t_4 + F_1 t_4^2/2 + A_1 t_4^3/6 + A_2 t_4^4/12 + [A_3 t_4^5/20] \end{aligned} \right\} \quad (5.106)$$

и два точных уравнения для определения положения и скорости в конце шага:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(T) &= \dot{x}_1 + \dot{x}T + F_1 T^2/2 + A_1 T^3/6 + A_2 T^4/12 + A_3 T^5/20; \\ x(T) &= x_1 + E_1 T + A_1 T^2/2 + A_2 T^3/3 + A_3 T^4/4. \end{aligned} \right\} \quad (5.107)$$

В первом приближении члены в квадратных скобках в выражении (5.106) являются неизвестными. Поскольку α_i медленно меняются от шага к шагу, то, располагая α из приближенной последовательности и второй последовательностью, можно хорошо предвычислить α для текущей последовательности. Практически при наличии трех узлов α_1 можно получить путем линейной экстраполяции. Что же касается α_2 и α_3 , то для них следует использовать параболическое экстраполирование.

С полученным таким образом α_i находятся приближенные значения A_1 , A_2 , A_3 по формулам (5.104).

В начале каждой итерации мы располагаем предварительными значениями членов в скобках. Но в самом начале интегрирования (на первом шаге) еще нет значений α , полученных из предыдущих шагов; в этом случае все предварительные значения α принимаются равными нулю, поэтому выражения в скобках на первом шаге также равны нулю.

Располагая приближенными значениями A_1 , A_2 и A_3 , полученными по формулам (5.104), получаем x_2 . Используя это значение x_2 , вычисляем $F_2(x_2, t_2)$ и новые значения α_1 из уравнения (5.103). Далее улучшаем значение A_1 по формуле (5.104) с учетом экстраполированного значения α_1 по формуле (5.104) с учетом экстраполированного значения α_1 . Значение x_3 получаем на основании (5.106), используя при этом уточненные значения A_1 и предварительные значения A_2 и A_3 . Далее находим F_3 по x_3 и определяем α_2 по уравнению (5.103). Затем на основании (5.104) исправляем значение A_2 , используя при этом новое значение α_2 и старое значение α_1 . Точно так же исправляем A_1 . Аналогично получаем x_4 , F_4 , α_3 , новое значение A_3 и еще более точные значения A_2 и A_1 .

Как правило, делают два приближения на каждой последовательности. При прохождении по ней первый раз используют значения определяемых величин из предыдущей последовательности, а при втором прохождении — только внутренние значения текущей последовательности. Для самой первой последовательности, когда нет предыдущих значений, как уже было сказано, предварительные α полагают равными нулю.

Повышение точности вычисления значений x и $\dot{x}$ (по сравнению с ожидаемой от степени используемого полинома) достигается следующим образом.

Предположим, что получены еще два дополнительных значения F в моменты t_3 и t_6 и определены значения α_4 и α_5 . Эти дополнительные вычисления вносят некоторые поправки в x и $\dot{x}$. Точность вычислений повышается на два порядка за счет того, что, используя полученные значения α_4 и α_5 , можно вычислить новые значения A_4 и A_5 из уравнений (5.104) и исправить предыдущие A_1 , A_2 и A_3 .

В Астросовете АН СССР были выполнены сравнительные исследования методов Бульсто и Эверхарта. При этом оказалось, что метод Бульсто является более эффективным, чем методы Рунге — Кутты и Адамса, как в смысле точности, так и по затратам машинного времени.

Алгоритм метода Бульсто проще, чем алгоритм Эверхарта, и требует меньших затрат машинного времени, однако метод Эверхарта обладает значительно большей устойчивостью по сравнению с методом Бульсто. При достаточно простых выражениях для правых частей дифференциальных уравнений решение по методу Бульсто получается гораздо быстрее, чем по методу Эверхарта, несмотря на то, что обращение к правым частям в методе Бульсто происходит в 1,5—2 раза чаще. Поэтому алгоритм Бульсто выгоднее применять для дифференциальных уравнений со сравнительно простыми правыми частями и на не очень больших промежутках времени с целью сохранения устойчивости решения. При сложных выражениях для правых частей более эффективным является метод Эверхарта, устойчивость которого сохраняется на больших промежутках времени.

ГЛАВА 6

ОРБИТАЛЬНЫЙ МЕТОД КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННОЙ ПРИВЯЗКИ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСМИЧЕСКИХ СЪЕМОК ЗЕМЛИ И ЛУНЫ

При изучении Земли и Луны из Космоса существенное значение имеет фотограмметрический метод как наиболее объективный и документальный способ изучения геометрических образов.

Выбор аппаратуры на борту космического аппарата (КА) позволяет установить математические связи между изучаемыми по космическим снимкам объектами, а теория орбитального движения КА относительно центра масс планеты с учетом всех действующих сил (гравитационных, сопротивления атмосферы, светового давления и т. д.) вводит в задачу ряд параметров, некоторые из которых могут считаться заданными в качестве исходных, а другие уточняться на основании орбитальных измерений.

К таким параметрам относятся, например, планетоцентрическая гравитационная постоянная, элементы вращения планеты, параметры модели атмосферы, коэффициенты в разложении аномального гравитационного поля в ряд по сферическим функциям. Возможности уточнения указанных параметров на основании анализа космических снимков ограничены точностью измерений на снимках, которая в свою очередь зависит от полноты учета факторов, искажающих фотоизображение, и разрешающей способности аппаратуры.

В результате применения орбитального метода с использованием наземных измерений можно определить координаты КА в моменты фотографирования $t_1, t_2, \dots, t_j$. При определенном составе бортовой аппаратуры для этой же цели могут служить результаты бортовых измерений (показания высотомера, снимки поверхности планеты и т. д.).

Зная координаты центров фотографирования, можно определить длины и ориентацию базисов космической съемки, которыми являются векторы $\bar{r}_{jk}$, соединяющие последовательные точки фотографирования j и k в моменты t_j и t_k .

Положение точек $l_1, l_2, \dots, l_n$ поверхности планеты получается во внутренней системе координат космического снимка

$$\bar{r}_l = \begin{pmatrix} \bar{x}_l \\ \bar{y}_l \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

где $\bar{x}_l, \bar{y}_l$ — неискаженные координаты точки l относительно главной точки o снимка, которой является основание перпендикуляра, опущенного из задней узловой точки объектива на плоскость сним-

ка, а f_t — фокусное расстояние камеры, т. е. расстояние от плоскости снимка до задней узловой точки объектива.

Система координат снимка $(\bar{x}, \bar{y}, -\bar{f})$ является связанной с телом КА. Ее ориентация относительно инерциальной системы координат $oxyz$, в которой описывается движение КА вокруг центра масс планеты, непрерывно изменяется вследствие движения КА вокруг своего собственного центра масс. Таким образом, при решении задачи координатно-временной привязки космических снимков приходится рассматривать два типа движения — движения КА как материальной точки вокруг центра масс планеты и движение КА как физического тела относительно собственного центра масс.

Окончательной целью координатно-временной привязки космических снимков является определение положения дешифрируемых на них объектов и явлений в некоторой планетоцентрической системе координат, жестко фиксированной в теле планеты, а также моментов всемирного времени, к которым относятся положения объектов.

Для того чтобы решить эту задачу, необходимо, во-первых, определить инерциальные координаты ИСЗ в моменты фотографирования t_j ($j=1, 2, \dots, n$) и, во-вторых, установить ориентацию связанной системы координат $(\bar{x}, \bar{y}, -\bar{f})$ в моменты t_j относительно инерциальной системы координат. Этих данных в принципе достаточно, чтобы определить положения объектов при условии, что космическая съемка планеты выполняется с перекрытием, в пределах которого уверенно идентифицируются объекты.

В самом деле, пусть j и k (рис. 14) — два последовательных положения КА в моменты фотографирования t_j и t_k , а точка l поверхности планеты изобразилась на обоих снимках.

Если ориентация систем координат снимков известна, то известны и направления спутникоцентрических векторов $\bar{r}_{jl}^0$ и $\bar{r}_{kl}^0$ в инерциальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_{jl}^0 &= v_j \Pi_j \bar{r}_{jl}^{0'} \\ \bar{r}_{kl}^0 &= v_k \Pi_k \bar{r}_{kl}^{0'} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

где Π_j и Π_k — ортогональные операторы, устанавливающие ориентацию систем координат снимков планеты в инерциальной системе координат; $\bar{r}_{jl}^{0'}$ и $\bar{r}_{kl}^{10}$ — спутникоцентрические векторы точки l в системах координат снимков, v_j и v_k — нормирующие множители ($v_i \neq 0$; $v_k \neq 0$). Так как геоцентрические координаты спутника для моментов фотографирования по условиям задачи известны, то для определения геоцентрических координат точки будем иметь два векторных уравнения:

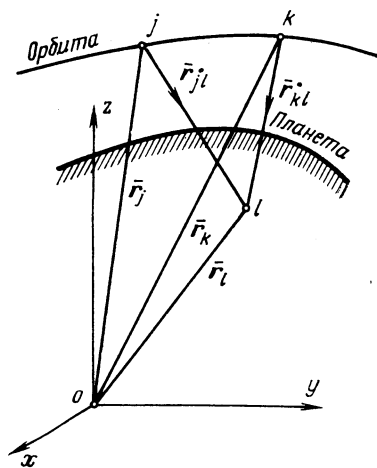


Рис. 14

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_l &= \bar{\mathbf{r}}_j + \bar{\mathbf{r}}_{jl} = \bar{\mathbf{r}}_j - |r_{jl}| \mathbf{v}_j \Pi_j \bar{\mathbf{r}}_{jl}^{01}; \\ \bar{\mathbf{r}}_l &= \bar{\mathbf{r}}_k + \bar{\mathbf{r}}_{kl} = \bar{\mathbf{r}}_k - |r_{kl}| \mathbf{v}_k \Pi_k \bar{\mathbf{r}}_{kl}^{01}. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Перейдем от векторных уравнений (6.3) к уравнениям в гринвичской системе координат:

$$\left. \begin{aligned} X_l &= X_j + r_{jl} \cos(\alpha_{jl} - S_j) \cos \delta_{jl}; \\ Y_l &= Y_j + r_{jl} \sin(\alpha_{jl} - S_j) \cos \delta_{jl}; \\ Z_l &= Z_j + r_{jl} \sin \delta_{jl}; \\ X_l &= X_k + r_{kl} \cos(\alpha_{kl} - S_k) \cos \delta_{kl}; \\ Y_l &= Y_k + r_{kl} \sin(\alpha_{kl} - S_k) \cos \delta_{kl}; \\ Z_l &= Z_k + r_{kl} \sin \delta_{kl}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

где S_j и S_k — звездное гринвичское время в моменты фотографирования; α_{jl} , δ_{jl} , α_{kl} , δ_{kl} — спутникоцентрические координаты направлений $\bar{\mathbf{r}}_{jl}^0$ и $\bar{\mathbf{r}}_{kl}^0$ в инерциальном пространстве.

Получим систему из шести уравнений с пятью неизвестными: X_l , Y_l , Z_l , r_{jl} и r_{kl} . Направляющие косинусы в гринвичской системе координат

$$\left. \begin{aligned} l_{jl} &= \cos(\alpha_{jl} - S_j) \cos \delta_{jl}; \\ m_{jl} &= \sin(\alpha_{jl} - S_j) \cos \delta_{jl}; \\ n_{jl} &= \sin \delta_{jl}; \\ l_{kl} &= \cos(\alpha_{kl} - S_k) \cos \delta_{kl}; \\ m_{kl} &= \sin(\alpha_{kl} - S_k) \cos \delta_{kl}; \\ n_{kl} &= \sin \delta_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

известны, если зарегистрированы моменты t_j и t_k фотографирования. Из решения системы уравнений (6.4) можно определить координаты точки и расстояния r_{jl} и r_{kl} .

Определение координат КА в моменты фотографирования можно выполнить прежде всего на основании орбитальных измерений. Кроме того, как это будет показано ниже, для определения орбит КА и координат в моменты фотографирования может быть использована и фотограмметрическая информация, полученная в результате обработки космических снимков. Фотограмметрический способ определения орбиты может иметь важное значение при отсутствии информации от орбитальных измерений. Определение орбиты КА по снимкам имеет особое значение при космических съемках Луны с целью ее картографирования, когда точные наземные наблюдения за искусственным спутником Луны (ИСЛ) требует значительных затрат времени и средств.

§ 40. Основное уравнение космической фотограмметрии

Планетоцентрический вектор $\bar{\mathbf{r}}_j$ искусственного спутника планеты (ИСП) в инерциальной системе координат, планетоцентрический вектор $\bar{\mathbf{r}}_i$ точки i поверхности планеты и спутникоцентрический век-

тор $\bar{\mathbf{r}}_{ji}$ этой же точки i в любой момент времени $t_j (j=1, 2, \dots, n)$ связаны векторным уравнением*

$$\bar{\mathbf{r}}_{ij}(t_j) = \bar{\mathbf{r}}_j(t_j) - \bar{\mathbf{r}}_i(t_j). \quad (6.6)$$

Геоцентрический вектор ИСП можно определить из интегрирования дифференциальных уравнений движения. Компоненты спутникоцентрического вектора $\bar{\mathbf{r}}_{ij}(t_j)$ при реализации фотограмметрических методов определения орбиты и координат пунктов планеты должны быть получены из обработки космических снимков и бортовых измерений.

Установим в связи с этим необходимый состав аппаратуры на борту ИСП:

- 1) «топографическая» камера для фотографирования поверхности планеты;
- 2) «звездная» камера для синхронного с топографической камерой фотографирования звездного неба;
- 3) лазерный высотомер с фиксацией точки отражения импульса;
- 4) бортовая служба времени, регистрирующая моменты измерений и осуществляющая синхронизацию работы аппаратуры.

Если на борту ИСП имеется перечисленная аппаратура, то компоненты спутникоцентрического вектора $\bar{\mathbf{r}}_{ji}(t)$ точки i планеты могут быть получены на основании следующих соображений.

Пусть $\mathbf{P}_0$ — ортогональный оператор взаимной ориентации систем координат звездного $(\bar{x}^*, \bar{y}^*, -\bar{f}^*)$ и топографического $(\bar{x}, \bar{y}, -\bar{f}_t)$ снимков. Будем пока предполагать, что элементы этого оператора известны и неизменны во времени. Тогда направление на любую точку i планеты

$$\bar{\mathbf{r}}_{ji}^{0*} = v_i \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}_j; \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 + \bar{f}_t^2}}, \quad (6.7)$$

полученное в системе координат топографического снимка, может быть отнесено к системе координат звездного снимка:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ji}^{0*} = \mathbf{P}_0 v_i \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}_j. \quad (6.8)$$

Предположим, что каким-нибудь методом для момента t_j определена ориентация системы координат звездного снимка в инерциальной системе координат, т. е. известны элементы ортогонального оператора $\mathbf{P}_j^*$ взаимного ориентирования этих систем.

* Перестановка индексов j^i и ij эквивалентна изменению направления на 180° .

Тогда направление вектора $\bar{\mathbf{r}}_{ji}^{0*}$ в инерциальной системе координат определится из выражения

$$\bar{\mathbf{r}}_{ji}^0 = \mathbf{p}_j^* \bar{\mathbf{r}}_{ji}^0 = \mathbf{p}_j^* \mathbf{p}_0 \mathbf{v}_i \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}_j. \quad (6.9)$$

При наличии показаний лазерного высотомера для точки отраженного импульса определяется и модуль r_{ji} спутникоцентрического вектора. Поэтому для точки отраженного импульса получим

$$\bar{\mathbf{r}}_{ji} = |r_{ji}| \mathbf{p}_j^* \mathbf{p}_0 \mathbf{v}_i \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Подставляя этот результат в выражение (6.6), будем иметь

$$|r_{ij}| \mathbf{p}_j^* \mathbf{p}_0 \mathbf{v}_i \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{r}}_j(t_j) - \bar{\mathbf{r}}_i(t_j). \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) является основным уравнением космической фотограмметрии. В самом деле, оно связывает результаты бортовых измерений r_{ij} и $\bar{\mathbf{r}}_{ij}^0$ с элементами орбиты, параметрами движения, неявно входящими через $\bar{\mathbf{r}}_j(t_j)$, координатами точек поверхности планеты и элементами ее вращения.

На основании уравнения (6.11) можно решать ряд задач планетодезии, к числу которых, например, относятся определение элементов орбиты ИСП, внешнего гравитационного поля планеты, определение координат пунктов и элементов вращения планеты.

Линеаризация выражения (6.11) приводит к уравнению поправок, возникающему при использовании фотограмметрических измерений в орбитальном методе

$$\frac{\partial(r, \alpha, \delta)_{ij}}{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_j} \frac{\partial(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\partial(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \\ \Delta \dot{x}_0 \\ \Delta \dot{y}_0 \\ \Delta \dot{z}_0 \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{\partial(r, \alpha, \delta)_{ij}}{\partial(x, y, z)_i} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}_i + \bar{\mathbf{l}}_{ij} = \bar{\mathbf{v}}_{ij}, \quad (6.12)$$

в котором свободный член $\bar{\mathbf{l}}_{ij}$ вычисляется по формуле

$$\bar{\mathbf{l}}_{ij} = (\bar{\mathbf{r}}_{ij}) - |r_{ij}| \mathbf{p}_j^* \mathbf{p}_0 \mathbf{v}_i \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}_j, \quad (6.13)$$

где $(\bar{r}_{ij})$ — приближенное значение спутникоцентрического вектора, полученное из интегрирования дифференциальных уравнений движения, точно соответствующее приближенным начальным условиям $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{\dot{x}}_0, \tilde{\dot{y}}_0, \tilde{\dot{z}}_0)$ и приближенным координатам точки планеты (x_{0i}, y_{0i}, z_{0i}) .

§ 41. Модель движения системы координат космического снимка относительно центра масс космического аппарата

Движение связанной системы координат снимка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = -f)$ относительно центра масс КА можно установить на основании теоремы Эйлера о моменте количества движения

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M}, \quad (6.14)$$

где $\bar{K}$ — момент количества движения КА, а $\bar{M}$ — главный момент внешних сил, действующих на КА.

Для вращающихся систем координат уравнение (6.14) записывается в виде

$$\frac{d\bar{K}^*}{dt} + [\bar{\omega} \times \bar{K}] = \bar{M}, \quad (6.15)$$

где $\frac{d\bar{K}^*}{dt}$ — производная момента количества движения во вращающейся системе координат, а $\bar{\omega}$ — вектор абсолютной угловой скорости вращающейся системы координат.

Спроектируем векторное уравнение (6.15) на оси связанной системы $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = -f)$. При этом проекции K_x, K_y, K_z вектора $\bar{K}$ момента количества движения на оси связанной системы координат определяются формулой

$$\begin{vmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{vmatrix} = A_J \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix}, \quad (6.16)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — составляющие вектора $\bar{\omega}$ по осям связанной системы; A_J — тензор инерции КА:

$$A_J = \begin{vmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}. \quad (6.17)$$

Диагональные элементы матрицы A_J являются моментами инерции объекта относительно осей $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = -f)$ связанной системы, а недиагональные — центробежными моментами инерции. В общем случае элементы матрицы

инерции изменяются при перераспределениях массы КА в процессе запуска и космического полета. Исключением является КА, рассматриваемый как абсолютно жесткое тело. Если оси связанной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции КА, то матрица A_J является диагональной

$$A_J = \begin{vmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{vmatrix}. \quad (6.18)$$

Теперь, рассматривая КА как твердое тело, можно написать уравнения, которые получаются в результате записи векторного равенства (6.15) в проекциях на оси связанной системы координат [17]:

$$A_J \begin{vmatrix} \dot{\omega}_{\bar{x}} \\ \dot{\omega}_{\bar{y}} \\ \dot{\omega}_{\bar{z}=-f} \end{vmatrix} + A_{\omega} A_J \begin{vmatrix} \omega_{\bar{x}} \\ \omega_{\bar{y}} \\ \omega_{\bar{z}=-f} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{\bar{x}} \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \end{vmatrix}, \quad (6.19)$$

где

$$A_{\omega} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega_{\bar{z}} & -\omega_{\bar{y}} \\ \omega_{\bar{z}} & 0 & -\omega_{\bar{x}} \\ -\omega_{\bar{y}} & \omega_{\bar{x}} & 0 \end{vmatrix}, \quad (6.20)$$

$M_{\bar{x}}$, $M_{\bar{y}}$, $M_{\bar{z}}$ — проекции момента внешних сил на оси связанной системы координат, а $\dot{\omega}_{\bar{x}}$, $\dot{\omega}_{\bar{y}}$, $\dot{\omega}_{\bar{z}}$ — составляющие углового ускорения $\bar{\omega}$ по осям связанной системы.

Если разрешить уравнения (6.19) относительно угловых ускорений, то получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение КА относительно своего центра масс в проекциях на оси связанной системы координат ($\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z} = -f$):

$$\begin{vmatrix} \dot{\omega}_{\bar{x}} \\ \dot{\omega}_{\bar{y}} \\ \dot{\omega}_{\bar{z}} \end{vmatrix} = A_J^{-1} \begin{vmatrix} M_{\bar{x}} \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \end{vmatrix} - A_J^{-1} A_{\omega} A_J \begin{vmatrix} \omega_{\bar{x}} \\ \omega_{\bar{y}} \\ \omega_{\bar{z}} \end{vmatrix}. \quad (6.21)$$

Для полного решения вопроса о движении КА относительно центра масс необходимо располагать еще системой кинематических уравнений, которые устанавливают связь между параметрами, определяющими ориентацию системы координат снимка в инерциальной системе, и угловой скоростью вращения системы координат снимка.

§ 42. Параметры ориентации системы координат снимка в инерциальной системе координат.

Кинематические уравнения

Ориентацию системы координат снимка ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = -f$) можно задавать при помощи эйлеровых углов.

При решении рассматриваемых задач эйлеровы углы удобно выбрать следующим образом.

На рис. 15 изображена спутникоцентрическая сфера единичного радиуса с центром в точке j ; $jxyz$ — инерциальная спутникоцентрическая система координат; f^0 — орт направления оптической оси камеры; плоскость $+q\bar{y}q'$ — плоскость снимка, $+y$ — положительное направление ординаты снимка.

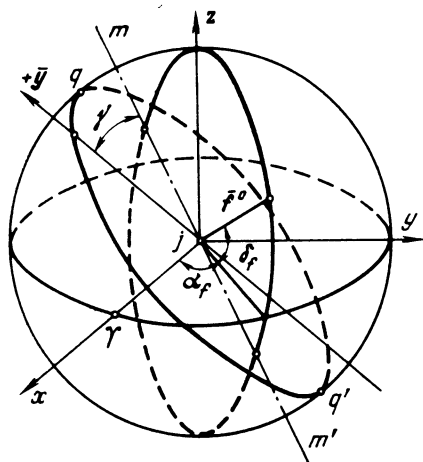


Рис. 15

В качестве эйлеровых углов, определяющих ориентацию системы координат снимка в инерциальной системе, примем:

прямое восхождение оптической оси камеры α_f ,

склонение оптической оси δ_f ,

угол γ между небесным меридианом и положительным направлением оси $\bar{y}$ снимка, отсчитанный в плоскости снимка против часовой стрелки от северного направления меридиана.

При таком выборе эйлеровых углов оператор ориентации звездного снимка Π_* определится как последовательность трех вращений

$$\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha_f \right)_z, \quad \left(\frac{3\pi}{2} + \delta_f \right)_x, \quad (-\gamma)_z,$$

т. е. в виде

$$\Pi_* = R \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha_f \right)_z R \left(\frac{3\pi}{2} + \delta_f \right)_x R (-\gamma)_z. \quad (6.22)$$

Записывая выражения для матриц вращения, получим

$$\Pi_* = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_f & -\cos \alpha_f & 0 \\ \cos \alpha_f & -\sin \alpha_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \delta_f & -\cos \delta_f \\ 0 & \cos \delta_f & \sin \delta_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Перемножая матрицы вращения в правой части формулы (6.23), будем иметь

$$\mathbf{P}_* = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= -\sin \alpha_f \cos \gamma - \cos \alpha_f \sin \delta_f \sin \gamma; \\ m_{12} &= \sin \alpha_f \sin \gamma - \cos \alpha_f \sin \delta_f \cos \gamma; \\ m_{13} &= \cos \alpha_f \cos \delta_f; \\ m_{21} &= \cos \alpha_f \cos \gamma - \sin \alpha_f \sin \delta_f \sin \gamma; \\ m_{22} &= -\cos \alpha_f \sin \gamma - \sin \alpha_f \sin \delta_f \cos \gamma; \\ m_{23} &= \sin \alpha_f \cos \delta_f; \\ m_{31} &= \cos \delta_f \sin \gamma; \\ m_{32} &= \cos \delta_f \cos \gamma; \\ m_{33} &= \sin \delta_f. \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Кинематические уравнения могут теперь быть представлены в виде производных направляющих косинусов (6.25), выраженных через угловые скорости,

$$\frac{d\mathbf{P}_*}{dt} = \mathbf{P}_* \mathbf{A}_\omega, \quad (6.26)$$

где матрица $\mathbf{A}_\omega$ определяется формулой (6.20).

Пусть для некоторого момента t_0 известны эйлеровы углы α_f^0, δ_f^0 и γ^0 и составляющие угловой скорости $\omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0$ по осям связанной системы координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = -\bar{f})$, тогда эти величины можно рассматривать в качестве начальных условий для интегрирования дифференциальных уравнений (6.21) движения КА относительно своего центра масс. В принципе начальные условия $(\alpha_f^0, \delta_f^0, \gamma^0, \omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0)$ можно получить путем фотографирования звездного неба «звездной» камерой и затем из интегрирования уравнений (6.21) движения относительно центра масс КА получить эйлеровы углы и составляющие угловой скорости для любого момента $t_j (j=1, 2, \dots, n)$. Интегралы системы (6.21) определяются лишь в некоторых частных случаях задания сил.

Однако если действующие моменты малы, то можно применить метод вариаций постоянных интегрирования (аналогично тому, как выводятся дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов орбиты) и получить достаточно простые и точные выражения для описания основных свойств движения связанной системы вокруг центра масс КА. Заметим, что в случае, когда составляющие главного момента внешних сил M_x, M_y и M_z равны нулю, движение является невозмущенным и интегралы уравнений (6.21) получаются в конечном виде. Если фотографирование звездного неба производится одновременно с фотографированием планеты,

то фактически для моментов $t_j (j=1, 2, \dots, n)$ получаются интегралы системы (6.21) на основании определения ориентации звездного снимка в инерциальной системе координат. В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполняется.

§ 43. Определение ориентации «звездного» снимка в инерциальной системе координат

Определение элементов ортогонального оператора Π_* , осуществляющего преобразование вектора направления на звезду, заданного в системе координат снимка, в инерциальную систему координат, является основной операцией при определении спутникоцентрического направления $\bar{\mathbf{r}}_{it}^0$ в соответствии с алгоритмом (6.9).

В фотограмметрии аналог этой задачи часто называется обратной пространственной засечкой или, в силу ее важности, основной задачей фотограмметрии. Ей посвящена обширная литература. Различные варианты решения можно найти, например, в работах [21, 28, 55].

Здесь мы рассмотрим методы решения этой задачи, наилучшим образом соответствующие особенностям космических съемок.

1. Некоторые свойства ортогонального оператора Π_* .

Пусть преобразование направления на звезду из системы координат снимка в инерциальную систему координат осуществляется по формуле

$$\bar{\mathbf{r}}_i^0 = v \Pi_*^i \bar{\mathbf{R}}_i, \quad (6.27)$$

где

$$\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} x_i^* \\ y_i^* \\ -f^* \end{pmatrix}; \quad (6.28)$$

$$\bar{\mathbf{r}}_i^0 = \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}_i; \quad (6.29)$$

x_i^* , y_i^* — координаты i -й звезды в системе координат звездного снимка; f^* — фокусное расстояние звездной камеры; v — коэффициент пропорциональности; α_i и δ_i — прямое восхождение и склонение звезды.

После нормирования уравнение (6.27) напишем в виде

$$\bar{\mathbf{r}}_i^0 = \Pi_*^i \begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{pmatrix} = \Pi_*^i \bar{\mathbf{R}}_i^0, \quad (6.30)$$

где

$$\bar{\mathbf{R}}_i^0 = \begin{pmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_i^*}{\sqrt{x_i^{*2} + y_i^{*2} + f^{*2}}} \\ \frac{y_i^*}{\sqrt{x_i^{*2} + y_i^{*2} + f^{*2}}} \\ \frac{z_i^*}{\sqrt{x_i^{*2} + y_i^{*2} + f^{*2}}} \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Оператор $\mathbf{P}_j^*$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_j^* = \cos \zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \zeta) \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{pmatrix} + \\ + \sin \zeta \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

где ζ — угол поворота вокруг положительной оси вращения, точки которой инварианты, а c_1 , c_2 и c_3 являются направляющими косинусами положительного направления оси вращения, причем

$$\cos \zeta = \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{P}_j^*) - 1] = \frac{1}{2} (m_{11} + m_{22} + m_{33} - 1), \quad (6.33)$$

$$c_1 = \frac{m_{32} - m_{23}}{2 \sin \zeta}; \quad c_2 = \frac{m_{13} - m_{31}}{2 \sin \zeta}; \quad c_3 = \frac{m_{21} - m_{12}}{2 \sin \zeta}. \quad (6.34)$$

Направление положительной оси вращения определяется направлением вектора

$$\bar{\mathbf{C}} = c_1 \bar{\mathbf{e}}_x + c_2 \bar{\mathbf{e}}_y + c_3 \bar{\mathbf{e}}_z, \quad (6.35)$$

соответствующего собственному значению $+1$ оператора $\mathbf{P}_j^*$, а два остальных собственных значения являются комплексно-сопряженными:

$$\cos \zeta \pm i \sin \zeta = e^{\pm i \zeta}.$$

Оператор $\mathbf{P}_j^*$ можно еще представить так:

$$\mathbf{P}_j^* = (\mathbf{A}^\top)^{-1} \mathbf{A}, \quad (6.36)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -m_{13} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} & -m_{12} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \\ -m_{13} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} & 1 & m_{11} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} \\ m_{12} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} & -m_{11} \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

Следствием формулы (6.36) является формула Родрига

$$A \bar{r}_i^0 = A \bar{r}_i^0, \quad (6.38)$$

где A есть матрица, определяемая выражением (6.37).

2. Прямой метод определения ориентации звездного снимка.

На основании рассмотренных выше соотношений М. И. Щербаков предложил следующий прямой способ определения ориентации звездного снимка.

Пусть на астронегативе имеются изображения двух звезд с известными инерциальными координатами α_1, δ_1 и α_2, δ_2 , а также измерены координаты этих звезд $(x_1^*, y_1^*, z_1^* = -f^*)$ и $(x_2^*, y_2^*, z_2^* = -f^*)$ в системе координат астронегатива. Тогда оператор P_* можно определить как последовательность двух вращений.

1) Повернем систему координат звездного снимка на угол θ вокруг оси $\bar{C}$, направление которой перпендикулярно к плоскости, заданной направлениями на первую звезду в системе координат астронегатива $\bar{r}_1^0$ и инерциальной системе координат $\bar{r}_1^0$

$$\bar{C} = [\bar{r}_1^0 \times \bar{r}_1^0]. \quad (6.39)$$

при этом угол поворота θ определяется формулой

$$\theta = \arccos(\bar{r}_1^0 \cdot \bar{r}_1^0), \quad (6.40)$$

или в координатной форме

$$\theta = \arccos(L_1 l_1 + M_1 m_1 + N_1 n_1), \quad (6.41)$$

где L_1, M_1, N_1 определяются по формуле (6.31), а l_1, m_1, n_1 — по формуле (6.29).

Направляющие косинусы c_1, c_2, c_3 оси вращения получим на основании выражений

$$c_1 = \frac{n_1 M_1 - m_1 N_1}{\sin \theta}; \quad c_2 = \frac{l_1 N_1 - n_1 L_1}{\sin \theta}; \quad c_3 = \frac{m_1 L_1 - l_1 M_1}{\sin \theta}. \quad (6.42)$$

Оператор, осуществляющий первый поворот, будет иметь вид

$$A = \cos \theta \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{vmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \sin \theta \begin{vmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.43)$$

После этого поворота система координат звездного снимка займет новое положение (x_1, y_1, z_1) , при котором направления на звезду 1 в инерциальной системе и системе (x_1, y_1, z_1) совпадают, т. е.

$$\bar{\mathbf{r}}_1^0 = \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}}_1^0. \quad (6.44)$$

2) Осуществляется поворот системы координат (x_1, y_1, z_1) до совмещения с инерциальной. Для этого система (x_1, y_1, z_1) поворачивается вокруг оси $\bar{\mathbf{r}}_1^0 = \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}}_1^0$ на угол η , величина которого и направление вращения определяются следующим образом.

Введем векторы $\mathbf{F}^0$ и $\mathbf{G}^0$ по уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}^0 &= f_1 \bar{\mathbf{e}}_x + f_2 \bar{\mathbf{e}}_y + f_3 \bar{\mathbf{e}}_z = [\bar{\mathbf{r}}_1^0 \times \mathbf{r}_2^0], \\ \bar{\mathbf{G}}^0 &= g_1 \bar{\mathbf{e}}_x + g_2 \bar{\mathbf{e}}_y + g_3 \bar{\mathbf{e}}_z = [\bar{\mathbf{r}}_1^0 \times \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}}_2^0] = \bar{\mathbf{r}}_1^0 \times \bar{\mathbf{r}}_2^0, \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

где индексом 2 отмечены величины, относящиеся ко второй звезде. Тогда угол η определится из выражений

$$\left. \begin{aligned} \cos \eta &= f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3; \\ \sin \eta &= \frac{f_2 g_3 - f_3 g_2}{l_1} = \frac{f_3 g_1 - f_1 g_3}{m_1} = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{n_1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{\sin \beta}; & f_2 &= \frac{l_2 n_1 - l_1 n_2}{\sin \beta}; & f_3 &= \frac{l_1 m_2 - l_2 m_1}{\sin \beta}; \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)^2}; \\ g_1 &= \frac{m_1 n_2' - m_2 n_1'}{\sin \gamma}; & g_2 &= \frac{n_1 l_2' - l_1 n_2'}{\sin \gamma}; & g_3 &= \frac{l_1 m_2' - m_1 l_2'}{\sin \gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Здесь l_2' , m_2' и n_2' — направляющие косинусы вектора $\bar{\mathbf{r}}_2^{0'} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}}_2^0$,

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - (l_1 l_2' + m_1 m_2' + n_1 n_2')^2},$$

$$\bar{\mathbf{r}}_2^{0'} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{r}}_2^0 = l_1' \bar{\mathbf{e}}_x + m_2' \bar{\mathbf{e}}_y + n_2' \bar{\mathbf{e}}_z.$$

Оператор, соответствующий второму повороту, получим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \cos \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \eta) \begin{bmatrix} l_1^2 & l_1 m_1 & l_1 n_1 \\ m_1 l_1 & m_1^2 & m_1 n_1 \\ n_1 l_1 & n_1 m_1 & n_1^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \sin \eta \begin{bmatrix} 0 & -n_1 & m_1 \\ n_1 & 0 & -l_1 \\ m_1 & l_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

После выполнения второго вращения оператор ориентирования звездного снимка Π_j^* получится путем перемножения матриц

$$\Pi_j^* = \mathbf{B}\mathbf{A}. \quad (6.49)$$

3) Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий вычисление оператора ориентирования звездного снимка.

Элементы внутреннего ориентирования звездной камеры:

$$f = 400,00 \text{ мм}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

Координаты первой и второй звезд на снимке:

$$x_1 = +20,00 \text{ мм}; \quad y_1 = +10,00 \text{ мм},$$

$$x_2 = -100,00 \text{ мм}, \quad y_2 = -50,00 \text{ мм}.$$

Координаты этих же звезд в инерциальной системе координат:

$$\alpha_1 = 13^h 46^m 56,733^s,$$

$$\delta_1 = -38^\circ 02' 51,00'',$$

$$\alpha_2 = 15^h 15^m 14,867^s,$$

$$\delta_2 = -47^\circ 53' 40,00''.$$

Оператор $\mathbf{A}$ определим по первой звезде. Косинус угла поворота $\cos\theta = 0,57141$, а направляющие косинусы оси вращения

$$c_1 = -0,44978, \quad c_2 = +0,89315, \quad c_3 = -0,00016.$$

С этими значениями оператор $\mathbf{A}$ будет иметь вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,65810 & -0,17204 & 0,73301 \\ -0,17231 & 0,91330 & 0,36906 \\ -0,73295 & -0,36918 & 0,57140 \end{bmatrix}.$$

Направляющие косинусы оси вращения второго поворота

$$l_1 = -0,70330, \quad m_1 = -0,35429, \quad n_1 = -0,61632,$$

а модуль и направление поворота

$$\cos \eta = -0,62656, \quad \sin \eta = -0,77936.$$

Оператор $\mathbf{B}$ будет таким:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,17800 & -0,07505 & +0,98116 \\ 0,88563 & -0,42240 & -0,19298 \\ 0,42892 & 0,90330 & -0,00872 \end{bmatrix}.$$

Матрица перехода Π_* получается как произведение операторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$:

$$\Pi_* = \mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,58908 & -0,46139 & +0,66342 \\ +0,79704 & -0,46692 & +0,38302 \\ +0,13304 & +0,75441 & +0,64280 \end{bmatrix}.$$

Если оператор **A** вычислять по второй звезде, то

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,96519 & -0,12032 & 0,23221 \\ 0,01635 & 0,91390 & 0,40560 \\ -0,26102 & -0,38769 & 0,88406 \end{bmatrix},$$

а оператор **B** будет следующим:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0,35900 & -0,16222 & 0,91913 \\ 0,91444 & -0,25832 & 0,31158 \\ 0,18688 & 0,95234 & 0,24107 \end{bmatrix};$$

после перемножения операторов получим тот же результат — оператор **П***.

3. Определение оператора ориентации звездного снимка и элементов внутреннего ориентирования звездной камеры по методу наименьших квадратов.

Полученное выше решение задачи определения оператора ориентации **П*** звездного снимка с использованием двух опорных звезд следует считать предварительным. Располагая предварительным значением оператора **П***, можно решать более общую задачу — совместное определение поправок эйлеровых углов α_f и δ_f и элементов внутреннего ориентирования камеры, которыми являются координаты главной точки снимка $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ и фокусное расстояние f . При этом в качестве опорных используются все опознанные на снимке звезды.

Для каждой опорной звезды составим две функции:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \alpha - \operatorname{arctg} \frac{m}{l}; \\ F_2 &= \delta - \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{m^2 + l^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

Линеаризация этих функций приводит к уравнениям поправок следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}V_\alpha \cos \delta + a_{13}V_x + a_{14}V_y + a_{15}V_f + a_{16}V_{x_0} + \\ + a_{17}V_{y_0} + b_{11}\Delta\alpha_f + b_{12}\Delta\delta_f + b_{13}\Delta\gamma + W_\alpha = 0; \\ a_{22}V_\delta + a_{23}V_x + a_{24}V_y + a_{25}V_f + a_{26}V_{x_0} + a_{27}V_{y_0} + \\ + b_{21}\Delta\alpha_f + b_{22}\Delta\delta_f + b_{23}\Delta\gamma + W_\delta = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

Уравнения (6.51) представим в матричной форме

$$\mathbf{AV} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{U} + \mathbf{W} = 0, \quad (6.52)$$

где **V** — вектор поправок к непосредственно измеренным величинам, а $\Delta\mathbf{U}$ — вектор дополнительных неизвестных,

$$\Delta U = \begin{pmatrix} \Delta \alpha_f \\ \Delta \delta_f \\ \Delta \gamma \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Коэффициенты при неизвестных в уравнениях (6.51) имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \cos \delta; \\ a_{13} &= \frac{1}{\Delta} (m_{11} \sin \alpha - m_{21} \cos \alpha); \\ a_{14} &= \frac{1}{\Delta} (m_{12} \sin \alpha - m_{22} \cos \alpha); \\ a_{15} &= \frac{1}{\Delta} (m_{23} \cos \alpha - m_{13} \sin \alpha); \\ a_{16} &= -\frac{1}{\Delta} (m_{11} \sin \alpha - m_{21} \cos \alpha); \\ a_{17} &= -\frac{1}{\Delta} (m_{12} \sin \alpha - m_{22} \cos \alpha); \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{22} &= 1; \\ a_{23} &= \frac{1}{\Delta} [\sin \delta (m_{11} \cos \alpha + m_{21} \sin \alpha) - m_{31} \cos \delta]; \\ a_{24} &= \frac{1}{\Delta} [\sin \delta (m_{12} \cos \alpha + m_{22} \sin \alpha) - m_{32} \cos \delta]; \\ a_{25} &= \frac{1}{\Delta} [m_{33} \cos \delta - \sin \delta (m_{13} \cos \alpha + m_{23} \sin \alpha)]; \\ a_{26} &= -\frac{1}{\Delta} [\sin \delta (m_{11} \cos \alpha + m_{21} \sin \alpha) - m_{31} \cos \delta]; \\ a_{27} &= -\frac{1}{\Delta} [\sin \delta (m_{12} \cos \alpha + m_{22} \sin \alpha) - m_{32} \cos \delta]; \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= -\cos \delta; \\ b_{12} &= \sin \delta \sin (\alpha_f - \alpha); \\ b_{13} &= \cos \delta_f \sin \delta \cos (\alpha_f - \alpha) - \sin \delta_f \cos \delta; \\ b_{21} &= 0; \\ b_{22} &= -\cos (\alpha_f - \alpha); \\ b_{23} &= \cos \delta_f \sin (\alpha_f - \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(\bar{x}^* - \bar{x}^0)^2 + (\bar{y}^* - \bar{y}^0)^2 + \bar{f}^2}, \quad (6.57)$$

а величины m_{mn} — элементы оператора $\mathbf{P}_*$, которые вычисляются по формулам (6.25).

Свободные члены уравнений поправок (6.51) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} W_\alpha &= \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{m}{l} \right) \cos \delta; \\ W_\delta &= \delta - \operatorname{arctg} \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

В соответствии с принципом способа условий с дополнительными неизвестными [55] получим систему нормальных уравнений в матричной форме

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{K} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{U} + \mathbf{W} &= 0, \\ \mathbf{B}^T\mathbf{K} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

где $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов поправок непосредственных измерений; $\mathbf{B}$ — матрица коэффициентов поправок дополнительных неизвестных; $\mathbf{K}$ — вектор коррелят; $\mathbf{W}$ — вектор свободных членов уравнений поправок; $\mathbf{P}$ — вектор весов измеренных величин.

Из первого уравнения (6.59) определим вектор коррелят

$$\mathbf{K} = -(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} - (\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{W}, \quad (6.60)$$

подставив значение которого во второе уравнение (6.59), получим

$$\mathbf{B}^T(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} + \mathbf{B}^T(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{W} = 0, \quad (6.61)$$

или

$$\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{W} = 0, \quad (6.62)$$

где

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (6.63)$$

Поправки к предварительным значениям компонент вектора $\mathbf{U}^0$ дополнительных неизвестных $\Delta\alpha_f$, $\Delta\delta_f$ и $\Delta\gamma$ получим из выражения

$$\Delta\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \Delta\alpha_f \\ \Delta\delta_f \\ \Delta\gamma \end{pmatrix} = -(\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{W}. \quad (6.64)$$

Поскольку нормальные уравнения (6.59) соответствуют уравнениям поправок

$$\mathbf{B}\Delta\mathbf{U} + \mathbf{W} = \varepsilon \quad (\text{вес } P), \quad (6.65)$$

то ошибка единицы веса определяется по формуле

$$\mu^2 = \frac{\varepsilon\mathbf{P}\varepsilon^T}{2n-3}, \quad (6.66)$$

а тензор ошибок искоемых неизвестных будет

$$\mathbf{M}^2 = \mu^2\mathbf{Q}_u. \quad (6.67)$$

В заключение определяются поправки к измеренным на снимке координатам звезд:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6.68)$$

На основании исследований, выполненных в работе [58], можно сформулировать следующие условия оптимального определения оператора $\mathbf{P}_*$.

1. Независимо от точности элементов внутреннего ориентирования, а также от расположения звезд на снимке для получения вектора поправок $\Delta\mathbf{U}$ достаточно 13—15 звезд, равномерно расположенных по всему полю снимка. Дальнейшее повышение числа опорных звезд не приводит к существенному повышению точности.

2. Величины средних квадратических ошибок $m_{\alpha_f \cos \delta_f}$ и m_{δ_f} практически не зависят от значений α_f , δ_f и γ и при равномерном расположении звезд по полю снимка для $f=450$ мм имеют следующие значения (табл. 9):

Т а б л и ц а 9

Погрешности α_f и δ_f	Погрешность исходных данных	
	$m_f = 0,01$ мм $m_{x_0} = m_{y_0} = 0,01$ мм	$m_f = 0,005$ мм $m_{x_0} = m_{y_0} = 0,005$ мм
$m_{\alpha_f \cos \delta_f}$	0,30—0,45 ^s	0,15—0,25 ^s
m_{δ_f}	4,5—6,0"	2,5—3,5"

§ 44. Определение оператора $\mathbf{P}_0$ взаимной ориентации систем координат топографической и звездной камер

Определение оператора $\mathbf{P}_0$ можно выполнить при установке камер на борту КА, например, путем синхронного фотографирования звездного неба. Но в процессе запуска и полета элементы оператора $\mathbf{P}_0$ могут измениться точно так же, как и элементы внутреннего ориентирования камер ($\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, f). Поэтому лучшим решением является синхронное фотографирование звездного неба обеими камерами непосредственно в полете.

По результатам такого фотографирования можно определить элементы внешнего ориентирования камер и произвести их калибровку.

Пусть $\mathbf{P}_{*t}$ — оператор ориентирования звездного снимка, выполненного топографической камерой, а $\mathbf{P}_*$ — оператор ориентирования звездного снимка, выполненного звездной камерой. Тогда направление на одну и ту же звезду в инерциальной системе координат определится дважды:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_*^0 &= \mathbf{P}_* \bar{\mathbf{R}}_*^0, \\ \bar{\mathbf{r}}_*^0 &= \mathbf{P}_{*,t} \bar{\mathbf{R}}_{*,t}^0, \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

но поскольку

$$\bar{\mathbf{R}}_*^0 = \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{R}}_t^0, \quad (6.70)$$

то

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_*^T \mathbf{P}_{*,t}. \quad (6.71)$$

Однако фотографирование звездного неба обеими камерами требует изменения ориентации самого космического аппарата, который по условиям съемки должен перемещаться по орбите, отслеживая центр масс планеты оптической осью топографической камеры. Изменение ориентации корабля для выполнения калибровки камер в высшей степени нежелательно. Поэтому рассмотрим такой способ определения оператора $\mathbf{P}_0$, который основан на использовании снимков планеты, полученных топографической камерой. Однако при этом на снимках планеты должны быть опознаны исходные пункты с известными координатами.

Спутникоцентрическое направление $\bar{\mathbf{r}}_{jt}^0$ на опорный пункт i из положения j ИСП на орбите получим из уравнения

$$\bar{\mathbf{r}}_{ji}^0 = \mathbf{P}_*^i \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{R}}_{i(t)}^0 \quad (6.72)$$

или из уравнения

$$\mathbf{G} \bar{\mathbf{R}}_{G(ji)}^0 = \mathbf{P}_*^i \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{R}}_{i(t)}^0, \quad (6.73)$$

где $\bar{\mathbf{R}}_{G(ij)}^0$ — направление на точку поверхности i в геодезической системе координат, $\mathbf{G}$ — матрица перехода от геодезической системы координат к звездной инерциальной системе координат.

Таким образом, в рассматриваемом методе необходимо предварительно преобразовать геодезические координаты опорных пунктов в звездную систему координат по уравнению

$$\bar{\mathbf{r}}_{jt}^* = \mathbf{G} \bar{\mathbf{R}}_{G(ji)}. \quad (6.74)$$

Пусть в некоторый момент t_j получены синхронные снимки Земли и звездного неба, причем на снимке Земли уверенно опознаются минимум два пункта с известными геодезическими координатами. Тогда последовательность определения оператора $\mathbf{P}_0$ будет такова:

вычисление геодезических прямоугольных координат пунктов X , Y , Z по геодезической широте B , долготе L и высоте H

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B, \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

где N — радиус кривизны первого вертикала общего земного эллипсоида, e — эксцентриситет;

вычисление направляющих косинусов l_r, m_r, n_r геоцентрических векторов пунктов в геодезической системе координат

$$\begin{pmatrix} l_r \\ m_r \\ n_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \end{pmatrix}; \quad (6.76)$$

вычисление направляющих косинусов l^*, m^*, n^* в звездной системе координат

$$\begin{pmatrix} l^* \\ m^* \\ n^* \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} l_r \\ m_r \\ n_r \end{pmatrix}. \quad (6.77)$$

Матрица преобразования G определяется выражением

$$G = \begin{pmatrix} \cos S & -\sin S & -\delta x_p \cos S - \delta y_p \sin S \\ \sin S & \cos S & -\delta x_p \sin S + \delta y_p \cos S \\ \delta x_p & \delta y_p & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.78)$$

где S — истинное звездное время в Гринвиче; $\delta x_p, \delta y_p$ — координаты мгновенного полюса;

вычисление оператора Π_* ориентации топографического снимка в звездной системе координат, при этом в качестве исходных данных для решения используются координаты наземных пунктов с известными координатами;

вычисление оператора Π_* ориентации звездного снимка;

вычисление оператора Π_0 на основании соотношения

$$\Pi_0 = \Pi_*^T \Pi_{*,t}. \quad (6.79)$$

§ 45. Предварительное определение орбиты ИСП по снимкам из Космоса при наличии на снимках исходных пунктов

Предположим, что по результатам космического фотографирования планеты получен ряд ее снимков вдоль следа орбиты, причем каждому снимку соответствует синхронный снимок звездного неба. Пусть, кроме того, на некоторых снимках планеты уверенно опознаются минимум по два исходных пункта, заданных в планетоцентрической системе координат. Рассмотрим метод определения орбиты ИСП, основанный на результатах фотограмметрической обработки космических снимков.

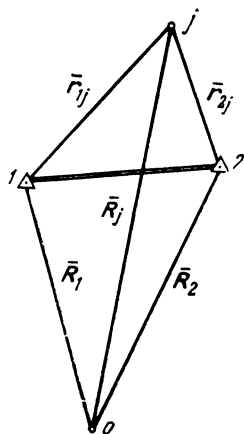


Рис. 16

1. Определение пространственного положения ИСЗ.

При наличии на каждом из снимков планеты двух исходных пунктов пространственное положение ИСЗ определяется путем пространственной засечки (рис. 16).

По результатам измерения снимков определяются единичные векторы $\bar{r}_{1j}^0$ и $\bar{r}_{2j}^0$ в момент фотографирования t_j :

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_{1j}^0 &= -v_1 \Pi_*^j \Pi_0 \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}; \\ \bar{r}_{2j}^0 &= -v_2 \Pi_*^j \Pi_0 \begin{pmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \\ -\bar{f}_t \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (6.80)$$

где $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2$ — измеренные на топографическом снимке координаты исходных пунктов. Для определения положения ИСЗ имеем теперь два векторных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_j &= \bar{R}_1 + \bar{r}_{1j}, \\ \bar{R}_j &= \bar{R}_2 + \bar{r}_{2j} \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

где $\bar{R}_j$ — геоцентрический вектор ИСЗ, а $\bar{R}_1$ и $\bar{R}_2$ — геоцентрические векторы исходных пунктов.

В координатной форме уравнения (6.81) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x_j &= x_1 + r_{1j} l_{1j}; \\ y_j &= y_1 + r_{1j} m_{1j}; \\ z_j &= z_1 + r_{1j} n_{1j}; \\ x_j &= x_2 + r_{2j} l_{2j}; \\ y_j &= y_2 + r_{2j} m_{2j}; \\ z_j &= z_2 + r_{2j} n_{2j}, \end{aligned} \right\} \quad (6.82)$$

где

$$\bar{r}_{1j}^0 = \begin{pmatrix} l_{1j} \\ m_{1j} \\ n_{1j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{1j} \cos \delta_{1j} \\ \sin \alpha_{1j} \cos \delta_{1j} \\ \sin \delta_{1j} \end{pmatrix}; \quad (6.83)$$

$$\bar{r}_{2j}^0 = \begin{pmatrix} l_{2j} \\ m_{2j} \\ n_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{2j} \cos \delta_{2j} \\ \sin \alpha_{2j} \cos \delta_{2j} \\ \sin \delta_{2j} \end{pmatrix}. \quad (6.84)$$

Таким образом, имеем систему из шести линейных уравнений с пятью неизвестными — координатами x_j, y_j и z_j ИСП в момент фотографирования t_j и расстояниями r_{1j} и r_{2j} от ИСЗ до исходных пунктов. Избыточное уравнение можно использовать для контроль-

ных вычислений. После решения системы (6.82) вычисляются геоцентрическое прямое восхождение, склонение и радиус-вектор ИСЗ:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_j &= \frac{y_j}{x_j} ; \\ \operatorname{tg} \delta_j &= \frac{z_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}} ; \\ r_j &= \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2} . \end{aligned} \right\} (6.85)$$

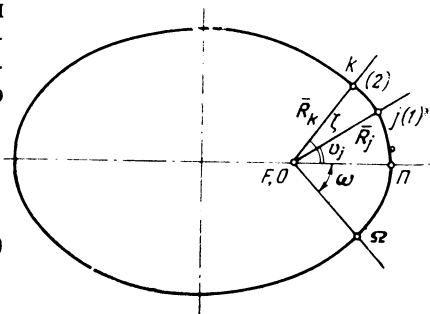


Рис. 17

2. Предварительное определение орбиты ИС П.

Если удалось определить хотя бы два положения ИСЗ на витке в моменты t_j и t_k , то задача предварительного определения элементов орбиты разрешима. Со времен Гаусса предложено много способов решения этой классической задачи теоретической астрономии. Известно, что при небольших углах между радиусами-векторами R_j и R_k (рис. 17) высокая точность обеспечивается применением методов типа Гаусса. Однако при углах, близких к 90° и более, процесс сходимости в методе Гаусса становится неустойчивым. В нашем случае по самому характеру задачи нельзя налагать требование малости угла между радиусами-векторами, так как снимки с двумя исходными пунктами на каждом могут быть получены в самых различных точках орбиты. Поэтому воспользуемся методом итераций по истинной аномалии. Этот метод, как показывают специально выполненные исследования [61], дает сходящееся решение при любых углах между радиусами-векторами. Метод был разработан Ласкоди специально для вычисления орбит КА на ЭВМ.

Предположим, что удалось установить грубо приближенное значение истинной аномалии КА $\vartheta_1^{(0)}$ в точке 1 орбиты (см. рис. 17). При отсутствии всяких гипотез о ее приближенном значении можно принять $\vartheta_1^{(0)} = 0$. Тогда приближенное значение истинной аномалии в точке 2 орбиты будет $\vartheta_2^{(0)} = \vartheta_1^{(0)} + \zeta$, где ζ — угол между радиусами-векторами, который определяется из следующих вычислений:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} ; \\ \sigma &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{R_1^2} ; \\ \left. \begin{aligned} x_0 &= x_2 - \sigma x_1 \\ y_0 &= y_2 - \sigma y_1 \\ z_0 &= z_2 - \sigma y_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} ; \\ \zeta &= \arctg \frac{R_0 R_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2} . \end{aligned} \right\} (6.86)$$

Вычислим далее эксцентриситет $e_{(0)}$ в начальном приближении:

$$e_0 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cos \vartheta_1^{(0)} - R_2 \cos \vartheta_2^{(0)}}. \quad (6.87)$$

Если при этом оказалось, что $e_{(0)} < 0$, то, увеличив принятое значение $[\vartheta_1^{(0)}]$ на $10-15^\circ$, повторим вычисление $e_{(0)}$ и при выполнении условия $0 < e_{(0)} < 1$ перейдем к вычислению большой полуоси орбиты $a_{(0)}$ в начальном приближении по формуле

$$a_{(0)} = \frac{R_1 (1 - e_{(0)} \cos \vartheta_1^{(0)})}{1 - e_{(0)}^2}. \quad (6.88)$$

Вычислим далее в начальном приближении эксцентрисические аномалии ($E_i^{(0)} = 1, 2$) в обеих точках орбиты

$$\left. \begin{aligned} \sin E_i^{(0)} &= \frac{\sin \vartheta_i^{(0)} \sqrt{1 - e_0^2}}{1 + e_{(0)} \cos \vartheta_i^{(0)}}; \\ \cos E_i^{(0)} &= \frac{\cos \vartheta_i^{(0)} + e_{(0)}}{1 + e_{(0)} \cos \vartheta_i^{(0)}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

Далее введем модифицированное время

$$\tau = \sqrt{\mu} (t_2 - t_1), \quad (6.90)$$

где μ — планетоцентрическая гравитационная постоянная и вычислим для моментов t_1 и t_2 средние аномалии $M_1^{(0)}$ и $M_2^{(0)}$:

$$M_i^{(0)} = E_i^{(0)} - e_{(0)} \sin E_i^{(0)}. \quad (6.91)$$

Теперь составим итерационную функцию F :

$$F[\vartheta_1^{(0)}] = \tau - \frac{M_2^{(0)} - M_1^{(0)}}{n_{(0)}} \sqrt{\mu}, \quad (6.92)$$

где $n_{(0)}$ — среднее движение в начальном приближении,

$$n_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{a_0^{3/2}}. \quad (6.93)$$

Придав принятому начальному значению истинной аномалии $\vartheta_1^{(0)}$ малое приращение $\Delta \vartheta_1^{(0)}$, равное $10-15'$, снова повторим вычисления с новым значением $[\vartheta_1^{(0)}]' = \vartheta_1^{(0)} + \Delta \vartheta_1^{(0)}$ и получим варьированное значение итерационной функции

$$F[\vartheta_1^{(0)} + \Delta \vartheta_1^{(0)}] = \tau - \frac{M_2^{(0)'} - M_1^{(0)'}}{n_0'} \sqrt{\mu} \quad (6.94)$$

и приближенное значение производной $\frac{\partial F}{\partial \vartheta_1^{(0)}}$

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta_1^{(0)}} \cong \frac{F[\vartheta_1^{(0)} + \Delta \vartheta_1^{(0)}] - F[\vartheta_1^{(0)}]}{\Delta \vartheta_1^{(0)}}. \quad (6.95)$$

Следующее, более точное значение истинной аномалии $\vartheta_1^{(1)}$ получится по формуле Ньютона:

$$\vartheta_1^{(1)} = \vartheta_1^{(0)} - \frac{F[\vartheta_1^{(0)}]}{\frac{\partial F}{\partial \vartheta_1^{(0)}}}. \quad (6.96)$$

С уточненным значением $\vartheta_1^{(1)}$ процесс повторяется k раз, до выполнения условия

$$|\vartheta_1^{(k)} - \vartheta_1^{(k-1)}| \leq \varepsilon,$$

где ε — заданная точность вычислений.

Средняя квадратическая ошибка определения разности истинных аномалий определяется по формуле

$$m_{\Delta \vartheta}^2 = \frac{2}{3} \operatorname{cosec}^2 \Delta \vartheta m_{\psi}^2 + \frac{\mu}{R^3} m^2 \Delta t, \quad (6.97)$$

где R — радиус круговой орбиты, m_{ψ} — средняя квадратическая ошибка определения спутникоцентрического направления, $m_{\Delta t}$ — средняя квадратическая ошибка регистрации разности моментов.

Из формулы (6.97) следует, что при малых углах $\zeta = \Delta \vartheta$ между радиусами-векторами ошибка определения разности истинных аномалий становится весьма значительной.

Средняя квадратическая ошибка в большой полуоси (радиусе круговой орбиты) определяется по формуле

$$m_R = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{R}} \Delta t (\Delta \vartheta)^{-2} m_{\Delta \vartheta}. \quad (6.98)$$

При $m_{\psi} = 15''$ и $m_{\Delta t} = 0,005$, $\Delta \vartheta = 90^\circ$ ошибка в радиусе орбиты составляет 0,67 км.

§ 46. Дифференциальное уточнение орбиты ИСП по снимкам из Космоса

Элементы орбиты, полученные способом, изложенным в § 45, являются предварительными. Теперь рассмотрим метод дифференциального уточнения предварительных элементов по фотограмметрической информации, полученной с борта ИСП. Исследование

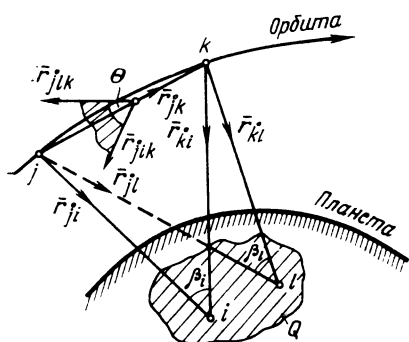


Рис. 18

этой важной задачи удобнее начать, допуская временно, что вращение планеты отсутствует, т. е. угловая скорость ее вращения $\omega_{\pi}=0$.

1. Определение направления базиса космической съемки в инерциальной системе координат ($\omega_{\pi}=0$).

Пусть в области перекрытия смежных снимков планеты Q (рис. 18), полученных из последовательных положений j и k ИСП,

удается уверенно идентифицировать минимум две точки: i и l . Тогда можно определить следующие четыре единичных вектора в инерциальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_{ji}^0 &= v_1 \mathbf{P}_*^j \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{R}}_{ji}^0; \\ \bar{\mathbf{r}}_{ki}^0 &= v_2 \mathbf{P}_*^k \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{R}}_{ki}^0; \\ \bar{\mathbf{r}}_{jk}^0 &= v_3 \mathbf{P}_*^j \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{R}}_{jl}^0; \\ \bar{\mathbf{r}}_{kl}^0 &= v_4 \mathbf{P}_*^k \mathbf{P}_0 \bar{\mathbf{R}}_{kl}^0. \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

Вектор $\bar{\mathbf{r}}_{jik}^0$, нормальный к плоскости jik , получим как векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{r}}_{ji}^0$ и $\bar{\mathbf{r}}_{ki}^0$:

$$\bar{\mathbf{r}}_{jik}^0 = \frac{1}{\sin \beta_i} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ l_{ji} & m_{ji} & n_{ji} \\ l_{ki} & m_{ki} & n_{ki} \end{vmatrix}, \quad (6.100)$$

где $\bar{\mathbf{e}}_x$, $\bar{\mathbf{e}}_y$ и $\bar{\mathbf{e}}_z$ — соответственно орты по осям инерциальной системы координат; l , m , n с соответствующими индексами — направляющие косинусы векторов $\bar{\mathbf{r}}_{ji}^0$ и $\bar{\mathbf{r}}_{ki}^0$.

Аналогично получим вектор $\bar{\mathbf{r}}_{ilk}^0$, нормальный к плоскости ilk :

$$\bar{\mathbf{r}}_{ilk}^0 = \frac{1}{\sin \beta_l} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ l_{jl} & m_{jl} & n_{jl} \\ l_{kl} & m_{kl} & n_{kl} \end{vmatrix}. \quad (6.101)$$

Направление базиса съемки $\bar{\mathbf{r}}_{jk}^0$ определится как векторное произведение векторов-нормалей $\bar{\mathbf{r}}_{ijk}^0$ и $\bar{\mathbf{r}}_{ilk}^0$, т. е.

$$\bar{\mathbf{r}}_{ik}^0 = \frac{1}{\sin \theta} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ l_{ijk} & m_{ijk} & n_{ijk} \\ l_{ilk} & m_{ilk} & n_{ilk} \end{vmatrix}. \quad (6.102)$$

Углы β_i , β_l и θ определяются из выражений

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_i &= l_{ji}l_{ki} + m_{ji}m_{ki} + n_{ji}n_{ki}; \\ \cos \beta_l &= l_{jl}l_{kl} + m_{jl}m_{kl} + n_{jl}n_{kl}; \\ \cos \theta &= l_{ijk}l_{jlk} + m_{ijk}m_{jlk} + n_{ijk}n_{jlk}. \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

Располагая значениями направляющих косинусов вектора $\mathbf{r}_{jk}^0$, определим прямое восхождение и склонение базиса $\bar{\mathbf{r}}_{jk}$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{jk} &= \frac{m_{jk}}{l_{jk}}; \\ \operatorname{tg} \delta_{jk} &= \frac{n_{jk}}{\sqrt{l_{jk}^2 + m_{jk}^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.104)$$

2. Определение направления базиса космической съемки по методу наименьших квадратов. Условие компланарности ($\omega_{\pi}=0$).

Если в пределах перекрытия снимков идентифицируется p точек ($p>2$), то появляется возможность уточнения полученного в п. 1 решения по методу наименьших квадратов. В самом деле, базис $\bar{\mathbf{r}}_{jk}^0$ и векторы $\bar{\mathbf{r}}_{jN}^0$ и $\bar{\mathbf{r}}_{kN}^0$ ($N=1, 2, \dots, p$) должны удовлетворять условию компланарности, что можно выразить, приравняв нулю смешанное векторное произведение соответствующих векторов:

$$F_N = (\bar{\mathbf{r}}_{jN}^0 \cdot \bar{\mathbf{r}}_{kN}^0 \cdot \bar{\mathbf{r}}_{jk}^0) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_{jk} \cos \delta_{jk} & \sin \alpha_{jk} \cos \delta_{jk} & \sin \delta_{jk} \\ \cos \alpha_{jN} \cos \delta_{jN} & \sin \alpha_{jN} \cos \delta_{jN} & \sin \delta_{jN} \\ \cos \alpha_{kN} \cos \delta_{kN} & \sin \alpha_{kN} \cos \delta_{kN} & \sin \delta_{kN} \end{vmatrix} = 0; \quad (N=1, 2, \dots, p) \quad (6.105)$$

Раскрыв значение определителя, получим некоторую нелинейную функцию

$$F_N = \cos \alpha_{jk} \cos \delta_{jN} \cos \delta_{kN} [\operatorname{tg} \delta_{jk} \sin (\alpha_{kN} - \alpha_{jN}) + \operatorname{tg} \delta_{jN} \sin (\alpha_{jk} - \alpha_{jN}) + \operatorname{tg} \delta_{kN} \sin (\alpha_{jN} - \alpha_{jk})] = 0. \quad (6.106)$$

Линеаризация уравнения (6.106) дает возможность получить систему уравнений поправок

$$\left(\frac{\partial F_N}{\partial \delta_{jk}} \right)_0 \Delta \delta_{jk} + \left(\frac{\partial F_N}{\partial \alpha_{jk}} \right)_0 \sec \delta_{jk} \Delta' \alpha_{jk} + l_N = v_N, \quad (6.107)$$

где

$$\Delta' \alpha_{jk} = \Delta \alpha_{jk} \cos \delta_{jk},$$

$$v_N = - \left[\left(\frac{\partial F_N}{\partial \delta_{jN}} \right) v_{\delta_{jN}} + \left(\frac{\partial F_N}{\partial \alpha_{jN}} \right) v_{\alpha_{jN}} + \left(\frac{\partial F_N}{\partial \delta_{kN}} \right) v_{\delta_{kN}} + \left(\frac{\partial F_N}{\partial \alpha_{kN}} \right) v_{\alpha_{kN}} \right], \quad (6.108)$$

а свободный член l_N получим, если вычислить значение F_N^6 по формуле (6.106), подставив в нее приближенные значения α_{jk}^0 и δ_{jk}^0 , полученные, например, способом, рассмотренным в п. 1, и значения определенных из обработки снимков α_{jN} , δ_{jN} , α_{kN} и δ_{kN} . Решив систему двух нормальных уравнений, определим вероятнейшие поправки в направление базиса и корреляционную матрицу $Q_{\delta, \alpha}$

$$Q_{\delta, \alpha} = \begin{vmatrix} q_{\delta\delta} & q_{\delta\alpha} \\ q_{\alpha\delta} & q_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}_{jk},$$

а также выполним оценку точности. При установлении весов уравнений поправок (6.107) можно считать измерения независимыми, тогда

$$P_{F_N} = \frac{C}{m_{F_N}^2} = C \left[\left(\frac{\partial F_N}{\partial \delta_{jN}} \right)^2 m_{\delta_{jN}}^2 + \left(\frac{\partial F_N}{\partial \alpha_{jN}} \right)^2 m_{\alpha_{jN}}^2 + \left(\frac{\partial F_N}{\partial \delta_{kN}} \right)^2 m_{\delta_{kN}}^2 + \left(\frac{\partial F_N}{\partial \alpha_{kN}} \right)^2 m_{\alpha_{kN}}^2 \right]^{-1}. \quad (6.109)$$

Для вычисления производных функций F_N по δ_{jk} , α_{jk} , δ_{jN} , α_{jN} , δ_{kN} , α_{kN} удобно воспользоваться приемом, указанным В. В. Бойковым и И. Я. Плешаковым. Запишем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} -\sin \delta_{jk} \cos \alpha_{jk} & -\sin \delta_{jk} \sin \alpha_{jk} & \cos \delta_{jk} \\ -\cos \delta_{jk} \sin \alpha_{jk} & \cos \delta_{jk} \cos \alpha_{jk} & 0 \\ -\sin \delta_{jN} \cos \alpha_{jN} & -\sin \delta_{jN} \sin \alpha_{jN} & \cos \delta_{jN} \\ -\cos \delta_{jN} \sin \alpha_{jN} & \cos \delta_{jN} \cos \alpha_{jN} & 0 \\ -\sin \delta_{kN} \cos \alpha_{kN} & -\sin \delta_{kN} \sin \alpha_{kN} & \cos \delta_{kN} \\ -\cos \delta_{kN} \sin \alpha_{kN} & \cos \delta_{kN} \cos \alpha_{kN} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \delta_{jk} \\ \rightarrow \alpha_{jk} \\ \rightarrow \delta_{jN} \\ \rightarrow \alpha_{jN} \\ \rightarrow \delta_{kN} \\ \rightarrow \alpha_{kN} \end{matrix} \quad (6.110)$$

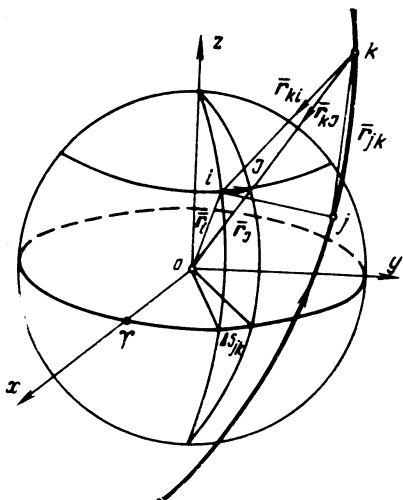


Рис. 19

Если заменить в определителе (6.105) соответствующую строку строкой матрицы (6.110) и вычислить значение такого определителя, то получится значение необходимой производной, при этом знак « $\rightarrow$ » в формуле (6.110) указывает порядок замены строк.

3. Нарушение условия компланарности в инерциальной системе координат ($\omega_{\Pi}=0$).

Вследствие суточного вращения планеты точка i (рис. 19) за интервал времени $t_k - t_j$ между моментами фотографирования переместится по своей суточной

параллели в положение J , и условие компланарности базиса $\bar{\mathbf{r}}_{jk}$ и спутникоцентрических векторов $\bar{\mathbf{r}}_{ji}$ и $\bar{\mathbf{r}}_{hJ}$ будет нарушено.

Определим направление и модуль вектора $\bar{\mathbf{r}}_{iJ}$ суточного смещения точки планеты. Из векторного треугольника (см. рис. 19) oiJ имеем

$$\bar{\mathbf{r}}_{ji} = \bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_J,$$

или в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} r_{ji} \cos \alpha_{ji} \cos \delta_{ji} &= r_i \cos \alpha_i \cos \delta_i - r_J \cos \alpha_J \cos \delta_J; \\ r_{ji} \sin \alpha_{ji} \cos \delta_{ji} &= r_i \sin \alpha_i \cos \delta_i - r_J \sin \alpha_J \cos \delta_J; \\ r_{ji} \sin \delta_{ji} &= r_i \sin \delta_i - r_J \sin \delta_J. \end{aligned} \right\} \quad (6.111)$$

Поскольку при суточном вращении планеты длина планетоцентрического вектора точки i не изменяется, так же, как и ее планетоцентрическое склонение, то уравнения (6.111) будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} r_{ji} \cos \alpha_{ji} \cos \delta_{ji} &= r_i \cos \delta_i [\cos \alpha_i - \cos (\alpha_i + \Delta S_{kj})]; \\ r_{ji} \sin \alpha_{ji} \cos \delta_{ji} &= r_i \cos \delta_i [\sin \alpha_i - \sin (\alpha_i + \Delta S_{kj})]; \\ r_{ji} \sin \delta_{ji} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.112)$$

где ΔS_{kj} — интервал звездного времени между моментами фотографирования,

$$\Delta S_{kj} = \Delta t_{kj} + 9,856s/h \Delta t_{kj}. \quad (6.113)$$

Максимальные значения интервала времени между последовательными моментами фотографирования при космических съемках Земли не превосходят 10—15^с. Поэтому, разложив выражения в квадратных скобках в ряд Тейлора и ограничиваясь лишь линейными членами, получим с ошибкой не более $2 \cdot 10^{-3}$

$$\left. \begin{aligned} r_{ji} \cos \alpha_{ji} \cos \delta_{ji} &= y_i \frac{\Delta S_{kj}''}{\rho''} = x_i - x_J; \\ r_{ji} \sin \alpha_{ji} \cos \delta_{ji} &= -x_i \frac{\Delta S_{kj}''}{\rho''} = y_i - y_J; \\ r_{ji} \sin \delta_{ji} &= 0 = z_i - z_J, \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{ji} &= -\operatorname{ctg} \alpha_i, \\ \operatorname{tg} \delta_{ji} &= 0, \\ r_{ji} &= r_i \cos \delta_i \frac{\Delta S_{kj}''}{\rho''}. \end{aligned} \right\} \quad (6.115)$$

Для восстановления условия компланарности необходимо знать модуль и направление вектора $\bar{\mathbf{r}}_{ki}$, для которого имеем

$$\left. \begin{aligned} r_{hi} \cos \delta_{hi} \cos \alpha_{ki} &= r_{kJ} \cos \alpha_{kJ} \cos \delta_{kJ} + y_i \frac{\Delta S''_{kj}}{\rho''}; \\ r_{ki} \cos \delta_{ki} \sin \alpha_{ki} &= r_{kJ} \sin \alpha_{kJ} \cos \delta_{kJ} - x_i \frac{\Delta S''_{ki}}{\rho''}; \\ r_{ki} \sin \delta_{ki} &= r_{kJ} \sin \delta_{kJ}, \end{aligned} \right\} \quad (6.116)$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_i - x_k &= r_{kJ} \left(\cos \alpha_{kJ} \cos \delta_{kJ} + \frac{y_i}{r_{kJ}} \frac{\Delta S''_{kj}}{\rho''} \right); \\ y_i - y_k &= r_{kJ} \left(\sin \alpha_{kJ} \cos \delta_{kJ} - \frac{x_i}{r_{kJ}} \frac{\Delta S''_{kj}}{\rho''} \right); \\ z_i - z_k &= r_{kJ} \sin \delta_{kJ}. \end{aligned} \right\} \quad (6.117)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= -\frac{x_i}{r_{kJ}} \frac{\Delta S''}{\rho''}; \\ \eta_i &= +\frac{y_i}{r_{kJ}} \frac{\Delta S''}{\rho''}; \end{aligned} \right\} \quad (6.118)$$

тогда на основании формул (6.117) получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{ki} &= \frac{m_{kJ} + \xi_i}{l_{kJ} + \eta_i}, \\ \operatorname{tg} \delta_{ki} &= \frac{\sin \delta_{kJ}}{\sqrt{(l_{kJ} + \eta_i)^2 + (m_{kJ} + \xi_i)^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

где

$$\left. \begin{aligned} l_{kJ} &= \cos \alpha_{kJ} \cos \delta_{kJ}, \\ m_{kJ} &= \sin \alpha_{kJ} \cos \delta_{kJ}. \end{aligned} \right\} \quad (6.120)$$

Формулы (6.119) решают задачу введения поправок за суточное вращение планеты.

Оценим точность редукции вектора $\vec{r}_{kJ}^0$ к направлению $\vec{r}_{ki}^0$, восстанавливающему условие компланарности. При этом будем исходить из реальных условий съемки Земли из Космоса. Съемки Земли выполняются, как правило, с почти круговых полярных орбит с высотой перицентра $h_{\Pi} \approx 170-200$ км, а для обеспечения продольного перекрытия снимков в 60% интервал Δt между моментами фотографирования должен быть порядка 8°.

Дифференцируя формулы (6.118) и переходя к средним квадратическим ошибкам, получим

$$\left. \begin{aligned} m_{\xi}'' &= \Delta S'' \sqrt{\frac{1}{r_{kJ}^2} m_{xj}^2 + \left(\frac{x_i^2}{r_{kJ}^4}\right) m_{kJ}^2} ; \\ m_{\eta}'' &= \Delta S \sqrt{\frac{1}{r_{kJ}^2} m_{yi}^2 + \left(\frac{y_i^2}{r_{kJ}^4}\right) m_{kJ}^2} . \end{aligned} \right\} \quad (6.121)$$

Дифференцируя выражения (6.119) и переходя к средним квадратическим ошибкам, получим также ошибки в направлении вектора $\vec{r}_{ki}^0$:

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha_{ki}} &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha_{hi} m_{\xi}^2 + \sin^2 \alpha_{hi} m_{\eta}^2}}{\cos \delta_{kJ} \cos(\alpha_{hi} - \alpha_{kJ})} ; \\ m_{\delta_{ki}} &= \sin \delta_{ki} \sqrt{\cos^2 \alpha_{hi} m_{\eta}^2 + \sin^2 \alpha_{hi} m_{\xi}^2} . \end{aligned} \right\} \quad (6.122)$$

Вычисления по формулам (6.121) и (6.122) показывают, что для определения направления $\vec{r}_{ki}^0$ с ошибкой порядка 3—4" необходимо расстояние kJ знать с точностью до 1 км, а геоцентрические координаты точки J — с точностью до 10 км.

4. Условие компланарности в гринвичской системе координат ($\omega_{\Pi} \neq 0$).

Поскольку в инерциальном пространстве условие компланарности нарушается, то определение направления базиса $\vec{r}_{jk}^0$ следует выполнять в системе координат, вращающейся вместе с планетой. Поэтому при съемках Земли условие компланарности следует записывать в гринвичской системе координат:

$$\begin{aligned} F_N &= (\vec{r}_{jN}^0 \cdot \vec{r}_{kN}^0 \cdot \vec{r}_{jk}^0) = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \Lambda_{jk} \cos \Phi_{jk} & \sin \Lambda_{jk} \cos \Phi_{jk} & \sin \Phi_{jk} \\ \cos(\alpha_{jN} - S_j) \cos \delta_{jN} & \sin(\alpha_{jN} - S_j) \cos \delta_{jN} & \sin \delta_{jN} \\ \cos(\alpha_{kN} - S_k) \cos \delta_{kN} & \sin(\alpha_{kN} - S_k) \cos \delta_{kN} & \sin \delta_{kN} \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6.123)$$

Уравнительные вычисления выполняются в соответствии с правилами, рассмотренными в п. 2 настоящего параграфа.

В результате вычислений получаются ориентирующие углы Λ_{jk} и Φ_{jk} базиса в гринвичской системе координат:

$$\operatorname{tg} \Lambda_{jk} = \frac{X_k - X_j}{Y_k - Y_j}; \quad \operatorname{tg} \Phi_{jk} = \frac{Z_k - Z_j}{\sqrt{(X_k - X_j)^2 + (Y_k - Y_j)^2}}. \quad (6.124)$$

Углы Λ_{jk} и Φ_{jk} функционально связаны с элементами орбиты. Таким образом, ориентирующие углы базисов космической съемки представляют собой новый состав орбитальных измерений. Используя совокупность базисов, полученных, например, на 1—2 витках, можно выполнить уточнение начальных условий для интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСП. До-

стоинством такого метода определения орбиты является его полная автономность от наличия измерительной аппаратуры на поверхности исследуемой планеты и наличия исходных пунктов на ней, определенных в планетоцентрической системе координат. Необходимы только постоянное перекрытие снимков вдоль следа орбиты, идентификация ряда точек в пределах перекрытия смежных снимков, а также наличие каталога звезд в планетоцентрической экваториальной системе координат. Поэтому такой метод определения орбиты ИСП особенно выгодно использовать при определении орбит искусственных спутников Луны.

5. Дифференциальное уточнение элементов орбиты ИСП по ориентирующим углам Φ и Λ базисов съемки.

Каждый базис $\mathbf{r}_{jk}$ дает возможность составить два уравнения с поправками в элементы орбиты

$$\left[\frac{\partial \Phi_{jk}}{\partial (x, y, z)_j} \frac{\partial (x, y, z)_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Phi_{jk}}{\partial (x, y, z)_k} \frac{\partial (x, y, z)_k}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_k} \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_k}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} \right] \times \\ \times \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta i \\ \Delta \omega \\ \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta M \end{pmatrix} + l_{\Phi_{jk}} = v_{\Phi_{jk}}, \quad (6.125)$$

$$\left[\frac{\partial \Lambda_{jk} \cos \Phi_{jk}}{\partial (x, y, z)_j} \frac{\partial (x, y, z)_j}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j} \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_j}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} - \right. \\ \left. - \frac{\partial \Lambda_{jk} \cos \Phi_{jk}}{\partial (x, y, z)_k} \frac{\partial (x, y, z)_k}{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_k} \frac{\partial (\Omega, i, \omega, a, e, M)_k}{\partial (\Omega_0, i_0, \omega_0, a_0, e_0, M_0)} \right] \times \\ \times \begin{pmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta i \\ \Delta \omega \\ \Delta a \\ \Delta e \\ \Delta M \end{pmatrix} + l_{\Lambda_{jk} \cos \Phi_{jk}} = v_{\Lambda \cos \Phi}. \quad (6.126)$$

Поскольку углы Λ_{jk} и Φ_{jk} , полученные из уравнивания фотограмметрических измерений, зависимы, то каждая пара Λ_{jk} и Φ_{jk} будет входить в уравнивательные вычисления со своей весовой матрицей

$$\mathbf{P}_{\Phi, \Lambda} = \mathbf{Q}_{\Phi, \Lambda}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{\Phi\Phi} & a_{\Phi\Lambda} \\ a_{\Lambda\Phi} & a_{\Lambda\Lambda} \end{bmatrix}.$$

где $Q_{\Phi, \Lambda}$ — корреляционная матрица, полученная при уравнивании фотограмметрических измерений в соответствии с изложенной выше методикой. Но так как $Q_{\Phi, \Lambda}^{-1} = N_{\Phi, \Lambda}$, где $N_{\Phi, \Lambda}$ — матрица коэффициентов нормальных уравнений, то весовая матрица $P_{\Phi, \Lambda}$ будет совпадать с матрицей нормальных уравнений, возникающей при уравнивании фотограмметрических измерений с целью определения ориентирующих углов. Все дальнейшие вычисления производятся в соответствии с правилами, описанными в главе 1.

§ 47. О точности определения орбит по ориентирующим углам базисов космической съемки

Для суждения о точности определения элементов орбиты прежде всего выберем модель движения, достаточно близкую к реальным условиям космических съемок, но допускающую ее анализ.

Пусть движение происходит по круговой полярной орбите с радиусом $R=6650$ км. Кроме того, несколько не нарушая общности, положим, что линия узлов совпадает с линией, соединяющей равноденственные точки, а вращение планеты отсутствует. Допустим также, что углы Φ и Λ не коррелированы, так что

$$m_{\Phi} = m_{\Lambda} \cos \Phi = \frac{m_{\Phi}}{\sqrt{2}},$$

где m_{Φ} — средняя квадратическая ошибка определения направления базиса. Таким образом, для принятой модели имеем

$$a = R = 6650 \text{ км}; e = 0, i = 90^{\circ}; \Omega = 0, \omega = 0. \quad (6.127)$$

Положим далее, что в начальную эпоху t_0 средняя аномалия $M_0=0$, длина базиса съемки $r=120$ км, интервал между моментами фотографирования $\Delta t=15,44^s$.

Запишем следующие числовые характеристики принятой модели:

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= 0; \sin i = 1; \cos i = 0; \sin \omega = 0; \cos \omega = 1; \sin \Omega = 0; \\ \cos \Omega &= 1; \sin M_0 = 0; \cos M_0 = 1; n = \frac{\sqrt{\mu}}{R^{3/2}} = 0,001177 \text{ с}^{-1}; \\ \frac{r}{R} &= 0,01818; \left(\frac{r}{2R} \right) = 0,0091; \left(\frac{r}{2R} \right)^2 = 8,28 \cdot 10^{-5}; \Delta M = \\ &= 1^{\circ} 02' \approx 1^{\circ}; \\ \sin \Delta M &= 0,01818; \cos \Delta M \approx 1; n \Delta t = 0,0182; \\ \frac{3}{2} n \Delta t &= 272,6 \cdot 10^{-4}; \frac{9}{4} n^2 \Delta t^2 = 7,43 \cdot 10^{-8}; V = \sqrt{\frac{\mu}{R}} = \\ &= 7771 \text{ м/с}; \\ r &= V \Delta t = 120 \text{ км}. \end{aligned} \right\} \quad (6.128)$$

Дифференцируя формулы для ориентирующих углов с учетом условий (6.127) и (6.128), получим

$$\left. \begin{aligned} d\Lambda_{1.2} &= \frac{1}{r_{1.2} \cos \Phi_{1.2}} (dy_1 - dy_2); \\ d\Phi_{1.2} &= \frac{\sin \Phi_{1.2}}{r_{1.2}} (dx_1 - dx_2) - \frac{\cos \Phi_{1.2}}{r_{1.2}} (dz_1 - dz_2); \end{aligned} \right\} \quad (6.129)$$

выразим ориентирующие углы Φ через геоцентрические широты ИСП. Для принятой модели

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \varphi; \\ y &= 0; \\ z &= R \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (6.130)$$

где φ — геоцентрическая широта ИСЗ, поэтому

$$\begin{aligned} \sin \Phi_{1.2} &= -\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = -\cos \varphi_m; \\ \cos \Phi_{1.2} &= \sin \varphi_m; \end{aligned}$$

теперь формулы (6.129) получим в виде

$$\left. \begin{aligned} d\Lambda_{1.2} &= \frac{1}{r \sin \varphi_m} (dy_1 - dy_2); \\ d\Phi_{1.2} &= -\frac{\cos \varphi_m}{r} (dx_1 - dx_2) - \frac{\sin \varphi_m}{r} (dz_1 - dz_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.131)$$

Если продифференцировать формулы, связывающие прямоугольные координаты ИСЗ с элементами орбиты, и вычислить производные с учетом условий (6.128), то после ряда преобразований получим дифференциальные формулы ориентирующих углов как функций элементов орбиты:

$$d\Lambda_{1.2} = -d\Omega - \operatorname{ctg} \varphi_m di; \quad (6.132)$$

$$\begin{aligned} d\Phi_{1.2} = & -\frac{\cos \varphi_m}{r} \left\{ \left[\left(x_1 + \frac{3}{2} Vt_1 \sin M_1 \right) - \left(x_2 + \frac{3}{2} Vt_2 \sin M_2 \right) \right] \frac{dR}{R} - \right. \\ & \left. - (z_1 - z_2) dM_0 \right\} - \frac{\sin \varphi_m}{r} \left\{ \left[\left(z_1 - \frac{3}{2} Vt_1 \cos M_1 \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(z_2 - \frac{3}{2} Vt_2 \cos M_2 \right) \right] \frac{dR}{R} + (x_1 - x_2) dM_0 \right\}. \end{aligned} \quad (6.133)$$

Из этих формул следует, что неизвестные разбились на две группы. Внешние элементы круговой полярной орбиты — долгота восходящего узла и наклонение к плоскости экватора — определяются по ориентирующим углам Λ , а внутренние — большая полуось и средняя аномалия — по ориентирующим углам Φ .

Дифференциальные формулы (6.132) и (6.133) дают возможность составить две независимых системы нормальных уравнений, которые мы запишем, пользуясь символикой Гаусса:

$$\left. \begin{aligned} [aa]_{\Lambda} d\Omega + [ab]_{\Lambda} di + [al]_{\Lambda} &= 0; \\ [ab]_{\Lambda} d\Omega + [bb]_{\Lambda} di + [bl]_{\Lambda} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.134)$$

$$\left. \begin{aligned} [aa]_{\Phi} dM + [ab]_{\Phi} \frac{dR}{R} + [al]_{\Phi} &= 0; \\ [ab]_{\Phi} dM + [bb]_{\Phi} \frac{dR}{R} + [bl]_{\Phi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.135)$$

На основании известной теоремы метода наименьших квадратов выражения весов неизвестных для каждой системы определяют-ся так:

$$\left. \begin{aligned} P_{\Omega} &= [aa]_{\Lambda} - \frac{[ab]_{\Lambda}^2}{[bb]_{\Lambda}}; \\ P_i &= P_{\Omega} \frac{[bb]_{\Lambda}}{[aa]_{\Lambda}}; \\ P_{M_0} &= [aa]_{\Phi} - \frac{[ab]_{\Phi}^2}{[bb]_{\Phi}}; \\ P_{\beta} &= P_{M_0} \frac{[bb]_{\Phi}}{[aa]_{\Phi}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.136)$$

где $\beta = \frac{dR}{R}$.

После довольно утомительных выкладок значения скобок Гаусса получим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} [aa]_{\Lambda} &= N; \\ [ab]_{\Lambda} &= [\operatorname{ctg} \varphi]; \\ [bb]_{\Lambda} &= [\operatorname{ctg}^2 \varphi]; \\ [aa]_{\Phi} &= N; \\ [ab]_{\Phi} &= - \left[\frac{3}{2} n \Delta t \frac{N(N+1)}{2} - \frac{Nr}{2R} \right]; \\ [bb]_{\Phi} &= \frac{9}{4} n^2 \Delta t^2 \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{3}{2} n \Delta t \frac{r}{R} \cdot \frac{N(N+1)}{2} + \frac{Nr^2}{4R^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.137)$$

где N — число базисов.

Последними двумя членами в выражении для $[bb]_{\Phi}$ при оценке точности можно пренебречь.

Средние квадратические ошибки элементов орбиты теперь можно вычислить по формулам

$$\left. \begin{aligned} m''_{\Omega} &= \frac{m''_{\psi}}{\sqrt{2} \sqrt{N - \frac{[\operatorname{ctg} \varphi]^2}{[\operatorname{ctg}^2 \varphi]}}} ; \\ m''_i &= \frac{m''_{\psi}}{\sqrt{2} \sqrt{N [\operatorname{ctg}^2 \varphi] - [\operatorname{ctg} \varphi]^2}} ; \\ m''_{M_0} &= \frac{m''_{\psi}}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N^3 - N}{4\lambda^2 + 6N + 2}}} ; \\ m''_R &= R \frac{m''_{\psi}}{\rho''} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{0,79 \cdot 10^{-2} \sqrt{N^3 - N}} . \end{aligned} \right\} \quad (6.138)$$

Анализируя формулы (6.138), убеждаемся, что максимальная точность определения долготы восходящего узла и наклонения достигается при выполнении условия

$$\frac{[\operatorname{ctg} \varphi]^2}{[\operatorname{ctg}^2 \varphi]} = 0, \quad (6.139)$$

что возможно, когда широты удовлетворяют требованию

$$\varphi_1 = -\varphi_2; \quad \varphi_3 = -\varphi_4; \quad \dots; \quad \varphi_{2n-1} = \varphi_{2n}.$$

Иначе говоря, хорды, используемые для дифференциального уточнения, должны быть подобраны в пары, разнесенные на угол $\frac{\pi}{2}$. При этих условиях

$$\left. \begin{aligned} m_{\Omega} &= \frac{m_{\psi}}{\sqrt{2N}} ; \\ m_i &= \frac{m_{\psi}}{\sqrt{2N [\operatorname{ctg}^2 \varphi]}} . \end{aligned} \right\} \quad (6.140)$$

Сравнивая формулы средних квадратических ошибок для внешних и внутренних элементов, убеждаемся, что точность определения внешних элементов (при одинаковом числе базисов) намного выше, чем внутренних. Так, уже при числе базисов $N=16$ (при выполнении условия (6.139) ошибка определения долготы восходящего узла составит $2''$, в то время как ошибка средней аномалии будет $4''$, а радиус орбиты определится с ошибкой 400 м. Таким образом, наибольший вклад в ошибку определения координат центров фотографирования будут вносить ошибки определения внутренних элементов.

В табл. 10 приводятся средние квадратические ошибки m_{M_0} и m_R средней аномалии и радиуса орбиты как функции числа N орбитальных хорд при $m_{\psi} = 10''$ и $m_{\psi} = 15''$.

N	$m_{\psi} = 10''$		$m_{\psi} = 15''$		N	$m_{\psi} = 10''$		$m_{\psi} = 15''$	
	m_M	m_R	m_M	m_R		m_M	m_R	m_M	m_R
0	∞	∞	∞	∞	30	2,5	174	3,6	265
5	7,1''	2259 м	10,1''	3950 м	40	2,3	112	3,2	171
10	4,8	896	6,8	1368	50	2,0	63	3,0	87
20	3,3	251	5,1	382	60	1,8	48	2,5	74

§ 48. Особенности применения орбитального метода при координатно-временной привязке космических съемок Луны

Рассмотрим в основных чертах особенности применения орбитальных методов при координатно-временной привязке космических съемок Луны. Эти особенности связаны главным образом со сложностью гравитационного поля Луны и его меньшей изученностью по сравнению с гравитационным полем Земли, а также с недостаточно точно известными постоянными физической либрации Луны. Недостаточная изученность гравитационного поля Луны и ее физической либрации приводит к понижению точности орбитального метода в условиях съемки Луны с борта ее искусственного спутника. Тем не менее применение орбитального метода дает возможность сгустить существующую на видимом полушарии Луны селенодезическую сеть и получить координаты ряда опорных точек на обратной стороне Луны в селеноцентрической системе координат, связанной с экватором и центром масс Луны.

Невозможность точного учета физической либрации приводит к значительным ошибкам селеноэкваторных координат звезд, а следовательно, и спутникоцентрических направлений на точки поверхности Луны. С другой стороны, отсутствие достаточно точных представлений о гравитационном потенциале Луны, структура которого сильно усложняется наличием лунных масконов, приводит к ошибкам при интегрировании дифференциальных уравнений движения ИСЛ. Однако по мере уточнения наших знаний о гравитационном поле Луны и элементах ее вращения орбитальный метод будет давать результаты, сопоставимые по точности с результатами съемок Земли. При съемках Луны имеется также ряд факторов, действующих положительно. К числу их относятся отсутствие атмосферы, которое исключает рефракцию, необходимость учета сопротивления атмосферы при интегрировании дифференциальных уравнений движения, меньшая орбитальная скорость ИСЛ, которая позволяет не учитывать орбитальную аберрацию и понижает требования к синхронизации работы камер и точности регистрации времени. Существенна также небольшая по сравнению с Землей

угловая скорость вращения самой Луны. Для Луны имеем $\omega_{\zeta} = 2,67 \cdot 10^{-6}$ рад/с, что составляет $0,037 \omega_{\oplus}$. Если считать, что орбита ИСЛ круговая с высотой над поверхностью Луны $h = 100$ км, то период его обращения составит примерно 2 ч. За это время Луна повернется вокруг своей оси всего лишь на $1,5^{\circ}$.

1. Для реализации орбитального метода при космических съемках Луны удобно в качестве основной системы координат принять луноцентрическую селеноэкваториальную систему координат, которая вращается вместе с Луной.

Удобство выбора этой системы заключается в следующем. Во-первых, потенциал Луны в этой системе координат не является функцией времени, что при наличии масконов в теле Луны облегчает интегрирование дифференциальных уравнений движения ИСЛ. Во-вторых, положение ИСЛ не зависит от оптической и физической либраций Луны, поэтому элементы физической либрации не фигурируют в уравнениях движения ИСЛ; наконец, для точек на поверхности Луны луноцентрическая селеноэкваториальная система координат совпадает с селенографической системой координат, в которой задаются координаты точек поверхности Луны при картографировании.

Однако при перевычислении геоэкваториальных координат звезд в луноцентрическую селеноэкваториальную систему координат возникают ошибки, вызванные неточным знанием элементов физической либрации Луны и, следовательно, элементов ее вращения. Таким образом, имеет место простое перераспределение ошибок, и сама селеноэкваториальная система координат получается с ошибками того же порядка, как и ошибки определения физической либрации Луны.

Ошибки селеноэкваториальных координат звезд зависят от ошибок в значении угла J между осью эклиптики и полярной осью триедра Кассини и ошибок динамического параметра f вращения Луны, который определяется выражением

$$f = \frac{B(C-B)}{A(C-A)}, \quad (6.141)$$

где A , B , C — моменты инерции относительно осей луноцентрической селеноэкваториальной системы координат.

Применение орбитального метода при съемках Луны — единственный способ получения абсолютных координат пунктов на Луне, и полученные с его помощью результаты всегда можно перевычислить с новыми, более точными значениями параметров физической либрации Луны, определенными в процессе ее дальнейших исследований.

Алгоритм вычисления луноцентрических селеноэкваториальных координат по геоэкваториальным координатам звезд довольно сложен. Мы не приводим его здесь, поскольку он дан в работе П. Эскобала и с небольшими изменениями численных значений

либрационных постоянных снова опубликован в Справочнике по небесной механике и астродинамике (1976 г.).

2. До запуска первых советских и американских ИСЛ иногда высказывалось мнение, что структура лунного потенциала проще, чем земного [61]. Между тем уже первые ИСЛ (серий «Луна», «Зонд», «Лунар орбитер», «Аполлон») позволили установить сложность гравитационного поля Луны.

Оказалось, что коэффициенты разложения лунного потенциала в ряд по сферическим функциям численно больше, чем для Земли, и уменьшаются намного медленнее. При этом возмущения от тессеральных гармоник также оказываются значительными. Наконец, исследования Мюллера и Сьегрена привели к открытию масконов. Эти концентрации масс вызывают вариации высоты орбиты ИСЛ от 60 до 100 м относительно предвычисленной орбиты. До 1968 г. для расчета орбит ИСЛ использовали гравитационный потенциал Луны в форме потенциала трехосного эллипсоида со следующими параметрами:

$$\mu_{\zeta} = fM_{\zeta} = 4902,778 \text{ км}^3/\text{с}^2,$$

$$a_{\zeta} = 1738,09 \text{ км},$$

$$C_{20} = -2,07186770 \cdot 10^{-4},$$

$$C_{22} = 0,20239141 \cdot 10^{-4}.$$

Эта модель оказалась неприемлемой для продолжения программы «Аполлон» и посадки на Луну.

Затем при полетах «Аполлона-10», «Аполлона-11» была использована модель Рисдала, в которой учитывались лишь коэффициенты C_{20} , C_{22} , C_{30} и C_{31} . Эта модель не смогла удовлетворительно предсказать изменения i и Ω . По результатам, полученным во время полетов КК «Аполлон-8», «Аполлон-11», «Аполлон-12», в Годдардовском центре космических полетов была создана новая модель, в которой было принято $C_{21} = S_{21} = 0$ и была добавлена гармоника с индексом 41, которая обращается в нуль на широтах 0 и 41°, что согласуется с селенографическим положением масконов.

Таким образом, в практике полета КК серии «Аполлон» использовалась следующая система коэффициентов, представляющих потенциал Луны без учета масконов:

$$C_{20} = -2,07108 \cdot 10^{-4}; \quad S_{31} = 0,02583 \cdot 10^{-4};$$

$$C_{22} = 0,20715 \cdot 10^{-4}; \quad C_{41} = -0,1284 \cdot 10^{-4};$$

$$C_{30} = 0,21 \cdot 10^{-4}; \quad S_{41} = 0,1590 \cdot 10^{-4};$$

$$C_{31} = 0,34 \cdot 10^{-4};$$

В Советском Союзе первые выводы об аномалиях гравитационного поля Луны получены Э. Л. Акимом* из совместного опре-

* Э. Л. Аким. Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны «Луна-10». — Космические исследования, 1966, № 6, стр. 823—826.

деления коэффициентов разложения потенциала и элементов орбиты ИСЛ «Луна-10» за весь период его существования.

Сравнение всех существующих моделей приводит к выводу, что все они в качественном отношении согласовываются до членов третьего порядка включительно, однако разброс в численных значениях коэффициентов часто превышает априорные оценки ошибок [38].

Следовательно, при современном состоянии изученности гравитационного поля Луны в процессе интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЛ нет смысла учитывать члены четвертого порядка в разложении селенопотенциала.

Особую проблему представляет собой выбор оптимальной математической модели для представления селенопотенциала.

Первый и наиболее традиционный путь — представление селенопотенциала в виде разложения в ряд по сферическим функциям. Действие масконов при этом будет учитываться, но число членов в разложении необходимо сильно увеличивать, и всякая новая значительная концентрация масс, обнаруженная в процессе будущих исследований, потребует изменения всего разложения.

Второй путь — представление потенциала в виде точечных масс. Такой метод является приближением непрерывного распределения плотностей. Эта модель имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционной. Как отмечает Дж. Бальмино [16], возникают возможности: а) дискретного описания для каждой функции, в то время как рекуррентное вычисление полиномов Лежандра часто ведет к существенным ошибкам при программировании с учетом членов высоких порядков; б) однородного описания потенциала для поверхности планеты и вне ее; в) возможности увеличения числа параметров для некоторой локальной области, не затрагивая при этом отдаленных областей. Однако метод обладает недостатками — неудобной формой для составления пертурбационной функции в уравнениях движения ИСЛ, а также сингулярностью потенциала вблизи точечных возмущающих масс.

Наиболее рациональным, вероятнее, является сочетание обоих методов для создания модели лунного потенциала, иначе говоря, модель должна представлять некоторое среднее между разложением по сферическим функциям и моделью сжатого трехосного тела с околповерхностными масконами. Впервые такого рода подход к задаче высказан в работе [27].

Таким образом, предлагается представлять потенциал Луны в виде разложения по сферическим функциям с конечным числом членов, к которому добавлен ряд, выражающий действие масконов. При этом каждый маскон рассматривается как третье тело, которое является источником возмущений.

Тогда общее выражение для потенциала будет иметь вид

$$V_{\epsilon} = \frac{\mu_{\epsilon}}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^P \left(\frac{a_{\epsilon}}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^q \frac{\mu_i}{|\bar{R}_i - \bar{r}_j|},$$

где μ_i — гравитационная постоянная, характеризующая действие i -го маскона; R_i — средний экваториальный радиус Луны; r_j — селеноцентрический радиус-вектор ИСЛ.

Порядок разложения p и число учитываемых масконов q в общем случае зависят от требуемой точности представления потенциала Луны. В работе [44] по данным карты, составленной Мюллером и Сьегреном, дается таблица положений и размеров масконов (табл. 11).

Таблица 11

Обозначение	Положение		$\mu \cdot 10^{-8}$ км ³ /сут ²	Обозначение	Положение		$\mu \cdot 10^{-8}$ км ³ /сут ²
	β	α			β	α	
μ_1	57	—14	—6,2	μ_8	60	62	—2,9
μ_2	25	19	+6,2	μ_9	8	15	—2,6
μ_3	33	—17	+5,9	μ_{10}	—23	—37	+2,2
μ_4	44	21	—4,4	μ_{11}	—33	—38	—1,8
μ_5	18	55	+3,7	μ_{12}	8	—8	+1,8
μ_6	50	—32	—3,3	μ_{13}	—12	—13	—1,8
μ_7	—13	31	+3,3				

Разумеется, при выборе масконов для более точного представления лунного потенциала придется действовать методом проб. Кроме того, нет очевидных доказательств, что оси луноцентрической селеноэкваториальной системы координат совпадают с главными осями инерции Луны. Поэтому в разложении потенциала Луны в процессе проб желательно в некоторых случаях сохранять коэффициенты C_{21} и S_{21} .

Исследование ряда моделей потенциала с учетом масконов, но без сохранения коэффициентов C_{21} и S_{21} выполнено Капланом и Кункивом [27].

ГЛАВА 7

СОСТАВ ИЗМЕРЕНИЙ В ОРБИТАЛЬНЫХ МЕТОДАХ И ПРОБЛЕМА НАБЛЮДАЕМОСТИ

Основной задачей траекторных измерений при решении проблем космической геодезии является определение параметров движения КА и координат пунктов поверхности планеты. Поэтому весьма важным является рациональный выбор наземной измерительной аппаратуры.

Первые результаты, полученные орбитальными методами космической геодезии, основывались на использовании фотографических наблюдений ИСЗ с наземных пунктов, позднее в состав измерений вошли лазерные и доплеровские радиотехнические измерения. Современное состояние измерительной техники позволяет использовать достаточно большой набор наземных и бортовых измерений, к которым могут относиться следующие типы измерений:

I. Величины, определяемые при наземных измерениях.

1. Топоцентрический единичный вектор $\vec{r}_{ij}^0$ КА в инерциальной системе координат, полученный в результате фотографических наблюдений с поверхности планеты.

2. Дальность r_{ij} от измерительного пункта до КА, полученная лазерными или радиотехническими измерительными средствами.

3. Радиальная скорость r_{ij} КА относительно измерительного пункта.

4. Сумма или разность расстояний $r_{ij} \pm r_{kj}$ до КА от двух измерительных пунктов i и k , полученные доплеровскими или радиотехническими средствами.

5. Направляющие косинусы $l'_{ij}, m'_{ij}, n'_{ij}$ вектора пункт — КА в топоцентрической системе координат, связанные с направлением силы тяжести в пункте наблюдений. Эти величины получаются при использовании кинотеодолитов.

II. Величины, определяемые при бортовых измерениях.

1. Расстояние r_{ji} от КА до точек поверхности планеты.

2. Спутникоцентрический единичный вектор $\vec{r}_{ji}^0$ направления на точку поверхности планеты, полученный в результате синхронного фотографирования двумя камерами поверхности планеты и звездного неба.

3. Высота H_j КА над поверхностью планеты.

4. Радиальная скорость $\dot{r}_{ji}$ КА относительно точек поверхности планеты.

5. Скорость $\dot{\vec{v}}_j$ КА относительно атмосферы.

6. Высота h светила относительно горизонта планеты.

Все указанные величины являются вторичными измеряемыми параметрами. Что же касается первичных параметров,

подлежащих непосредственному измерению, то они определяются особенностями физического способа измерений и конструктивными и техническими особенностями измерительной системы. В радиотехнических системах первичными параметрами могут быть фаза, амплитуда, частота, число импульсов, в оптических системах — параметры модуляции светового потока и т. д. Переходя от первичных параметров ко вторичным, которые имеют наглядный геометрический смысл, мы абстрагируемся от физической стороны процесса измерений и техники их выполнения, поскольку для решения рассматриваемых нами задач и сохранения необходимой общности выводов удобнее предполагать, что вторичные параметры поддаются непосредственным измерениям. При этом очевидно, что один и тот же вторичный параметр может быть определен системами с различными физическими принципами. Так, например, направление может быть получено при помощи фотографической камеры, радиоинтерферометра, теодолита и т. д.

Реализация орбитальных методов космической геодезии сама по себе требует весьма высокой организации техники измерений и их оптимального планирования. Поэтому для оптимизации процесса измерений совершенно необходимо правильно выбрать модель движения КА, состав измерений, время и место и частоту выполнения измерений, а также метод статистической обработки, который обеспечит заданную точность определения координат пунктов и параметров движения КА. Особое значение имеет разработка теории и планирования космического эксперимента. Существенный вклад в разработку этого важного направления в последние годы был внесен в лаборатории статистических методов МГУ проф. В. В. Налимовым, В. В. Федоровым и др.

Возникла и интенсивно разрабатывается теория наблюдаемости, основные положения которой содержатся в работах Р. Калмана. В последнее время опубликован также ряд работ советских ученых — В. Н. Брандина, А. А. Васильева, С. Т. Худякова, Г. Н. Разоренова, Б. Ф. Жданюка [6, 7, 14], в которых рассмотрены вопросы теории наблюдаемости и планирования космического эксперимента.

§ 49. Измеряемые функции положения и скорости

Как и раньше ($j=1, 2, \dots, m$), для описания положения и скорости КА в моменты t_j примем текущий индекс, а для описания положения и скорости определяемых пунктов — индексы $k=1, 2, \dots, n$ и $i=1, 2, \dots, l$.

Тогда, сохраняя ранее принятые обозначения, можно ввести N -мерный вектор измеряемых вторичных параметров

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U_{ij}^{(1)} \\ U_{ij}^{(2)} \\ \vdots \\ U_{ij}^{(N)} \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Вектор U характеризует состав измерений.

Установим связь измерений U_{ij} с координатами и скоростями.

1. Величины, определяемые при наземных измерениях.

1. Топоцентрическое направление на ИСЗ с пункта наблюдений.

В экваториальной инерциальной системе координат направление на ИСЗ определяется его топоцентрическими прямыми восхождением α_{ij} и склонением δ_{ij} :

$$\alpha_{ij} = \arctg \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}; \quad (7.2)$$

$$\delta_{ij} = \arctg \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (7.3)$$

или направляющими косинусами единичного вектора $\bar{r}_{ij}^0$

$$\bar{r}_{ij}^0 = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}_{ij}. \quad (7.4)$$

В гринвичской системе координат вместо прямого восхождения используется гринвичский часовой угол КА, но с обратным знаком

$$-T_{ij} = \gamma_{ij} = (\alpha_{ij} - S_j), \quad (7.5)$$

где S_j — гринвичское звездное время в момент наблюдений t_j .

2. Дальность r_{ij} от измерительного пункта до КА.

Поскольку расстояния инвариантны к преобразованиям координат, то в любой системе координат имеем

$$r_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (7.6)$$

3. Радиальная скорость $\dot{r}_{ij}$ относительно измерительного пункта

$$\dot{r}_{ij} = \frac{1}{r_{ij}} [(x_j - x_i) \dot{x}_j + (y_j - y_i) \dot{y}_j + (z_j - z_i) \dot{z}_j]. \quad (7.7)$$

4. Сумма или разность расстояний от измерительных пунктов i и k до КА

$$r_{ij} \pm r_{kj} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \pm \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2}. \quad (7.8)$$

5. Единичный вектор $\bar{r}_{ij}^0$ в системе координат x'_i, y'_i, z'_i , связанной с направлением силы тяжести в пункте наблюдений i , определяется астрономическими азимутом A_{ij} и зенитным расстоянием $\tilde{z}_{ij}$ КА. Для перехода к геодезической системе координат, заданной относительно общего земного эллипсоида, величины A_{ij} и $\tilde{z}_{ij}$ предварительно необходимо исправить за абсолютное уклонение отвеса в пункте наблюдений (ξ_i, η_i):

$$A'_{ij} = A_{ij} - (\lambda_i - L_i) \sin \varphi_i + \frac{\eta_i \cos A_{ij} - \xi_i \sin A_{ij}}{\operatorname{tg} i_j}, \quad (7.9)$$

$$\tilde{z}'_{ij} = z_{ij} + \xi_i \cos A_{ij} + \eta_i \sin A_{ij}, \quad (7.10)$$

после чего можно получить соотношения

$$\cos A'_{ij} = \frac{x'_j}{\sqrt{x_j^{12} + z_j^{12}}}, \quad (7.11)$$

$$\cos \tilde{Z}'_{ij} = \frac{y'_j}{r_{ij}}, \quad (7.12)$$

причем связь координат x' , y' и z' с геодезическими прямоугольными координатами X , Y , Z задается преобразованиями

$$\begin{bmatrix} x'_j \\ y'_j \\ z'_j \end{bmatrix} = Q_i \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

где матрица Q_i имеет вид

$$Q_i = \begin{bmatrix} -\cos A_{ij} \sin B_i \cos L_i & -\sin A_{ij} \sin L_i & : \\ \cos B_i \cos L_i & : & : \\ \sin A_{ij} \sin B_i \cos L_i & -\cos A_{ij} \sin L_i & : \\ : & -\cos A_{ij} \sin B_i \sin L_i & + \sin A_{ij} \cos L_i : \cos A_{ij} \cos B_i \\ : & \cos B_i \sin L_i & : \sin B_i \\ : & \sin A_{ij} \sin B_i \sin L_i & + \cos A_{ij} \cos L_i : -\sin A_{ij} \cos B_i \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

II. Величины, определяемые при бортовых измерениях

1. Высота H_j КА над уровнем моря

$$H_j = \sqrt{X_j^2 + Y_j^2 + Z_j^2} - \frac{a_e^2}{N_j + \zeta_j} - \frac{(N_j + \zeta_j)^2 e^4 \sin^2 2B_j}{8(N_j + \zeta_j + H_j)}, \quad (7.15)$$

где ζ_j — высота геоида над общим земным эллипсоидом.

Измерения высоты светила над горизонтом планеты, видимых дисков планет, а также скорости КА относительно атмосферы используются главным образом в астронавигации и вряд ли получают когда-нибудь применение в геодезических целях из-за малой точности таких измерений. Что же касается бортовых измерений доплеровского сдвига и фотографических бортовых измерений, то выражения вторичных параметров для них полностью совпадают с соответствующими выражениями для случая наземных измерений.

§ 50. Линеаризация функций положения и скорости

Для составления матриц $\frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)_j}$ и $\frac{\partial U_{ij}}{\partial (x, y, z)_i}$,

входящих в уравнения поправок (1.60) орбитального метода, необходимо выполнить линеаризацию выражений (7.2) — (7.15), устанавливающих связь измерений U_{ij} с координатами и составляю-

щими скорости. Приведем значения соответствующих частных производных.

1. Топоцентрические координаты α_{ij} и δ_{ij}

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r_{ij} \cos \delta_{ij}}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{r_{ij}}; \\ \frac{\partial \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}}{\partial y_j} &= - \frac{\partial \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}}{\partial y_i} = - \frac{\cos \alpha_{ij}}{r_{ij}}; \\ \frac{\partial \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}}{\partial z_j} &= - \frac{\partial \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}}{\partial z_i} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_j} &= - \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial x_i} = - \frac{\cos \alpha_{ij} \sin \delta_{ij}}{r_{ij}}; \\ \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial y_j} &= - \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial y_i} = \frac{\sin \alpha_{ij} \sin \delta_{ij}}{r_{ij}}; \\ \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial z_j} &= - \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial z_i} = \frac{\cos \delta_{ij}}{r_{ij}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

2. Дальность

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j} &= - \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} = \frac{x_j - x_i}{r_{ij}} = \cos \delta_{ij} \cos \alpha_{ij}; \\ \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_j} &= - \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_i} = \frac{y_j - y_i}{r_{ij}} = \cos \delta_{ij} \sin \alpha_{ij}; \\ \frac{\partial r_{ij}}{\partial z_j} &= - \frac{\partial r_{ij}}{\partial z_i} = \frac{z_j - z_i}{r_{ij}} = \sin \delta_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

3. Радиальная скорость $\dot{r}_{ij}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\dot{x}_j}{r_{ij}} - \frac{\dot{r}_{ij}}{r_{ij}^2} (x_j - x_i) = - \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial x_i}; \\ \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial y_j} &= \frac{\dot{y}_j}{r_{ij}} - \frac{\dot{r}_{ij}}{r_{ij}^2} (y_j - y_i) = - \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial y_i}; \\ \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial z_j} &= \frac{\dot{z}_j}{r_{ij}} - \frac{\dot{r}_{ij}}{r_{ij}^2} (z_j - z_i) = - \frac{\partial \dot{r}_{ij}}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

4. Сумма или разность расстояний

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{\partial x_j} &= \pm \cos \delta_{ij} \cos \alpha_{ij} \mp \cos \delta_{ik} \cos \alpha_{ik}; \\ \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{\partial y_j} &= \pm \cos \delta_{ij} \sin \alpha_{ij} \mp \cos \delta_{ik} \sin \alpha_{ik}; \\ \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{\partial z_j} &= \pm \sin \delta_{ij} \mp \sin \delta_{ik}; \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{dx_i} &= \pm \cos \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}; & \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{dx_k} &= \mp \cos \alpha_{kj} \cos \delta_{kj}; \\ \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{dy_i} &= \pm \sin \alpha_{ij} \cos \delta_{ij}; & \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{dy_k} &= \mp \sin \alpha_{kj} \cos \delta_{kj}; \\ \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{dz_i} &= \pm \sin \delta_{ij}; & \frac{\partial (r_{ij} \pm r_{kj})}{dz_k} &= \mp \sin \delta_{kj}. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

5. Высота КА над уровнем океана

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_j}{\partial X_j} &= \frac{X_j}{\Delta_j} \left(\frac{1}{r_j} - \chi_j \operatorname{tg} B_j \right) \approx \frac{X_j}{r_j}; \\ \frac{\partial H_j}{\partial Y_j} &= \frac{Y_j}{\Delta_j} \left(\frac{1}{r_j} - \chi_j \operatorname{tg} B_j \right) \approx \frac{Y_j}{r_j}; \\ \frac{\partial H_j}{\partial Z_j} &= \frac{Z_j}{\Delta_j} \left(\frac{1}{r_j} + \chi_j \right) \approx \frac{Z_j}{r_j}, \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

где X_j, Y_j, Z_j — геодезические координаты КА,

$$\Delta_j = 1 - \frac{(N_j + \zeta_j)^2 e^4 \sin 2B_j}{8(N_j + \zeta_j + H_j)^2}, \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \chi_j &= \frac{N_j e^2 \sin^2 B_j}{(N_j + \zeta_j + H_j)} \left\{ (N_j + \zeta_j + H_j) - (N_j + \zeta_j) e^2 [\cos 2B_j + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(N_j + \zeta_j) e^2 \sin 2B_j (N_j + \varphi_j + 2H_j)}{8a^2 (N_j + \zeta_j + H_j)}] \right\} \left\{ \frac{N_j + \zeta_j + H_j}{\cos^2 B_j} - \right. \\ &\quad \left. - (N_j + H_j) e^2 \left[1 + \frac{(N_j + \zeta_j)^2 e^2 \sin^2 B_j}{a^2} \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

§ 51. Наблюдаемость

КА можно представить как некоторую динамическую систему, поведение которой во времени описывается системой дифференциальных уравнений движения, обладающей всегда некоторой степенью неопределенности. Так, при решении задач космической геодезии орбитальными методами неопределенность заключается в отсутствии точных данных о начальных условиях движения, которые требуется определить из наблюдений, а также в ошибках постоянных, входящих в модели учитываемых сил. При этом измерения можно рассматривать в качестве выходных сигналов динамической системы. Возможность восстановления начального состояния динамической системы по некоторой измерительной информации о выходных сигналах системы называется наблюдаемостью динамической системы.

Пусть G — динамическая система (КА), которую мы будем отождествлять с ее математической моделью, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} G: \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= f(t, \bar{\mathbf{x}}); & \bar{\mathbf{x}}(t_0) &= \bar{\mathbf{x}}_0; \\ x_0 &\in K: & K &\subseteq R^n, \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — n -мерный вектор-столбец параметров состояния системы G , а K — односвязанная область ее возможных начальных состояний, R^n — вещественное линейное пространство, t — время, $t \in [t_0, t_a] \equiv T$.

Положим, что S есть наблюдаемый выход системы G , являющийся совокупностью параметров, которые можно измерить непосредственно, причем эти параметры функционально связаны с текущими параметрами состояния системы G

$$S: \bar{y} = \varphi(t, \bar{x}); \quad \bar{y}(t) \in Y^m; \quad t \in T, \quad (7.26)$$

где $\bar{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$ — m -мерный вектор-столбец измеряемых параметров; $\bar{y}(t)$ — сигнал на выходе системы, получаемый на отрезке времени T при ее движении из некоторой начальной точки $\bar{x}_0 \in K$; Y^m — множество сигналов на выходе, когда точка пробегает всю область K .

Уравнения (7.25) и (7.26) можно записать в скалярной форме

$$G: \dot{x}_j = f_j(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad x_i(t_0) = x_{i0}; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.27)$$

$$S: y_k = \varphi_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.28)$$

Будем предполагать, что функции f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют условиям существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений (7.27) в области K , а функции φ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) однозначны и непрерывны по всем своим аргументам. Кроме того, будем считать, что функции f_i и φ_k обладают производными требуемого порядка по всем аргументам.

Теперь можно дать математическое определение наблюдаемости. Система $G - S$, составленная из уравнений движения и уравнений измерений на интервале $[t_0, t_a]$, называется наблюдаемой, если между множеством фазовых траекторий $\{\bar{x}(t)\}$ и множеством измеряемых функций $\{\bar{y}(t)\}$ существует взаимно однозначное соответствие.

Частные случаи

1. Пусть движение КА описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а измерения являются непосредственными

$$y_k \equiv x_k.$$

Поскольку уравнения измерений являются тождествами, то они не могут повлиять на наблюдаемость. Поэтому в данном случае наблюдаемость зависит только от модели движения, т. е. движение наблюдаемо, если выполнены условия существования и единственности решения. Таким образом, в случае непосредственного измерения параметров движения достаточно, чтобы правые части дифференциальных уравнений и их частные производные существовали и были непрерывными на отрезке $[t_0, t_a]$.

2. Предположим, что модель движения не задана, а имеются только измеряемые функции

$$y_k = \varphi_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Из этих уравнений следует, что $\bar{y}(t)$ однозначно определяется через $\bar{x}(t)$. Для существования обратного соответствия необходимо, чтобы выполнялись условия существования неявных функций

$$y_k - \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Следовательно, для выполнения условий наблюдаемости достаточно, чтобы якобиан

$$J = \left| \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}} \right)^T \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

был невырожден на интервале $[t_0, t]$. Это условие необходимо соблюдать при определении положений ИСЗ методом прямых пространственных засечек.

3. Пусть движение КА описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а измерению подлежит только один k -й параметр

$$y_k = \varphi_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Допуская, что для дифференциальных уравнений движения выполнены условия теорем о существовании и единственности решения, измеряемый параметр y_k можно рассматривать как решение некоторого дифференциального уравнения (обыкновенного) порядка n

$$a_0(t) \frac{d^n y_k}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} y_k}{dt^{n-1}} + \dots + a_n(t) y_k = 0.$$

Если понизить порядок этого уравнения

$$\lambda_i = \frac{d^{i-1} y_k}{dt^{i-1}}; \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то его можно привести к системе уравнений в форме Коши

$$\dot{\lambda}_i = \sum_{\alpha=1}^n C_{i\alpha}(t) \lambda_{\alpha}; \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Исходное уравнение и полученная система эквивалентны, поэтому и между их решениями существует взаимно однозначное соответствие

$$y_k \rightleftharpoons \left[y_k, \frac{dy_k}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y_k}{dt^{n-1}} \right],$$

а это означает, что вместо уравнений движения и уравнений измерений можно рассмотреть систему функций вида

$$y_k(t) = \varphi_{k,1}(x_1, x_2, \dots, x_n, t);$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_k}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_{k,1}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \varphi_{k,1}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_{k,1}}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) + \\ &+ \frac{\partial \varphi_{k,1}}{\partial t} = \varphi_{k,2}(x_1, x_2, \dots, x_n, t); \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}y_k}{dt^{n-1}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_{k,n-1}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \varphi_{k,n-1}}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_{k,n-1}}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, \\ &x_n, t) + \frac{\partial \varphi_{k,n-1}}{\partial t} = \varphi_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \end{aligned}$$

Следовательно, получается система неявных соотношений

$$\frac{d^{n-1}y_k}{dt^{n-1}} - \varphi_{k,n}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0,$$

и для наблюдаемости, как в случае 2, достаточно, чтобы якобиан

$$|J_k| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{k,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{k,1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{k,1}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_{k,n}}{\partial x_1} & \frac{\partial y_{k,n}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_{k,n}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

не вырождался на интервале $[t_0, t_a]$.

Об щ и й с л у ч а й

Имеем системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ y_k &= \varphi_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, m); \end{aligned}$$

для любого измеряемого параметра y_k ($k=1, 2, \dots, m$) можно составить матрицу Якоби, как и в случае 3. Объединив все такие матрицы, получим матрицу порядка $mn \times n$, т. е. матрицу наблюдаемости для вектора-функции $y = \varphi(t, x)$:

$$J = \|J_1^T, \dots, J_m^T\|. \quad (7.29)$$

Общее утверждение о наблюдаемости на интервале $[t_0, t_a]$ заключается в следующем. Для того, чтобы система на интервале $[t_0, t_a]$ была наблюдаемой, достаточно, чтобы правые части диф-

ференциальных уравнений движения КА удовлетворяли условиям теорем о существовании и единственности решения, а ранг матрицы J (7.29) был равен n , т. е. числу параметров, определяющих движение.

Таким образом при определении начальных условий движения КА необходимо потребовать, чтобы в некоторой локальной области, содержащей измерения в окрестностях вектора x_0 , ранг матрицы частных производных от измеренных величин по начальным условиям был равен 6.

Детальное изложение теории наблюдаемости можно найти в книге В. Н. Брандина Г. Н. Разоренова [6], в которой приведен ряд важных теорем и следствий для случаев как локальной, так и глобальной наблюдаемости и на их основании разработаны строгие критерии наблюдаемости. В этой же книге приводится ряд интересных примеров по исследованию наблюдаемости для конкретных видов измерений.

§ 52. Некоторые соображения о планировании работ по определению координат точек планеты орбитальным методом

Для получения достоверных оценок определения орбит КА и координат пунктов необходимо весьма тщательное изучение всех факторов, определяющих характер движения КА и точность траекторных измерений. Совместный учет этих факторов и прежде всего ошибок траекторных измерений, ошибок геодезической привязки измерительных средств, возмущений от сопротивления атмосферы, ошибок в задании модели гравитационного поля Земли позволяет установить адекватную модель движения КА и модели измерений, получить достоверные оценки для определения орбит и координат пунктов.

При проектировании работ по совместному определению орбит и координат пунктов прежде всего необходимо установить класс используемых орбит, элементы которых подлежат определению, а также исследовать точность измерений и установить функциональные связи между измерениями и параметрами движения. После этих предварительных исследований устанавливаются требуемый состав измерений и требуемая точность измерений на основе анализа влияния ошибок измерений на элементы орбит. Затем определяется необходимый состав средств и приборов, которыми оборудована каждая наземная станция, а также оптимальное размещение измерительных пунктов на поверхности Земли. Исследуются также вопросы необходимой точности геодезической привязки, точность привязки системы измерений к шкале всемирного времени.

В процессе реализации орбитального метода необходимо также определить интервалы времени между измерениями, плотность измерений на интервале реализации, разработать эфемериды, а также методы передачи измерительной информации в вычислительный центр и способы ее хранения и предварительной обра-

ботки, установить адекватные модели движения КА, выбрать оптимальные методы обработки и интегрирования уравнений движения, а также методы оценивания.

После того, как вся информация о векторе начальных условий $\bar{\mathbf{x}}_0^T = \{x_{10}, x_{20}, \dots, x_{60}\}$ получена, существенным критерием точности работ является плотность вероятности его оценки $P_W(\hat{\mathbf{x}}_0)$, которая зависит от условий проведения измерений. В качестве критерия оптимальности целесообразно выбрать плотность вероятности нахождения оценки в заданных пределах [13]

$$P_W(\hat{\mathbf{x}}_0) = P(|\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0| < \epsilon). \quad (7.30)$$

План эксперимента $\bar{W} \in \{W\}$, при котором

$$P_{\bar{W}}(\hat{\mathbf{x}}_0) = \max_{\{W\}} P_W(\hat{\mathbf{x}}_0),$$

является оптимальным по вероятности.

Если имеет место нормальное распределение, то точность вектора оценок $\hat{\mathbf{x}}_0$ полностью характеризуется математическим ожиданием $M(\hat{\mathbf{x}}_0)$ и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_0} = \|\mathbf{K}_{jk}(W)\|$,

элементы которой зависят от плана эксперимента. Но непосредственное использование матрицы $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_0}$ как критерия оптимальности неудобно, так как при оценивании n параметров модели матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_0}$ имеет порядок $n \times n$.

В связи с этим в качестве критерия оптимальности используются некоторые скалярные характеристики этой матрицы. Имеются следующие критерии оптимальности плана.

1. D-оптимальность. План называется D-оптимальным, если корреляционная матрица $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_0}$ имеет минимальное значение определителя, т. е.

$$\min \det \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_0};$$

при этом минимизируется обобщенная дисперсия оценок вектора $\bar{\mathbf{x}}_0$.

2. A-оптимальность. В этом случае корреляционная матрица имеет минимальный след

$$\min \text{Sp } \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_0}.$$

При выполнении условий A-оптимальности минимизируется сумма дисперсий оценок параметров.

3. E-оптимальность. В этом случае максимальное характеристическое число корреляционной матрицы минимально

$$\min \lambda_{\max}(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}_0}).$$

В данном случае минимизируется максимальная ось корреляционного эллипсоида.

1. Амелин В. М. Методы использования Луны для геодезических целей. Бюл. ИТА АН СССР. VI, 1958, № 1 (84), с. 19—42.
2. Аксенов Е. П. Ограниченные решения обобщённой задачи двух неподвижных центров. — Вестник Московского ун-та. Физика и астрономия, М., 1967, № 6, с. 68—74.
3. Аксенов Е. П. Механическая интерпретация силовой функции обобщённой задачи двух неподвижных центров. — Астрон. журн., 1968, 45, № 4, с. 854—864.
4. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М., Недра, 1965.
5. Брандин В. Н., Васильев А. А., Худяков С. Т. Основы экспериментальной космической баллистики. М., Машиностроение, 1974.
6. Брандин В. Н., Разоренов Г. Н. Определение траекторий космических аппаратов. М., Машиностроение, 1978.
7. Бойков В. В., Устинов Г. А. Определение координат пунктов космической геодезической сети орбитальным методом. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофото-съёмка, 1969, № 4, с. 52—58.
8. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М., Мир, 1964.
9. Бурша М. Основы космической геодезии, ч. II. М., Недра, 1975.
10. Вейс Г. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. Пер. с англ. М., Недра, 1967.
11. Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М., Наука, 1968.
12. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Наука, 1968.
13. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. М., Советское радио, 1978.
14. Жонголович И. Д. Возможности получения элементов орбиты спутника по наблюдениям за короткий промежуток времени. — Бюл. ст. оптич. наблюд. ИСЗ, 1969, № 54, с. 14—18.
15. Жонголович И. Д. Космическая триангуляция. — В сб.: Проблемы астрономии и геодезии. М., Наука, 1970, с. 83—102.
16. Использование искусственных спутников для геодезии. Под ред. С. Хенриксена, А. Мангини, Б. Човица, М., Мир, 1975.
17. Использование искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей/Е. Г. Бойко, Б. М. Кленицкий, И. М. Ландис и др. М., Недра, 1976.
18. Кинтарович Л. В. О методе Ньютона. — Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова, вып. 28, 1949, с. 63—74.
19. Каула В. М. Космическая геодезия. М., Недра, 1966.
20. Каула В. М. Спутниковая геодезия. М., Мир, 1970.
21. Келль Н. Г. Пространственная засечка в фотограмметрии. М., Геодезиздат, 1926.
22. Кислик М. Д. Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. — В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 13, 1962, с. 17—26.
23. Козаи И. Движение близких ИСЗ. — В сб.: Проблемы движения искусственных небесных тел. М., Изд-во АН СССР, 1963, с. 87—91.
24. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., Наука, 1968.
25. Краснорылов И. И., Плахов Ю. В. Основы космической геодезии. М., Недра, 1976.
26. Краснорылов И. И., Урманев М. С. Космическая геодезия. — В кн.: Справочник геодезиста. М., Недра, 1976, с. 267—320.

27. Кункив Б. Г., Каплан М. Г. Модель потенциала Луны с учетом влияния масконов. — В сб.: Использование ИСЗ для геодезии. М., Мир, 1975, с. 370—382.
28. Лобанов А. Н. Фототопография. М., ВИА, 1957.
29. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1958.
30. Масевич А. Г., Лозинский А. М. Фотографические наблюдения искусственных спутников Земли. — Научные информации. М., АН СССР, 1970.
31. Меллер И. Введение в спутниковую геодезию. Пер. с англ. М., Мир, 1967.
32. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.
33. Мудров В. И., Кушко В. Л. Методы обработки измерений. М., Советское радио, 1976.
34. Мудров В. И., Кушко В. Л. Метод наименьших модулей. Сер. Математика и кибернетика, вып. 7. М., Знание, 1971.
35. Основы спутниковой геодезии. М., Недра, 1974.
36. Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. Н. Г. Нариманова. М., Машиностроение, 1972.
37. Основы теории полета и элементы проектирования ИСЗ. Под ред. М. К. Тихонравова. М., Машиностроение, 1967.
38. Пеллинен Л. П. Исследование гравитационных полей и формы Земли, других планет и Луны по наблюдениям космических аппаратов. — Итоги науки, ВИНТИ. Сер. Космонавтика. М., 1972.
39. Пеллинен Л. П. Высшая геодезия. М., Недра, 1978.
40. Плахов Ю. В. О вычислении возмущений высших порядков в движении небесных тел. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 5, 1972, с. 36—41.
41. Разумов О. С. Пространственная геодезическая векторная сеть. М., Недра, 1974.
42. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера. Киев, Техника, 1977.
43. Справочник геодезиста. Под ред. В. Д. Большакова и Г. П. Левчука. М., Недра, 1975.
44. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г. Н. Дубошина. М., Наука, 1976.
45. Стандартная Земля. Под ред. К. Лунквиста и Г. Вейса, пер. с англ. М., Мир, 1969.
46. Сальвадори М. Дж. Численные методы в технике. М., ИЛ, 1955.
47. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., Наука, 1968.
48. Трунин Ю. М. Фотограмметрическая обработка произвольного числа снимков одного и того же объекта. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 6, 1970, с. 24—29.
49. Устинов Г. А. Априорная оценка точности и оптимальные условия определения элементов орбиты. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 4, 1976, с. 26—33.
50. Урмаев А. С. Основы моделирования на ЭВМ. М., Наука, 1978.
51. Урмаев Н. А. Элементы фотограмметрии. М., Геодезиздат, 1941.
52. Урмаев М. С. Математическая обработка результатов измерений в орбитальном методе космической геодезии. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 5, 1972, с. 7—15.
53. Урмаев М. С. Приближенное определение орбиты ИСП по снимкам поверхности планеты и звездного неба. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 2, 1976, с. 61—65.
54. Урмаев М. С. Некоторые уравнения космической фотограмметрии. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 2, 1976, с. 65—71.
55. Фототриангуляция с применением ЭЦВМ/А. Н. Лобанов, В. Б. Дубиновский, М. М. Машимов и др. М., Недра, 1975.

56. *Фундаментальные постоянные астрономии*. М., Мир, 1967.
57. Чарный В. И. Об изохронных производных. — В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 16, 1963, с. 65—79.
58. Щербаков М. И. К оценке точности определения угловых элементов внешнего ориентирования звездного снимка. — Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка, № 3, 1978, с. 26—32.
59. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета ИСЗ. М., Наука, 1965.
60. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения. М., Наука, 1969.
61. Эскобал П. Методы определения орбит. М., Мир, 1970.
62. Ястребов В. Д. Определение орбиты искусственного спутника Земли по данным измерений на больших интервалах времени. — Космические исследования. IV, № 2, 1966.
63. Arnold K. The use of satellites for geodetic studies. Space Sci. Rev., N 1, pp. 4—68, 1967.
64. Bjerhammar. A new approach to satellite geodesy. 14th Gener. Assembly Internat. Union Geod. and Geophys. Internat. Assoc. Geod. Lucerne, 1967, pp. 17—26.
65. Bulirsch R., Stoer I. Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods. Numerische Mathematik. 1966, v. 8, N 1, pp. 1—13.
66. Everhart E., Implicit single-sequence methods for integrating orbits. Celestial Mechanics, 1974, 10, pp. 35—56.
67. Frey C. H. Proposed department of defense geodetic satellite observation programm. Surveying and Mapping. 1966, 26, N 2, pp. 265—274.
68. Gaposchkin E. M., Lambeck K. Smithsonian standard earth (II), 1969. Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ. 1970, N 315, XI.
69. Goudas C., Lunar mascons. Nature (Engl.), 1968, 220, N 5172, pp. 1111—1112.
70. Hartwell G. I. Integration of close satellite orbits and solution of first variational equations by recursive analytic continuation. Trans. Amer. Geophys. Union, 1966, 47, N 3, p. 458.
70. Kane M. F. Doppler gravity a new method. I. Geophys. Res. 1969, 74, N 27, pp. 6579—6582.
71. Kaula W. M. The shape of the earth. Space science. London—Glasgow. Blackie and Son Ltd., 1965, pp. 297—317.
72. Moritz H. On the determination of the potential from gravity disturbances along a fixed direction. Tellus, 1969, 21, N 4, pp. 568—571.
73. Stern R. J., Stern G. S. Orbit selection for planetary mapping missions. J. Astronaut. Sci. 1968, 15, N 5, pp. 249—256.
74. Weightman I. A. Gravity, geodesy and artificial satellites; a unified analytical approach. Use Artific. Satellites Geod. Vol. 2, Athens, Publ. Nat. Techn. Univ., 1967, pp. 467—486.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Азимут 14
- Алгоритмы
 - Де Беллиса—Эскобала 142
 - задачи двух неподвижных центров 129
- Базис космической съемки 231
- Бесселя тропический год 9
- Бинс формулы 53
- Время:
 - атомное 13
 - звездное 13
 - модифицированное 65
- Вектор:
 - геоцентрический 20
 - топоцентрический 19
- Дифференциальные уравнения движения
 - возмущенного 90
 - невозмущенного 46
 - в инерциальных координатах 46
 - в сферических координатах 47
 - во вращающихся координатах 48
 - в цилиндрических координатах 47
- Интеграл:
 - динамический 55
 - мультипликативный 141
 - орбиты 52
- Матрица:
 - весовая 33
 - движения полюсов 11
 - диагональная 41
 - ковариационная 32
 - нутации 11
 - Родрига 211
 - симметричная 31
 - симплектическая 133
- Матрицант:
 - аналитические методы расчета 142
 - вариационные 164
 - приближенные 160
 - численные 161
- Масконы 237
- Метод:
 - Адамса 175
 - Аксенова 125
 - Булирша—Штора 194
 - Гаусса 221
 - Каулы 153
 - Ньютона 30
 - последовательных приближений 183
 - Рунге—Кутты 168
 - Шепкса 193
 - Эверхарта 196
 - Модель атмосферы 104
- Наблюдаемость 245
- Ньютоновский итерационный процесс 29
- Орбита:
 - двух неподвижных центров 125
 - оскулирующая 91
 - кеплерова 43
 - промежуточная 119
- Перицентр орбиты 59
- Пертурбационная функция 29
- Система:
 - динамическая 245
 - координат 9
 - геодезическая 13
 - геоцентрическая 11
 - Гринвичская 11
 - обобщенная криволинейная 44
 - орбитальная 81
 - топоцентрическая 19
 - сферическая 47
 - фундаментальная 9
 - цилиндрическая 48
- Теорема:
 - Линника 32
 - Кантаровича 36
 - Коши 65
- Условия компланарности 225
- Уравнения:
 - Гампльтона—Якоби 129
 - Кеплера 58
 - Лагранжа II рода 3
 - Лагранжа—Ньютона 3
 - поправок 25
- Элементы орбиты 21
 - кеплеровы 21
 - оскулирующие 91
- Юлианская дата: 9
 - модифицированная 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	6
ГЛАВА 1. Основные принципы использования орбитальных методов в космической геодезии	9
§ 1. Системы отсчета, постоянные и единицы	9
§ 2. Фундаментальное уравнение орбитальных методов	19
§ 3. Линеаризация фундаментального уравнения	22
§ 4. Уравнения поправок	25
§ 5. Ньютоновский итерационный процесс и минимизация суммы квадратов поправок результатов измерений	29
§ 6. Соображения об установлении весов измерений	31
§ 7. О сходимости итераций в методе Ньютона	36
§ 8. Порядок обработки измерений при определении координат пунктов орбитальными методами	38
ГЛАВА 2. Элементы теории задачи двух тел	43
§ 9. Ускорение в обобщенных криволинейных координатах	43
§ 10. Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения	50
§ 11. Определение координат и составляющих скорости ИСЗ для произвольного момента t по заданным элементам орбиты и начальной эпохе t_0 (прямая задача невозмущенного движения)	60
§ 12. Определение элементов орбиты по координатам и составляющим скорости (обратная задача невозмущенного движения)	63
§ 13. Интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения в виде разложений координат по степеням времени	64
§ 14. Дифференциальные формулы задачи двух тел	69
§ 15. Векторные элементы орбиты	77
§ 16. Метод вычисления элементов матрицы производных от координат и составляющих скорости по элементам орбиты, основанный на использовании векторных элементов	84
§ 17. Преобразование координат и составляющих скорости при переходе от инерциальной системы координат к гринвичской системе и наоборот	87
ГЛАВА 3. Модели возмущенного движения ИСЗ	90
§ 18. Модель возмущенного движения в инерциальных прямоугольных координатах	92
§ 19. Модели возмущенного движения в оскулирующих элементах	109
§ 20. Вековые возмущения первого порядка в элементах орбиты, обусловленные сжатием Земли	114
§ 21. Линеаризованные модели возмущенного движения. Метод Энке	119
§ 22. Промежуточная орбита, основанная на решении задачи двух неподвижных центров. Метод Е. П. Аксенова	125
ГЛАВА 4. Матрицант и методы его расчета	132
§ 23. Матрицант и общее решение для однородных линеаризованных моделей	133
§ 24. Решение в случае неоднородной линеаризованной модели	136
§ 25. Основные свойства матрицанта	139
§ 26. Представление матрицанта в виде мультипликативного интеграла	141
§ 27. Точные аналитические методы расчета матрицанта. Алгоритм Де Беллиса и Эскобала	142
§ 28. Вычисление матрицанта в случае неоднородной линеаризованной модели. Метод В. М. Каулы	153

§ 29. О вычислении матрицы коэффициентов вектора поправок начальных условий движения ИСЗ	157
§ 30. Приближенные аналитические методы расчета матрицанта	160
§ 31. Численные методы расчета матрицанта	161
ГЛАВА 5. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ	166
§ 32. Метод Рунге — Кутта	168
§ 33. Алгоритм численного интегрирования уравнений движения ИСЗ методом Рунге — Кутта	171
§ 34. Метод Адамса	175
§ 35. Метод последовательных приближений	183
§ 36. Применение методов численного интегрирования для линейризованных моделей движения	186
§ 37. Интерполирование координат и составляющих скорости ИСЗ на моменты t_v орбитальных измерений	189
§ 38. Выводы и рекомендации по численному интегрированию дифференциальных уравнений движения ИСЗ	191
§ 39. Новые методы численного интегрирования дифференциальных уравнений движения ИСЗ	192
ГЛАВА 6. Орбитальный метод координатно-временной привязки результатов космических съемок Земли и Луны	200
§ 40. Основное уравнение космической фотограмметрии	202
§ 41. Модель движения системы координат космического снимка относительно центра масс космического аппарата	205
§ 42. Параметры ориентации системы координат снимка в инерциальной системе координат. Кинематические уравнения	207
§ 43. Определение ориентации «звездного» снимка в инерциальной системе координат	209
§ 44. Определение оператора P_0 взаимной ориентации систем координат топографической и звездной камер	217
§ 45. Предварительное определение орбиты ИСП по снимкам из Космоса при наличии на снимках исходных пунктов	219
§ 46. Дифференциальное уточнение орбиты ИСП по снимкам из Космоса	223
§ 47. О точности определения орбит по ориентирующим углам базисов космической съемки	231
§ 48. Особенности применения орбитального метода при координатно-временной привязке космических съемок Луны	235
ГЛАВА 7. Состав измерений в орбитальных методах и проблема наблюдаемости	240
§ 49. Измеряемые функции положения и скорости	241
§ 50. Линеаризация функций положения и скорости	243
§ 51. Наблюдаемость	245
§ 52. Некоторые соображения о планировании работ по определению координат точек планеты орбитальным методом	249
Список литературы	251
Предметный указатель	254