

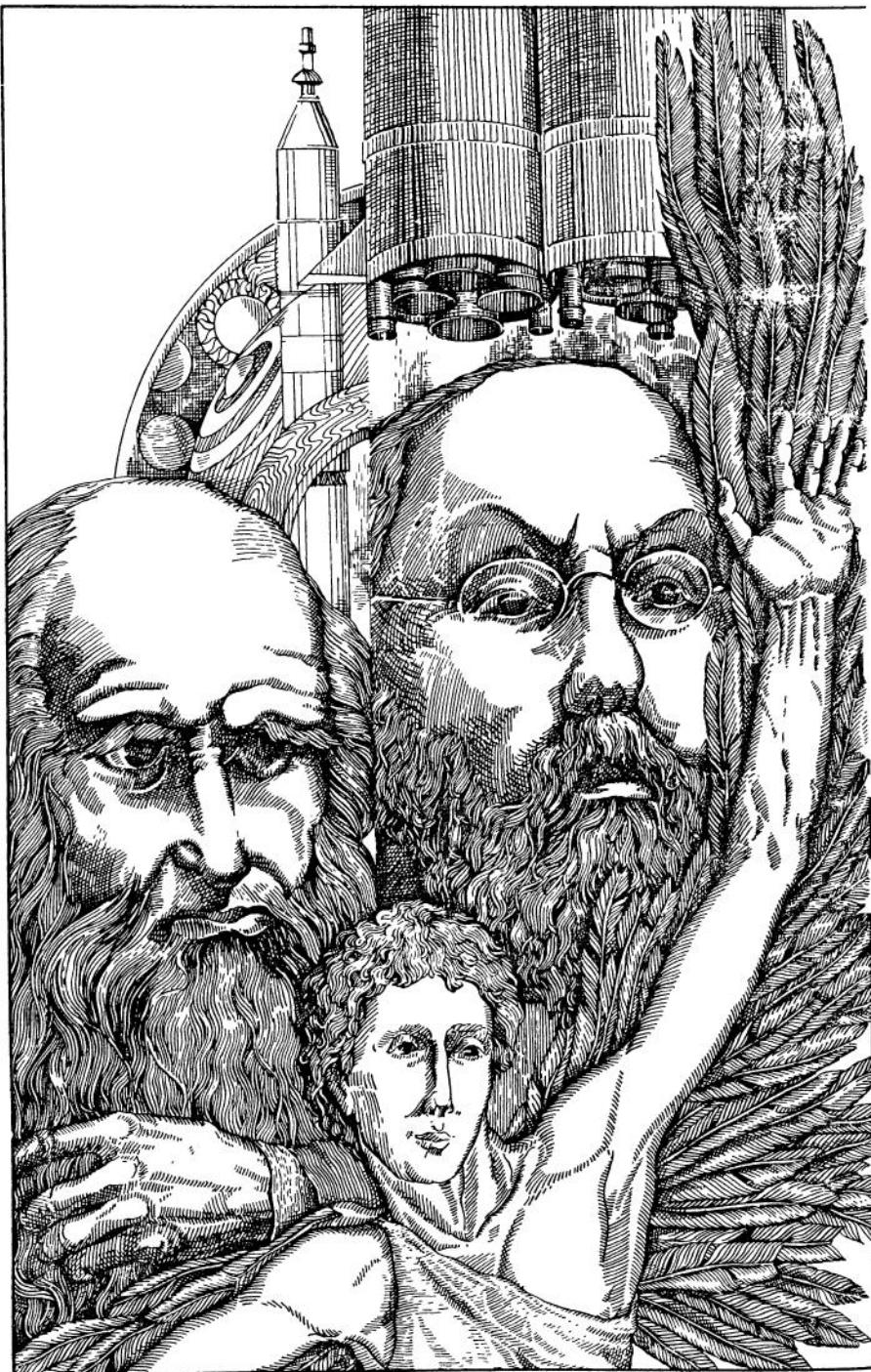
БИ.РАБИНОВИЧ

ВВЕДЕНИЕ
В ДИНАМИКУ
РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ
КОСМИЧЕСКИХ
АППАРАТОВ

*Молодой моряк вселенной,
Мира древний дровосек,
Неуклонный, неизменный,
Будь прославлен, Человек!*

• • • • •
*Камни, ветер, воду, пламя
Ты смирил своей уздой,
Взвил ликующее знамя
Прямо в купол голубой.*

— Валерий Брюсов



Б.И.РАБИНОВИЧ

ВВЕДЕНИЕ
В ДИНАМИКУ
РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ
КОСМИЧЕСКИХ
АППАРАТОВ



Москва
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
1975

Рецензент д-р физ.-мат. наук **И. А. Луковский**

Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1975, 416 с.

Основное внимание в книге уделено учету влияния подвижности жидкых компонентов топлива в баках и магистралях и упругости корпуса на динамическую устойчивость замкнутой системы корпус — жидкость — автомат стабилизации — двигательная установка.

Описаны некоторые инженерные методы определения частот собственных колебаний и присоединенных масс жидкости в баках и магистралях и упругого корпуса.

Рассмотрены основные пути обеспечения динамической устойчивости ракет-носителей изменением конструктивно-компоновочной схемы и центровки, применением механических демпферов и гидроаккумуляторов, а также выбором периода квантования при применении алгоритмов стабилизации, реализуемых на бортовой цифровой вычислительной машине.

Книга предназначена для научных работников и инженеров-проектировщиков, специализирующихся в области ракетно-космической и авиационной техники. Она также может быть полезна студентам и аспирантам соответствующих факультетов вузов.

Табл. 13, ил. 126, список лит. 258 назв.

P 31902-426
038(01)-75 БЗ-32-10-75

© Издательство «Машиностроение», 1975 г.

Борис Исаакович Рабинович

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ
РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Редактор издательства *Н. В. Корженевская*
Техн. редактор *И. А. Юдина*

Художник *М. М. Занегин*
Корректор *А. И. Карамышкина*

Сдано в набор 30/VI—1975 г. Подписано к печати 29/X—1975 г. Т—18172
Формат 60×90^{1/16} Бумага № 2 Печ. л 26,0 Уч.-изд. л. 24,11
Тираж 1900 экз. Изд. зак. 304 Цена 2 р. 66 к.

Издательство «Машиностроение», Москва, 107885, Б-78, 1-й Басманный пер., 3
Московская типография № 8 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Хохловский пер., 7. Зак 3547

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга содержит сжатое изложение некоторых вопросов динамики активного участка полета жидкостных ракетносителей космических аппаратов как упругих тел, частично заполненных жидкостью. В этом смысле она является продолжением монографий Г. Н. Микишева и Б. И. Рабиновича «Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью» («Машиностроение», 1968) и «Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость» («Машиностроение», 1971).

Основное внимание в книге, в отличие от упомянутых монографий, уделяется не обоснованию и исследованию расчетных моделей сложных пространственных тонкостенных конструкций с жидкостью, а практическому использованию для решения ряда задач динамической устойчивости жидкостных ракет достаточно простой модели упругого тонкостенного стержня с жидкостью. Адекватность такой модели подтверждена имеющимся опытом ракетостроения.

Эффекты, связанные с деформацией элементов конструкции корпуса как упругих оболочек, учитываются постольку, поскольку это необходимо в диапазоне частот, в котором наиболее вероятна динамическая неустойчивость замкнутой системы корпус — двигательная установка — автомат стабилизации. При этом используются готовые результаты, опубликованные в обширной литературе по гидроупругости. Решающую роль в возможности выделения диапазона сравнительно «низкочастотных» колебаний, в котором развивается динамическая неустойчивость (как правило, до 5—10 Гц, реже — до 15—20 Гц), играют фильтрующие свойства жидкостных ракетных двигателей с насосной подачей компонентов топлива и электрогидравлических сервоприводов как элементов рассматриваемой замкнутой системы. Эта неустойчивость может носить характер как независимых продольных, поперечных или крутильных колебаний корпуса с нарастающей амплитудой, так и совместных изгибо-продольных или изгибо-крутильных колебаний (например, в случае конструкций пакетной схемы).

Поэтому соответствующие расчетные модели и случаи неустойчивости рассматриваются под единым углом зрения, причем иногда, вопреки установившейся традиции, начиная с более

простого случая продольных колебаний, а не поперечных. При этом затрагивается ряд новых вопросов, связанных как с расширением класса объектов, в который включены носители tandemной и пакетной схем и транспортные системы многоразового использования с крылатой последней ступенью, так и с учетом некоторых дополнительных факторов, в частности дискретности системы стабилизации с бортовой цифровой вычислительной машиной.

Все изложение построено применительно к задачам, возникающим в ходе предэскизного и эскизного проектирования рассматриваемых объектов. Этим определяется ряд допущений, оправданных на этой стадии исследования, выбор методов расчета и стремление перейти на конечной стадии анализа к описанию динамической устойчивости на языке конструктивно-компоновочных параметров объекта. Это позволяет лучше проникнуть во внутренний механизм динамической неустойчивости, выделить основные факторы, ее определяющие, и наметить пути целенаправленного изменения параметров объекта в сторону улучшения его динамических свойств как объекта регулирования, т. е. в конечном счете улучшения динамических характеристик системы в целом.

Автор будет считать свою задачу выполненной, если книга окажется полезной для тех читателей, которые пожелаю ограничиться общим представлением о предмете, и для тех, которым она облегчит дальнейшее изучение литературы более узко специализированного характера.

Большую роль в написании этой книги сыграла многолетняя совместная работа автора с его соавтором по монографиям, упомянутым выше, Г. Н. Микишевым и еще целым рядом научных сотрудников и инженеров. Не имея возможности перечислить их всех, автор вынужден ограничиться упоминанием только тех, чьи результаты исследований непосредственно вошли в эту книгу.

Значения коэффициентов для односвязных и двусвязных полостей вращения, рассчитанные методом Трефтца, и для эллиптического цилиндра, рассчитанные методом разделения переменных с помощью функций Матье, приведенные в гл. 6, получены Е. М. Стажковым; численные результаты по стабилизируемости «жестких» объектов с двумя баками в гл. 10 — С. В. Черемных, а в гл. 11 — С. В. Черемных и Г. И. Рен-

жинным; частоты и формы продольных колебаний корпуса объекта в гл. 7 и соответствующие области устойчивости в гл. 11 — Ю. М. Галлаем, Г. И. Ренжиным и А. В. Калининой. Экспериментальные результаты, касающиеся движения жидкости в подвижных полостях, приведенные в ч. I, принадлежат Г. Н. Микишеву и Н. Я. Дорожкину.

Многие вопросы автор неоднократно обсуждал с Л. В. Докучаевым, В. М. Роговым и С. В. Черемныхом, что способствовало уточнению и упрощению изложени. некоторых разделов. В частности, по предложению В. М. Рогового была введена более удобная форма эмпирической зависимости коэффициента сопротивления ребра от скорости и упрощен вывод уравнений движения с учетом вязкости жидкости (гл. 3). Предложения С. В. Черемныха и В. М. Рогового были использованы также для упрощения вывода алгебраических критериев стабилизируемости (гл. 8).

Автор считает своим приятным долгом выразить особую признательность всем этим лицам, а также д-ру физ.-мат. наук И. А. Луковскому за ценные замечания, сделанные им при рецензировании книги.

Канд. техн. наук Н. Я. Дорожкин выполнил эскизы, которые определили общую идею художественного оформления книги.

Большую помощь в оформлении работы оказали В. С. Ильина, Р. В. Табакова и Г. В. Филимонова. Автор приносит им свою глубокую благодарность.

- ① Система управления ② Аэродинамические возмущения
③ Упругость корпуса ④ Подвижность жидкости в баках и
магистралях ⑤ Динамика двигательной установки



ВВЕДЕНИЕ

...одни считают природой существующего огонь, другие — землю, третьи — воздух, некоторые — воду; одни — некоторые из указанных тел, другие — все вместе.

Аристотель. Физика.

Четыре «начала» Аристотеля можно рассматривать применительно к нашей задаче как аллегорическое описание основных возмущающих факторов, влияющих на характер возмущенного движения ракеты-носителя: «огонь» — это жидкостный ракетный двигатель, наделенный сложным комплексом динамических свойств; «земля» — корпус, представляющий собой пространственную упругую систему; «воздух» — атмосфера — источник аэродинамических возмущений; «вода» — жидкость в баках и магистралях, подвижность которой также является мощным возмущающим фактором.

Формализация всех этих факторов, т. е. разработка «динамической схемы» ракеты-носителя, определение параметров этой схемы, а именно собственных частот, присоединенных масс, коэффициентов демпфирования, и исследование их влияния на устойчивость замкнутой системы корпус — двигательная установка — автомат стабилизации является важнейшим элементом проектирования современных мощных ракет-носителей и космических аппаратов и их систем стабилизации. Рассмотрение некоторых практических задач, из которых складывается вся проблема в целом, составляет содержание настоящей книги.

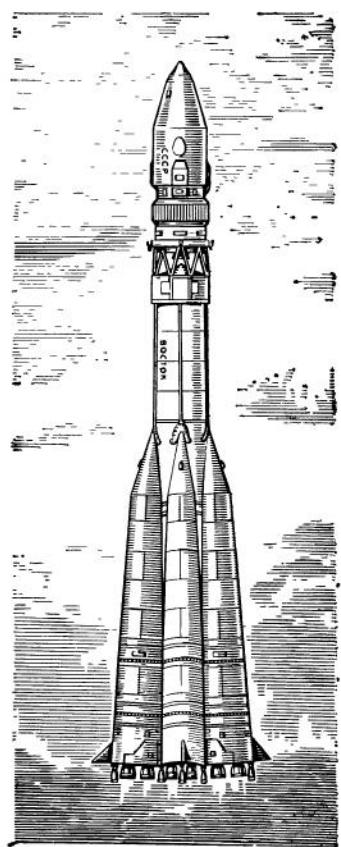


Рис. 0.1. Советская ракета-носитель «Восток», обеспечившая 12 апреля 1961 г. вывод на околоземную орбиту первого в мире пилотируемого космического корабля с летчиком-космонавтом СССР Юрием Гагариным на борту

Объектами исследования в книге являются ракеты-носители (РН) космических аппаратов (КА) с жидкостными ракетными двигателями (ЖРД). Однако основные результаты этих исследований, относящиеся к учету подвижности компонентов жидкого топлива, применимы и к активным участкам полета КА. В то же время многие результаты, касающиеся учета упругости корпуса, применимы к РН с двигателями на твердом топливе. Тем не менее основным объектом анализа считаются в дальнейшем именно жидкостные РН.

Рассмотрим некоторые особенности этих объектов. На рис. 0.1 показана советская РН «Восток», которая 12 апреля 1961 г. вывела на околоземную орбиту первый в мире пилотируемый космический корабль с летчиком-космонавтом СССР Юрием Гагариным на борту.

На рис. 0.1 изображена советская РН «Восток», которая 12 апреля 1961 г. вывела на околоземную орбиту первый в мире пилотируемый космический корабль с летчиком-космонавтом СССР Юрием Гагариным на борту. Эта же РН обеспечила впоследствии запуск ряда отечественных пилотируемых объектов.

Характерной особенностью РН «Восток» является пакетная компоновка первой ступени (центральный блок и четыре боковых, имеющих отдельные двигательные установки). При старте запускаются сразу двигатели как центрального, так и боковых блоков. Вторая ступень, продолжающая полет после отделения боковых блоков, имеет tandemную компоновку (вторая и третья ступени расположены последовательно). Исполнительными элементами системы стабилизации являются специальные управляемые двигатели.

На рис. 0.2 изображена американская РН «Сатурн-5» комплекса «Сатурн-Аполлон». Эта жидкостная ракета обеспечила выполнение программы пилотируемых полетов к Луне и высадки человека на Луну. Эта РН имеет tandemную компоновку трех ступеней. Одной из ее особенностей является использование мар-

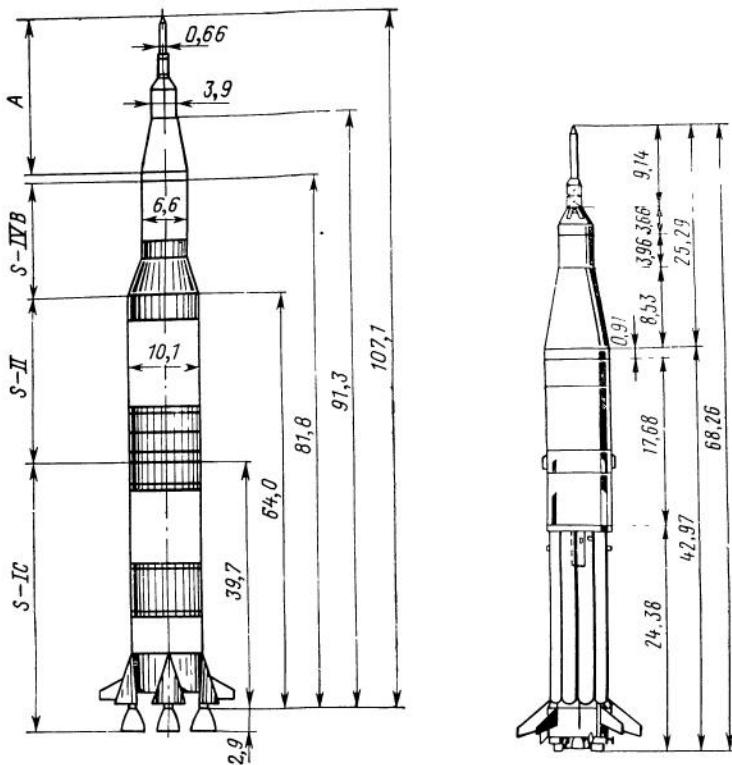


Рис. 0.2. Американская ракета-носитель «Сатурн-5», обеспечившая вывод на орбиту полета к Луне космического корабля «Аполлон-11», высадившего впервые 20 июля 1969 г. на поверхность Луны космонавтов Нейла Армстронга и Эдварда Олдрина (размеры на рисунке в метрах)

Рис. 0.3. Американская ракета-носитель «Сатурн-1В», использованная для доставки экипажей орбитальной космической лаборатории «Скайлэб» и вывода на околоземную орбиту космического корабля «Аполлон» в рамках совместного советско-американского эксперимента по программе «Союз» — «Аполлон» в 1975 г. (размеры на рисунке в метрах)

шевых двигателей для управления в плоскостях тангажа и рыскания и применение криогенного топлива, на оптимальность которого указал впервые К. Э. Циолковский (жидкий кислород и жидкий водород).

На рис. 0.3 приведена американская РН «Сатурн-1В», являющаяся модификацией РН «Сатурн-1». Обе они имеют пакетную компоновку. РН «Сатурн-1В» используется для вывода на око-

лоземную орбиту пилотируемых кораблей «Аполлон» без лунной кабины.

На рис. 0.4 показаны ракеты-носители США на базе ракет «Атлас» и «Титан» с крылатым космическим аппаратом X-24 типа гиперзвукового планера. Проектирование этих комплексов было прекращено в 1963 г., но они показательны как некоторые из возможных компоновок РН с крылатой последней ступенью. В последние годы широко освещаются в печати проекты транспортных космических систем многоразового использования с возвращаемыми крылатыми ступенями. Один из вариантов такой системы представляет собой горизонтально-стартующую ракету с крылатыми ступенями, совершающими после выработки топ-

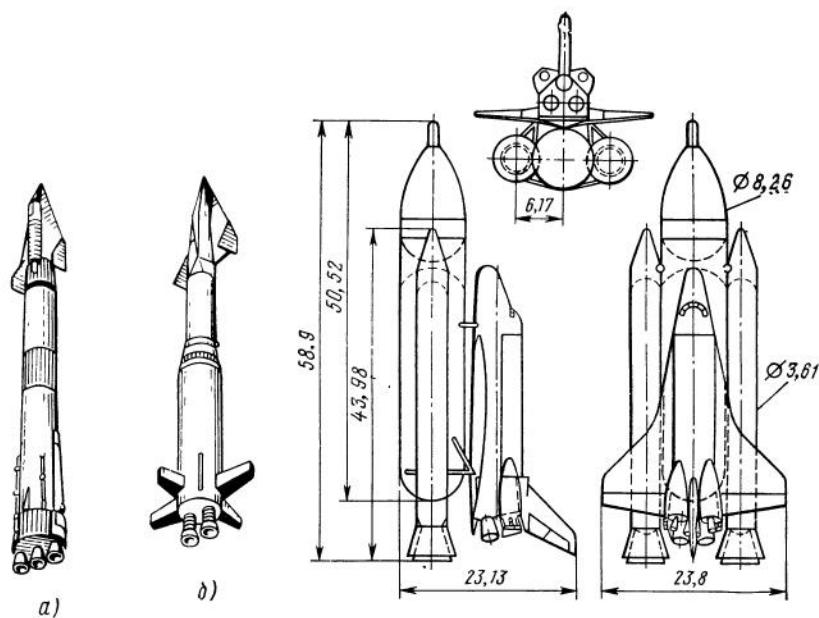


Рис. 0.4. Варианты компоновок ракет-носителей на базе баллистических ракет «Атлас» (а) и «Титан-2» (б) с крылатым объектом (гиперзвуковым планером) X-24 (проект)

Рис. 0.5. Проектируемая американская транспортная система многоразового использования с возвращаемой крылатой второй ступенью (размеры на рисунке в метрах)

лива «самолетную посадку». В силу ряда причин конструктивного и экономического характера этот вариант не вышел пока из стадии предварительных проработок. Вариант вертикально-стартующей транспортной системы, показанный на рис. 0.5, разрабатывается в США на уровне национальной программы, кото-

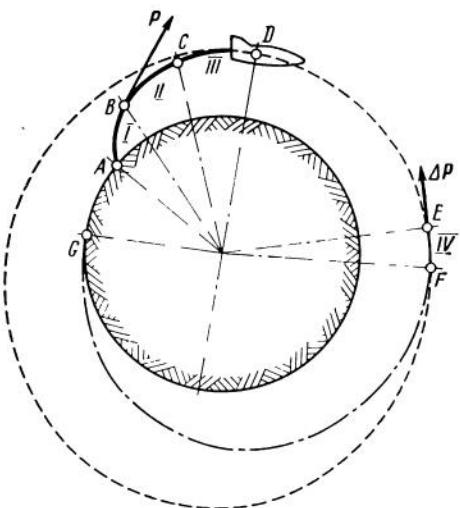


Рис. 0.6. Схема выводения орбитального КА:

I, II, III — траектории первой, второй и третьей ступеней РН (*P* — тяга ЖРД); *IV* — траектория КА на участке работы тормозной двигательной установки (ΔP — ее тяга)

рая должна завершиться созданием в начале восьмидесятых годов системы, допускающей двадцатикратное использование твердотопливных ускорителей первой ступени и пятисоткратное использование крылатой последней ступени (с «самолетной посадкой») при выводе на низкую геоцентрическую орбиту порядка 30 т полезного груза. Навесной топливный бак с жидким кислородом и жидким водородом используется при этом только один раз.

Типичная траектория выводения на орбиту объектов, представленных на рис. 0.1—0.5, показана на рис. 0.6, где видны как активные, так и пассивные участки полета всех ступеней. На этом же рисунке показана схематически траектория снижения крылатой последней ступени (см. рис. 0.5) после схода с геоцентрической орбиты под влиянием тормозного импульса.

Рассмотрим некоторые принципиальные особенности РН, накладывающие отпечаток на динамические свойства замкнутой системы корпус — жидкость — автомат стабилизации (АС) — двигательная установка (ДУ).

1. Наличие на борту значительных масс жидкого топлива (до 85—90% общей массы), имеющих свободные поверхности.

2. Упругость корпуса в целом, представляющего собой сложную пространственную тонкостенную конструкцию, и отдельных его элементов.

3. Нестационарность движения на активном участке траектории, выражаяющаяся в существенном изменении массы, моментов инерции, центровки, а также скорости полета, скоростного напора, числа **М** и как следствие — резком изменении возмущающих воздействий.

4. Наличие нелинейных факторов, связанных как с системой

управления (например, нелинейность характеристик сервопривода), так и с самим объектом регулирования (нелинейность диссипативных сил при колебаниях жидкости в баках с конструктивными элементами типа ребер, колец и т. д.).

5. Специфический характер истинного движения на активном участке, носящего характер малых колебаний относительно некоторого программного движения; частоты этих колебаний таковы, что параметры программного движения мало изменяются на протяжении наибольшего из их характерных периодов.

6. Наличие системы управления, стремящейся уничтожить рассогласование между истинным и программным положением объекта в плоскостях стабилизации (тангажа, рыскания, крена), так что соответствующие кинематические параметры, характеризующие это рассогласование, всегда остаются малыми величинами.

7. Малость управляющих и аэродинамических сил, связанных с реализацией программного движения, по сравнению с тягой маршевых двигателей в случае баллистических РН.

8. Фильтрация автоматом стабилизации и двигательной установкой с высоким коэффициентом подавления гармонических возмущений, поступающих на их входы (угловые перемещения корпуса, давление компонентов топлива на входах в насосы), начиная с некоторой характерной частоты.

9. Наличие осевой симметрии объекта, массовой и геометрической или, по крайней мере, одной плоскости симметрии.

Механические системы, соответствующие рассматриваемым объектам, в свою очередь, характеризуются некоторыми специфическими особенностями, общими для всех объектов этого класса. Важнейшими из них являются следующие.

1. Неконсервативность из-за наличия автомата стабилизации и двигательной установки, а также диссипативных сил.

2. Наличие большого числа дополнительных степеней свободы, обусловленных подвижностью жидкости в баках и магистралях и упругостью корпуса.

3. Малость диссипации энергии в системе за период колебаний по сравнению с ее полной энергией.

4. Сложный характер влияния диссипативных сил, которые в некоторых случаях могут усиливать динамическую неустойчивость системы (из-за наличия дополнительных позиционных неконсервативных сил).

5. Способность системы резко изменять динамические свойства (переход от устойчивости к неустойчивости) при малых вариациях параметров.

6. Переменность коэффициентов уравнений возмущенного движения системы, а также их правых частей, что вносит некоторую неоднозначность в определение устойчивости.

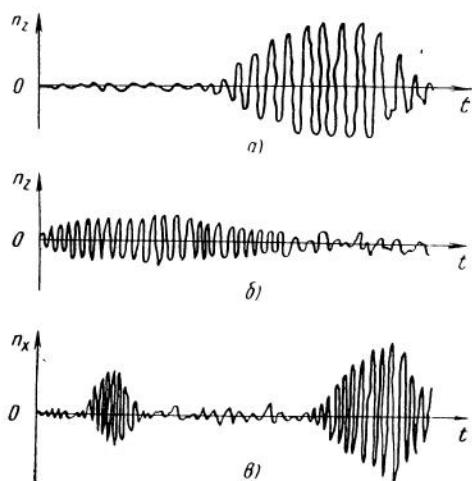
Перечисленные особенности определяют возможность появления сложных форм динамической неустойчивости РН на актив-

ных участках полета, связанных с подвижностью жидкости в баках и магистралях и упругими деформациями корпуса, порождающими паразитные обратные связи в системе корпус—ДУ—АС. Существует глубокая аналогия между этими формами неустойчивости и такими классическими ее типами, как изгибно-крутильный флаттер крыла самолета, изгибно-рулевой флаттер фюзеляжа, «шимми» носового колеса самолета и т. д. Все эти явления объединяет между собой наличие неконсервативных как возбуждающих (подъемная сила крыла или оперения, тяга маршевого или управляющих ЖРД и т. д.), так и диссипативных сил (аэродинамические демпфирующие силы, силы трения жидкости о стенки бака и др.), а также нескольких степеней свободы у системы объект — регулятор. В примерах, перечисленных выше, это изгиб и кручение крыла, изгиб фюзеляжа и отклонение руля высоты, поворот вокруг оси амортизационной стойки носового колеса и боковое смещение пневматика, волновые движения на поверхности жидкости в баках фиксилителя и горючего и плоское движение корпуса ракеты как твердого тела, изгиб или кручение корпуса и соответствующее отклонение маршевых или управляющих двигателей, продольные деформации корпуса и перемещение жидкости в топливных магистралях.

Наличие дополнительных степеней свободы способствует формированию в замкнутой системе связей, обеспечивающих перекачку энергии движителя в колебания корпуса и его элементов. Если работа возбуждающих сил за период колебаний превышает работу диссипативных сил, то возникает явление, которое носит в литературе название динамической неустойчивости. Это явление для объектов ракетно-космической техники не менее опасно, чем для объектов авиационной техники, так как неблагоприятно, а иногда катастрофически сказывается на функционировании

Рис. 0.7. Типичное изменение перегрузки при динамической неустойчивости РН по данным телеметрии

a — боковая перегрузка при неустойчивости на частотах колебаний жидкости в баках, *б* — боковая перегрузка при неустойчивости на частоте первого тона упругих поперечных колебаний корпуса; *в* — колебательная составляющая продольной перегрузки при неустойчивости, связанной со сближением частоты второго, а затем первого тона упругих продольных колебаний корпуса и частоты колебаний жидкости в более длинной из топливных магистралей



бортовой аппаратуры, работоспособности экипажа и прочности конструкции, даже если в системе установится вследствие влияния различных нелинейных факторов (падения коэффициента усиления АС, увеличения коэффициента демпфирования колебаний жидкости и т. д.) предельный цикл с ограниченными амплитудами колебаний всех обобщенных координат.

На рис. 0.7 показано типичное изменение некоторых характерных параметров (нормальная и боковая перегрузки в одном из сечений корпуса) при возникновении динамической неустойчивости РН на частотах собственных колебаний жидкости в одном из баков и на частотах поперечных или продольных колебаний корпуса (одна из доминирующих гармоник).

На рис. 0.8 и 0.9 приведены реальные записи телеметрии на американских РН «Сатурн-1» и «Сатурн-5», заимствованные из работ [23, 32]. В первом случае наблюдается динамическая неустойчивость в канале крена, связанная с подвижностью горючего в боковых блоках первой ступени, имеющей пакетную конструкцию. Во втором случае имеет место неустойчивость продольных колебаний в конце активного участка первой ступени (явление POGO по американской терминологии). На рис. 0.9 приведеныгибающие колебания осевой перегрузки и давления на входе в насос окислителя и растянутая по времени запись колебаний давления в камере сгорания одного из двигателей.

Во всех этих случаях система динамически неустойчива «в малом» на некоторых участках траектории. Даже такая локальная неустойчивость крайне нежелательна. В частности, она может быть и непосредственной причиной потери устойчивости, связанной с превышением допустимых углов прокачки гироприборов, предельных углов отклонения управляющих органов или попаданием в область кавитации высокооборотных насосов ЖРД при колебаниях входного давления компонентов топлива. Решение задачи предотвращения или, по крайней мере, локализации динамической неустойчивости объектов ракетно-космической техники является весьма сложными и складывается из многих компонентов, из которых важнейшими являются следующие.

1. Выбор адекватного (в выбранном диапазоне частот) механического аналога рассматриваемого объекта и создание его математической модели, т. е. разработка динамической схемы объекта.

2. Определение параметров динамической схемы (частоты собственных колебаний, обобщенные массы, коэффициенты демпфирования и т. д.) на основе теоретического анализа, экспериментов на физически и конструктивно подобных моделях, натурных динамических испытаний корпуса и стендовых испытаний ЖРД.

3. Исследование динамических свойств проектируемого

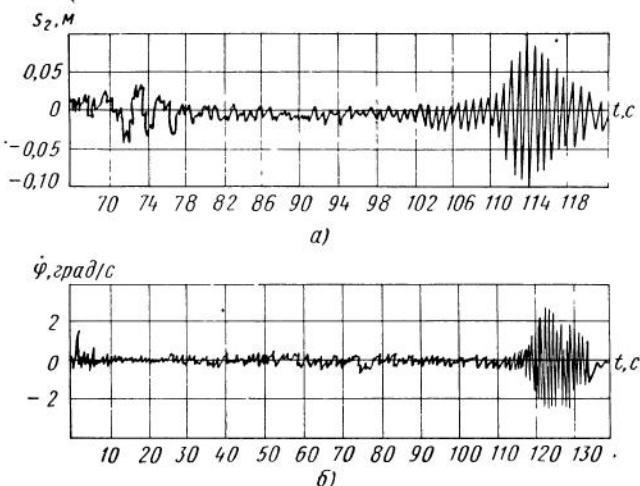


Рис. 0.8. Динамическая неустойчивость по крену первой ступени ракеты-носителя пакетной схемы РН «Сатурн-1», связанная с подвижностью жидкости в периферийных баках, по данным телеметрии:
а — уровень окислителя O_2 в одном из периферийных баков; б — угловая скорость крена

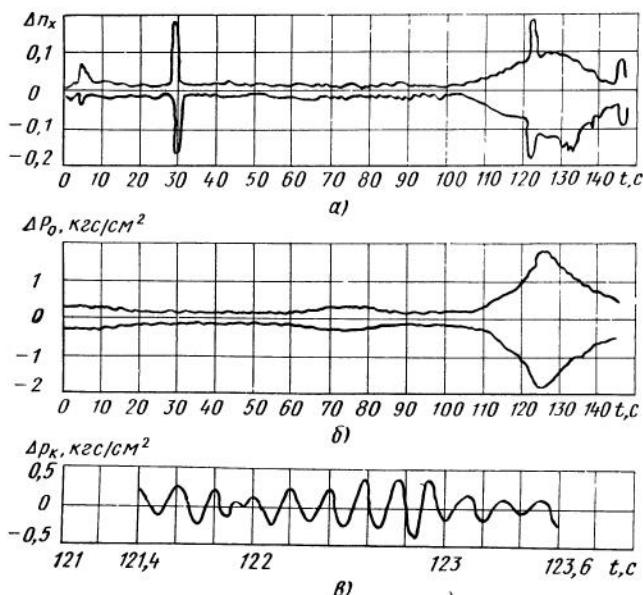


Рис. 0.9. Динамическая неустойчивость в направлении продольной оси (POGO) ракеты-носителя tandemной схемы РН «Сатурн-5» AS-502 по данным телеметрии:

а — огибающая колебательной составляющей осевой перегрузки (в долях g); б — огибающая колебательной составляющей давления на входе в насос окислителя, в — колебательная составляющая давления в камере сгорания

объекта как объекта регулирования и изыскание возможных путей изменения этих свойств в благоприятном направлении.

4. Проектирование системы стабилизации и исследование и обеспечение динамической устойчивости замкнутой системы во всех эксплуатационных режимах при полном составе возмущений на основе расчетов областей устойчивости и моделирования возмущенного движения на ЭВМ.

5. Сравнение с результатами летно-конструкторских испытаний и внесение необходимых коррективов как в динамическую схему объекта, так и в параметры АС.

Книга посвящена главным образом первым трем вопросам, составляющим в теоретическом аспекте содержание соответствующих трех частей. Экспериментальный аспект освещается, в частности, в монографиях [14, 15].

В конце каждой части приведен список основной литературы, относящейся к ее содержанию. Работы более общего характера приведены после «Введения».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К. А., Рапопорт И. М. Динамика ракет. М., «Машиностроение», 1969, 378 с.
2. Афаньев И. В., Колбин Н. М., Серебрянский Н. П. Динамика конструкции летательных аппаратов М., «Машиностроение», 1972, 415 с.
3. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Госгиздат, 1956, 600 с.
4. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961, 339 с.
5. Гладкий В. Ф. Динамика конструкций летательных аппаратов. М., «Наука», 1969, 496 с.
6. Гольденблат И. И. Современные проблемы колебаний и устойчивости инженерных сооружений М., Стройиздат, 1947, 133 с.
7. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1948, 59 с.
8. Ишинский А. Ю. Механика гирроскопических систем М., АН СССР, 1963, 482 с.
9. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М., «Машиностроение», 1969, 298 с.
10. Колесников К. С. Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем М., «Машиностроение», 1971, 260 с.
11. Колесников К. С., Сухов В. Н. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. М., «Машиностроение», 1974, 267 с.
12. Меркин Д. Р. Гирроскопические системы М., ГИТТЛ, 1956, 299 с.
13. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Некоторые вопросы анализа динамической устойчивости систем с деформируемыми элементами — «Труды III Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике (обзорные доклады)», вып I, М., «Наука», 1965, с. 126—130
14. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., «Машиностроение», 1968, 532 с.
15. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М., «Машиностроение». 1971, 563 с.
16. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость М., «Наука», 1965, 439 с.

17. **Моисеев Н. Н., Петров А. А.** Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости ВЦ АН ССР, 1966, 269 с.
18. **Николаенко Н. А.** Динамика и сейсмостойкость конструкции несущих резервуаров М, Стройиздат, 1963, 156 с
19. **Пановко Я. Г., Губanova И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. М, «Наука», 1967, 420 с
20. **Рокар И.** Неустойчивость в механике М, ИЛ, 1959, 287 с
21. **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. М, «Мир», 1971, 191 с
22. **Шаталов А. С., Топчев Ю. И., Кондратьев В. С.** Летательные аппараты как объекты управления М, «Машиностроение», 1972, 239 с
23. **Abramson H. N. (Ed)** The dynamic behavior of liquids in moving containers with applications to space vehicle technology. NASA SP-106, 1966, Washington, D. C., 467 p.
24. **Astleford W. J., Chu Wen-Hwa, Dodge F. T.** Propellant dynamic problems in space shuttle vehicles. NASA CR-111802, 1970, Sw. RI San Antonio Houston, 66 p.
25. **Bauer H. F.** Fluid oscillations in the containers of a space vehicles and their influence upon stability. NASA TR-187, 1964, Washington, D. C., 138 p.
26. **Cooper R. M.** Dynamics of liquids in moving containers. — «AARS Journal», 1960, vol. 30, N. 8, p. 725—729.
27. **Fontenot L. L** Dynamic Stability of space vehicles, vol. VII, Dynamics of liquid in fixed and moving containers. NASA CR-941, 1968, Washington, D. C., 143 p.
28. **Geissler E. D.** Problems of attitude stabilization of large guided missiles. — «Aerospace Engineering», 1960, Oct., vol. 19, p. 24—29, 68—72.
29. **Hibben R. D.** Fuel slosh poses major problems. — «Aviation Week», 1964, Jun. 15, p. 58—71.
30. **Hunt R. M., Hung F. C.** Dynamic problems in launch vehicles and spacecraft. AIAA 5-th Annual Structures and Materials Conference, Palm Springs, California, 1964, Apr., p. 461—470.
31. **Ringland R. F.** Dynamic stability of space vehicles, vol. X, Exit stability, NASA CR-944, 1968, Washington, D. C., 158 p.
32. **Worlund A. L., Hill R. D., Murphy G. L.** Saturn V longitudinal oscillation (POGO) solution. — «AIAA Paper», N. 69—548. 7 p.

Основные возмущающие факторы, определяющие динамическую схему обтекания:

- ① *Подвижность жидкости в баках и магистралях*
- ② *Упругость корпуса*



Часть I

ДИНАМИЧЕСКАЯ СХЕМА ОБЪЕКТА.

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

*Ни одна неодушевленная вещь
не движется сама собою, но движе-
ние ее производится другими.*

Леонардо да Винчи.
Избранные произведения.

Справедливо ли это утверждение Леонардо? «Нет», — скажет читатель, так как оно противоречит первому закону Ньютона (открытыму около двухсот лет спустя) и будет, конечно, прав, поскольку Леонардо да Винчи не сделал никаких оговорок о характере движения.

Однако применительно к «возмущенному движению» его высказывание при правильном истолковании справедливо. Действительно, движение такого рода отсутствует, когда нет возмущений, а последние порождаются либо начальными условиями, созданными извне другими телами, либо возмущающими силами, внешними по отношению к рассматриваемой системе.

Выбрать динамическую схему ракеты-носителя космических аппаратов или самого космического аппарата, т. е. подобрать подходящий механический аналог и представить его на языке дифференциальных уравнений, правильно (в главных чертах) описывающих возмущенное движение исходного объекта, — трудная задача. В основном это связано с необходимостью учета тех главных возмущающих факторов, о которых говорилось во «Введении» (динамические факторы, связанные с работой двигательной установки и автомата стабилизации, аэродинамические возмущения, подвижность жидкости в баках и магистралях, упругость корпуса). Решению этой задачи посвящена I часть книги.

ГЛАВА 1

ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ ЕГО РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

1.1. Объект регулирования

Рассмотрим несколько подробнее некоторые конструктивные особенности РН как объектов регулирования.

На рис. 1.1 представлена первая ступень РН «Сатурн-5» и схема создания управляющих моментов в плоскостях стабилизации посредством отклонения периферийных маршевых двигателей (первая и вторая ступени) или отклонения в двух плоскостях центрального двигателя и антисимметричного отклонения специальных управляющих двигателей для создания момента по крену (третья ступень).

На рис. 1.2—1.4, заимствованных из книги [63], представлены более подробно конструктивно-компоновочные схемы каждой из трех ступеней этого носителя.

Важными в свете задач, рассматриваемых ниже, конструктивными особенностями РН такого класса являются несущие топливные баки, выполненные в виде тонкостенных оболочек. Эти баки на верхних ступенях или КА могут быть и подвесными. Нижний отсек, связанный с опорными пятами, и межбаковые отсеки, воспринимающие значительные сжимающие нагрузки, представляют собой обычно более мощные конструкции, подкрепленные развитым силовым набором, что дает основания считать в первом приближении контур их поперечного сечения недеформируемым.

Усилия от маршевых двигателей обычно передаются на корпус через достаточно жесткую ферменную конструкцию, упирающуюся в силовое кольцо, играющее роль усиленного шпангоута. Топливные магистрали, подходящие к каждому из ЖРД, начинаются вблизи полюса соответствующего днища и заканчиваются входом в насос окислителя или горючего. На концах топливных магистралей имеются сильфоны, разгружающие стенки магистралей от дополнительных нагрузок, связанных с деформациями корпуса и их собственными температурными деформациями. Перечисленные обстоятельства имеют важное значение для выбора рациональной динамической схемы корпуса.

Не менее важное значение для выбора этой схемы имеет характер движения рассматриваемых объектов на активном участке полета. Это движение можно представить себе в виде некоторого программного движения с достаточно плавно изменяющимися параметрами, на которое наложено дополнительное

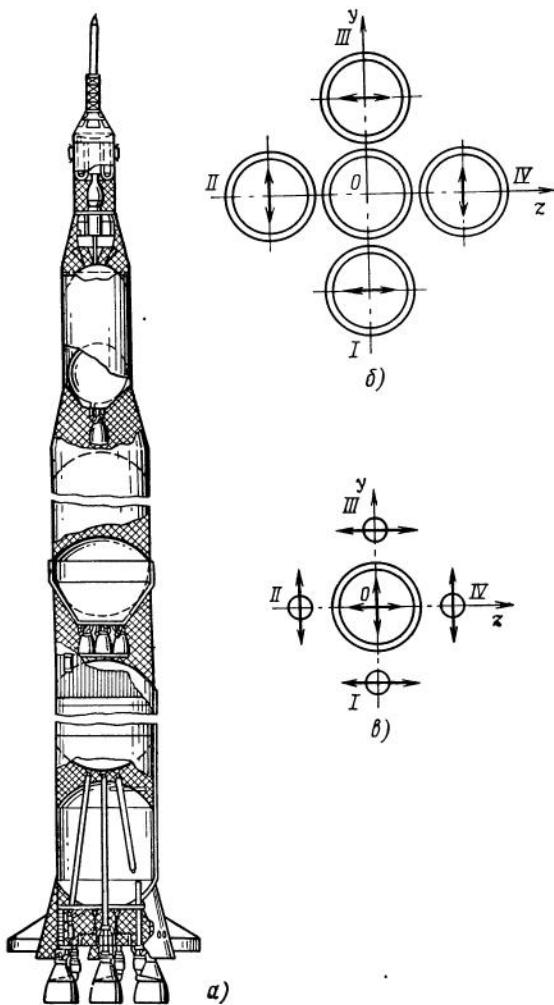


Рис. 1.1. Американская РН «Сатурн-5»:
а — общая компоновка; б — схема отклонения управляемых органов первой и второй ступеней; в — схема отклонения управляемых органов третьей ступени

движение, характеризуемое «малыми» отклонениями соответствующих параметров от их программных значений. В результате независимо от метода задания программы истинное движение мало отличается от программного.

Дело, однако, усложняется тем, что если в программном движении можно обычно трактовать корпус как жесткое твердое тело переменной массы, а иногда просто как материальную точку

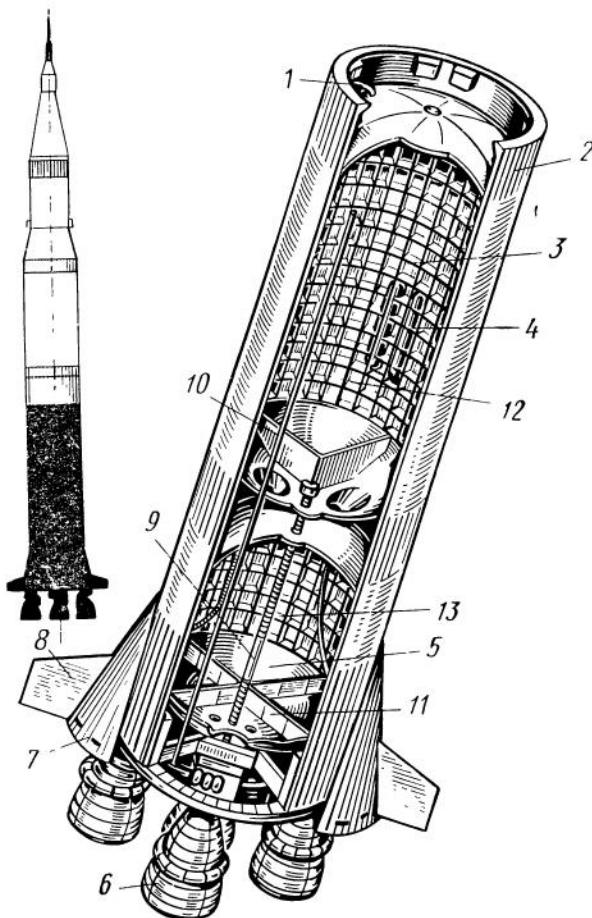


Рис. 1.2. Конструктивно-компоновочная схема отделяющейся части первой ступени (S-IC) РН «Сатурн-5»:

1 — дренаж окислителя; 2 — передняя юбка; 3 — бак окислителя (жидкий кислород); 4 — баллоны со сжатым гелием; 5 — бак горючего (RP-1); 6 — ЖРД F-1; 7 — обтекатель периферийного двигателя F-1; 8 — киль; 9 — магистраль окислителя; 10, 11 — крестообразные демпферы колебаний окислителя и горючего; 12, 13 — кольцевые демпферы колебаний окислителя и горючего

переменной массы, то в возмущенном движении, носящем характер короткопериодических колебаний, приходится учитывать подвижность жидкости в баках и магистралях и упругость элементов конструкции корпуса и корпуса в целом. Это и порождает весь комплекс специфических проблем, связанных с математическим описанием корпуса как объекта регулирования, представляющего собой сложную деформируемую систему. При этом в качестве регулятора выступает как АС (движение в плоскостях

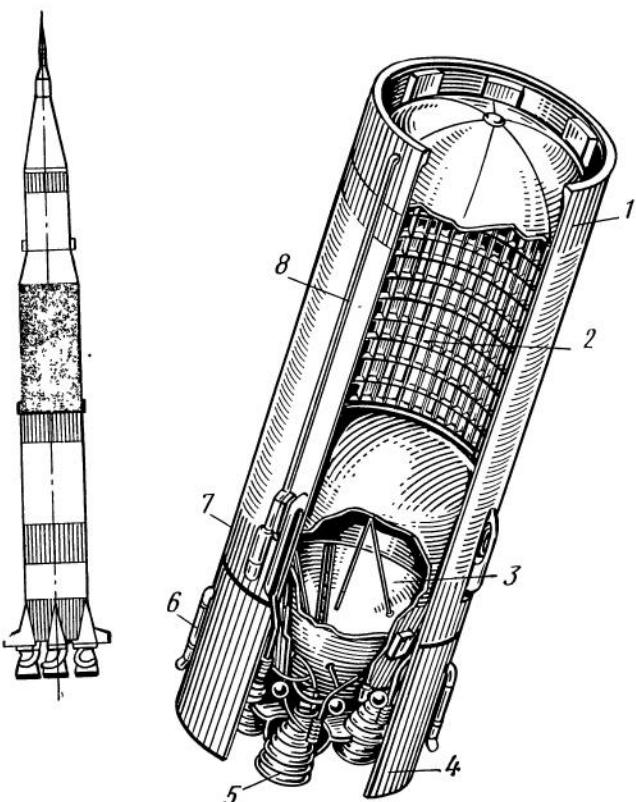


Рис. 1.3. Конструктивно-компоновочная схема отделяющейся части второй ступени (S-II) РН «Сатурн-5»:

1 — передняя юбка; 2 — бак горючего (жидкий водород); 3 — бак окислителя (жидкий кислород); 4 — задний переходник; 5 — ЖРД J-2; 6 — ракеты с тягой 9980 кг каждая, обеспечивающие разделение ступеней; 7 — задняя юбка; 8 — гаргрот

стабилизации), так и ЖРД (движение в направлении продольной оси корпуса, а иногда и в плоскостях стабилизации).

Эта схема может (и должна!) быть различной для различных объектов (РН или КА) на различных этапах исследования (предварительная проработка или эскизный проект) при решении различных задач (динамическая устойчивость или, например, анализ акустических нагрузок). При этом необходимо учесть все факторы, играющие существенную роль в данной конкретной задаче, и в то же время не перегрузить расчетную модель излишними подробностями, делающими ее неоправданно сложной. О сложности задачи обоснования и последующего анализа динамической схемы дает представление тот факт, что, например, возмущенное движение первой ступени РН «Сатурн-5» в плоскости рыскания или тангажа с учетом одной только сте-

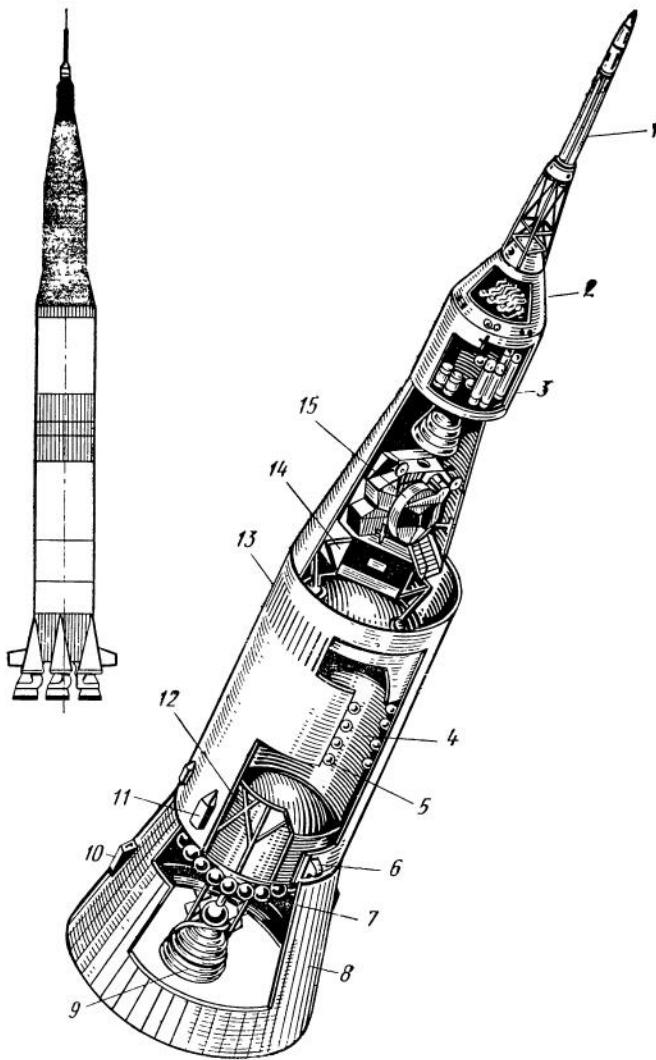


Рис. 1.4. Конструктивно-компоновочная схема третьей ступени (S — IVB) РН «Сатурн-5»:

1 — система аварийного спасения; 2 — командный отсек корабля «Аполлон»; 3 — служебный отсек корабля «Аполлон»; 4 — бак жидкого водорода; 5 — сферические баллоны с охлажденным сжатым гелием; 6 — ракеты, обеспечивающие разделение ступеней; 7 — баллоны с неохлажденным сжатым гелием системы наддува; 8 — задний переходник; 9 — двигатель J-2; 10 — тормозные ракеты, обеспечивающие отделение переходника; 11 — вспомогательная двигательная установка; 12 — бак жидкого кислорода; 13 — передняя юбка; 14 — посадочная ступень лунной кабины корабля «Аполлон»; 15 — взлетная ступень лунной кабины корабля «Аполлон»

пени свободы у жидкости в каждом из шести баков и первых четырех форм упругих колебаний корпуса описывается системой уравнений 26-го порядка, не считая порядка оператора управления (2 степени свободы как твердое тело + 1 степень свободы двух синхронно отклоняемых маршевых двигателей + 6 степеней свободы жидкости + 4 степени свободы вследствие упругости корпуса).

Следует подчеркнуть, что подвижность жидкости и упругость корпуса РН оказывают решающее влияние на структуру и параметры АС, а также на некоторые классы динамических нагрузок. Это приводит к тому, что разработка адекватной динамической схемы корпуса РН является одной из центральных задач в общей проблеме обеспечения динамической устойчивости РН с ЖРД.

Однако эта задача пока еще не допускает полной формализации, и решение ее требует эвристического подхода, т. е. является искусством, а не ремеслом. Как и в каждом искусстве, здесь имеются свои руководящие идеи. Одной из важнейших является исследование частотного спектра объекта и сравнение его с полосой пропускания АС и ДУ, замыкающих систему.

На рис. 1.5 приведены в качестве примера достаточно типичные для мощных РН части спектров частот всех трех степеней РН «Сатурн-5», укладывающиеся в диапазон от 0 до 15 Гц [68, 69]. Этот диапазон приблизительно соответствует полосе пропускания АС и ЖРД, и можно считать, что в динамическую схему каждой из степеней, предназначенную для исследования динамической устойчивости, в принципе следует включить все элементы, ответственные за соответствующий отрезок спектра. Если фильтрующие свойства АС и ЖРД как регуляторов таковы, что на частоте, большей некоторой частоты f_{\max} (на рис. 1.5 $f_{\max} = 15$ Гц), система практически размыкается, то это обеспечит полную адекватность динамической схемы при анализе динамической устойчивости замкнутой системы.

На предварительных стадиях исследования можно пойти на существенные упрощения, используя, например, при исследовании запасов статической управляемости и реакции системы на долгопериодические возмущения модель твердого, абсолютно жесткого тела. Однако при выборе характеристик устройств, ограничивающих подвижность жидкости в баках, нельзя не учитывать волновые движения на свободной поверхности жидкости, а при выборе рационального расположения датчиков АС — упругость корпуса.

Таким образом, сфера применимости гипотез «затвердения» жидкости или «абсолютной жесткости» корпуса имеет ограниченный характер. При исследовании в полном объеме динамической устойчивости необходимо исходить из более полной динамической схемы, учитывающей либо подвижность жидкости, либо упругость корпуса, либо и то и другое одновременно. Последнее, безусловно, относится к случаю, когда спектры частот домини-

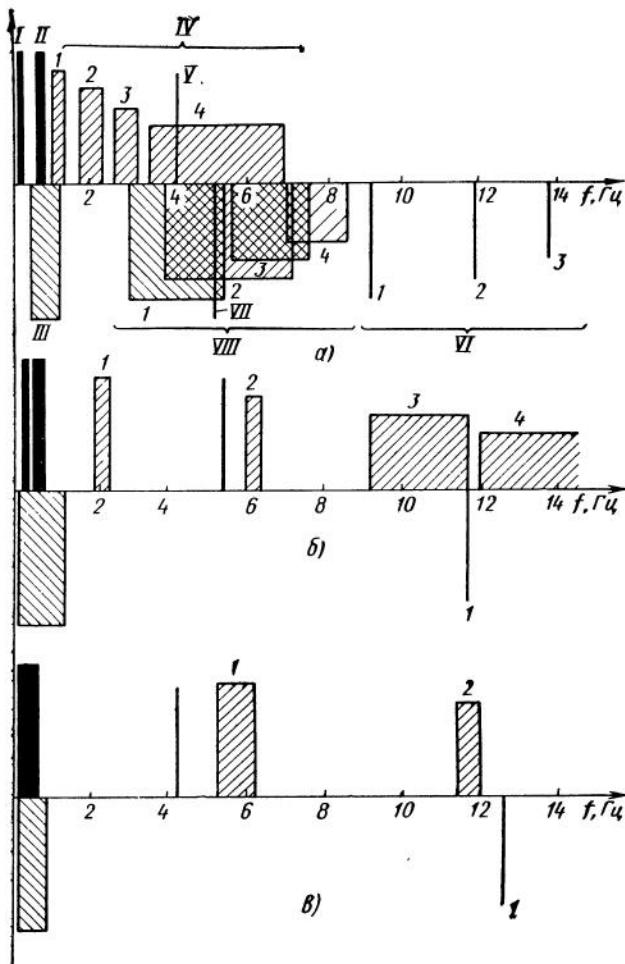


Рис. 1.5. Низкочастотная часть спектра частот РН «Сатурн-5»:

a — первой ступени; *b* — второй ступени; *c* — третьей ступени;
I — ракета как твердое жесткое тело с автоматом стабилизации в плоскости рыскания (тангажа); *II* — ракета как твердое жесткое тело с автоматом стабилизации в плоскости крена; *III* — компоненты топлива в баках отделяющейся части (первый тон); *IV* — корпус, поперечные колебания (*1*, *2*, *3*, *4* — номер тона); *V* — маршевый двигатель; *VI* — корпус, крутильные колебания (*1*, *2*, *3* — номер тона); *VII* — жидкость в магистрали окислителя (до доработки магистрали); *VIII* — корпус, продольные колебания (*1*, *2*, *3*, *4* — номер тона)

рующих гармоник жидкости и корпуса пересекаются, как, например, в конце активного участка первой ступени, где сближаются частота первого тона продольных колебаний корпуса и основная частота колебаний столба жидкости в магистрали окислителя (частота порядка 5 Гц, показанная на рис. 1.5, соответствует первым летным вариантам РН «Сатурн-5» до конструктивной доработки этой магистрали).

Одной из важных особенностей рассматриваемого класса объектов, отмеченной выше, является сравнительная малость диссипативных сил, т. е. их работы за период колебаний. Это относится в первую очередь как раз к собственным колебаниям жидкости в баках и магистралях и собственным упругим колебаниям корпуса, продольным, поперечным и крутильным. Следствием этого является возможность рассчитывать частоты и присоединенные массы жидкости и частоты и формы собственных упругих колебаний корпуса без учета демпфирования [40].

Таким образом, возможности рационального упрощения динамической схемы достаточно велики, но их реализация требует более детального анализа физических предпосылок аксиоматики, связанной с учетом подвижности жидкости и упругости корпуса, при составлении динамической схемы корпуса РН (см. разд. 1.3 и 1.4).

1.2. Регулятор

Рассматривая АС и ЖРД как регуляторы, будем полагать, что входной информацией для АС является рассогласование относительно программных значений обобщенных координат и скоростей некоторых сечений корпуса (для ЖРД — давлений на входе в насосы окислителя и горючего), а выходной — отклонения управляющих органов или изменение тяги соответственно.

Одновременно примем, что как сервопривод АС, так и ЖРД являются собственно устойчивыми, т. е. обеспечена динамическая устойчивость системы корпус — АС — ДУ в стендовых условиях, причем спектры соответствующих собственных частот не пересекаются со спектром собственных частот объекта регулирования в диапазоне $f < f_{\max}$. (О собственной динамической неустойчивости ЖРД см. работы [21, 8]). Примем далее, что амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики АС и ЖРД достаточно гладкие, т. е. мало меняются при малом приращении частоты, и что корни характеристического уравнения объекта (т. е. разомкнутой системы без регулятора) с мнимыми частями, близкими к собственным частотам колебаний жидкости в баках и магистралях и частотам упругих колебаний корпуса, мало меняются при замыкании системы соответствующим регулятором, что накладывает некоторые ограничения сверху на его амплитудно-частотную характеристику. Правомерность этого ограничения непосредственно вытекает из структуры АС и ЖРД как регуля-

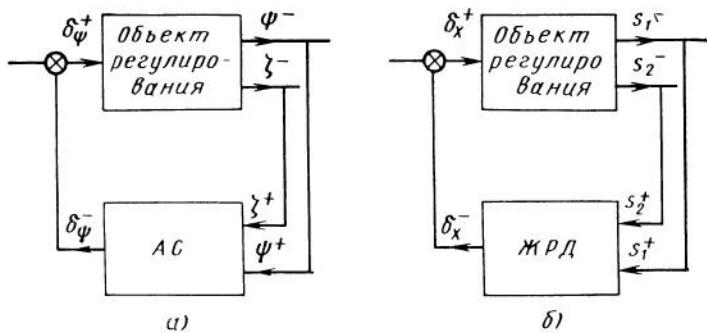


Рис. 1.6. Функциональные схемы замкнутой системы объект — регулятор:
а — при движении в плоскости поиска; б — при движении в направлении продольной оси

торов с наблюдаемыми координатами, оговоренными выше. Если учесть, еще относительную малость диссипации энергии за период колебаний на любой из этих частот, то можно утверждать, что вещественные части соответствующих корней характеристического уравнения разомкнутой системы всегда много меньше минимых. При предположениях, сделанных относительно регулятора, будь то АС или ЖРД, это позволяет, с одной стороны, заменить в соответствующей области характеристических чисел передаточную функцию регулятора частотной характеристикой (вследствие малости их вещественных частей) и, с другой стороны, широко использовать методы теории возмущений (вследствие слабого влияния регулятора на объект в диапазоне частот его собственных колебаний как упругого тела с жидкостью).

На рис. 1.6 представлены функциональные схемы замкнутых систем объект регулирования — АС (движение в плоскости поиска) и объект регулирования — ЖРД (движение в направлении продольной оси) [5, 25, 30].

Системы угловой стабилизации в плоскостях тангла (УСТ), поиска (УСП) и крена (УСК) обеспечивают близость истинного углового положения корпуса к программному, системы нормальной стабилизации (НС) и боковой стабилизации (БС) — близость истинного движения центра масс (метацентра) к программному.

Наконец, ДУ в случае устойчивости соответствующей замкнутой системы, как минимум, не нарушает устойчивости программного движения в направлении продольной оси. Верхний индекс «+» на рис. 1.6 соответствует входному сигналу, индекс «—» — выходному.

Автомат стабилизации и двигатель как регуляторы могут быть описаны следующими уравнениями:

$$\delta_\theta + \delta_\theta^* = \mathcal{L}_1'(\theta^\circ) + \mathcal{L}_2'(\eta^\circ); \quad (1.1)$$

$$\delta_\psi = \mathcal{L}_1'(\psi^\circ) - \mathcal{L}_2'(\zeta^\circ);$$

$$\delta_\varphi = \mathcal{L}_3'(\varphi^\circ). \quad (1.2)$$

где \mathcal{L}_n ($n=1, 2$), \mathcal{L}'_n ($n=1, 2, 3$) — нелинейные операторы, допускающие линеаризацию в некотором диапазоне частот; $\delta_x = \frac{\Delta P}{P^*}$ — приращение тяги маршевого двигателя, отнесенное к номинальной тяге на данной высоте; $s_n = \left(\frac{p}{p^*} \right)_n$ — приращение давления на входе в насос n -го компонента топлива, отнесенное к статическому давлению того же компонента; $\theta^\circ, \psi^\circ, \varphi^\circ, \eta^\circ, \zeta^\circ$ — угловые и линейные рассогласования между истинным и программным положением корпуса в точке x° размещения датчиков систем УСТ, УСР, УСК, НС, БС. Знак * соответствует программному значению параметра.

Простейшие линеаризированные уравнения (1.1) имеют вид

$$c_2(\dot{\delta}_\theta^* + \ddot{\delta}_\theta) + c_1(\dot{\delta}_\theta^* + \dot{\delta}_\theta) + \delta_\theta^* + \delta_\theta = a_0\theta^\circ + a_1\dot{\theta}^\circ + b_0\eta^\circ + b_1\dot{\eta}^\circ; \quad (1.3)$$

$$c_2\ddot{\delta}_\psi + c_1\dot{\delta}_\psi + \delta_\psi = a_0\psi^\circ + a_1\dot{\psi}^\circ - b_0\zeta^\circ - b_1\dot{\zeta}^\circ; \quad (1.4)$$

$$e_2\dot{\delta}_\varphi + e_1\dot{\delta}_\varphi + \delta_\varphi = d_0\varphi^\circ + d_1\dot{\varphi}^\circ. \quad (1.5)$$

В диапазоне частот, соответствующем первому тону колебаний жидкости в баках и первым двум-трем тонам поперечных упругих колебаний корпуса, системы НС и БС практически не влияют на устойчивость замкнутой системы [16]. Поэтому в том диапазоне частот, который обычно и рассматривается в дальнейшем, в уравнениях (1.1), (1.2) можно положить $\mathcal{L}_2' = 0$. Тогда все уравнения (1.1) приобретают одинаковую структуру, и, например, уравнение, соответствующее плоскости рыскания, можно, опустив несущественные индексы, записать в форме, использованной в работе [30]:

$$\delta = \mathcal{L}(\psi^\circ), \quad (1.6)$$

где \mathcal{L} — в простейшем случае дробно-линейный оператор, так что вместо уравнения (1.4) получим

$$c_2\ddot{\delta} + c_1\dot{\delta} + \delta = a_0\psi^\circ + a_1\dot{\psi}^\circ. \quad (1.7)$$

На рис. 1.7 представлены типичные амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (δ/ψ°) , соответствующие АС,

описываемому уравнением (1.7) при следующих значениях параметров: $a_0=2,1$; $a_1=1,26$; $c_2=0,00976$; $c_1=0,126$.

Простейшие линеаризированные уравнения, описывающие динамику ЖРД разомкнутой схемы, имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 + \beta_1 q_1 &= a_{11} s_1^\circ + a_{13} \delta_x; \\ \dot{q}_2 + \beta_2 q_2 &= a_{22} s_2^\circ + a_{23} \delta_x; \\ \dot{\delta}_x + \beta_3 \delta_x &= a_{31} q_1 + a_{32} q_2,\end{aligned}\quad (1.8)$$

где $q_n = \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right)_n$ — приращения массового секундного расхода компонентов топлива, отнесенные к соответствующим номинальным значениям для одного двигателя ($n=1,2$).

Обычно частоты собственных колебаний жидкости в магистралях горючего и окислителя сильно различаются из-за резкого отличия в длинах этих магистралей. Поэтому связь между колебаниями давлений p_1 и p_2 относительно слабая. Это дает основания рассматривать уравнения (1.8), полагая последовательно $s_1^\circ=0$ или $s_2^\circ=0$. Тогда после исключения q_n и опускания индекса x они приобретают форму, аналогичную (1.6):

$$\delta = \mathcal{L}_n(s_n^\circ) \quad (n=1, 2), \quad (1.9)$$

где \mathcal{L}_n — в простейшем случае ЖРД разомкнутой схемы, описываемого уравнением (1.8), — дробно-линейный оператор, как и в (1.6):

$$c_{2n} \ddot{\delta} + c_{1n} \dot{\delta} + \delta = a_{0n} s_n^\circ \quad (n=1, 2). \quad (1.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}c_{2n} &= \frac{1}{\beta_n \beta_3 - a_{3n} a_{n3}}; \\ c_{1n} &= \frac{\beta_3 + \beta_n}{\beta_n \beta_3 - a_{3n} a_{n3}}; \\ a_{0n} &= \frac{a_{nn}}{\beta_n \beta_3 - a_{3n} a_{n3}}.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Если из уравнений двигателя при $s_1^\circ=0$ или $s_2^\circ=0$ исключить не q_2 или q_1 , а δ_x , то при-

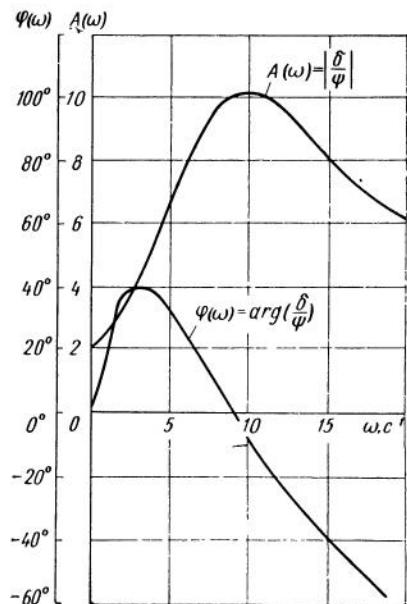


Рис. 1.7. Типичные амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики автомата угловой стабилизации

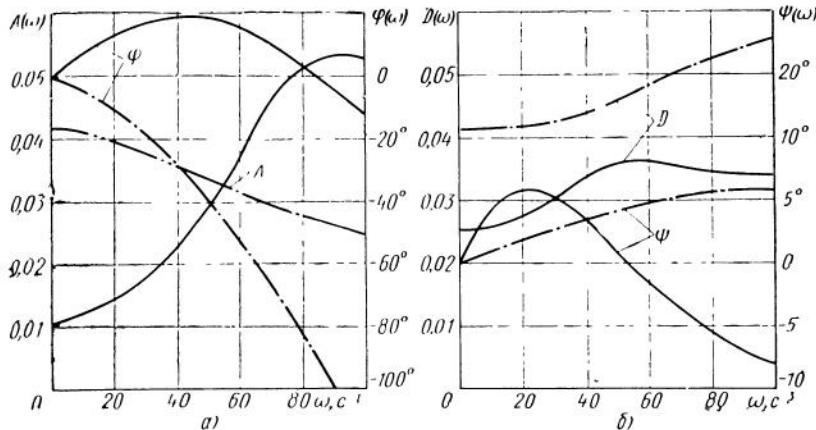


Рис. 1.8. Типичные амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики ЖРД замкнутой (—) и разомкнутой (---) схем:

а — относительная тяга в зависимости от относительного давления на входе в насос;
б — относительный расход в зависимости от относительного давления на входе в насос

дем к динамическому граничному условию на нижнем конце соответствующей магистрали вида

$$q_n = W_n(p) s_n^\circ, \quad (1.12)$$

где p — оператор дифференцирования по t , или в простейшем случае уравнений (1.8)

$$c_{2n} \ddot{q}_n + c_{1n} \dot{q}_n + q_n = a_{0n} (\dot{s}_n^\circ + \beta_3 s_n^\circ). \quad (1.13)$$

Это граничное условие позволяет определить приведенный коэффициент демпфирования колебаний жидкости в магистрали (см. гл. 4).

На рис. 1.8 приведены безразмерные амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики (δ/s_2°) и (q_2/s_2°) для гипотетических ЖРД, разомкнутой и замкнутой схем (по одному из компонентов топлива).

$$\frac{\delta}{s_2^\circ} = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}; \quad (1.14)$$

$$\frac{q_2}{s_2^\circ} = D(\omega) e^{i\psi(\omega)}.$$

(об основных схемах ЖРД см. работы [8, 37]). Второй компонент топлива представляет больший интерес, так как ему соответствует длинная магистраль с более низкой частотой собственных колебаний жидкости.

1.3. Топливный бак как жесткое тело, частично заполненное жидкостью (движение в плоскостях стабилизации)

Расчетная модель баков с жесткими стенками, частично заполненными жидкостью, определяется:

1. Характером движения бака, которое в силу допущений, сформулированных выше (см. разд. 1.1), может быть представлено в виде суммы программного движения, характеризующегося потенциальным полем массовых сил с переменным по времени градиентом, и возмущенного движения с малыми относительными перемещениями и скоростями.

2. Свойствами жидкости, которую при характерных частотах колебаний порядка 1 Гц можно считать практически несжимаемой и, кроме того, обладающей малой вязкостью.

Это позволяет считать движение всей жидкости потенциальным вне тонкого пристеночного слоя и окрестностей острых кромок конструктивных элементов, поскольку оно было потенциальным (безвихревым) в момент $t=0$, а волновые движения — малыми.

Специфические эффекты, связанные с влиянием стока, проявляются только при весьма малой глубине жидкости, и мы ими пренебрежем в силу их локального характера, как и диссипативными эффектами вблизи свободной поверхности и поверхностным натяжением.

При вычислении диссипативных коэффициентов для бака с гладкими стенками воспользуемся концепцией пограничного слоя. При наличии конструктивных элементов типа радиальных и кольцевых ребер присоединенные массы будем вычислять по теории идеальной жидкости, а диссипативные коэффициенты — на основе эмпирических зависимостей, описывающих диссиацию энергии при срыве с острых кромок сложной вихревой системы [30].

Ряд аспектов принятой модели движения жидкости требует обоснования, что возможно на основе оценки некоторых безразмерных параметров.

Введем следующие обозначения: v — характерная скорость, ω — характерная частота колебаний, l — характерный размер, $\varepsilon \ll 1$ — характерная безразмерная амплитуда, a — скорость звука в жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, σ — коэффициент поверхностного натяжения.

Возможность пренебречь сжимаемостью жидкости связана с малостью числа

$$M = \frac{v}{a} = \frac{\omega l \varepsilon}{a}. \quad (1.15)$$

При характерных значениях $\omega \sim 10 \text{ с}^{-1}$; $l \sim 1 \text{ м}$; $\varepsilon \sim 0,01$; $a \sim 1000 \text{ м/с}$ имеем $M \sim 10^{-4} \ll 1$.

Роль поверхностного натяжения определяется значением числа Бонда [4]

$$B = \frac{\rho j l^2}{\sigma}. \quad (1.16)$$

При $j \sim 1 \div 100 \text{ м/с}^2$; $l \sim 1 \text{ м}$; $\frac{\sigma}{\rho} \sim 10^{-4} \text{ м}^3$; $B \sim 10^4 \div 10^6 \gg 1$.

Это означает, что даже при сравнительно малых значениях ускорения поля массовых сил j (например, при полете с работающими только управляющими двигателями перед разделением ступеней), не говоря уже об основной части активного участка, роль поверхностного натяжения пренебрежимо мала.

В дальнейшем предполагается, что j всегда больше некоторой величины j_{\min} , при которой это утверждение остается справедливым.

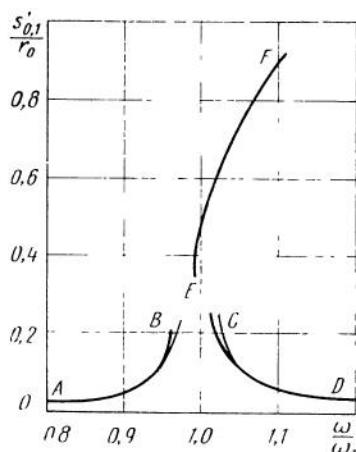
Возможность пренебречь нелинейными эффектами, т. е. считать волновые движения в подвижной полости малыми, определяется числом Фруда $F = \frac{v^2}{jl}$.

Если, например, рассмотреть плоские гармонические колебания с амплитудой ϵ и частотой ω бака с осью, параллельной вектору j , то можно положить

$$F = \frac{\epsilon^2 \omega^2 r_0}{j} = k \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2, \quad (1.17)$$

где ω_1 — частота первого тона собственных колебаний жидкости, а k — некоторый коэффициент пропорциональности, $l=r_0$ — радиус свободной поверхности жидкости.

Рис. 1.9. Типичная зависимость относительной амплитуды колебаний жидкости от отношения частот вынужденных и собственных колебаний в области основного резонанса:
— эксперимент;
— линейная теория



На рис. 1.9, заимствованном из работы [29], представлена типичная зависимость относительной амплитуды колебаний жидкости $\bar{s}_{01} = \frac{s_{01}}{r_0}$ от параметра $\frac{\omega}{\omega_1} \sim \sqrt{F}$.

На участках AB и CD ($\bar{s}_{01} \leq 0,15$) колебания жидкости носят линейный характер, и экспериментальные кривые совпадают с теоретическими, рассчитанными по линейной теории. В точке B устойчивое плоское движение переходит в неустойчивое, сопровождающееся резким ростом амплитуды колебаний, после чего начинается вращение плоскости колебаний жидкости относительно плоскости возбуждения (кривая EF). Существенно нелинейные эффекты проявляются, таким образом, только при $\bar{s}_{01} > 0,25$. Более подробное их описание дано в работе [29].

При числах Фруда, соответствующих $\bar{s}_{01} \leq 0,15$, линейная теория дает хорошие результаты.

Влияние вязкости жидкости для бака с гладкими стенками зависит от числа Рейнольдса $R = \frac{\nu l}{v}$.

При малых колебаниях жидкости диссипативные силы не зависят от амплитуды, так что за R можно принять параметр

$$R = \frac{\omega l^2}{v}. \quad (1.18)$$

При этом оказывается, что толщина пограничного слоя и величина соответствующих диссипативных коэффициентов пропорциональны $R^{-\frac{1}{2}}$ [24], в то время как диссипативные силы, связанные с эффектом свободной поверхности, пропорциональны R^{-1} [34].

На рис. 1.10 [29] показана экспериментальная зависимость относительного логарифмического декремента первого тона колебаний жидкости в цилиндрическом баке от $R^{-\frac{1}{2}}$ ($2r_0 = 0,35$ м). Из этого рисунка видно, что можно учитывать только эффект пограничного слоя, пропорциональный $R^{-\frac{1}{2}}$ уже при $R > 10^4$.

При $l \sim 1$ м, $v \sim 10^{-6}$ м²/с (вода), $\omega \sim 10$ с⁻¹

$$R^{-1} \sim 10^{-5} \ll 1, \quad R^{-\frac{1}{2}} \sim 3 \cdot 10^{-4} \ll 1,$$

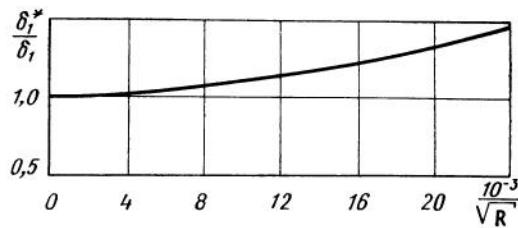


Рис. 1.10. Экспериментальная зависимость относительного декремента колебаний жидкости в цилиндрической полости от параметра $R^{-1/2}$

т. е. концепция пограничного слоя заведомо справедлива. При этом, поскольку радиус кривизны стенок намного больше толщины пограничного слоя, можно отождествлять элемент смоченной поверхности стенок бака с плоской пластинкой.

В случае квазигармонических колебаний с частотой, амплитудой и фазой, медленно меняющимися по времени, диссипативная сила f , действующая на единицу площади стенок бака, может быть вычислена по формуле [24]

$$f = -\frac{\rho \omega l}{2R} \dot{u}, \quad (1.19)$$

где $u = u_0 e^{i\omega t}$ — тангенциальная составляющая скорости элемента стенки (проекция скорости на касательную плоскость).

Последний из существенных параметров, подлежащих рассмотрению, — это число Струхала $S = \frac{v}{\omega l}$.

Этот параметр играет важную роль при колебаниях относительно жидкости элементов с острыми кромками, в частности при колебаниях жидкости в баках с внутренними кольцевыми или радиальными ребрами. В этих случаях удобно определить число Струхала так:

$$S = \frac{2\pi\varepsilon}{b}. \quad (1.20)$$

где ε — амплитуда колебаний ребра в направлении, перпендикулярном его плоскости; $b = l$ — характерный размер. Введем коэффициент c_m присоединенной массы жидкости на единицу длины ребра, связанного со стенкой, перпендикулярного ей, при колебаниях в плоскости стенки:

$$\bar{m} = \frac{\pi b^2}{4} c_m. \quad (1.21)$$

Коэффициент c_m , рассчитанный методами теории функций комплексного переменного по схеме безотрывного обтекания, равен 2.

Фактически это значение сильно меняется по числу Струхала S . Соответствующая эмпирическая зависимость представлена на рис. 1.11 [30]. Как видно, $c_m \approx 2$ при сравнительно малых значениях S , которые рассматриваются ниже.

Полная сила, действующая на элемент ребра, перпендикулярного стенке, при квазигармонических колебаниях, определяется формулой [30]

$$f = -\rho b^2 \left(\frac{\pi}{4} c_m \ddot{u} + \frac{4\omega u_0}{3\pi b} c_b \dot{u} \right), \quad (1.22)$$

где $u = u_0 e^{i\omega t}$ — тангенциальная составляющая скорости стенки; c_b — коэффициент сопротивления, эмпирическая зависимость которого от S представлена на рис. 1.11.

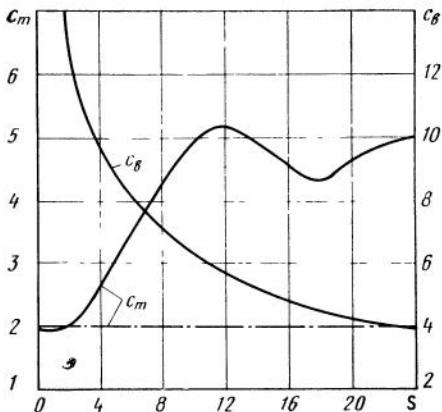


Рис. 1.11. Усредненная экспериментальная зависимость коэффициента сопротивления и коэффициента присоединенной массы от параметра, эквивалентного числу Струхала, для ребра на плоской стенке

Учет влияния свободной поверхности и кривизны осевой линии ребра (кольцевые ребра) требует введения дополнительных поправок в значения c_b , приведенные на рис. 1.11.

Приведем окончательные эмпирические формулы для c_b , полученные Г. Н. Микишевым для баков с кольцевыми (перпендикулярными оси бака) и радиальными ребрами [30]:

$$c_b = K_i \varphi(x') S^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.23)$$

где K_i и $\varphi(x')$ определяются следующей таблицей.

Таблица 11

№	Тип ребер	Характер колебаний жидкости	K_i	$\varphi(v')$
0	Кольцевые	Осьсимметричные	17,1	$\frac{1}{1+\alpha e^{-\beta x'}}$
1	Радиальные	Антисимметричные	19,1	$\alpha=0,4; \beta=0,131$
2	Кольцевые	Антисимметричные	11,3	1

Большое влияние на коэффициент c_m оказывает наличие щели (разрезные ребра). Соответствующие теоретические результаты приведены в работах [50, 52].

На рис. 1.12 представлены рассчитанные В. Л. Шетухиным значения коэффициента \bar{c}_m изменения присоединенной массы ребра, отделенного от стенки щелью, в зависимости от относительной ширины щели.

Эмпирические зависимости коэффициента c_b от ширины щели приведены в работе [30].

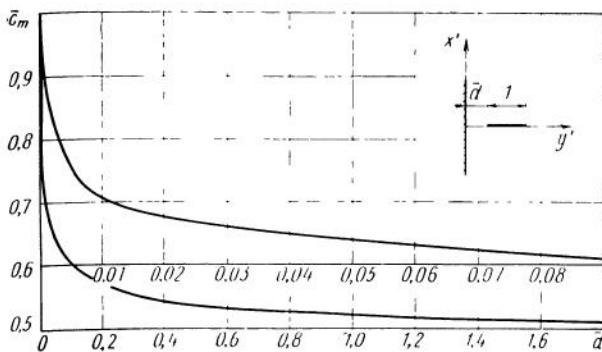


Рис. 1.12. Теоретическая зависимость относительного коэффициента присоединенной массы ребра вблизи плоской стенки от ширины щели

1.4. Топливный бак и магистраль, гидравлически связанные с баком и насосом, как гидроупругие системы (движение в направлении продольной оси)

При сравнительно низких частотах колебаний в плоскостях стабилизации, представляющих интерес с точки зрения динамической устойчивости, обычно можно пренебречь деформацией контура поперечного сечения баков. Однако это недопустимо при рассмотрении продольных колебаний корпуса с несущими баками (подвесные баки, как правило, можно и в этом случае, как и при поперечных и крутильных колебаниях, схематизировать жесткими контейнерами на упругих связях). Исследованию колебаний упругих оболочек с жидкостью посвящена обширная литература, обзор которой приведен, в частности, в книге [30]. В данном случае нас интересуют осесимметричные деформации бака, сопровождающиеся растяжением срединной поверхности обечайки и нижнего днища. Именно этот вид деформации приводит к сильному перемещению в продольном направлении центра масс жидкости, что играет решающую роль при рассмотрении продольных колебаний корпуса в целом.

На рис. 1.13, а схематически показана соответствующая кинематическая картина при отсутствии волновых движений.

В книге [30] показана возможность пренебречь волновыми движениями при решении соответствующей краевой задачи гидроупругости и дана ее математическая постановка. Там же приведены соображения, обосновывающие возможность независимого решения этой задачи с использованием затем эквивалентных осцилляторов при решении краевой задачи о продольных колебаниях корпуса в целом. Ниже мы будем пользоваться этим результатом, полагая, что краевая задача о совместных осесимметричных колебаниях оболочки и жидкости при отсутствии волн

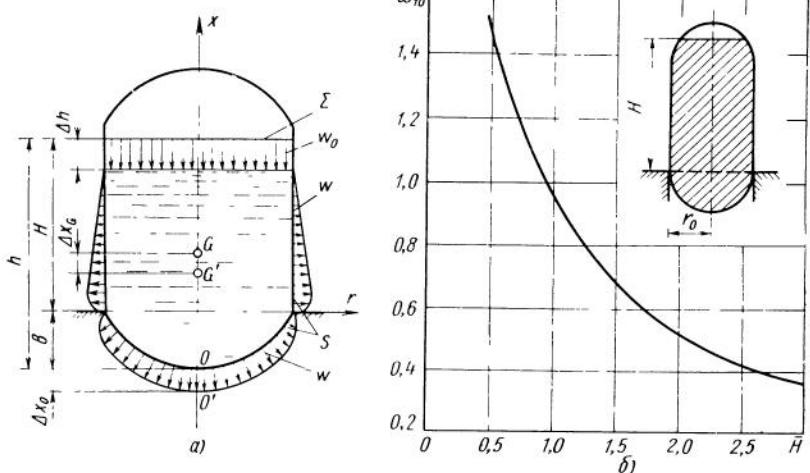


Рис. 1.13. Основная форма осесимметричных колебаний жидкости с плоской свободной поверхностью в цилиндрическом баке со сферическим днищем:
а — качественная картина деформации стенок; б — безразмерная частота ($\omega_0 = \Delta h$, w — смещение плоской свободной поверхности жидкости и нормальное перемещение стенок, Δx_0 , Δx_G — перемещение полюса нижнего днища и центра масс жидкости)

на свободной поверхности решена. Заметим, что здесь также можно считать жидкость несжимаемой, так как характерные частоты всего на порядок больше, чем при поперечных колебаниях (см. разд. 1.3).

На рис. 1.13, б приведены расчетные значения безразмерной частоты $\bar{\omega}_{10}$ основного тона колебаний системы оболочки — жидкость для одного из несущих баков, заимствованные из работы [69],

$$\bar{\omega}_{10} = \omega_{10} r_0 \sqrt{\frac{\rho r_0}{E \delta}}, \quad (1.24)$$

где ρ — массовая плотность жидкости; r_0 — радиус бака; E — модуль упругости; δ — толщина стенок обечайки и днища.

Переходим к рассмотрению следующего важного элемента динамической схемы, а именно: столба жидкости в топливной магистрали, гидравлически связанный на одном конце с топливоподающим насосом, а на другом конце — с баком. Столб жидкости можно считать одномерной упругой системой, упругость которой определяется в большей степени радиальной податливостью стенок, чем сжимаемостью жидкости. Соответствующая модель послужила основой теории гидроудара, развитой Н. Е. Жуковским [12]. Приведенная скорость звука c для эквивалент-

ной одномерной системы определяется формулой

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \approx \frac{1}{c_1^2}, \quad (1.25)$$

где c_1 — скорость распространения волн радиальных деформаций стенок вдоль трубы; c_2 — скорость звука в жидкости (скорость движения жидкости в магистрали пренебрежимо мала по сравнению с c).

Однако в случае магистрали, связанной с ЖРД, картина существенно усложняется вследствие появления местных кавитационных зон вблизи ведущих кромок шнека, играющего роль преднасоса в современных высокогооборотных насосах с ЖРД [37, 58].

На рис. 1.14 [37] представлена схема центробежного насоса с ЖРД со шнеком, а на рис. 1.15, *a*, *b* — геометрия шнека и развертка цилиндрической поверхности, пересекающей шнек на половине высоты его лопаток, на которой видны кавитационные каверны. Колебания столба жидкости сопровождаются деформацией этих каверн, что представляет собой сложный нестационарный процесс, который пока не может быть сколь-нибудь полно исследован теоретически. Следует заметить, что попытка использования традиционных схем [52] для описания плоского стационарного обтекания сечения лопатки в режиме слабо развитой кавитации наталкивается на большие трудности. Некоторые новые схемы кавитационного обтекания, открывающие в этом смысле определенные перспективы, описаны в книге [23].

Установлено, что именно решающее влияние на частоту колебаний жидкости в топливных магистралях РН с ЖРД оказывает средний объем кавитационных каверн. Для задач, рассматриваемых в настоящей книге, можно ограничиться описываемым ниже полуэмпирическим методом, основанным на рассмотрении плоского стационарного обтекания эквивалентной решетки прямолинейных профилей несжимаемой жидкостью [70, 71, 72].

Переход от решетки с параметрами d, θ, b (см. рис. 1.15, *b*) к эквивалентной решетке с параметрами d, θ', b' описан в книге [20]. Угол θ' оказывается при этом равным углу бесциркуляционного обтекания исходной решетки, а длина b' каждой лопатки подбирается так, чтобы совпадали циркуляции эквивалентной и исходной решеток.

Если учесть, что местная кавитация, определяющая объем каверн, является паровой, а не газовой, то основным безразмерным критерием задачи является число кавитации

$$\lambda_* = \frac{P_0 - P_*}{\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)}, \quad (1.26)$$

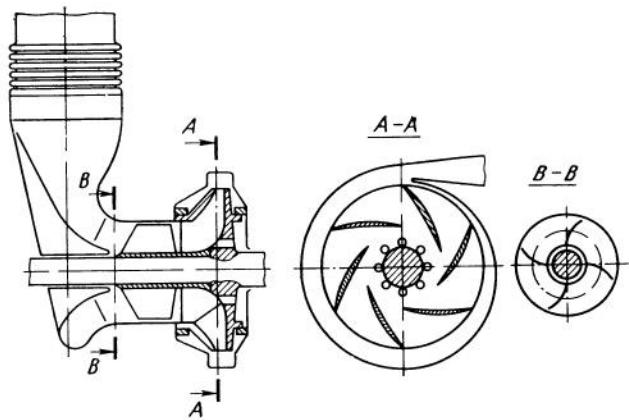


Рис. 1.14. Схема шнеко-центробежного насоса ЖРД

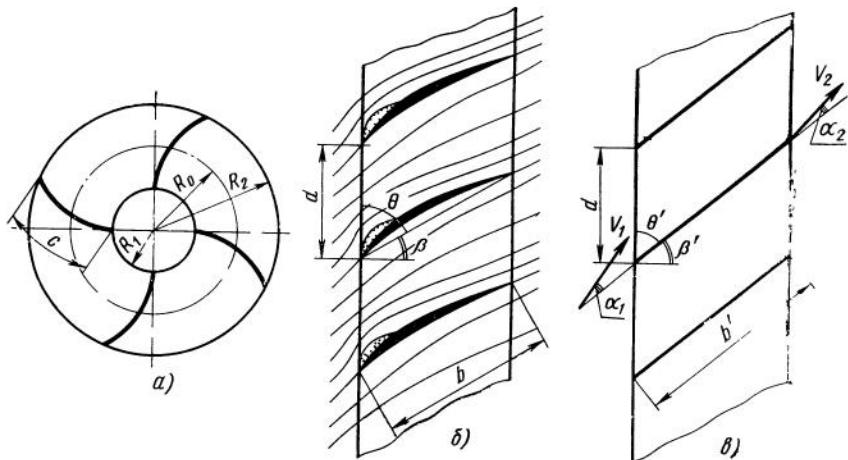


Рис. 1.15. Обтекание шнека с образованием местных кавитационных зон:
 а — основные геометрические параметры шнека; б — развертка секущей цилиндрической поверхности радиуса R_0 и параметры решетки; в — эквивалентная решетка и ее параметры

где p_0 — статическое давление на входе в шнек; p_* — давление насыщенных паров жидкости, являющееся функцией температуры; ρ — массовая плотность жидкости; v — абсолютная скорость жидкости на входе в шнек, приведенная к среднему радиусу шнека.

При обтекании эквивалентной «густой» решетки прямолинейных профилей $\left(\frac{d}{b'}\right) \ll 1$ характерной скоростью, соответствую-

щей скорости на бесконечности для изолированного профиля, является

$$v_0 = v_\infty \frac{\sin(\theta' - \alpha)}{\sin\left(\theta' - \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (1.27)$$

где θ' — угол эквивалентной решетки; $\alpha = \alpha_1$ — угол атаки на входе в решетку.

В формуле (1.26) скорость v играет роль v_∞ из уравнения (1.27). Поскольку поле скоростей, совпадающее по определению для той и другой решетки, зависит явно от v_0 , а не от v_∞ , полезно от λ , перейти к эффективному числу кавитации

$$\lambda = \lambda_* \frac{v^2}{v_0^2} = \frac{2(p_0 - p^*)}{\rho v^2} \frac{\sin^2\left(\theta' - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2(\theta' - \alpha)}. \quad (1.28)$$

Будем рассматривать в качестве исходной информации совокупность эмпирических значений частоты первого тона колебаний жидкости в стендовой магистрали с достаточно жесткими стенками для данного ЖРД при различных условиях на входе в насос. Эти значения могут быть получены на основе анализа результатов холодных проливок и огневых испытаний двигательной установки при искусственном создании пульсаций на входе в магистраль, а также (косвенно) — по результатам летных испытаний. Будем схематизировать столб жидкости жестким телом на упругой связи, жесткость которой определяется зависимостью объема кавитационных каверн от давления на входе в насос. Попытаемся выявить безразмерную комбинацию параметров, позволяющую радионально ввести безразмерную частоту ω° и построить ее зависимость от числа кавитации λ .

Введем следующие дополнительные обозначения (см. рис. 1.15, a): R_1 и R_2 — внутренний и внешний радиусы шнека, $R_0 = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ — средний радиус, принимаемый в дальнейшем за характерный размер; $e \approx \Delta R = R_2 - R_1$ — длина кромки лопатки шнека, измеряемая вдоль ребра атаки; $d = \frac{2\pi R_0}{k}$ — шаг лопаток, измеряемый на развертке цилиндрической поверхности радиуса R_0 ; θ' — установочный угол эквивалентной решетки; $F = \pi(R_2^2 - R_1^2) \approx 2\pi R_0 \Delta R$ — площадь входного сечения; l, r_0 — длина и средний радиус столба жидкости; $f = \pi r_0^2$ — средняя площадь поперечного сечения столба жидкости; $m = fl$ — масса столба жидкости; K — эквивалентная жесткость совокупности каверн; k — число лопаток шнека; ω — угловая скорость шнека.

Заменяя в первом приближении каверну цилиндром постоянного сечения S с осью, параллельной ребру атаки лопатки, получим следующее выражение для суммарного объема каверн:

$$Q \approx ekS = kea^2\Omega = \frac{4}{k} e\pi^2 R_0^2 \sin^2 \theta' \Omega, \quad (1.29)$$

где $\Omega = \frac{S}{a^2}$ — безразмерная площадь поперечного сечения одной каверны, отнесенная к $a^2 = d^2 \sin^2 \theta'$.

Представим квадрат частоты колебаний столба жидкости в виде

$$\omega^{\circ 2} = \frac{K}{m}; \quad K = -F \frac{dp_0}{dx} = -F^2 \frac{dp_0}{dQ}.$$

Производная $\frac{dp_0}{dQ}$ может быть в силу (1.26) и (1.28) выражена через $\frac{d\lambda}{d\Omega}$:

$$\frac{dp_0}{dQ} = \frac{dp_0}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dQ} = -\frac{\rho v^2}{2ked^2} \frac{\sin^2(\theta' - a)}{\sin^2\left(\theta' - \frac{a}{2}\right)} \frac{1}{\sin^2 \theta'} \frac{d\lambda}{d\Omega}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \omega^{\circ 2} &= -\frac{F^2}{f\rho l} \frac{dp_0}{dQ} = -\frac{2\pi R_0^2 (\Delta R)^2 v^2}{kler_0^2 d^2 \sin^2 \theta'} \frac{\sin^2(\theta' - a)}{\sin^2\left(\theta' - \frac{a}{2}\right)} \frac{d\lambda}{d\Omega} = \\ &= -\frac{kv^2 (\Delta R)^2}{2\pi ler_0^2 \sin^2 \theta'} \frac{\sin^2(\theta' - a)}{\sin^2\left(\theta' - \frac{a}{2}\right)} \frac{d\lambda}{d\Omega}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Производная в формуле (1.30) вычисляется при стационарных значениях параметров λ и a .

Поскольку окружная скорость ωR_0 намного больше осевой скорости жидкости на входе в шnek,

$$v \approx \omega R_0.$$

Формулу (1.30) можно теперь записать так:

$$\frac{\omega^{\circ 2}}{\omega^2} = \bar{\omega}^{\circ 2}, \quad (1.31)$$

и где

$$\bar{\omega}^2 = \frac{1}{\left| \frac{d\Omega}{d\lambda} \right|} = \Phi(\lambda, a);$$

$$\kappa = \frac{k (\Delta \bar{R})^2 \sin^2(\theta' - a)}{2\pi \bar{e} \bar{l} \bar{r}_0^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \left(\theta' - \frac{a}{2} \right)}. \quad (1.32)$$

При $R_2 \gg R_1$, $\Delta \bar{R} \approx \bar{e} \approx 2$ формула для κ упрощается:

$$\kappa = \frac{k \sin^2(\theta' - a)}{\pi \bar{l} \bar{r}_0^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \left(\theta' - \frac{a}{2} \right)}. \quad (1.33)$$

Черта над буквой означает, что соответствующая величина отнесена к R_0 .

Располагая эмпирической зависимостью $\bar{\omega}^2 = \Phi(\lambda, a)$ для данного ЖРД и используя полетные значения параметра κ , можно получить из выражения (1.31) значения ω^2 для любой точки активного участка.

На рис. 1.16 показан в качестве примера характер зависимости параметра $\bar{\omega}^2$ от числа кавитации λ при фиксированном значении a .

Рассмотрим теперь вопрос о взаимодействии жидкости в баке и магистрали при продольных колебаниях корпуса (рис. 1.17, а). Можно показать, что колебания столба жидкости при неподвижном корпусе описываются схемой рис. 1.17, б (см., например, работу [30]), а коэффициенты инерционных связей между столбом жидкости и корпусом при колебаниях последнего — схемой рис. 1.17, в, где Δx_0 — перемещение полюса днища, а Δl — перемещение столба жидкости выше кавитационных каверн, заменяемых эквивалентной пружиной (рис. 1.17, б). При этом может быть учтена упругость стенок магистрали, т. е. введен в рассмотрение некоторый эквивалентный упругий стержень, заменяющий жидкость на всем протяжении магистрали (на участке длины h , соответствующем баку, этот стержень абсолютно жесткий).

При решении конкретных задач устойчивости необходимо учесть демпфирование колебаний столба жидкости в магистрали, гидравлически связанной с насосом ЖРД и баком.

Основную роль играет демпфирование, обусловленное сложным сопротивлением на входе в насос, определяемым частотными характеристиками ЖРД по расходу (см. разд. 1.2 и 4.3).

Следующий фактор — это различные гидравлические сопротивления (клапаны, расходные шайбы, разветвления и т. д.). Меньшую роль играет демпфирование вследствие наличия пограничного слоя на гладких стенках.

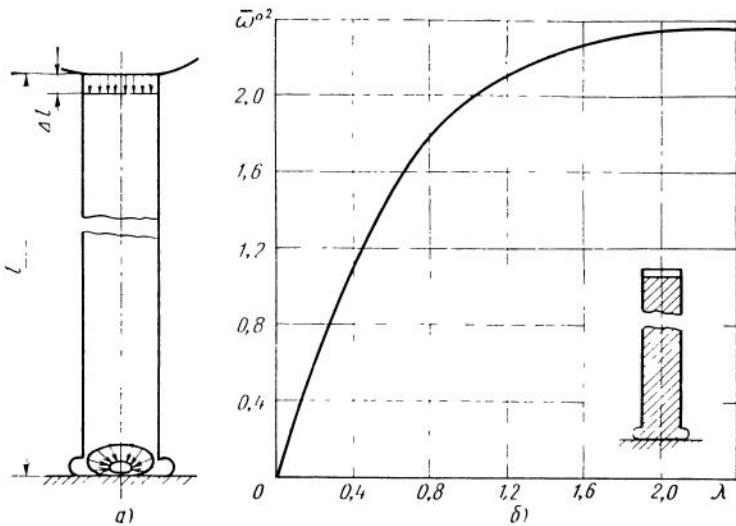


Рис. 1.16. Основная форма колебаний столба жидкости с сосредоточенной емкостью в нижнем сечении, эквивалентной кавитационным кавернам:
а — качественная картина, б — типичная зависимость квадрата безразмерной частоты от числа кавитации, приведенного к характерной скорости для эквивалентной решетки

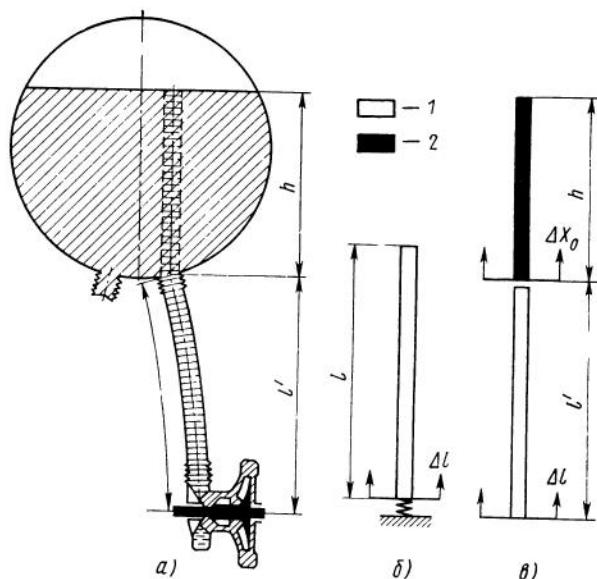


Рис. 1.17. Топливная магистраль, гидравлически связанный с баком и шнекоцентробежным насосом:
а — общая схема, б — расчетная модель для исследования свободных колебаний; в — расчетная модель для исследования вынужденных колебаний (1 — упругий стержень, 2 — жесткий стержень)

1.5. Упругий корпус. Общая концепция динамической схемы РН в задачах динамической устойчивости

Выше была сформулирована идея частотной дискриминации, которая позволяет перейти при рассмотрении упругого корпуса РН в задачах динамической устойчивости к системе, спектр которой редуцирован исходя из конкретных характеристик АС и ЖРД как регуляторов. В рамках задач, рассматриваемых в настоящей книге, в качестве такой системы можно использовать тонкостенный стержень переменного сечения с геометрически неизменяемым контуром, к которому крепятся на упругих связях дополнительные осцилляторы. В частности при рассмотрении продольных колебаний корпуса доминирующую роль играют осцилляторы, имитирующие присоединенные массы жидкости в несущих баках, перемещающиеся в направлении продольной оси корпуса вследствие осесимметричных деформаций днищ и обечайек баков. Эти осцилляторы должны крепиться в сечениях корпуса, соответствующих опорным шпангоутам нижних днищ.

В первом приближении можно заменить каждый бак одним осциллятором с массой, близкой к физической массе жидкости. Жесткость эквивалентной пружины должна быть определена из решения независимой краевой задачи [30]. Аналогичная модель описывает подвесные баки, ЖРД и другие агрегаты, жесткость которых велика по сравнению с жесткостью элементов их крепления к корпусу.

В рамках такой модели волновые движения на поверхности жидкости при продольных колебаниях корпуса не учитываются.

При крутильных колебаниях корпуса с баками в форме тел вращения жидкость вообще не участвует в колебаниях (если не учитывать ее вязкость).

Что касается поперечных колебаний корпуса, то в случае подвесных баков расчетная схема может быть принята аналогичной описывающей продольные колебания, а в случае несущих баков погонная масса жидкости в каждом поперечном сечении корпуса присоединяется к погонной массе корпуса как одномерной упругой системы [30].

Такого рода одномерные модели, не учитывающие ни влияние волновых движений жидкости, ни малые дополнительные эффекты, связанные с диссипативными силами и иными неконсервативными силами (тяга двигателя, погонные аэродинамические силы и т. д.), пригодны, как показывают многочисленные исследования, для расчета форм и частот упругих колебаний корпуса баллистических РН. По-видимому, эту концепцию можно сохранить и для вертикально стартующих РН с крылатыми последними ступенями при реальных сейчас параметрах этих систем.

Однако при составлении полной системы уравнений возмущенного движения модели, упомянутые выше, играют только вспомогательную роль.

В частности, при рассмотрении поперечных колебаний необходимо учесть волновые движения жидкости в баках. При этом, как показано в работе [30], можно считать абсолютно жесткими как подвесные баки, так и несущие (в последнем случае ось бака совпадет с касательной к упругой линии корпуса в сечении, близком к свободной поверхности жидкости). Волновые движения следует учитывать и при крутильных колебаниях, если баки имеют не круговое сечение или их продольные оси смешены относительно строительной оси корпуса (боковые блоки при пакетной схеме РН).

Характер относительного движения жидкости в баках и магистралях в направлении продольной оси корпуса в процессе выработки топлива таков, что это движение можно считать одномерным с некоторым средним по сечению, но переменным по длине значением скорости и стационарным (не зависящий от времени секундный расход), за исключением коротких участков ступенчатого выхода ДУ на номинальный режим и выключения. При рассмотрении поперечных колебаний корпуса будем считать, что каждая магистраль деформируется так, что ее упругая линия совпадает с упругой линией корпуса между соответствующими сечениями; относительными перемещениями магистралей пренебрежем (как при наличии бесконечного количества связей). При этом предполагается, что магистраль с текущей жидкостью при колебаниях относительно корпуса обладает достаточными запасами устойчивости, так что можно исключить из рассмотрения весь комплекс вопросов, относящихся к этой специфической проблеме. Кроме того, пренебрежем влиянием поперечных колебаний магистралей на пульсации давления жидкости как эффектом второго порядка.

Сформулированные допущения позволяют рассчитать в случае необходимости кориолисовы силы, связанные с выработкой топлива и поворотом сечений корпуса.

Однако наиболее важным является учет диссипации энергии, обусловленной как колебаниями жидкости в баках и магистралях (см. разд. 1.3, 1.4), так и упругими колебаниями корпуса.

Как было установлено при проведении обширных экспериментальных исследований, этот вид диссипации энергии связан главным образом с конструкционным демпфированием, т. е. определяется конструкцией и степенью затяжки стыков между отсеками, сварными и заклепочными соединениями и т. д. [30]. Наиболее адекватной формализацией здесь является введение соответствующих диссипативных членов, пропорциональных общенным скоростям, в уравнения метода Галеркина, описывающие изменение во времени главных координат системы. Если пользоваться при этом экспериментальными значениями коэф-

фициентов при обобщенных скоростях, то результат практически не зависит от того, какой механизм демпфирования фактически реализуется, гистерезисного типа или типа вязкого демпфирования. Это, конечно, справедливо при реальных значениях логарифмических декрементов доминирующих гармоник упругих колебаний, составляющих для ракетных конструкций от 0,02 до ~0,05 [30].

Более тонким является вопрос о движении газа в камере сгорания и сопле ЖРД при его поперечных колебаниях. Однако исследования, относящиеся к некоторым модельным задачам [9, 43], дают основания считать, что и здесь применима концепция стационарного одномерного потока, ось которого все время совпадает с геометрической осью сопла. Следствием такой концепции является допущение, что главный вектор газодинамических сил коллинеарен этой оси в рассматриваемом диапазоне чисел Струхала $S_* = \frac{c^*}{\omega l}$, где c^* — скорость истечения из сопла; ω — частота колебаний; l — характерный размер.

Еще сложнее вопрос о взаимодействии упруго деформирующегося корпуса с набегающим потоком, входящий в комплекс проблем аэроупругости. Здесь имеются две основные трудности — нестационарность процесса и сложный характер деформации обтекаемых поверхностей.

Принятая в настоящее время концепция основана на гипотезе стационарности и гипотезе плоских сечений, обоснованной, строго говоря, только для больших сверхзвуковых скоростей [6, 13]. В свете этой концепции погонные поперечные аэродинамические силы, действующие на упруго деформирующийся корпус, считаются пропорциональными местному углу атаки, причем коэффициент пропорциональности определяется для недеформированного корпуса, а угол атаки — по местной абсолютной скорости сечения [16, 30].

Такой метод, будучи весьма уязвимым для критики, однако, оправдывается тем, что для РН роль аэроупругих сил в общем балансе мала в отличие от крылатых летательных аппаратов с развитыми несущими поверхностями.

Подробное освещение задач нестационарной аэrodинамики этих поверхностей и методов их решения дано в монографиях [3, 27, 52].

Рассмотрим погонные аэродинамические и кориолисовы силы, действующие на упруго деформирующийся корпус, при возмущенном движении в плоскости рыскания, а также силы, передающиеся на корпус от двигателя.

На рис. 1.18 показана упругая ось корпуса, один из поворотных маршевых двигателей и гидравлические цилиндры рулевых машин, штоки которых связаны с двигателем через упругие кинематические цепи. Прописные буквы на рис. 1.18 и в последующих формулах (в индексах) соответствуют точкам на рис. 2.4.

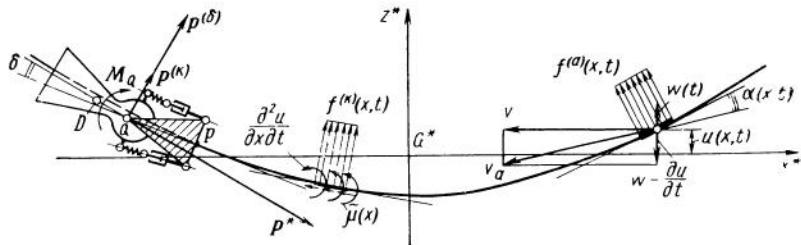


Рис. 1.18. Силы, действующие на корпус при поперечных деформациях

Система координат $G_0^*x^*y^*z^*$ связана с корпусом в его невозмущенном движении (G_0^* — с точкой корпуса, совпадающей в каждый момент с центром масс).

Дополнительно введены следующие обозначения: v — скорость набегающего потока в невозмущенном движении; $w(t)$ — скорость бокового ветра (положительная в направлении оси $G_0^*z^*$); v_a — абсолютная скорость набегающего потока; $u(x, t)$ — форма упругой линии; $\alpha(x, t)$ — местный абсолютный угол атаки; δ — относительный угол поворота маршевого двигателя; $f^{(a)}(x, t)$ — погонная нормальная к упругой оси аэродинамическая сила; $f^{(K)}(x, t)$ — погонная нормальная к упругой оси кориолисова сила; P^* — тяга маршевого двигателя; $P^{(K)}$ — кориолисова сила, приложенная к маршевому двигателю; $P^{(\delta)}$ — сила инерции относительного движения маршевого двигателя; M_Q — момент относительно точки Q сил, приложенных к корпусу со стороны двигателя.

Предполагается, что функция $u(x, t)$ имеет вид

$$u(x, t) = \zeta(t) - (x - x_{G_0}) \psi(t) + \sum_{j=1}^m \eta_j(x) q_j(t), \quad (1.34)$$

где $\eta_j(x)$ определены с учетом массы и моментов инерции всех двигателей при $\delta=0$ и массы жидкости в баках, магистролях и двигателях.

В свете гипотез, сформулированных выше, погонная аэrodинамическая сила пропорциональна местному углу атаки

$$a(x, t) = \frac{du}{dx} - \frac{1}{v} \frac{du}{dt} + \frac{w}{v}$$

и скоростному напору, а погонная кориолисова сила — местной угловой скорости поворота сечения

$$\omega(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

и массовому секундному расходу жидкости (газа) через сечение. Направление кориолисовой силы соответствует повороту вектора относительно скорости жидкости или газа (вдоль касательной к сечению).

тельной к упругой оси) на 90° против переносной угловой скорости $\omega(x, t)$.

Таким образом, выражения для $f^{(a)}(x, t)$ и $f^{(k)}(x, t)$ имеют вид

$$f^{(a)}(x, t) = \frac{\partial c_n^3}{\partial x} \frac{\rho v^2 S}{2} u = \frac{\partial c_n^3}{\partial x} q S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{w}{v} \right);$$

$$f^{(k)}(x, t) = 2\tilde{\mu}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (1.35)$$

где $\frac{\partial c_n^3}{\partial x}$ — погонный градиент нормальной силы корпуса по углу скольжения; $q = \frac{\rho v^2}{2}$ — скоростной напор;

$$\tilde{\mu}(x) = N \sum_{n=1}^2 \sigma_n(x) \mu_n^*, \quad (1.36)$$

$$\sigma_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_B \text{ и } x > x_{H_n} \\ 1 & \text{при } x_B \leq x \leq x_{H_n}; \end{cases}$$

$N\mu_n^*$ — суммарный массовый секундный расход компонента топлива из n -го бака; N — число маршевых двигателей.

В формуле (1.35) в соответствии со сказанным выше не учитывается относительное движение магистралей (форма упругой линии у них считается той же, что и у корпуса на участке от опорных шпангоутов нижних днищ баков до входного сечения насоса ЖРД).

Кроме того, в силу малости относительной скорости поступательного движения жидкости вдоль оси корпуса отброшены дополнительные центробежные силы, пропорциональные квадрату этой скорости и кривизне упругой оси корпуса.

Принимая во внимание малость угла наклона касательной к упругой линии к оси $G_0^*x^*$, получим следующее выражение для суммарной погонной силы $f(x, t)$ в направлении оси $G_0^*z^*$:

$$f(x, t) = f^{(a)}(x, t) + f^{(k)}(x, t) = qS \frac{\partial c_n^3}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{w}{v} \right) +$$

$$+ 2\tilde{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \quad (1.37)$$

Будем считать ферму, связывающую двигатель с опорным шпангоутом, абсолютно жесткой. Сосредоточенные силы $P^{(k)}$, приложенные в точке Q , определяются в этом случае следующими формулами:

$$P^{(\kappa)} = 2\mu^* \left(-\ddot{\delta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=x_P} \right) (x_B - x_A); \quad (1.38)$$

$$P^{(\delta)} = -m^* (x_Q - x_D) \ddot{\delta}.$$

Момент M_Q относительно этой точки определяется так:

$$M_Q = -J^* \ddot{\delta} - m^* j(x_Q - x_D) \ddot{\delta} -$$

$$-\mu^* [(x_A - x_Q)^2 - (x_B - x_Q)^2] \left(\dot{\delta} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=x_P} \right), \quad (1.39)$$

где m^* — масса маршевого двигателя; J^* — момент инерции маршевого двигателя и связанных с ним подвижных элементов, приведенный к оси вращения двигателя.

Перенесем силы $P^{(\kappa)}$, $P^{(\delta)}$, P^* и пару сил с моментом M_Q в точку P и спроектируем равнодействующую на оси $G_0^* x^*$ и $G_0^* z^*$.

С точностью до малых первого порядка составляющая X_P по оси $G_0^* x^*$ совпадает с P^* , а составляющая Z_P по оси $G_0^* z^*$ и момент M_P соответствующей пары сил выражаются формулами

$$Z_P = P^* \left(-\ddot{\delta} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_P} + P^{(\kappa)} + P^{(\delta)} \right) = P^* \left(-\ddot{\delta} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_P} \right) +$$

$$+ 2\mu^* (x_B - x_A) \left(-\dot{\delta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=x_P} \right) - m^* (x_Q - x_D) \ddot{\delta};$$

$$M_P = \left(-P^* \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_P} + Z_P \right) (x_P - x_Q) + M_Q =$$

$$= -P^* (x_P - x_Q) \ddot{\delta} - 2\mu^* [(x_A - x_P)^2 - (x_B - x_P)^2] \left(\dot{\delta} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=x_P} \right) -$$

$$- [J^* + m^* (x_P - x_Q)(x_Q - x_D)] \ddot{\delta} - m^* j(x_Q - x_D) \ddot{\delta}. \quad (1.40)$$

Несколько упрощенные выражения (1.37) и (1.40) используются в гл. 2—4 при составлении уравнений возмущенного движения РН с ЖРД.

Сформулируем в заключение некоторые общие соображения, полезные при математической формализации динамической схемы РН. С точки зрения моделирования и расчетов на ЭВМ большие преимущества имеет описание динамической схемы на языке обыкновенных дифференциальных уравнений, аргументом которых служит время, а не уравнений в частных производных, в которые наряду со временем входят пространственные координаты.

Это достигается применением стандартной процедуры Бубнова — Галеркина, систематически используемой ниже. Предварительно приходится решить целую серию независимых краевых

задач для некоторых парциальных механических систем (волновые движения жидкости в неподвижных баках с жесткими стенками, собственные колебания в пустоте упругих стержней, эквивалентных в определенном диапазоне частот корпусу РН, собственные колебания жидкости в магистралях, осесимметричные колебания бака совместно с жидкостью как упругой тонкостенной оболочки и т. д.).

В эти задачи входит только «медленное время», играющее роль параметра, меняющегося вследствие постепенной выработки топлива. Успех последующего применения уравнений, описывающих динамическую схему РН с ЖРД, для исследования динамической устойчивости и выбора структуры и параметров АС, определяется искусством выбора координатных функций метода Галеркина, являющихся собственными функциями некоторых вспомогательных краевых задач.

Идеалом является хорошая обусловленность коэффициентной матрицы уравнений возмущенного движения, составленных методом Галеркина, в частности слабое ее заполнение и малость недиагональных членов. Такая структура уравнений создает реальные предпосылки для их редукции к системам более низкого порядка и существенно облегчает применение для их решения аналитических методов, особенно методов теории возмущений, и составление алгоритмов численного решения, допускающих эффективную реализацию на ЭВМ. Помимо соображений, изложенных выше, касающихся фильтрующих свойств АС и ЖРД как регуляторов, весьма полезными для редукции сложных уравнений возмущенного движения могут оказаться дополнительные физические соображения, основанные на анализе частот и присоединенных масс отдельных парциальных систем. Эти соображения позволяют, в частности, ограничиться в большинстве случаев учетом только основной (первой) формы антисимметричных колебаний жидкости в каждом баке и одной формы колебаний столба жидкости в каждой магистрали, связанной с деформацией кавитационных каверн (см. гл. 3 и 4).

РАКЕТА КАК ЖЕСТКОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

2.1. Системы координат, кинематические параметры

Условимся называть программным такое движение объекта, при котором его корпус не деформируется, а продольная ось в каждый момент времени занимает положение, соответствующее заданной программе. Припишем этому движению свойства, типичные для объектов рассматриваемого класса.

1. Траектория программного движения по отношению к инерциальной системе координат, сохраняющейся на борту с помощью выставленной к моменту $t=0$ гиростабилизированной платформы, — плоская кривая.

2. Угол атаки, угол отклонения маршевых двигателей в программном движении и угловая скорость программного разворота продольной оси объекта относительно инерциальной системы координат — малые величины, как и соответствующие ускорения.

3. Свободная поверхность жидкости в каждом из баков представляет собой плоскость, перпендикулярную вектору ускорения поля массовых сил \mathbf{j} ; относительная скорость ее перемещения в направлении продольной оси объекта, как и относительная скорость жидкости в магистралях, обусловлены только выработкой топлива и являются малыми величинами.

4. Угол между геоцентрическими радиусами-векторами начальной и конечной точек траектории активного участка мал по сравнению с π .

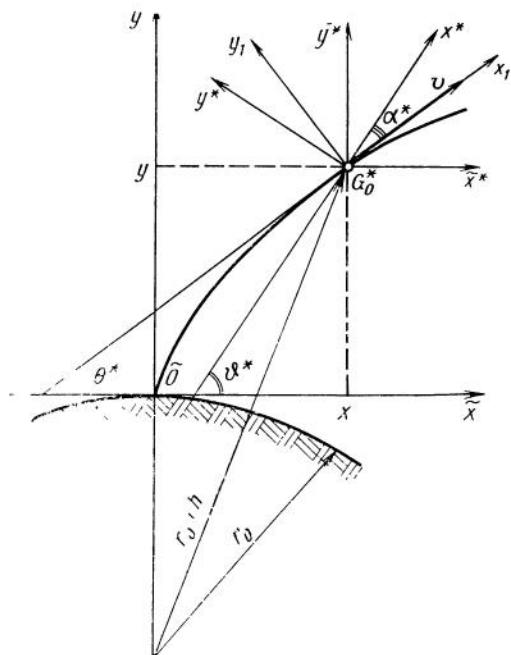


Рис. 2.1. Траектория, системы координат и кинематические параметры в невозмущенном движении

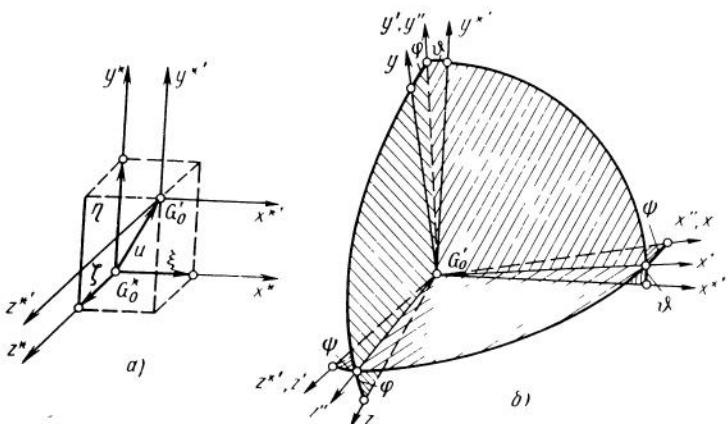


Рис. 2.2. Кинематические параметры, характеризующие возмущенное движение объекта как жесткого тела:
а — линейные перемещения характерной точки корпуса, б — угловые перемещения относительно этой точки

Будем рассматривать движение объекта относительно невращающейся сферической Земли. Введем следующие основные системы координат.

1. «Стартовая» $\tilde{O}x\tilde{y}\tilde{z}$ с началом в точке старта, с осью $\tilde{O}x$, лежащей в плоскости стрельбы, осью $\tilde{O}y$, направленной вдоль геоцентрического радиуса-вектора точки старта, и осью $\tilde{O}z$, дополняющей систему до правой.

2. «Бортовая» $G_0^*x^*\tilde{y}^*\tilde{z}^*$ с началом в точке, совпадающей с центром масс системы корпус — жидкость при программном движении, и с осями, направление которых поддерживается параллельным осям $\tilde{O}x$, $\tilde{O}y$, $\tilde{O}z$ в течение активного участка с помощью гиростабилизированной платформы, уходами которой мы пренебрежем (рис. 2.1).

3. «Программная» $G_0^*x^*y^*z^*$, повернутая в каждый момент времени относительно системы координат $G_0^*\tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{z}^*$ в плоскости $G_0^*x^*y^*$ на угол, соответствующий заданной программе.

4. «Связанная» $G_0'xyz$ с осями, жестко скрепленными с не деформированным корпусом, и началом в точке корпуса G_0' , совпадающей в каждый момент с центром масс системы корпус — жидкость (рис. 2.2).

5. «Связанная» $Oxyz$ с осями, жестко скрепленными с недеформированным корпусом и началом в плоскости опорных кронштейнов (рис. 2.4).

6. «Скоростная» $G_0'x_1y_1z_1$ с осью $G_0'x_1$, совпадающей с вектором скорости корпуса в центре масс, осью $G_0'x_1$, лежащей в

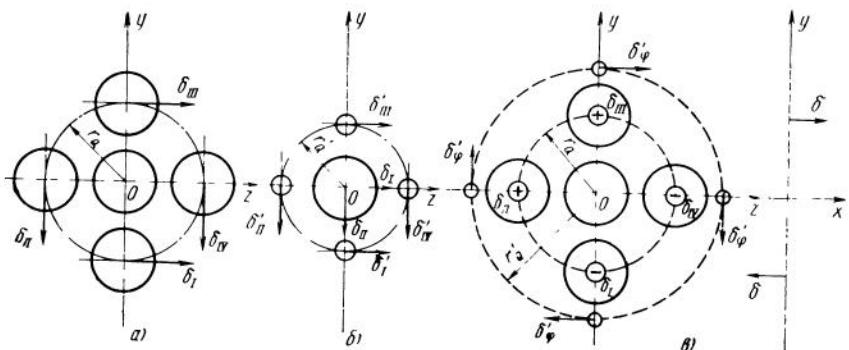


Рис. 2.3. Параметры, характеризующие отклонения управляющих органов:
 а — при управлении по тангажу, рысканию и крену с помощью маршевых двигателей;
 б — при управлении по тангажу и рысканию с помощью маршевого, а по крену — с по-
 мощью вспомогательных двигателей; в — при управлении по тангажу и рысканию путем
 рассогласования тяг маршевых двигателей, а по крену — с помощью вспомогательных
 двигателей

плоскости, образованной осями $G_0'x$ и $G_0'x_1$, и осью $G_0'z_1$, допол-
 няющей систему координат до правой.

7. «Полусвязанная» $G_0'xyz$, совпадающая в каждый момент
 времени с $G_0'xyz$, но отличающаяся от последней тем, что имеет
 отличную от нуля скорость поступательного движения \dot{x}_{G_0} отно-
 сительно системы координат $Oxyz$ в направлении оси Ox .

В программном движении система координат $G_0'xyz$ совпадает
 с $G_0^*x^*y^*z^*$, $G_0^*x_1y_1z_1$ переходит в $G_0^*x_1^*y_1^*z_1^*$.

На рис. 2.1 представлен переход от системы координат
 $G_0^*\tilde{x}^*\tilde{y}^*\tilde{z}^*$ к $G_0^*x^*y^*z^*$ и $G_0^*x_1^*y_1^*z_1^*$ (ось $G_0^*z^*$ перпендикулярна
 плоскости чертежа), на рис. 2.2 — переход от системы коор-
 динат $G_0^*x^*y^*z^*$ к $G_0'xyz$.

Перечислим кинематические параметры, характеризующие
 истинное движение объекта как жесткого твердого тела (см.
 рис. 2.1—2.3):

- v — скорость по траектории;
- x, y — координаты точки G_0^* в системе коорди-
 нат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$;
- θ^* — программный угол тангажа;
- ψ^* — программный угол наклона касательной
 к траектории;
- α^* — программный угол атаки;
- ϑ — вариация программного угла тангажа,
 измеряемая в плоскости тангажа;
- ψ — угол рыскания;
- φ — угол крена;
- ξ, η, ζ — смещения точки корпуса, связанной с
 центром масс G_0' , в направлении осей

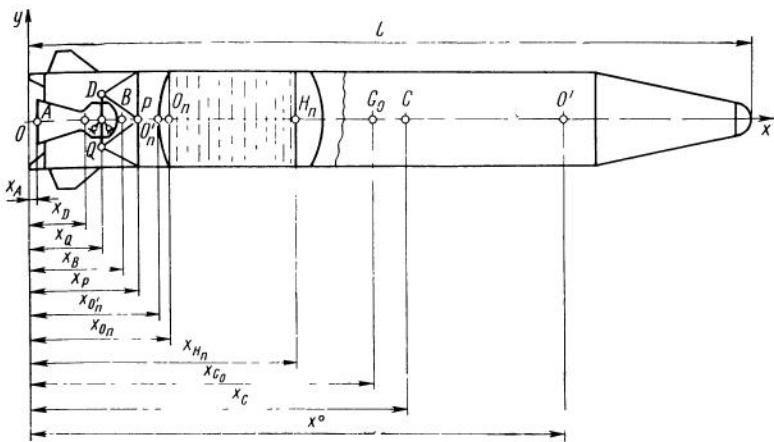


Рис. 2.4. Компоновочная схема жидкостной ракеты и координаты характерных сечений корпуса

$G_0^*x^*$, $G_0^*y^*$ и $G_0^*z^*$ относительно ее программного положения;

δ_0^* , δ_0' — программный угол поворота маршевого двигателя в кардановом подвесе относительно оси подвески Qz и вариация этого угла;

δ_y — угол поворота маршевого двигателя в кардановом подвесе относительно оси Qu ;

δ_I , δ_{II} , δ_{III} , δ_{IV} — углы поворота сопел вспомогательного двигателя;

$\delta_0^* = \delta_{II}^* = \delta_{IV}^*$; δ_{II} , δ_{IV} — программные углы поворота маршевых двигателей II и IV и вариации этих углов;

δ_I , δ_{III} — углы поворота маршевых двигателей I и III.

Если управление по тангажу и рысканию осуществляется дифференциальным изменением тяги неподвижных маршевых двигателей, то под δ_I , δ_{II} , δ_{III} , δ_{IV} , δ_I^* , δ_{III}^* будем понимать изменение тяги соответствующего двигателя, отнесенное к его номинальной тяге в данный момент (положительная величина соответствует форсированию двигателя).

При принятом определении программного движения плоскость тангажа совпадает с плоскостью стрельбы, в которой лежит траектория этого движения; углы рыскания и крена в программном движении и углы поворота маршевых двигателей относительно оси Qu тождественно равны нулю.

Обобщенные координаты δ_ϕ , δ_ψ , δ_θ , которым пропорциональны управляющие моменты относительно осей стабилизации G_0y , G_0z , G_0x , выражаются следующими формулами:

а) четыре поворотных маршевыхых двигателей (см. рис. 2.3, а):

$$\begin{aligned}\delta_\theta &= \frac{1}{2} (\delta_{II} + \delta_{IV}), \\ \delta_\varphi &= \frac{1}{2} (\delta_I + \delta_{III}), \\ \delta_\psi &= \frac{1}{4} (\delta_{III} - \delta_I + \delta_{IV} - \delta_{II});\end{aligned}\quad (2.1)$$

б) маршевый двигатель в кардановом подвесе и вспомогательные двигатели для стабилизации по крену (см. рис. 2.3, б):

$$\begin{aligned}\delta_\theta &\equiv \delta'_\theta, \quad \delta_\varphi \equiv \delta'_\varphi, \\ \delta_\psi &= \frac{1}{4} (\delta'_{III} - \delta'_I + \delta'_{IV} - \delta'_{II});\end{aligned}\quad (2.2)$$

в) четыре маршевыхых двигателя, каждый из которых может либо форсироваться («+» на рис. 2.3, в), либо дросселироваться («—» на рис. 2.3, в) и вспомогательные двигатели для стабилизации по крену:

$$\delta_\theta = \frac{1}{2} (\delta_{III} - \delta_I), \quad \delta_\varphi = \frac{1}{2} (\delta_{II} - \delta_{IV}), \quad \delta_\psi \equiv \delta'_\varphi. \quad (2.3)$$

На рис. 2.4 представлены координаты некоторых характерных сечений корпуса:

а) маршевый двигатель: x_A — срез сопла; x_Q — ось вращения; x_D — центр масс; x_B — плоскостистыковки с подводящими магистралями окислителя и горючего; x_P — силовое кольцо, через которое на корпус передается тяга;

б) бак с номером n (нумерация в направлении оси Ox): x_{O_n} — опорные шпангоуты нижнего днища (в случае несущего бака) или плоскости фиксации (в случае подвесного бака); $x_{O'_n}$ — характерная точка бака (в рассматриваемом случае — полюс нижнего днища); x_{H_n} — уровень жидкости;

в) объект в целом: x_C — центр давления аэродинамических сил; x_{G_0} — центр масс; x^0 — датчики автомата стабилизации, расположенные на гиростабилизированной платформе.

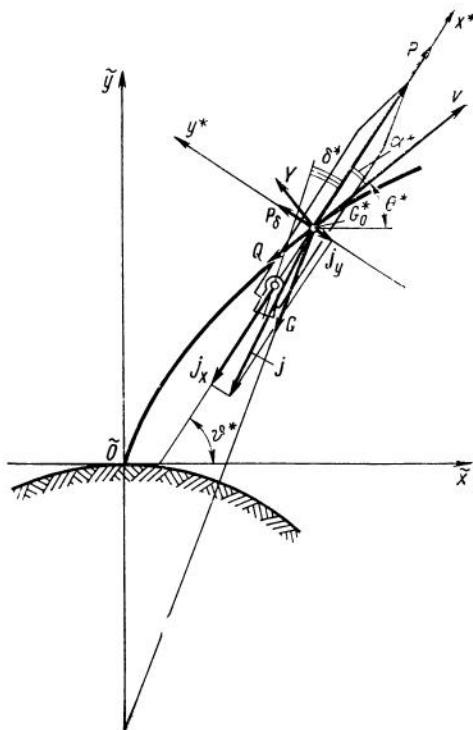
Через r_Q и r'_Q на рис. 2.3 обозначены расстояния от продольной оси корпуса до геометрической оси сопла маршевого или вспомогательного двигателя.

Будем в дальнейшем отождествлять невозмущенное движение с программным движением, реализующимся при упрощающих предположениях, характерных для постановки задач внешней баллистики (движение материальной точки переменной массы), при номинальных значениях параметров объекта и отсутствии возмущающих сил и моментов.

Рис. 2.5. Силы, действующие на ракету в невозмущенном движении на активном участке полета

В разд. 2.2 приведены дифференциальные уравнения невозмущенного движения.

Под возмущенным будем понимать движение, характеризующееся разностями между обобщенными координатами истинного и невозмущенного движения. Положим что эти разности — малые величины в том смысле что можно пренебречь их квадратами и более высокими степенями, а также квадратами и более высокими степенями соответствующих производных по времени. Тогда можно отождествлять обобщенные координаты возмущенного движения объекта как твердого жесткого тела с введенными выше вариациями ξ , η , ζ , ϑ , ψ , ϕ координат невозмущенного (программного) движения.



2.2. Уравнения невозмущенного движения

Под невозмущенным будем понимать движение, близкое к программному в том смысле, что угол тангенса и массовый секундный расход топлива можно считать равными в каждый момент времени соответствующим программным значениям, а уравнения движения объекта как тела переменной массы можно заменить упрощенными уравнениями движения материальной точки, совпадающей с центром масс системы корпус — жидкость.

На рис. 2.5 представлены основные учитываемые силы: P — проекция тяги двигателей на продольную ось объекта; Q — лобовое сопротивление; Y — подъемная сила; G — сила веса; P_δ — проекция тяги двигателей на поперечную ось объекта.

При допущениях, сформулированных выше относительно программного движения, траектория невозмущенного движения точ-

ки G_0^* относительно системы координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ — плоская кривая. Соответствующие уравнения движения используются обычно при баллистических расчетах на той стадии исследования, когда можно не учитывать вращение Земли и лишь в первом приближении учитывать ее сферичность [2].

Рассмотрим для определенности объект типа РН с пятью маршевыми двигателями, два из которых используются для управления по тангажу (первая ступень, см. рис. 2.3 и 2.4).

Уравнениям невозмущенного движения в проекции на оси $\tilde{O}\tilde{x}$ и $\tilde{O}\tilde{y}$ можно придать вид, не зависящий, если отвлечься от некоторых несущественных деталей, от того, является ли РН чисто баллистической или крылатой:

$$\begin{aligned} (m^{\circ} + m) \dot{v}_x &= P_1 \cos \vartheta^* + P_2 \cos (\vartheta^* + \delta^*) - \\ &- c_x q S \cos \theta^* - c_y q S \sin \theta^* - (m^{\circ} + m) g_x = 0; \\ (m^{\circ} + m) \dot{v}_y &= P_1 \sin \vartheta^* + P_2 \sin (\vartheta^* + \delta^*) - \\ &- c_x q S \sin \theta^* + c_y q S \cos \theta^* - (m^{\circ} + m) g_y = 0; \\ c_n^a q S (x_{G_0} - x_C) a^* + P_2 (x_{G_0} - x_Q) \sin \delta^* &= 0; \\ \dot{x} = v_x; \quad \dot{y} = v_y; \quad \dot{m} = -5\bar{\mu}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= 3P^*; \quad P_2 = 2P^*; \\ P^* &= c^*(\mu^*) \mu^* - F_a p(h); \\ a^* &= \vartheta^* - \theta^*; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \\ \operatorname{tg} \theta^* &= \frac{v_y}{v_x}; \quad h = \sqrt{(r_0 + y)^2 + x^2} - r_0; \\ q &= \frac{\rho v^2}{2}; \quad g_x = g \frac{x}{r_0}; \quad g_y = g \left(1 - \frac{2y}{r_0}\right); \quad g = g_0 \left(\frac{r_0}{r_0 + h}\right)^2; \\ c_n^a &= c_x + c_y^a; \quad c_x = c_x(M, h); \quad c_y = c_y^a(M, h) a^*; \\ \mu^* &= \mu^*(t); \quad \vartheta^* = \vartheta_i^*(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь P^* — тяга одного маршевого двигателя; c^* — скорость истечения продуктов сгорания в пустоту; μ^* — массовый секундный расход топлива, соответствующий одному двигателю; $\mu^*(t)$ — программа изменения секундного расхода (обычно на всем активном участке полета, за исключением небольших интервалов времени, можно считать $\mu^*(t) = \text{const}$); m — суммарная масса жидкости; m° — масса сухого объекта; g_0 — ускорение силы

тяжести на поверхности невращающейся сферической Земли; r_0 — радиус сферической Земли; g_x , g_y — компоненты ускорения силы тяжести по осям $\tilde{O}\tilde{x}$ и $\tilde{O}\tilde{y}$ с точностью до членов первого порядка относительно малых величин x/r_0 и y/r_0 ; $\delta^*(t)$ — программа изменения угла тангажа (которая, конечно, будет различной у баллистической и крылатой РН); q — скоростной напор; ρ — массовая плотность воздуха на высоте h ; p — атмосферное давление на высоте h ; M — число Маха; S — площадь миделевого сечения; F_a — площадь выходного сечения сопла маршевого двигателя; c_x , c_y — коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы; c_n^α — градиент коэффициента нормальной аэродинамической силы. Остальные обозначения ясны из рис. 2.4.

Первые два уравнения (2.4) представляют собой уравнения сил, третье — упрощенное уравнение моментов; последние — кинематические соотношения и уравнение, вытекающее из определения μ^* .

Уравнения (2.4) можно несколько упростить, если учесть малость углов δ^* и α^* , что и будет сделано при выводе выражений для компонента ускорения по осям системы координат $G_0^*x^*y^*$. Обозначим это ускорение, как и выше, через j , а его проекции на отрицательные направления осей $G_0^*x^*$ и $G_0^*y^*$ — через j_x и j_y соответственно. Компоненты j_x и j_y в силу принципа Даламбера представляют собой отнесенные к полной массе объекта суммы проекций на оси $G_0^*x^*$ и $G_0^*y^*$ действующих на него поверхностных сил:

$$\begin{aligned} j_x &= P_1 + P_2 \cos \delta^* - c_x q S \cos \alpha^* + c_y q S \sin \alpha^*; \\ j_y &= P_2 \sin \delta^* + c_y q S \cos \alpha^* + c_x q S \sin \alpha^*. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Полагая

$$\sin \alpha^* \approx \alpha^*, \quad \sin \delta^* \approx \delta^*, \quad \cos \alpha^* \approx 1,$$

$$\cos \delta^* \approx 1, \quad c_y = c_y^\alpha \alpha^*, \quad c_n^\alpha = c_x + c_y^\alpha,$$

получим

$$j_x \approx \frac{P - c_x q S}{m^\circ + m}; \quad j_y \approx \frac{P_2 \delta^* + c_n^\alpha q S \alpha^*}{m^\circ + m}$$

или после исключения δ^* с помощью третьего из уравнений (2.4)

$$j_x \approx \frac{P - c_x q S}{m^\circ + m}; \quad j_y \approx \frac{c_n^\alpha q S (x_C - x_Q) \alpha^*}{(m^\circ + m)(x_{G_0} - x_Q)}. \quad (2.7)$$

Тангенс угла наклона вектора \mathbf{j} к оси O^*x^* определяется формулой

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \frac{c_n^2 q S (x_C - x_Q) \alpha^*}{P - c_x q S}. \quad (2.8)$$

В случае баллистических РН в правой части уравнения (2.8) стоит малая величина порядка α^* , так что $\gamma \sim \alpha^*$, т. е. направление вектора \mathbf{j} близко к антипараллельному оси O^*x^* . Соответственно свободная поверхность жидкости в невозмущенном движении баллистической РН близка к плоскости, перпендикулярной продольной оси.

В случае крылатой РН или баллистической РН с крылатой последней ступенью (см. рис. 0.4, 0.5) это утверждение, вообще говоря, уже несправедливо и возможна ситуация, когда угол γ не мал, т. е. нормаль к невозмущенной свободной поверхности заметно отклоняется от продольной оси корпуса.

Система уравнений (2.4), (2.5) может быть проинтегрирована численно с использованием таблицы стандартной атмосферы и значений аэродинамических коэффициентов в функции числа Маха и высоты. В дальнейшем предполагается, что эта операция выполнена в процессе проведения баллистических расчетов, так что функции $j(t)$, $v(t)$, $q(t)$ и т. д. известны и могут быть использованы для расчета коэффициентов уравнений возмущенного движения.

Точно так же предполагается известной функция $\gamma^*(t)$, определяющая положение невозмущенной свободной поверхности жидкости в баках. (Говоря о невозмущенной свободной поверхности, мы пренебрегаем малыми по сравнению с j ускорениями, связанными с вращением корпуса в плоскости тагажа в процессе программного движения).

2.3. Уравнения возмущенного движения баллистической РН в плоскостях стабилизации

Если обобщенные координаты, соответствующие истинному движению, обозначить знаком \sim , а невозмущенному, как и раньше,—знаком $*$, то обобщенные координаты, характеризующие возмущенное движение объекта в плоскостях стабилизации и в направлении продольной оси, определяются так:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= \tilde{\eta} - \eta; \quad \dot{\psi} = \tilde{\psi} - \psi^* \equiv \tilde{\psi}; \quad \dot{\varphi} = \tilde{\varphi} - \varphi^* \equiv \tilde{\varphi}; \\ \ddot{\xi} &= \tilde{\xi} - \xi; \quad \dot{\eta} = \tilde{\eta} - \eta; \quad \dot{\zeta} = \tilde{\zeta} - \zeta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если разложить левые части полных уравнений пространственного движения в ряды Тэйлора в окрестности значений обобщенных координат, соответствующих невозмущенному движению, и пренебречь членами второго и более высокого порядка малости

относительно ξ , η , ζ , φ , ψ , θ и их производных по времени, то при допущениях, сделанных выше, уравнения возмущенного движения баллистической РН с осесимметричным корпусом распадаются на три независимые системы, соответствующие плоскостям тангажа, рыскания и крена [1], и систему уравнений возмущенного движения в направлении продольной оси, в которую входят и параметры движения в плоскости тангажа. То же самое в первом приближении справедливо и для первой ступени вертикально стартующей системы с крылатой последней ступенью типа представленной на рис. 0.3 (первая ступень аналогична баллистической РН с двумя плоскостями симметрии).

В случае крылатой ступени РН, имеющей одну плоскость симметрии, независимыми, как и у самолета, оказываются только уравнения продольно-поперечного и бокового движений. Движения в плоскости рыскания и крена уже не разделяются.

Опираясь на эти результаты, можно составлять соответствующие частные системы независимо. Проиллюстрируем это на примере уравнений возмущенного движения в плоскости рыскания баллистической РН тандемной схемы с отклоняемыми маршевыми двигателями (см. рис. 2.3, а).

Используя принцип затвердения [7], можно записать уравнения количества движения и кинетического момента для фиктивного твердого тела, имеющего постоянную центровку, массу и момент инерции, соответствующие РН с находящимися внутри массами жидкости и газа, включив в правую часть реактивные, кориолисовы, аэродинамические и управляющие силы.

Воспользуемся выражением (1.37) и пренебрежем инерционными и кориолисовыми силами, связанными с поворотом двигателя, которые малы при характерных частотах колебаний РН как твердого жесткого тела с АС. В результате получим, учитывая малость угла скольжения β , угла рыскания ψ и угла отклонения двигателей δ_ψ ,

$$\begin{aligned}
 (m^3 + m) \dot{\xi} \Big|_{\dot{x}_{G_0} = 0} &= -P\psi + c_x qS(\psi - \beta) - \\
 &- c_z^3 qS\beta - c_n^y qS \frac{l}{v} \dot{\psi} - 2 \left(N \sum_{n=1}^2 \mu_n^* x_{H_n} - \tilde{\mu} x_A \right) \dot{\psi} - 2P^* \delta_\psi + P_z(t); \\
 (J^3 + J^*) \ddot{\psi} &= -c_n^3 qS(x_{G_0} - x_C)\beta - m_y^y qS \frac{l^2}{v} \dot{\psi} + \\
 &+ \left[N \sum_{n=1}^2 \mu_n^* (x_{H_n} - x_{G_0})^2 - \tilde{\mu} (x_{G_0} - x_A)^2 \right] \dot{\psi} - \\
 &- 2P^* (x_{G_0} - x_Q) \delta_\psi + M_{G_0 y}(t). \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Здесь c_z^β , c_n^β — градиенты коэффициентов боковой аэродинамической силы в поточной и связанной системах координат;

μ_n^* — массовый секундный расход n -го компонента топлива через один двигатель;

$c_n^{\omega y}$, $m_y^{\omega y}$ — безразмерные коэффициенты аэродинамической демпфирующей силы и момента;

J° , J^* — моменты инерции корпуса и затвердевшей жидкости относительно экваториальной оси, проходящей через центр масс G_0 ;

$P_z(t)$, $M_{G_0y}(t)$ — проекции на соответствующие оси главного момента относительно точки G_0 возмущающих сил, заданных как функции времени;

N — число маршевых двигателей.

(остальные обозначения ясны из рис. 2.4).

До сих пор не было необходимости различать системы координат G_0xyz и G'_0xyz . Однако относительное движение системы координат G'_0xyz из-за изменения центровки по времени дает дополнительную кориолисову силу, которая должна быть учтена при переходе от $\zeta|_{\dot{x}_{G_0}=0}$ к ζ при $\dot{x}_{G_0} \neq 0$, где \dot{x}_{G_0} — скорость движения центра масс G_0 относительно корпуса.

Абсолютное ускорение w_G точки G_0 складывается из переносного ускорения $w_{G_0}^{(e)}$ точки G_0' , относительного ускорения $w_{G_0}^{(r)}$ в движении G'_0 относительно G_0 и кориолисова ускорения $w_{G_0}^{(k)}$:

$$w_{G_0} = w_{G_0}^{(e)} + w_{G_0}^{(r)} + w_{G_0}^{(k)}, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} w_{G_0} &= i_3 \ddot{\zeta}|_{\dot{x}_{G_0}} \neq 0; \quad w_{G_0}^{(r)} \approx i_1 \ddot{x}_{G_0}; \\ w_{G_0}^{(e)} &= i_3 \ddot{\zeta}|_{\dot{x}_{G_0}}; \quad w_{G_0}^{(k)} \approx -2i_3 \dot{x}_{G_0} \dot{\psi}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

i_k ($k=1, 2, 3$) — орты системы координат $G_0^*x^*y^*z^*$. Производные по времени вычисляются в системе координат G'_0xyz .

Функция $x_{G_0}(t)$ определяется формулой

$$x_{G_0} = \frac{L^\circ + \sum_{n=1}^k L_n}{m^\circ + m}, \quad (2.13)$$

где L° — статический момент объекта без жидкости; L_n — статический момент жидкости в n -м баке.

Отсюда, обозначив $\tilde{\mu}(x_B) = \tilde{\mu} = N\mu_n^*$, получим

$$\dot{x}_{G_0} = \frac{\tilde{\mu} x_{G_0} - N \sum_{n=1}^2 x_{H_n} \mu_n^*}{m^\circ + m}. \quad (2.14)$$

Проектируя левую и правую части векторного равенства (2.11) на ось $G_0^*z^*$ и учитывая формулу (2.14), получим

$$\ddot{\xi} = \dot{\xi}|_{\dot{x}_{G_0} = 0} - \frac{2 \left(\tilde{\mu} x_{G_0} - N \sum_{n=1}^{2m} x_{H_n} \mu_n^* \right) \dot{\psi}}{m^\circ + m}. \quad (2.15)$$

Учтем еще, что в рассматриваемом случае

$$\dot{\psi} = \psi + \frac{\dot{\zeta} - w}{v}; \quad c_n^\beta = c_x + c_z^\beta. \quad (2.16)$$

Подстановка выражений (2.15) и (2.16) в (2.10) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} & (m^\circ + m) \ddot{\xi} + \frac{c_n^\beta q S}{v} \dot{\xi} + \left[c_n^{\omega y} q S \frac{l}{v} + 2 \tilde{\mu} (x_{G_0} - x_A) \right] \dot{\psi} + \\ & + (P + c_z^\beta q S) \psi + 2 P^* \delta_\psi = c_n^\beta q S \frac{w}{v} + P_z^\circ(t); \\ & (J^\circ + J^*) \ddot{\psi} + \frac{c_n^\beta q S}{v} (x_{G_0} - x_C) \dot{\xi} + \\ & + \left[m_y^{\omega y} q S \frac{l^2}{v} + \tilde{\mu} (x_{G_0} - x_A)^2 - N \sum_{n=1}^2 \mu_n^* (x_{H_n} - x_{G_0})^2 \right] \dot{\psi} + \\ & + c_n^\beta q S (x_{G_0} - x_C) \dot{\psi} + 2 P^* (x_{G_0} - x_Q) \delta_\psi^\circ = \\ & = c_n^\beta q S (x_{G_0} - x_C) \frac{w}{v} + M_{G_0 y}^\circ(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь явно выделены в правой части ветровые возмущения.

Присоединив к (2.17) уравнение (1.1), описывающее автомат стабилизации, получим полную систему уравнений возмущенного движения в плоскости рыскания РН как жесткого твердого тела.

Аналогичным образом получаются уравнения возмущенного движения в плоскостях тангажа и крена. Приведем эти уравнения, записанные в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} + a'_{\eta\eta} \dot{\eta} + a'_{\eta\vartheta} \dot{\vartheta} + a_{\eta\delta} \delta_\vartheta + a_{\eta\delta} \delta_\vartheta &= a'_{\eta\eta} w_\eta + \bar{P}_y^\circ(t); \\ \dot{\vartheta} + a'_{\vartheta\eta} \dot{\eta} + a'_{\vartheta\vartheta} \dot{\vartheta} + a_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta + a_{\vartheta\delta} \delta_\vartheta &= a'_{\vartheta\eta} w_\eta + \bar{M}_{G_0 z}^\circ(t); \\ \delta_\vartheta + \delta_\vartheta^* &= \mathcal{L}'_1(\vartheta) + \mathcal{L}'_2(\eta); \\ \eta^\circ &= \eta + (x - x_{G_0}) \vartheta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\phi}\psi + a_{\zeta\delta}\delta_\psi = a'_{\zeta\zeta}w_\zeta + \bar{P}_z^\circ(t);$$

$$\ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\phi}\psi + a_{\psi\delta}\delta_\psi = a'_{\psi\zeta}w_\zeta + \bar{M}_{G_0y}^\circ(t);$$

$$\delta_\psi = \mathcal{L}'_1(\psi) - \mathcal{L}'_2(\zeta^\circ); \quad (2.19)$$

$$\zeta^\circ = \zeta - (x^\circ - x_{G_0})_i^i.$$

$$\varphi + a'_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} + a_{\varphi\delta}\delta_\varphi = \bar{M}_{G_0x}^\circ(t);$$

$$\delta_\varphi = \mathcal{L}'_3(\varphi). \quad (2.20)$$

Здесь w_ζ и w_ψ — составляющие скорости ветра в проекции на оси G_0y^* и G_0z^* .

Выражения для коэффициентов этих уравнений с поправками на подвижность жидкости приведены в гл. 4.

ГЛАВА 3

РАКЕТА КАК ЖЕСТКОЕ ТЕЛО С ОТСЕКАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

3.1. Предварительные замечания

Задача о динамическом взаимодействии жидкости, частично заполняющей некоторые полости внутри твердого тела, и тела привлекла к себе внимание исследователей в 50-е годы, главным образом в связи с бурным развитием ракетно-космической и отчасти авиационной техники. Первые отечественные работы, содержащие основные уравнения, связанные с этим аспектом задачи, выведены Г. С. Наримановым [36] и Д. Е. Охочимским [38].

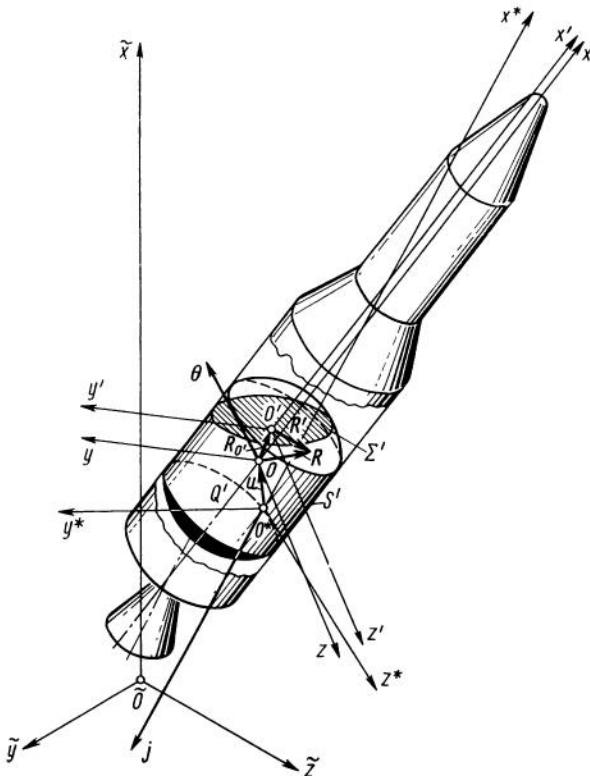


Рис. 3.1. Системы координат и основные обозначения в случае ракеты с жестким корпусом при наличии в баке жидкости со свободной поверхностью

Обширный цикл работ, связанных с динамикой твердого тела с жидким заполнением как одним из разделов механики деформируемых систем, начатый работой Л. Н. Сретенского [55], принадлежит Н. Н. Моисееву и В. В. Румянцеву [31, 32, 34]. Первые зарубежные работы Абрамсона, Бауэра, Майлса и других иностранных исследователей, посвященные этой проблеме, также появились в начале 50-х годов (см., обзорную статью [64]).

В последующие годы появилась обширная литература по динамике жидкости в подвижных полостях и уравнениям движения соответствующих систем применительно к задачам ракетно-космической техники. Подробная библиография приведена в книгах [29, 30, 35]. Исследования автора в этой области, опубликованы в ряде статей, в частности [41], и в книгах [29, 30].

Следует подчеркнуть, что в течение ряда лет в подавляющем большинстве опубликованных работ жидкость считалась идеальной.

Полное решение задачи об учете вязкости жидкости, частично заполняющей полость, в случае больших чисел Рейнольдса, при составлении уравнений возмущенного движения системы тело — жидкость, представляющее особый интерес для практики, было получено Ф. Л. Черноусько [59, 60, 61].

Как было показано В. М. Роговым и автором [47], аналогичные уравнения оказалось возможным получить более простым методом, допускающим обобщение на случай отсеков с внутренними ребрами (см. также [29, 30, 44]). Ниже мы следуем в основном работам [29, 30].

3.2. Основные допущения. Краевые задачи для составляющих потенциала смещений

Будем рассматривать корпус РН как жесткое твердое тело с полостью произвольной конфигурации, частично заполненной жидкостью, частично — газом (рис. 3.1). Переменность массы жидкости принимается во внимание в разд. 3.5, в остальных разделах она считается постоянной.

Воспользуемся системами координат $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, $O^*x^*y^*z^*$, $Oxyz$, введенными в гл. 2, считая $\gamma \approx 0$ (2.8), т. е. ось O^*x^* антипараллельной вектору j .

Введем дополнительно систему координат $O'x'y'z'$ с осями, параллельными осям системы $Oxyz$.

Точки O' и O являются в общем случае произвольными точками корпуса.

Обозначим смоченную поверхность полости, свободную поверхность жидкости и область, занятую жидкостью, в произвольный момент времени через S' , Σ' и Q' соответственно. Через S , Σ и Q обозначим те же характеристики, отнесенные к невозмущенному движению.

Введем следующие основные допущения, вытекающие из допущений гл. 2.

1. Механическая система, являющаяся объектом исследования, включает в себя:

а) твердое, абсолютно жесткое тело;

б) однородную несжимаемую маловязкую жидкость.

2. Невозмущенное движение имеет следующий характер:

а) угловая скорость и угловое ускорение системы координат $O^*x^*y^*z^*$ относительно $\tilde{O}\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ пренебрежимо малы;

б) поле массовых сил, действующих в системе координат $O^*x^*y^*z^*$ (гравитационных и инерционных), потенциальное, хотя в общем случае может быть нестационарным; градиент этого поля обозначим через j , потенциал — через U .

При сделанных допущениях имеют место следующие соотношения:

$$j = j(t) = \text{grad } U; \quad U = -jx^*,$$

где

$$j(t) \geq j_{\min} > 0.$$

При рассмотрении возмущенного движения будем пользоваться следующим допущениями:

1) перемещения и скорости всех частиц жидкости и стенок полости малые в том смысле, что можно пренебречь членами второго и более высокого порядка малости по сравнению с линейными;

2) ускорения всех частиц жидкости малы по сравнению с j ;

3) число Рейнольдса велико в том смысле, что жидкость ведет себя как идеальная во всем объеме Q , кроме тонкого пристеночного слоя (пограничного слоя);

4) число Бонда, соответствующее j_{\min} , велико в том смысле, что можно пренебречь поверхностным натяжением (см. гл. 1);

5) начальное движение жидкости — безвихревое во всем объеме Q , за исключением тонкого пристеночного пограничного слоя.

В соответствии с этими допущениями и допущением о потенциальности поля массовых сил невозмущенного движения движение жидкости будет в силу теоремы Лагранжа потенциальным в любой момент времени во всем объеме Q , где справедлива концепция идеальной жидкости. Кроме того, сформулированные допущения позволяют отнести граничные условия

на твердых стенах полости к невозмущенной смоченной поверхности, а условия на возмущенной свободной поверхности Σ' к невозмущенной поверхности Σ , совпадающей с плоскостью, перпендикулярной оси O^*x^* .

Возмущенное движение тела будем характеризовать векторами малого перемещения $\mathbf{u}(t)$ точки O относительно O^* и малого поворота $\theta(t)$ системы координат $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$. В дальнейшем уравнение сил проектируется на оси системы координат $O^*x^*y^*z^*$, а уравнение моментов — на оси системы координат $Oxyz$. Соответствующим проекциям будем приписывать индексы 1, 2, 3. Такой метод проектирования отвечает ориентации всей чувствительности датчиков систем НС, БС и гиродатчиков системы УС (см. гл. 1, 2).

Для описания кинематической картины движения жидкости введем, следуя Д. Е. Охочимскому, потенциал смещений χ , связанный с потенциалом скоростей χ' уравнением

$$\chi' = \frac{d\chi}{dt}. \quad (3.1)$$

Очевидно, что для потенциала малых смещений справедливы те же соотношения, что и для потенциала скоростей:

$$\mathbf{w} = \nabla \chi; \quad (3.2)$$

$$\Delta \chi = 0, \quad (3.3)$$

где \mathbf{w} — вектор смещения частиц жидкости;
 ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа соответственно,

$$\begin{aligned} \nabla &= i_1 \frac{\partial}{\partial x} + i_2 \frac{\partial}{\partial y} + i_3 \frac{\partial}{\partial z}; \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Вектор смещения \mathbf{w} играет здесь ту же роль, что и вектор скорости частицы жидкости при описании кинематической картины движения жидкости с помощью потенциала скоростей. Как будет видно ниже, использование потенциала смещений в рассматриваемой задаче позволяет избежать искусственного повышения порядка уравнений движения, не связанного с ее физическим существом.

Сформулируем теперь граничные условия, которым должна удовлетворять функция χ .

На смоченной поверхности имеет место условие непроницаемости твердых стенок, которое в соответствии со сделанными допущениями можно отнести к поверхности S .

На свободной поверхности жидкости должно выполняться кинематическое условие, вытекающее из определения Σ как границы раздела сред, и динамическое условие, выражющее постоянство давления на границе раздела жидкой и газовой сред.

[18]. Эти условия также можно отнести к невозмущенной свободной поверхности Σ .

Представим потенциал смещений в виде следующей суммы:

$$\chi = (\mathbf{u}, \Phi) + (\theta, \Psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n s_n, \quad (3.4)$$

где $\Phi(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, $\Psi(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ — гармонические векторные функции, компоненты которых являются потенциалами смещений частиц жидкости при «очень медленных» движениях тела, когда волны на свободной поверхности не возбуждаются и последняя остается плоскостью, параллельной поверхности Σ ; $\Phi_2(x, y, z)$ и $\Psi_3(x, y, z)$ — потенциалы смещений частиц жидкости в плоскости $O^*x^*y^*$, причем Ψ_3 — потенциал смещений в результате малого поворота тела вокруг оси Oz ; $\Phi_3(x, y, z)$ и $\Psi_2(x, y, z)$ — потенциалы смещений при движении в плоскости $O^*x^*z^*$; $\Phi_1(x, y, z)$ и $\Psi_1(x, y, z)$ — потенциалы смещений при движении в направлении оси O^*x^* и вращении вокруг оси Ox ; $\varphi_n(x, y, z)$ — гармонические функции, за которые примем собственные функции краевой задачи о колебаниях жидкости в неподвижной полости той же конфигурации (формы собственных колебаний жидкости при малых волновых движениях на свободной поверхности).

Считая, что в рассматриваемый момент системы координат $Oxyz$ и $O^*x^*y^*z^*$ совпадают, можно не различать координаты x, y, z и $x^*y^*z^*$, что и делается ниже, если нет специальной оговорки; $s_n(t)$ — коэффициенты разложения некоторой гармонической функции в обобщенный ряд Фурье по функциям φ_n при фиксированном значении x , соответствующем поверхности Σ .

В дальнейшем коэффициенты s_n принимаются наряду с векторами \mathbf{u} и θ за обобщенные координаты рассматриваемой механической системы. При $s_n \rightarrow 0$ ($n=1, 2, \dots$) волновые движения отсутствуют. Бесконечный ряд в сумме (3.4) будем полагать сходящимся абсолютно и равномерно в области Q на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$ вместе со своими вторыми производными по x, y, z, t . Для функций φ_n примем следующую нормировку:

$$\frac{\partial \varphi_n(x, y^0, z^0)}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = 1, \quad (3.5)$$

где y^0, z^0 — координаты некоторой фиксированной точки, выбираемой в каждом конкретном случае, лежащей на линии пересечения поверхности S и плоскости Σ .

Введенная нормировка (3.5) позволяет дать следующую простую интерпретацию обобщенной координате s_n : это смещение точки свободной поверхности с координатами y^0, z^0 в направлении оси O^*x^* при n -й форме собственных колебаний жидкости.

Функции φ_n удовлетворяют, как известно, следующим граничным условиям [18]:

$$\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \frac{\omega_n^2}{j} \varphi_n \right) \Big|_{\Sigma} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \Big|_S = 0, \quad (3.6)$$

где ω_n^2 — квадрат частоты n -й формы собственных колебаний жидкости в неподвижной полости;

ν — орт внешней нормали к поверхности S .

Обозначив

$$\psi_n(y, z) = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \Big|_{\Sigma}, \quad (3.7)$$

в силу условий (3.5) и (3.6) получим

$$\psi_n = \frac{\varphi_n(x, y, z)}{\varphi_n(x, y^0, z^0)} \Big|_{\Sigma} = x_n \varphi_n \Big|_{\Sigma}; \quad x_n = \frac{\omega_n^2}{j}. \quad (3.8)$$

Исходя из уравнения неразрывности, имеем для любого замкнутого жидкого объема соотношение

$$\oint_{S+\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS = 0.$$

Комбинируя его с условиями (3.6), можно установить ортогональность функций ψ_n и φ_n константе на поверхности Σ :

$$\int_{\Sigma} \varphi_n dS = 0; \quad \int_{\Sigma} \psi_n dS = 0. \quad (3.9)$$

В соответствии со сказанным выше кинематическим граничным условиям можно придать следующий вид:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \nu} \Big|_S = (\mathbf{u}, \nu) + (\theta, \mathbf{R} \times \nu); \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = (\mathbf{u}, \nu) + (\theta, \mathbf{R}_{O'} \times \nu) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \psi_n,$$

где ν — орт внешней нормали к области Q ;

\mathbf{R} — радиус-вектор произвольной точки поверхности S с началом в произвольной точке O ;

$\mathbf{R}_{O'}$ — радиус-вектор произвольной точки, лежащей на оси $O'x'$, проходящей через центр тяжести C площади свободной поверхности Σ жидкости, затвердевшей в невозмущенном состоянии.

Первые два слагаемых во втором из условий (3.10) характеризуют поступательное перемещение свободной поверхности в направлении оси O^*x^* , последнее слагаемое — волновые движения.

При принятой концепции можно всю кинематику и динамику жидкости описать в рамках теории идеальной жидкости, а вязкость учесть независимо по теории пограничного слоя. В частности, при формулировке динамического граничного условия на свободной поверхности жидкости можно воспользоваться интегралом Лагранжа — Коши, из которого получим после линеаризации следующее выражение для давления в произвольной точке жидкости [18]:

$$\frac{p}{\rho} = - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - j x^* + \pi(t), \quad (3.11)$$

где ρ — массовая плотность жидкости;
 $\pi(t)$ — произвольная функция времени.

Поскольку поле массовых сил обладает потенциалом в системе координат $O^*x^*y^*z^*$, но не в системе $Oxyz$, в формуле (3.11) x^* нельзя заменить x . На свободной поверхности имеем

$$p = p_0; \quad x^* = x_{\text{B}} + \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

где p_0 — давление газа, заполняющего пространство над жидкостью;

x_{B} — апликата невозмущенной свободной поверхности в системе координат $O^*x^*y^*z^*$.

Введя новую произвольную функцию времени

$$\varphi(t) = \pi(t) - \frac{p_0}{\rho} - j x_{\text{B}}^*,$$

получим из выражения (3.11) следующее динамическое условие на свободной поверхности жидкости:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + j \frac{\partial \chi}{\partial x} = \varphi(t). \quad (3.12)$$

Выберем функцию $\varphi(t)$ из условия

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + j \frac{\partial \chi}{\partial x} - \varphi(t) \right) dS = 0.$$

В результате получим

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} dS + \frac{j}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial \chi}{\partial x} dS$$

или, принимая во внимание соотношения (3.4), (3.9) и (3.10),

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(u, \int_{\Sigma} \Phi dS \right) + \left(\theta, \int_{\Sigma} \Psi dS \right) \right] + \\ & + j [(u, v) + (\theta, R_{O'} \times v)]|_{\Sigma}. \end{aligned}$$

В результате граничное условие (3.12) на поверхности Σ приобретает форму

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\chi - \frac{1}{\Sigma} \left(\mathbf{u}, \int_{\Sigma} \Phi dS \right) - \frac{1}{\Sigma} (\theta, \int_{\Sigma} \Psi dS) \right] + \\ & + j \left[\frac{\partial \chi}{\partial x} - (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\theta, \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Переходим к начальным условиям, характеризующим поле смещений и скоростей частиц жидкости в момент $t=0$. Как известно, эти условия заключаются в задании формы свободной поверхности жидкости и распределения нормальных скоростей во всех ее точках [18]. Обозначим ту часть аппликаты произвольной точки возмущенной свободной поверхности, которая характеризует волны, через $\xi(y, z, t)$. По определению

$$\xi(y, z, t) = \left[\frac{\partial \chi}{\partial x} - (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\theta, \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v}) \right] \Big|_{\Sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n s_n. \quad (3.14)$$

Начальные условия при $t=0$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi(y, z, t)|_{t=0} &= \xi_0(y, z); \\ \frac{d\xi}{dt}(y, z, t) \Big|_{t=0} &\approx \frac{\partial \xi}{\partial t}(y, z, t) \Big|_{t=0} = \dot{\xi}_0(y, z). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Функции ξ_0 и $\dot{\xi}_0$ не могут быть выбраны произвольно, а должны быть подчинены условиям, вытекающим из уравнений сохранения массы и неразрывности:

$$\int_{\Sigma} \xi_0(y, z) dS = 0; \quad \int_{\Sigma} \dot{\xi}_0(y, z) dS = 0. \quad (3.16)$$

Разлагая ξ_0 и $\dot{\xi}_0$ в обобщенные ряды Фурье по функциям $\psi_n(y, z)$

$$\xi_0(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n0} \psi_n; \quad (3.17)$$

$$\dot{\xi}_0(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_{n0} \psi_n,$$

можно придать условиям (3.17) следующую форму:

$$s_n(0) = s_{n0} = \frac{\int_{\Sigma} \xi_0(y, z) \psi_n dS}{\int_{\Sigma} \psi_n^2 dS}; \quad (3.18)$$

$$\frac{ds_n}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{s}_{n0} = \frac{\int_{\Sigma} \xi_0(y, z) \psi_n dS}{\int_{\Sigma} \psi_n^2 dS} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Таким образом, мы получили и начальные условия для обобщенных координат и скоростей s_n и \dot{s}_n ($n=1, 2, \dots$).

Из определения функций Φ , Ψ и φ_n (3.4), (3.10) и (3.6) вытекают следующие дифференциальные уравнения и граничные условия для составляющих потенциала смещений:

$$\Delta \Phi = 0; \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big|_{S+\Sigma} = v. \quad (3.19)$$

$$\Delta \Psi = 0; \frac{\partial \Psi}{\partial v} \Big|_S = R \times v; \frac{\partial \Psi}{\partial v} \Big|_{\Sigma} = R_{O'} \times v. \quad (3.20)$$

$$\Delta \varphi_n = 0; \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \Big|_S = 0; \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \Big|_{\Sigma} = \chi_n \varphi_n |_{\Sigma}, \quad (3.21)$$

где

$$\chi_n = \frac{\omega_n^2}{j}; \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \Big|_{\Sigma} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = \psi_n.$$

Таким образом, мы пришли к неоднородным краевым задачам (3.19) и (3.20) для векторных гармонических функций Φ и Ψ и однородной задаче (3.21) для функций φ_n .

Первая из этих задач решается элементарно. Легко видеть, что ее решение имеет вид

$$\Phi = R + C, \quad (3.22)$$

где C — произвольный постоянный вектор, который, не нарушая общности, можно принять равным нулю.

В этом случае для составляющих функции Φ получим следующие выражения:

$$\Phi_1 = x; \Phi_2 = y; \Phi_3 = z. \quad (3.23)$$

Непосредственная проверка приводит к равенствам

$$\Delta \Phi_1 = \Delta \Phi_2 = \Delta \Phi_3 = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} = \cos(\hat{v}, x) = v_x;$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v} = \cos(\hat{v}, y) = v_y;$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} = \cos(\hat{v}, z) = v_z.$$

Выражение (3.22) является решением краевой задачи (3.19), а следовательно, исчерпывает все возможные решения. В дальнейшем будем полагать, как и в выражениях (3.23), $C_1 = C_2 = -C_3 = 0$. Функцию Ψ можно записать в следующем виде:

$$\Psi = \Psi' + R_{O'} \times R = \Psi' + R_{O'} \times R'. \quad (3.24)$$

Функция Ψ' является решением следующей краевой задачи:

$$\Delta \Psi' = 0; \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = R' \times \nu; \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = 0,$$

где

$$R' = R - R_{O'} = \Phi'.$$

По аналогии с (3.24) последнее соотношение запишем так:

$$\Phi = \Phi' + R_{O'}. \quad (3.26)$$

Элементарного решения краевой задачи (3.25) не существует. Однако принципиально решение ее возможно во всех случаях, представляющих интерес для инженерной практики.

3.3. Общие уравнения возмущенного движения

Начнем с уравнений движения жидкости. В соответствии со схемой, намеченной выше, пренебрежем сначала силами вязкости. Тогда можно непосредственно воспользоваться граничным условием (3.13), которое с помощью выражения (3.4) и граничных условий (3.21) переписывается после умножения на ρ в виде

$$\begin{aligned} \rho \left(\ddot{u}, \Phi - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi dS \right) + \rho \left(\ddot{\theta}, \Psi - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Psi dS \right) = \\ = -\rho j \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{s}_n + \omega_n^2 s_n) \frac{\psi_n}{\omega_n^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Разложим левую часть этого уравнения в обобщенный ряд Фурье по функциям ψ_n . Поскольку функции, на которые скалярно умножаются \ddot{u} и $\ddot{\theta}$, по построению ортогональны константе на области Σ , система функций ψ_n обладает полногой, обеспечивающей возможность проведения этой операции.

Учитывая ортогональность функций ψ_n на области Σ , вытекающую из их определения (3.7), найдем из равенства (3.27)

$$\frac{dK_n}{dt} = P_n^{(s)} + P_n^{(d)} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.28)$$

где

$$P_n^{(d)} = -(\ddot{\mathbf{u}}, \lambda_n) - (\ddot{\theta}, \lambda_{on}); P_n^{(s)} = -\mu_n \omega_n^2 s_n;$$

$$K_n = \mu_n \dot{s}_n; \quad \mu_n = \rho \oint_{S+\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS = \frac{\rho j N_n^2}{\omega_n^2}; \quad N_n^2 = \int_{\Sigma} \psi_n^2 dS; \quad (3.29)$$

$$\lambda_n = \int_{\Sigma} \Phi \psi_n dS; \quad \lambda_{on} = \int_{\Sigma} \Psi \psi_n dS.$$

Уравнения (3.28) можно рассматривать как уравнения Лагранжа, описывающие движение жидкости в подвижной полости, в которых роль обобщенных координат играют s_n ($n=1, 2, \dots$). Эффект вязкости жидкости, учитываемой в рамках концепции пограничного слоя, проявляется в появлении в правой части каждого из уравнений (3.28) дополнительной обобщенной силы $P_n^{(f)}$, учитывающей диссипацию энергии. Эту силу мы получим ниже, рассматривая выражение для скорости диссипации полной энергии системы.

Обратимся теперь к вычислению главного вектора и главного момента относительно точки O системы сил, действующих на стенки полости со стороны жидкости. Эти силы разделим на три группы.

1. Гидростатические силы, зависящие только от углового положения системы координат $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$ (т. е. от компонентов θ_2 и θ_3 вектора θ , поскольку поворот на малый угол θ_1 вокруг оси Ox не меняет гидростатических сил). Эти силы не связаны с ускорениями, возникающими при движении системы координат $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$.

2. Гидродинамические силы, обусловленные динамическим давлением, действующим в идеальной жидкости по нормали к стенке, зависящие от изменения во времени количества движения жидкости в области Q , т. е. от производных $\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\theta}, \dot{s}_n$ ($n=1, 2, \dots$), но не зависящие от положения $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$ (с точностью до малых первого порядка).

3. Гидродинамические силы, обусловленные вязкостью жидкости, проявляющейся в пограничном слое в форме тангенциальных сил трения, зависящих от производных $\dot{\theta}$ и s_n ($n=1, 2, \dots$).

Как известно, главный вектор гидростатических сил $\mathbf{P}^{(s)}$ приложен в центре масс жидкости и коллинеарен вектору \mathbf{j} , поэтому он не зависит ни от \mathbf{u} ни от θ [18]:

$$P^{(s)} = m \mathbf{j}. \quad (3.30)$$

Компонента главного вектора по оси O^*x^* , а следовательно, с точностью до малых первого порядка, и ее проекция на ось Ox должны быть отнесены к невозмущенному движению. Поэтому составляющую, которую необходимо учитывать в уравнениях

возмущенного движения, следует считать тождественно равной нулю. Однако момент вектора гидростатических сил относительно точки O , помимо момента, соответствующего невозмущенному движению ($\Sigma' \equiv \Sigma, \mathbf{u} = 0, \boldsymbol{\theta} = 0$), содержит гидростатическую составляющую $\delta M_O^{(s)}$, обусловленную поворотом тела при отсутствии деформации свободной поверхности жидкости в системе координат $O^*x^*y^*z^*$ ($\Sigma' \equiv \Sigma, \boldsymbol{\theta} \neq 0$) и гидродинамическую составляющую $\delta M_O^{(d)}$, связанную с деформацией свободной поверхности в этой системе координат. Первая представляет собой линейную функцию компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$, а вторая — линейную функцию ускорений \mathbf{u} , $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ и \ddot{s}_n ($n = 1, 2, \dots$), т. е. обе они суть величины первого порядка малости и должны быть, следовательно, учтены при составлении уравнений возмущенного движения.

Момент гидростатических сил, действующий на тело при малом повороте, является главным моментом относительно точки O системы добавочных сил давления $\delta p = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$, обусловленных перемещением $d\mathbf{x}^*$ частиц жидкости в направлении градиента поля массовых сил невозмущенного движения вследствие поворота системы $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$. Поле давлений $d\mathbf{r}$ на стени полости в связанной системе координат определяется формулой

$$\begin{aligned}\delta p &= -\rho j \delta x^*|_S + \rho j(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v})|_S = \\ &= \rho [(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{R}, \mathbf{j})|_S - (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{j})] = \rho (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}' \times \mathbf{v})|_S.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Отсюда для главного момента относительно точки O гидростатических сил, действующих в возмущенном движении, получим выражение

$$M_O^{(s)} = \int_S (\mathbf{R} \times \delta p) dS = \rho \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{v})(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}' \times \mathbf{j}) dS. \quad (3.32)$$

Главный вектор $\mathbf{P}^{(d)}$ и главный момент $M_O^{(d)}$ относительно точки O системы гидродинамических сил, действующих в возмущенном движении, не зависящих от вязкости жидкости, определим на основе теорем об изменении количества движения и момента количества движения, учитывая связь полной производной d/dt в системе координат $O^*x^*y^*z^*$ и локальной $\partial/\partial t$ в системе координат $Oxyz$ [18]:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{(d)} &= -\frac{dK}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{K}; \\ \mathbf{M}_O^{(d)} &= -\frac{dN_O}{dt} + \delta M_O^{(d)} = -\frac{\partial N_O}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{N}_O - \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{K} + \delta M_O^{(d)},\end{aligned}\quad (3.33)$$

где $\delta M_O^{(d)}$ — момент силы $m\mathbf{j}$ относительно точки O , связанный с деформацией свободной поверхности в системе координат $O^*x^*y^*z^*$, о котором говорилось выше:

$$\delta M_O^{(d)} = j\rho \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v}) \right] dS; \quad (3.34)$$

\mathbf{K} , \mathbf{N}_O — векторы количества движения и кинетического момента относительно точки O жидкости в области Q , вычисленные в системе координат $O^*x^*y^*z^*$:

$$\mathbf{K} = \rho \int_Q \dot{\mathbf{w}} dQ; \quad \mathbf{N}_O = \rho \int_Q (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{w}}) dQ. \quad (3.35)$$

В силу принятых допущений величины \mathbf{K} и \mathbf{N}_O будут первого порядка малости, а векторные произведения, входящие в формулы (3.33), — второго порядка. Поэтому последними следует преобразовать. Иными словами, при вычислении производных по времени в выражениях (3.33) можно считать стенки полости неподвижными, т. е. отождествлять координаты x^*, y^*, z^* и x, y, z , т. е. полные и частные производные по t , что фактически и делалось выше (например, при линеаризации интеграла Лагранжа — Коши).

Принимая во внимание уравнения (3.4), (3.10), (3.13), (3.32) и (3.33) и учитывая коммутативность операций $\partial/\partial t$ и ∇ , получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(d)} &= -\rho \int_Q \nabla \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t^2} dQ = -\rho \int_Q \nabla \left[(\ddot{\mathbf{u}}, \Phi) + (\ddot{\boldsymbol{\theta}}, \Psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{s}_n \varphi_n \right] dQ = \\ &= -\rho \sum_{j=1}^3 \left[\ddot{u}_j \int_Q \nabla \Phi_j dQ + \ddot{\theta}_j \int_Q \nabla \Psi_j dQ \right] - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{s}_n \int_Q \nabla \varphi_n dQ; \\ \mathbf{M}_O^{(d)} &= -\rho \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t^2} dQ - j\rho \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \right. \\ &\quad \left. - (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v}) \right] dS + \rho \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}' \times \mathbf{j}) dS = \\ &= -\rho \sum_{j=1}^3 \left[\ddot{u}_j \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \Phi_j dQ + \ddot{\theta}_j \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \Psi_j dQ \right] - \\ &\quad - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{s}_n \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \varphi_n dQ + \\ &\quad + \rho \sum_{j=1}^3 \left[u_j \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \left(\Phi_j - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_j dS \right) dS + \right. \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$+ \theta_j \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \left(\Psi_j - \frac{1}{\Sigma} \int \Psi_j dS \right) dS \Big] + \\ + p \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \varphi_n dS. \quad (3.37)$$

Приведем выражение (3.37) к более удобной форме, используя общую формулу Гаусса — Остроградского

$$\oint_Q \mathcal{L}(\nabla) dQ = \oint_{S+\Sigma} \mathcal{L}(\mathbf{v}) dS \quad (3.38)$$

и формулу Грина

$$\int_Q (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dQ = \oint_{S+\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) dS, \quad (3.39)$$

где \mathcal{L} — линейный оператор;

φ и ψ — произвольные функции *.

Если φ и ψ — гармонические функции, имеем

$$\oint_{S+\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} dS = \oint_{S+\Sigma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} dS. \quad (3.40')$$

Выпишем в развернутой форме выражения для некоторых векторов, которые часто встречаются в дальнейшем:

$$\mathbf{R}' = i_1 x' + i_2 y' + i_3 z'; \\ \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R} = i_1 (y_{O'} z - z_{O'} y) + i_2 (z_{O'} x - x_{O'} z) + i_3 (x_{O'} y - y_{O'} x);$$

$$\mathbf{R} \times \mathbf{v}|_{\Sigma} = i_2 z - i_3 y;$$

$$\mathbf{R} \times \nabla = i_1 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) + i_2 \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \\ + i_3 \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right); \quad (3.41)$$

$$\mathbf{R}_{O'} \times \nabla = i_1 \left(y_{O'} \frac{\partial}{\partial z} - z_{O'} \frac{\partial}{\partial y} \right) + \\ + i_2 \left(z_{O'} \frac{\partial}{\partial x} - x_{O'} \frac{\partial}{\partial z} \right) + i_3 \left(x_{O'} \frac{\partial}{\partial y} - y_{O'} \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

* Стого говоря, φ и ψ должны удовлетворять некоторым ограничениям, которые для всех встречающихся на практике полостей, безусловно, выполняются.

Преобразование выражений (3.36), (3.37) начнем с главного вектора гидродинамических сил. Принимая во внимание формулы (3.19), (3.21), (3.23), (3.38), (3.40), получаем

$$\begin{aligned}
 & -\rho \sum_{j=1}^3 \left(i_j \int_Q \nabla \Phi_j dQ + \ddot{\theta}_j \int_{S+1} \nabla \Psi_j dQ \right) = \\
 & = -\rho \sum_{j=1}^3 \left(i_j \ddot{u}_j Q + \ddot{\theta}_j \oint_{S+1} \Psi_j v dS \right) = -m \sum_{j=1}^3 i_j \ddot{u}_j - \\
 & -\rho \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \sum_{j=1}^3 i_j \oint_{S+1} \Psi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} dS = \\
 & = -m \ddot{u} - \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \sum_{j=1}^3 i_j \oint_{S+1} \Phi_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial v} dS. \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом найдем

$$\begin{aligned}
 \rho \int_Q \nabla \varphi_n dQ & = \rho \oint_{S+1} \varphi_n v dS = \rho \sum_{j=1}^3 i_j \oint_{S+1} \varphi_n \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} dS = \\
 & = \rho \sum_{j=1}^3 i_j \int_S \Phi_j \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} dS = \lambda_n, \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

где λ_n — вектор (3.29) со следующими компонентами:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{n1} & = 0; \quad \lambda_{n2} = \rho \int_S \Phi_2 \psi_n dS = \rho \int_S \varphi_n v_y dS; \\
 \lambda_{n3} & = \rho \int_S \Phi_3 \psi_n dS = \rho \int_S \varphi_n v_z dS. \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Учитывая (3.21), (3.23) и (3.9), получаем

$$\int_S \Phi_j \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} dS = \begin{cases} \int_S \Phi_j \psi_n dS & (j=2, 3) \\ 0 & (j=1). \end{cases} \tag{3.45}$$

Далее на основании (3.20), (3.25) и (3.26), учитывая, что

$$\int_S y' dS = \int_S z' dS = 0, \tag{3.46}$$

так как ось $O'x'$ является центральной осью, имеем

$$\begin{aligned}
 \oint_{S+\Sigma} \Phi_j \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} dS &= \oint_{S+\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i \Phi_j dS + \int_{\Sigma} ((\mathbf{R}_{O'} - \mathbf{R}) \times \mathbf{v})_i \Phi_j dS = \\
 &= \oint_{S+\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i \Phi_j dS - \int_{\Sigma} (\Phi' \times \mathbf{v})_i (\Phi + \mathbf{R}_{O'})_j dS = \\
 &= \begin{cases} \oint_{S+\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i \Phi_j dS & (j=1) \\ \oint_{S+\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i \Phi_j dS - \int_{\Sigma} (\Phi' \times \mathbf{v})_i \Phi'_j dS & (j=2, 3). \end{cases} \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое в выражении (3.42).

Используя снова формулу Гаусса — Остроградского и приняв во внимание выражения (3.23) и (3.41), получаем

$$\begin{aligned}
 \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \oint_{S+\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i \Phi_j dS &= \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla)_i \Phi_j dQ = \\
 &= \rho \left[\mathbf{i}_1 \int_Q (\ddot{\theta}_2 z - \ddot{\theta}_3 y) dQ + \mathbf{i}_2 \int_Q (\ddot{\theta}_3 x - \ddot{\theta}_1 z) dQ + \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{i}_3 \int_Q (\ddot{\theta}_1 y - \ddot{\theta}_2 x) dQ \right] = \rho \left(\dot{\theta} \times \int_Q \mathbf{R} dQ \right) = \dot{\theta} \times \mathbf{L}_o, \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

где \mathbf{L}_o — статический момент затвердевшей жидкости относительно точки O ;

\mathbf{R}_{D_0} — радиус-вектор центра масс D_0 затвердевшей жидкости;

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_o &= \rho \int_Q \mathbf{R} dQ = m \mathbf{R}_{D_o}; \\
 L_{o1} &= \rho \int_Q x dQ = mx_{D_o}; \quad L_{o2} = \rho \int_Q y dQ = my_{D_o}; \\
 L_{o3} &= \rho \int_Q z dQ = mz_{D_o}. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned}
 -\rho \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \sum_{j=2}^3 \mathbf{i}_j \int_{\Sigma} (\Phi' \times \mathbf{v})_i \Phi'_j dS &= \rho \left[\mathbf{i}_2 \left(-\ddot{\theta}_2 \int_{\Sigma} z' y' dS + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ddot{\theta}_3 \int_{\Sigma} y'^2 dS \right) + \mathbf{i}_3 \left(-\ddot{\theta}_2 \int_{\Sigma} z'^2 dS + \ddot{\theta}_3 \int_{\Sigma} y' z' dS \right) \right] \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой линейную векторную функцию компонент вектора углового ускорения, коэффициенты при которых, следовательно, образуют тензор [17]. Последний обозначим Ω :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_{23} & \Omega_3 \\ 0 & -\Omega_2 & \Omega_{32} \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

где $\Omega_2 = \rho J_{y'}$; $\Omega_3 = \rho J_{z'}$; $\Omega_{23} = \Omega_{32} = J_{y'z'} =$ экваториальные и центробежный моменты инерции площади свободной поверхности Σ относительно ее центральных осей:

$$J_{y'} = \int_{\Sigma} z'^2 dS; \quad J_{z'} = \int_{\Sigma} y'^2 dS; \quad J_{y'z'} = \int_{\Sigma} y'z' dS. \quad (3.52)$$

Используя равенства (3.52), получаем

$$\rho \sum_{i=1}^3 \theta_i \sum_{j=1}^2 i_j \int_{\Sigma} (\Phi' \times \mathbf{v})_i \Phi'_j dS = -(\Omega, \ddot{\theta}), \quad (3.53)$$

где (Ω, θ) — скалярное произведение тензора Ω на вектор $\ddot{\theta}$ справа.

В результате из выражения (3.36) найдем

$$\mathbf{P}^{(d)} = -m\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_o \times \ddot{\theta} - (\Omega, \dot{\theta}) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \ddot{s}_n. \quad (3.54)$$

Переходим к преобразованию выражения (3.37). Используя соотношения (3.23) и (3.38), имеем

$$\begin{aligned} \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{u}_j \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \Phi_j dQ &= \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{u}_i \sum_{j=1}^3 i_j \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla)_j \Phi_i dQ = \\ &= \rho \mathbf{i}_1 \int_Q (-z \ddot{u}_2 + y \ddot{u}_3) dQ + \rho \mathbf{i}_2 \int_Q (z \ddot{u}_1 - x \ddot{u}_3) dQ + \quad (3.55) \\ &+ \rho \mathbf{i}_3 \int_Q (-y \ddot{u}_1 + x \ddot{u}_2) dQ = -\rho \left(\ddot{\mathbf{u}} \times \int_Q \mathbf{R} dQ \right) = -(\ddot{\mathbf{u}} \times \mathbf{L}_0). \end{aligned}$$

На основании выражений (3.22), (3.26), (3.41), (3.44) находим

$$\begin{aligned} \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{u}_j \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \left(\Phi_j - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_j dS \right) dS &= \\ = \rho \mathbf{i}_2 (\ddot{u}_2 J_{y'z'} + \ddot{u}_3 J_{y'}) - \rho \mathbf{i}_3 (u_2 J_{z'} + \ddot{u}_3 J_{y'z'}) &= -(\bar{\Omega}, \ddot{\mathbf{u}}), \quad (3.56) \end{aligned}$$

где $\bar{\Omega}$ — тензор, сопряженный с тензором Ω

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_{23} & -\Omega_{21} \\ 0 & \Omega_{31} & \Omega_{32} \end{pmatrix}.$$

Далее, используя (3.20), (3.24), (3.38), (3.40), (3.46), получаем

$$\begin{aligned} \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{\theta}_j \left[\int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \Psi_j dQ - \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \left(\Psi_j - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Psi_j dS \right) dS \right] = \\ = \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{\theta}_j \left[\oint_{S+\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \Psi_j dS - \int_{\Sigma} (\mathbf{R}' \times \mathbf{v}) \Psi_j dS \right] = \\ = \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{\theta}_j \left[\int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \Psi_j dS + \int_{\Sigma} (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v}) \Psi_j dS \right] = \\ = \rho \sum_{j=1}^3 \ddot{\theta}_j \oint_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{v}} \Psi_j dS = \rho \sum_{i=1}^3 \ddot{\theta}_i \sum_{j=1}^3 i_j \oint_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{v}} \Psi_i dS. \quad (3.57) \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой линейную векторную функцию компонент вектора углового ускорения. Поэтому коэффициенты при $\ddot{\theta}_i$ образуют тензор [17]

$$\mathcal{J} = \begin{Bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{Bmatrix}, \quad (3.58)$$

где

$$J_{ji} = \rho \oint_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \mathbf{v}} \Psi_i dS. \quad (3.59)$$

Заметим, что тензор \mathcal{J} аналогичен встречающемуся в задаче о движении твердого тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью [11].

Элементы тензора \mathcal{J} с одинаковыми индексами представляют собой моменты инерции присоединенной массы жидкости при вращении относительно осей Ox , Oy , Oz соответственно ($i=j=1, 2, 3$), с исчезающими малым угловым ускорением, а элементы с различными индексами — центробежные моменты этих масс, взятые с обратным знаком ($i \neq j$). Важно отметить симметрию тензора \mathcal{J} , вытекающую из формулы Грина (3.39):

$$\oint_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} \Psi_i dS = \oint_{S-\Sigma} \frac{\partial \Psi_i}{\partial \nu} \Psi_j dS; \quad (3.60)$$

$$J_{ji} = J_{ij}.$$

Линейную векторную функцию, полученную выше, можно теперь представить в виде скалярного произведения тензора \mathcal{Y} на вектор θ справа:

$$\rho \sum_{j=1}^3 \theta_j \left[\int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \Psi_j dQ - \int_{\Sigma} (\mathbf{R} + \mathbf{v}) \left(\Psi_j - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Psi_j dS \right) dS \right] = (\mathcal{Y}, \theta). \quad (3.61)$$

Остается преобразовать коэффициент при \ddot{s}_n в выражении (3.37). Используя снова формулы (3.38) и (3.39), граничные условия (3.20), (3.21), (3.25) и имея в виду условия (3.9), получаем

$$\begin{aligned} \rho \int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) \varphi_n dQ - \rho \int_{\Sigma} (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \varphi_n dS &= \rho \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) \varphi_n dS = \\ &= \rho \int_S \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \varphi_n dS = \rho \oint_{S+\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \varphi_n dS = \rho \int_{\Sigma} \Psi \psi_n dS = \lambda_{on}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

где λ_{on} — вектор (3.29) со следующими компонентами:

$$\begin{aligned} \lambda_{on1} &= \rho \int_S \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu} \varphi_n dS = \rho \int_{\Sigma} \Psi_1 \psi_n dS; \\ \lambda_{on2} &= \rho \int_S \frac{\partial \Psi_2}{\partial \nu} \varphi_n dS = \rho \int_{\Sigma} \Psi_2 \psi_n dS; \\ \lambda_{on3} &= \rho \int_S \frac{\partial \Psi_3}{\partial \nu} \varphi_n dS = \rho \int_{\Sigma} \Psi_3 \psi_n dS. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Два варианта формул (3.63) позволяют пользоваться для вычисления λ_{onj} либо значениями функции Ψ_j на невозмущенной свободной поверхности, либо ее нормальной производной $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} = = (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j$ на смоченной поверхности стенок полости. Суммируя полученные результаты, выражение $\mathbf{M}_O^{(d)}$, соответствующее выражениям (3.33) и (3.37), можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{M}_O^{(d)} = -(\mathcal{Y}, \theta) - (\mathbf{L}_O \times \ddot{\mathbf{u}}) - (\bar{\Omega}, \ddot{\mathbf{u}}) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{on} \ddot{s}_n. \quad (3.64)$$

Векторное произведение, входящее в выражение (3.64), можно представить в форме взятого с обратным знаком произведения некоторого антисимметричного тензора \mathcal{L}_o на вектор \mathbf{u} справа, а векторное произведение, входящее в выражение (3.54), — в форме произведения сопряженного тензора $\bar{\mathcal{L}}_o$ на вектор θ справа.

Тензор \mathcal{L}_o имеет вид

$$\mathcal{L}_o = \begin{Bmatrix} 0 & L_{o3} & -L_{o2} \\ -L_{o3} & 0 & L_{o1} \\ L_{o2} & -L_{o1} & 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.65)$$

Тензор $\bar{\mathcal{L}}_o$, сопряженный с антисимметричным тензором \mathcal{L}_o , отличается от него только знаком:

$$\bar{\mathcal{L}}_o = -\mathcal{L}_o. \quad (3.66)$$

Преобразуем теперь выражение для момента гидростатических сил.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_o^{(s)} &= \rho \sum_{j=1}^3 \theta_j \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) (\mathbf{R}' \times \mathbf{j})_j dS = \\ &= -j\rho \sum_{j=1}^3 \theta_j \left[\int_Q (\mathbf{R} \times \nabla) (\mathbf{R}' \times \mathbf{i}_1)_j dQ - \int_\Sigma (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) (\mathbf{R}' \times \mathbf{i}_1)_j dS \right] = \\ &= j[(\mathbf{i}_2 \theta_2 + \mathbf{i}_3 \theta_3) L_{o1} - \mathbf{i}_1(\theta_2 L_{o2} + \theta_3 L_{o3}) + \\ &\quad + \mathbf{i}_2(\theta_2 \Omega_2 - \theta_3 \Omega_{32}) + \mathbf{i}_3(\theta_3 \Omega_3 - \theta_2 \Omega_{23})]. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Введя новые тензоры Ω^* и \mathcal{L}_o^* ,

$$\Omega^* = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2 & -\Omega_{23} \\ 0 & -\Omega_{32} & \Omega_3 \end{Bmatrix}; \quad \mathcal{L}_o^* = \begin{Bmatrix} 0 & L_{o2} & -L_{o3} \\ 0 & L_{o1} & 0 \\ 0 & 0 & L_{o1} \end{Bmatrix}, \quad (3.68)$$

можно представить выражение (3.67) в форме суммы скалярных произведений этих тензоров на вектор θ справа:

$$\mathbf{M}_o^{(s)} = j(\Omega^*, \theta) + j(\mathcal{L}_o^*, \theta). \quad (3.69)$$

На первый взгляд кажется несколько неожиданным отличие от нуля компоненты гидростатического момента $M_{o1}^{(s)}$. Однако следует иметь в виду, что это проекция $\mathbf{M}_o^{(s)}$ на ось Ox связанный системы координат, тогда как проекция $\mathbf{M}_o^{(s)}$ на ось O^*x^* абсолютной системы координат тождественно равна нулю.

Введем теперь в рассмотрение тензоры \mathcal{L} , $\bar{\mathcal{L}}$ и \mathcal{L}^* , определяемые формулами

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \Omega; \quad \mathcal{L}^* = \mathcal{L}_o^* + \Omega^*; \quad \bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}_o + \bar{\Omega}. \quad (3.70)$$

По правилу сложения тензоров [17] получим следующие развернутые выражения для \mathcal{L} , \mathcal{L}^* , $\bar{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \begin{Bmatrix} 0 & L_{03} & -L_{02} \\ -L_{03} & -\Omega_{23} & L_{01} + \Omega_3 \\ L_{02} & -(L_{01} + \Omega_2) & \Omega_{32} \end{Bmatrix}; \\ \mathcal{L}^* &= \begin{Bmatrix} 0 & -L_{02} & -L_{03} \\ 0 & L_{01} + \Omega_2 & -\Omega_{23} \\ 0 & -\Omega_{32} & L_{01} + \Omega_3 \end{Bmatrix}; \\ \bar{\mathcal{L}} &= \begin{Bmatrix} 0 & -L_{03} & L_{02} \\ L_{03} & -\Omega_{23} & -(L_{01} + \Omega_2) \\ -L_{02} & L_{01} + \Omega_3 & \Omega_{32} \end{Bmatrix}.\end{aligned}\quad (3.71)$$

Теперь остается найти составляющие гидродинамических сил, зависящие от вязкости жидкости, — обобщенную силу $P_n^{(f)}$ и главный момент относительно точки $O M_O^{(f)}$. Заметим, что ни $P_n^{(f)}$, ни $M_O^{(f)}$ не могут зависеть от \dot{u} , так как при $\theta \equiv 0$, $s_n \equiv 0$ жидкость движется как твердое тело (нет относительного движения, а следовательно, и сил вязкого трения). Учет этого обстоятельства и соображений симметрии подсказывает, что система гидродинамических сил, связанных с вязкостью жидкости в пограничном слое, должна приводиться к паре сил. Это утверждение непосредственно доказывается в конце этого раздела.

В гл. 1 приведено выражение элементарной силы трения (1.19), действующей на элемент смоченной поверхности при гармонических колебаниях. При выводе общих уравнений настоящего раздела мы воспользуемся выражением, справедливым при произвольном законе движения,

$$d\mathbf{f} = -\rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} V dS, \quad (3.72)$$

где dS — элемент площади смоченной поверхности, минимальный радиус кривизны которой предполагается намного большим толщины пограничного слоя;

V — вектор, связанный со скоростью этого элемента стенки той же зависимостью, что и для бесконечной пластинки, движущейся в своей плоскости [24],

$$V(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d\bar{v}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (3.73)$$

Введем в рассмотрение вектор \mathbf{Q} , аналогичный V (3.73), и скаляр S_n :

$$Q = \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{\theta}(\tau) d\tau}{V(t-\tau)}; \quad S_n = \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{s}_n(\tau) d\tau}{V(t-\tau)} \quad (3.74)$$

и представим $P_n^{(f)}$ и $M_O^{(f)}$ в виде

$$\begin{aligned} P_n^{(f)} &= -(\beta_{on}, \theta) - \mu_n \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nm} S_m; \\ M_O^{(f)} &= -(\mathcal{B}, Q) - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{on} S_n, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где $\mathcal{B} = \{\beta_{ij}^o\}$ — симметричный тензор второго ранга;
 $\beta_{on} = \{\beta_{on1}, \beta_{on2}, \beta_{on3}\}$ — векторы; β_{nm} — скаляры

$$(i, j = 1, 2, 3; n, m = 1, 2, \dots).$$

Воспользуемся формулой (3.72) для вычисления скорости диссипации полной энергии E колеблющейся жидкости:

$$\frac{dE}{dt} = - \int_S (\mathbf{v}', d\mathbf{f}) = - \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_S (\mathbf{v}, \mathbf{V}) dS, \quad (3.76)$$

так

$$\mathbf{v} = -\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{u}} + \dot{\theta} \times \mathbf{R} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi;$$

$$\chi = (\mathbf{u}, \mathbf{R}) + (\theta, \Psi) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \varphi_n,$$

откуда

$$\mathbf{v} = \dot{\theta} \times \mathbf{R} - \nabla (\dot{\theta}, \Psi) - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_n \nabla \varphi_n. \quad (3.77)$$

Поскольку потенциал смещений по определению удовлетворяет на смоченной поверхности S граничному условию

$$\frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{v}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\theta \times \mathbf{R}, \mathbf{v}), \quad (3.78)$$

где \mathbf{v} — орт внешней нормали к S , вектор \mathbf{v} , входящий в подынтегральное выражение (3.76), лежит в плоскости, касательной к поверхности S .

С другой стороны, можно с помощью формул (3.75) придать выражению для скорости диссипации энергии следующую форму:

$$\frac{dE}{dt} = (\mathbf{M}_O^{(f)}, \dot{\theta}) + \sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(f)} \dot{s}_n = -((\mathcal{R}, Q), \dot{\theta}) - \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{on}, Q) \dot{s}_n - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{on}, \dot{\theta}) S_n - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_n \beta_{nm} \dot{s}_n S_m. \quad (3.79)$$

Подставляя выражение (3.77) в (3.76) и сравнивая после этого правые части уравнений (3.76) и (3.79), получим формулы для элементов β_{ij} тензора \mathcal{R} и компонентов β_{onj} и β_{nm} :

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \beta_{ji} = \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{i}_i + \nabla \Psi_i) (\mathbf{R} \times \mathbf{i}_j + \nabla \Psi_j) dS; \\ \beta_{onj} &= \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{i}_j + \nabla \Psi_j) \nabla \varphi_n dS; \\ \beta_{nm} &= \beta_{mn} = \rho \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_S \nabla \varphi_n \nabla \varphi_m dS \\ &\quad (i, j = 1, 2, 3; n, m = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Воспользуемся теперь теоремами об изменении количества движения тела и его кинетического момента относительно точки O , рассматривая выражения $\mathbf{P}^{(d)}$, $\mathbf{M}_O^{(s)}$, $\mathbf{M}_O^{(d)}$, $\mathbf{M}_O^{(f)}$ как внешнюю силу и моменты, и уравнениями (3.28), в правую часть которых введем дополнительные обобщенные силы $P_n^{(f)}$. В результате получим полную систему уравнений возмущенного движения системы тело — жидкость:

$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{P}' + \mathbf{P}; \quad \frac{dN_O}{dt} = \mathbf{M}'_O + \mathbf{M}_O; \quad \frac{dK_n}{dt} = P'_n \quad (3.81)$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

где

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P}^{(d)}; \quad \mathbf{M}'_O = \mathbf{M}_O^{(s)} + \mathbf{M}_O^{(d)} + \mathbf{M}_O^{(f)}; \quad P'_n = P_n^{(s)} + P_n^{(d)} + P_n^{(f)};$$

K — главный вектор количества движения тела;

N_O — кинетический момент относительно точки O ;

\mathbf{P}' , P'_n , \mathbf{M}'_O , \mathbf{M}_O — главный вектор и главный момент относительно точки O системы сил, действующих на тело со стороны жидкости, и прочих внешних сил;

P'_n — обобщенная сила, действующая на жидкость при n -й форме колебаний.

Приписывая массе и элементам тензоров инерции и статических моментов твердого тела верхний индекс « \circ » и обозначая центр масс тела через C_0 , получаем из (3.81), (3.29), (3.54), (3.64), (3.69), (3.74) и (3.75) следующие уравнения, справедливые с точностью до малых первого порядка:

$$(m + m) \dot{\mathbf{u}} + (\mathcal{L}^\circ + \bar{\mathcal{L}}, \dot{\mathbf{0}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n s_n = \mathbf{P};$$

$$(\mathcal{Y} + \mathcal{J}, \dot{\mathbf{0}}) + (\bar{\mathcal{L}} + \bar{\mathcal{L}}, \dot{\mathbf{u}}) - j(\mathcal{L}^{*\circ} + \bar{\mathcal{L}}^\circ, \dot{\mathbf{0}}) + \left(\mathcal{B}, \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{\theta}(\tau) d\tau}{V t - \tau} \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{on} s_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{on} \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{s}_n(\tau) d\tau}{V t - \tau} = \mathbf{M}_o; \quad (3.82)$$

$$\mu_n (s_n + \omega_n^2 s_n) + (\lambda_n, \ddot{\mathbf{u}}) + (\lambda_{on}, \dot{\mathbf{0}}) +$$

$$+ \left(\beta_{on}, \int_{-\infty}^t \frac{\dot{\theta}(\tau) d\tau}{V t - \tau} \right) + \mu_n \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{nm} \int_{-\infty}^t \frac{\ddot{s}_m(\tau) d\tau}{V t - \tau} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где m — масса тела;

\mathcal{Y} — тензор инерции;

\mathcal{L}° — тензор статических моментов;

$\bar{\mathcal{L}}^\circ$ — сопряженный тензор;

$$\mathcal{Y}^\circ = \begin{pmatrix} J_{11}^\circ & J_{12}^\circ & J_{13}^\circ \\ J_{21}^\circ & J_{22}^\circ & J_{23}^\circ \\ J_{31}^\circ & J_{32}^\circ & J_{33}^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}^\circ & -J_{xy}^\circ & -J_{xz}^\circ \\ -J_{yx}^\circ & J_{yy}^\circ & -J_{yz}^\circ \\ -J_{zx}^\circ & -J_{zy}^\circ & J_{zz}^\circ \end{pmatrix}; \quad (3.83)$$

$$\mathcal{L}^\circ = \begin{pmatrix} 0 & L_{03}^\circ & -L_{02}^\circ \\ -L_{03}^\circ & 0 & L_{01}^\circ \\ L_{02}^\circ & -L_{01}^\circ & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{L}^{*\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -L_{02}^\circ & -L_{03}^\circ \\ 0 & L_{01}^\circ & 0 \\ 0 & 0 & L_{01}^\circ \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathcal{L}}^\circ = -\mathcal{L}^\circ; \quad L_{01}^\circ = m^\circ x_{C_0}; \quad L_{02}^\circ = m^\circ y_{C_0}; \quad L_{03}^\circ = m^\circ z_{C_0}.$$

Система интегро-дифференциальных уравнений (3.82) описывает возмущенное движение корпуса РН как твердого жесткого тела с вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса и допускает естественный переход к наиболее актуальному для практики случаю квазигармонических колебаний системы с некоторой доминирующей гармоникой с «медленно меняющимися» частотой и амплитудой.

Эта система является основным результатом настоящего разделя. Она была впервые получена в работе [47] (см. также [30]).

Следует подчеркнуть своеобразную симметрию ее коэффициентов. При $\beta \equiv 0$, $\beta_{on} \equiv 0$, $\beta_{nm} \equiv 0$ она переходит в систему уравнений возмущенного движения твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью [29].

Рассмотрим, как меняются коэффициенты уравнений (3.82) при переходе от полюса O к O' или наоборот.

Начнем с доказательства инвариантности диссипативных коэффициентов относительно положения начала координат. Анализ выражений (3.80) показывает, что достаточно доказать инвариантность функции

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{R} \times \mathbf{i}_j + \nabla \Psi_j \quad (j=1, 2, 3), \quad (3.84)$$

поскольку функции $\nabla \Phi_n$ не зависят по определению от положения начала координат.

При переносе начала координат O в произвольную точку O' имеем в силу (3.24) и (3.25)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{O'}, \quad \Psi' = \Psi - \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}', \quad (3.85)$$

где «'» соответствует величинам, отнесенными к системе координат с началом в точке O ; $\mathbf{R}_{O'}$ — радиус-вектор точки O' .

Подставляя выражения (3.85) в (3.84), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_j &= \mathbf{R} \times \mathbf{i}_j + \nabla \Psi_j - \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{i}_j - \nabla (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}', \mathbf{i}_j) = \\ &= \mathbf{F}_j - \mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{i}_j + \nabla (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{i}_j, \mathbf{R}), \end{aligned}$$

откуда

$$\mathbf{F}'_j \equiv \mathbf{F}_j, \quad (3.86)$$

что означает инвариантность всех коэффициентов (3.80) β^o_{ij} , β_{onj} , β_{nm} ($i, j=1, 2, 3$; $n, m=1, 2, \dots$) относительно положения начала координат.

Следовательно, система сил трения жидкости о стенки полости приводится к паре сил, что доказывает утверждение, высказанное выше, и обосновывает структуру уравнений (3.82).

Введем в рассмотрение точки G_2 и G_3 со следующими координатами:

$$x_{G_2} = x_{G_0} + \frac{\Omega_1}{m^o + m}; \quad y_{G_2} = y_{G_0}; \quad z_{G_2} = z_{G_0}; \quad \Omega_2 = \rho J_{y'}; \quad (3.87)$$

$$x_{G_3} = x_{G_0} + \frac{\Omega}{m^o + m}; \quad y_{G_3} = y_{G_0}; \quad z_{G_3} = z_{G_0}; \quad \Omega_3 = \rho J_{z'},$$

где x_{G_0} , y_{G_0} , z_{G_0} — координаты центра масс системы тело — жидкость при затвердевшей в невозмущенном состоянии жидкости.

Как будет ясно из дальнейшего, точки G_2 и G_3 по своему механическому смыслу аналогичны метацентрам плавающего тела, известным из теории корабля. Учитывая эту аналогию, будем называть их метацентрами системы тело — жидкость. В случае $J_{y'} = J_{z'}$ обе точки G_2 и G_3 сливаются в одну точку G . По аналогии с (3.87) введем метацентры жидкости D_2 и D_3 с координатами, определяемыми формулами

$$\begin{aligned} x_{D_2} &= x_{D_0} + \frac{\Omega_2}{m}; \quad y_{D_2} = y_{D_0}; \quad z_{D_2} = z_{D_0}; \\ x_{D_3} &= x_{D_0} + \frac{\Omega_3}{m}; \quad y_{D_3} = y_{D_0}; \quad z_{D_3} = z_{D_0}; \end{aligned} \quad (3.88)$$

где D_0 — центр масс затвердевшей жидкости.

Выпишем формулы преобразования тензора \mathcal{Y} и вектора λ_{on} при параллельном переносе связанной системы координат из положения $O'x'y'z'$ в положение $Oxyz$, т. е. явные зависимости элементов соответствующего тензора и векторов от координат каких-либо характерных точек. Элементам, отнесенным к системе координат $O'x'y'z'$, будем приписывать верхний индекс «'».

Преобразование тензоров $\mathcal{Y}^o, \mathcal{L}^o, \mathcal{L}^{o*}$ описывается в курсах динамики твердого тела. Преобразование тензоров \mathcal{L} и \mathcal{L}^* ясно из формул (3.71) [29]. Векторы λ_n и скаляры ω_n^2, μ_n инвариантны относительно выбора системы координат.

Подставив в (3.59) выражения $\partial\Psi_j/\partial v$ и Ψ_j , следующие из (3.20) и (3.24), и используя граничные условия (3.25) для Ψ_i , получим следующее выражение для элементов J_{ji} тензора \mathcal{Y} :

$$\begin{aligned} J_{ji} &= \rho \int_S (\mathbf{R}_{O'} + \mathbf{R}') \times \mathbf{v}_j (\Psi'_i + (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_i) dS + \\ &\quad + \rho \int_{\Sigma} (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v})_j (\Psi'_i + (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_i) dS = \\ &= \rho \int_S (\mathbf{R}' \times \mathbf{v})_j \Psi'_i dS + \rho \int_{S+\Sigma} (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{v})_j (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_i dS + \\ &\quad + \rho \int_S [(\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_j (\mathbf{R}' \times \mathbf{v})_i + (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_i (\mathbf{R}' \times \mathbf{v})_j] dS \end{aligned}$$

или после применения формулы Гаусса — Остроградского (3.38)

$$J_{ji} = J'_{ji} + \Delta J_{ji}, \quad (3.89)$$

где

$$\begin{aligned} J'_{ji} &= \rho \int_S (\mathbf{R}' \times \mathbf{v})_j \Psi'_i dS; \\ \Delta J_{ji} &= \rho \int_Q (\mathbf{R}_{O'} \times \nabla)_j (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_i dQ + \end{aligned}$$

$$+\rho \int_Q [(\mathbf{R}' \times \nabla)_i (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_j + (\mathbf{R}' \times \nabla)_j (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_i] dQ - \quad (3.90)$$

$$-\rho \int_S [(\mathbf{R}' \times \mathbf{v})_i (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_j + (\mathbf{R}' \times \mathbf{v})_j (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}')_i] dS.$$

$$\begin{aligned} \lambda_{on} &= \lambda'_{on} + \Delta\lambda_{on}; \\ \lambda'_{on} &= \rho \int_S \Psi' \psi_n dS = \rho \int_S (\mathbf{R}' \times \mathbf{v}) \varphi_n dS; \\ \Delta\lambda_{on} &= \rho \int_S (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{R}) \psi_n dS. \end{aligned} \quad (3.91)$$

В координатной форме выражения (3.91) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_{on1} &= \lambda'_{on1} + y_O \lambda_{n3} - z_O \lambda_{n2}; \\ \lambda_{on2} &= \lambda'_{on2} - x_O \lambda_{n3}; \quad \lambda_{on3} = \lambda'_{on3} + x_O \lambda_{n2}; \\ \lambda'_{on} &= \rho \int_S \Psi'_i \psi_n dS = \rho \int_S (\mathbf{R}' \times \mathbf{v})_i \varphi_n dS. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Рассмотрим в заключение упрощенный вариант уравнений (3.82), соответствующий предположению, что возмущенное движение носит характер квазигармонических колебаний с медленно меняющейся частотой, амплитудой и фазой. В этом случае можно вместо (3.72), (3.73) воспользоваться для учета диссипации энергии более простой зависимостью (1.19) или осуществить соответствующее преобразование непосредственно в уравнениях (3.82) и пренебречь малыми добавочными членами, пропорциональными ψ и s_n . Кроме того, можно ограничиться учетом конечного числа k степеней свободы жидкости (т. е. форм волновых движений) и пренебречь некоторыми второстепенными диссипативными членами ($\beta_{nm}=0$ при $n \neq m$, $\beta_{nm}=\beta_n$ при $n=m$). В результате получим следующую систему уравнений, описывающую возмущенное движение класса, оговоренного выше:

$$\begin{aligned} (m^\circ + m) \ddot{\mathbf{u}} + (\mathcal{L}^\circ + \mathcal{L}, \mathbf{0}) + \sum_{n=1}^k \lambda_n \ddot{s}_n &= \mathbf{P}; \\ (\mathcal{Y}^\circ + \mathcal{Y}, \mathbf{0}) + (\bar{\mathcal{L}}^\circ + \bar{\mathcal{L}}, \dot{\mathbf{u}}) + (\mathcal{B}, \dot{\theta}) - j(\mathcal{L}^\circ * + \mathcal{L}^*, \mathbf{0}) + \\ + \sum_{n=1}^k (\lambda_{on} \dot{s}_n + \beta_{on} \ddot{s}_n) &= \mathbf{M}_O; \\ \mu_n (\dot{s}_n + \beta_n \dot{s}_n + \omega_n^2 s_n) + (\lambda_n, \ddot{\mathbf{u}}) + (\lambda_{on}, \dot{\theta}) + (\beta_{on}, \dot{\theta}) &= 0 \\ (n = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Элементы тензора \mathcal{B} , компоненты векторов β_{on} и коэффициенты β_n определяются формулами (l — характерный размер)

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \frac{\rho \omega l}{V^2 R} \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{i}_i \times \nabla \Psi_i) (\mathbf{R} \times \mathbf{i}_j + \nabla \Psi_j) dS \\ &\quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \beta_{onj} &= \frac{\rho \omega l}{V^2 R} \int_S (\mathbf{R} \times \mathbf{i}_j + \Delta \Psi_j) \nabla \varphi_n dS; \\ \beta_n &= \frac{\rho \omega l}{\mu_n V^2 R} \int_S (\nabla \varphi_n)^2 dS; \quad R = \frac{\omega l^2}{v} \\ &\quad (j = 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Дальнейшее упрощение этой системы с учетом специфических особенностей замкнутой системы корпус РН — автомат стабилизации рассматривается в следующем разделе.

3.4. Приведение уравнений возмущенного движения к каноническому виду

Рассмотрим задачу о дальнейшем упрощении системы уравнений (3.93). Решим вопрос о выборе канонических в известном смысле систем координат, которые и применим для наиболее важных для практики случаев, когда корпус имеет одну или две плоскости массовой и геометрической симметрии.

Выражения, полученные выше, содержат полную информацию о преобразовании коэффициентов уравнений возмущенного движения при параллельном переносе системы координат $O'x'y'z'$. Применим эти выражения для выбора канонических систем координат. Под каноническими будем в дальнейшем понимать системы координат, удовлетворяющие условию обращения в нуль максимального количества элементов тензоров $\mathcal{L}^\circ + \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{*0} + \mathcal{L}^*$, что достигается надлежащим выбором положения начала системы координат $Oxyz$ и направления ее осей. Из выражений (3.71) и (3.83) ясно, что координаты начала канонической системы координат должны удовлетворять следующим необходимым условиям:

$$y_{G_0} = 0; z_{G_0} = 0. \quad (3.95)$$

Иными словами, начало такой системы координат должно лежать на оси, проходящей через центр масс тела с жидкостью, затвердевшей в невозмущенном состоянии. При таком выборе точки O полностью исчезают непосредственные инерционные связи движения в направлении оси G_0x и вращения вокруг оси $G_0^*x^*$ со всеми прочими движениями. Теперь можно выбрать ра-

циональное положение начала координат на оси G_0x . Из выражений (3.71) и (3.83) следует, что существует два варианта канонической системы координат.

1. Система координат, в которой исчезает непосредственная инерционная связь поступательного движения тела в плоскости $O^*x^*z^*$ и вращения вокруг оси Oy . Начало этой системы совпадает с метацентром G_2 , координата которого

$$x_{G_2} = x_{G_0} + \frac{\Omega_2}{m^\circ + m}; \quad \Omega_2 = \rho J'_y. \quad (3.96)$$

2. Система координат, в которой исчезает непосредственная инерционная связь поступательного движения тела в плоскости $O^*x^*y^*$ и вращения вокруг оси Oz .

Начало этой системы совпадает с метацентром G_3 .

$$x_{G_3} = x_{G_0} + \frac{\Omega_3}{m^\circ + m} = 0; \quad \Omega_3 = \rho J'_z. \quad (3.97)$$

В дальнейшем для описания возмущенного движения всегда применяется система координат $Oxyz$ с началом, удовлетворяющим либо условию (3.95) и одному из условий (3.96) или (3.97), либо, как минимум, условию (3.94).

Из выражений (3.71) и (3.83) следует также, что угловое положение канонической системы координат $Oxyz$ определяется условием

$$\Omega_{23} = \Omega_{32} = \rho J_{yz} = 0$$

(оси $O'y'$ и $O'z'$ параллельны главным осям инерции области Σ). Тензоры $\mathcal{L} + \mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^* + \mathcal{L}^*$ в этой системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \mathcal{L} &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m^\circ + m)x_{G_3} \\ 0 & -(m + m)x_{G_2} & 0 \end{Bmatrix}; \\ \mathcal{L}^* + \mathcal{L}^* &= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (m + m)x_{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & (m^\circ + m)x_{G_3} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

где либо $x_{G_2} = 0$, либо $x_{G_3} = 0$. Поскольку координатные плоскости проходят через главные центральные оси области Σ , моменты инерции $J_y = J_{y'}$ и $J_z = J_{z'}$ представляют собой минимальный и максимальный экваториальные моменты инерции области Σ (или наоборот). Таким образом, координаты x_{G_2} и x_{G_3} характеризуют крайние возможные положения метацентра на оси Ox . Соответствующие метацентры будем называть в дальнейшем главными метацентрами системы или просто метацентрами. В случае $J_y = J_z$ главные метацентры G_2 и G_3 совпадают.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

**Тело и полость имеют общую плоскость
геометрической и массовой симметрии Oxy**

Система функций φ_n распадается на две подсистемы φ_{np} и φ_{ns} , взаимно ортогональные на области Σ , где φ_{np} — функции, симметричные относительно плоскости Oxy , φ_{ns} — функции, антисимметричные относительно той же плоскости.

Введем для обобщенных координат, соответствующих этим собственным функциям, обозначения p_n и s_n и припишем аналогичный индекс всем коэффициентам, зависящим от φ_{np} или φ_{ns} . Система уравнений возмущенного движения (3.93) распадается теперь на две независимые системы, первая из которых описывает движение в плоскости $O^*x^*y^*$, а вторая — движение в плоскости $O^*x^*z^*$ и вращение вокруг оси Ox . Кроме того, как указывалось выше, отщепляется независимое уравнение движения всей системы как твердого тела в направлении оси O^*x^* .

**Тело и полость имеют две общие плоскости
геометрической и массовой симметрии Oxy и Oxz**

Система функций φ_n распадается на три подсистемы функции φ_{np} , φ_{ns} , φ_{nq} , взаимно ортогональные на области Σ , со следующими видами симметрии: функции φ_{np} симметричны относительно плоскости Oxz и антисимметричны относительно плоскости Oxy ; функции φ_{ns} симметричны относительно плоскости Oxz и антисимметричны относительно плоскости Oxy , функции φ_{nq} антисимметричны относительно обеих плоскостей Oxy и Oxz . Соответствующие обобщенные координаты обозначим p_n , s_n , q_n , а коэффициентам, зависящим от φ_{np} , φ_{ns} , φ_{nq} , припишем индекс p , s или q . Следствием указанной симметрии является полное расщепление уравнений (3.93) возмущенного движения системы тело — жидкость на уравнение движения его как твердого тела в направлении оси O^*x^* , уравнения вращения вокруг оси Ox и уравнения движения в двух главных плоскостях — $O^*x^*y^*$ и $O^*x^*z^*$.

**Корпус и баки — тела вращения
с общей продольной осью**

Для этого наиболее важного случая выпишем, используя уравнения (3.93), полную систему уравнений возмущенного движения в плоскости $O^*x^*z^*$, включающую диссипативные члены, а также уравнение, описывающее вращение вокруг продольной оси:

$$(I^c + I)\dot{\varphi} + \beta\ddot{\varphi} = M_{Ox}. \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
 (m^+ + m)\zeta - x_G(m^+ + m)\dot{\psi} + \sum_{n=1}^k \lambda_n s_n &= P_z; \\
 (J^+ + J) \tau - x_G(m^+ + m)\dot{\zeta} + \dot{\psi} - jx_G(m^+ + m)\psi + & \quad (3.100) \\
 + \sum_{n=1}^k (\lambda_{on} s_n + \beta_{on} \dot{s}_n) &= M_{Oy}; \\
 \mu_n(s_n + \beta_n \dot{s}_n + \omega_n^2 s_n) + \lambda_n \zeta + \lambda_{on} \psi + \beta_{on} \dot{\psi} &= 0 \\
 (n = 1, 2, \dots, k).
 \end{aligned}$$

Здесь применены упрощенные обозначения (при отсутствии в баке внутренних радиальных ребер $I \equiv 0$).

Коэффициенты β^0 , β , β_n , β_{on} в (3.99), (3.100) являются функциями частоты колебаний ω .

При решении прямых задач динамики необходимо приписать некоторые значения параметру ω и соответствующим числам Рейнольдса. Целесообразно в каждом из коэффициентов с индексом n положить $\omega = \omega_n$. В этом случае наиболее точно будет описываться процесс диссипации энергии при колебаниях на частоте, близкой к резонансной для любой из гармоник, а ошибки возникнут в той нерезонансной области частот, где само влияние диссипативных членов пренебрежимо мало. Параметру ω , входящему в выражения элементов β^0 и β тензора \mathcal{B} в свете этой концепции следует приписать значения ω^0 и ω_0 , соответствующие характерным частотам колебаний РН как твердого тела с автоматом стабилизации. Коэффициенты уравнений (3.99) и (3.100), связанные с диссипацией энергии, определяются формулами

$$\begin{aligned}
 \beta^0 = \beta_{11} &= \frac{\rho \omega^0 l}{V 2 R^0} \int_S \left[\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(z + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(-y + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right)^2 \right] dS; \\
 \beta = \beta_{22} &= \frac{\rho \omega^0 l}{V 2 R_0} \int_S \left[\left(-z + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)^2 + \left(x + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right)^2 \right] dS; \\
 \beta_{on} = \beta_{on2} &= \frac{\rho \omega_n l}{V 2 R_n} \int_S \left[\left(-z + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(x + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right] dS; \\
 \beta_n &= \frac{\rho \omega_n l}{\mu_n V 2 R_n} \int_S \left[\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right)^2 \right] dS,
 \end{aligned} \quad (3.101)$$

где характерные числа Рейнольдса определяются так:

$$\mathbf{R}^0 = \frac{\omega^0 l^2}{v}; \quad \mathbf{R}_0 = \frac{\omega_0 l^2}{v}; \quad \mathbf{R}_n = \frac{\omega_n l^2}{v} \quad (3.102)$$

(l — характерный размер).

Для описания волновых движений жидкости выше применялись обобщенные координаты s_n , соответствующие отсчету аппликат свободной поверхности от «плавающей крышки», ориентированной перпендикулярно полю массовых сил невозмущенного движения.

В ряде работ, начиная с первых исследований в этой области Г. С. Нариманова [36], используются обобщенные координаты s_n , соответствующие отсчету аппликат свободной поверхности от «жесткой крышки», ориентированной перпендикулярно продольной оси полости.

Дополнив левые части уравнений [36] диссипативными членами и переписав их в тех же обозначениях, что в уравнениях (3.100), получим

$$(m^\circ + m)\ddot{\zeta} - x_{G_0}(m^\circ + m)\ddot{\psi} + \sum_{n=1}^k \lambda_n \ddot{s}_n = P_z;$$

$$(J^\circ + J')\ddot{\psi} + \beta'_0 \dot{\psi} - x_{G_0}(m^\circ + m)\ddot{u} - jx_{G_0}(m^\circ + m)\psi + M_{Oy};$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda'_{on} \ddot{s}'_n + \beta'_{on} \dot{s}'_n + j\lambda_n s'_n) = M_{Oy};$$

$$\mu_n(\dot{s}'_n + \beta_n \dot{s}'_n + \omega_n^2 s'_n) + \lambda_n \ddot{u} + \lambda'_{on} \dot{\psi} + \beta'_{on} \dot{\psi} + j\lambda_n \psi = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$
(3.103)

где знак «'» выделяет коэффициенты или обобщенные координаты, отличающиеся от своих аналогов в уравнениях (3.100).

Связь обобщенных координат s_n' и s_n может быть установлена на основе сравнения двух выражений для функций, характеризующей свободную поверхность жидкости при $k=\infty$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n s_n = \psi z + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n s'_n; \quad \psi_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \Big|_{\Sigma}$$

и разложения функции z в обобщенный ряд Фурье по функциям ψ_n :

$$s_n = s'_n + \psi d_n; \quad d_n = \frac{C_n}{N_n^2} = \frac{\lambda_n}{\mu_n \chi_n}; \quad \chi_n = \frac{\omega_n^2}{j}. \quad (3.104)$$

В результате соответствующих подстановок и сравнения полученных уравнений с (3.100), придем к следующим формулам преобразования коэффициентов, обеспечивающим тождественное совпадение этих уравнений [30]:

$$J' = J + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n \chi_n} \left(2\lambda_{on} + \frac{\lambda_n}{\chi_n} \right);$$

$$\lambda'_{on} = \lambda_{on} + \frac{\lambda_n}{\chi_n}; \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \beta' &= \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n \chi_n} \left(2\beta_{on} + \frac{\lambda_n \beta_n}{\chi_n} \right); \\ \beta'_{on} &= \beta_{on} + \frac{\lambda_n \beta_n}{\chi_n}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Уравнения (3.100) имеют тот недостаток, что присоединенные массы λ_n , λ_{on} , μ_n и коэффициенты β_{on} зависят от принятой нормировки системы функций φ_n . Оказывается существуют такие переменные ζ_n , являющиеся линейными функциями s_n , что все упомянутые коэффициенты становятся инвариантными относительно этой нормировки и приобретают отчетливый физический смысл [29].

Введем в обобщенные координаты s_n произвольные пока нормирующие множители a_n , имеющие размерность длины. В результате из уравнений (3.100) получим

$$\begin{aligned} (m^o + m)\ddot{\zeta} - x_G(m^o + m)\ddot{\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \ddot{\zeta}_n &= P_z; \\ (J^o + J)\ddot{\psi} - x_G(m^o + m)\ddot{\zeta} - jx_G(m^o + m)\psi + \\ + \sum_{n=1}^k (\Lambda_{on} \ddot{\zeta}_n + B_{on} \dot{\zeta}_n) &= M_{Oy}; \\ M_n(\ddot{\zeta}_n + \beta_n \dot{\zeta}_n + \omega_n^2 \zeta_n) + \Lambda_n \dot{\zeta} + \Lambda_{on} \ddot{\psi} + B_{on} \psi &= 0 \\ (n = 1, 2, \dots, k), \end{aligned} \quad (3.107)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{s_n}{a_n}; \quad M_n = a_n^2 \mu_n; \quad \Lambda_n = a_n \lambda_n; \\ \Lambda_{on} &= a_n \lambda_{on}; \quad B_{on} = a_n \beta_{on}. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Выберем a_n так, чтобы обобщенная координата ζ_n равнялась угловому отклонению плоскости, аппроксимирующей в смысле минимума среднего квадратичного отклонения возмущенную поверхность жидкости при n -й форме колебаний.

Используя метод наименьших квадратов, можно свести задачу к отысканию экстремума по параметрам ζ_n следующего функционала:

$$G_n = \int_S (s_n \psi_n - \zeta_n z)^2 dS.$$

Решение ее найдем из уравнений

$$\frac{\partial G_n}{\partial \zeta_n} = 2 \int_S (s_n \psi_n - \zeta_n z) dS = 0$$

$$(n = 1, 2, \dots),$$

из которых получим

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{s_n}{a_n}; \quad a_n = \frac{\Omega}{\lambda_n}; \quad \Lambda_n = \Omega; \\ \Lambda_{on} &= -c_n \Omega; \quad \Omega = \rho J_y; \quad M_n = \frac{\Omega^2}{m_n}; \quad (3.109) \\ m_n &= \frac{\lambda_n^2}{\mu_n}; \quad c_n = -\frac{\lambda_{on}}{\lambda_n}; \quad B_{on} = -b_n \Omega; \quad b_n = -\frac{\beta_{on}}{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнений (3.107) выражены теперь через параметры, инвариантные относительно выбора нормировки функций ϕ_n ,

$$\omega_n^2, \quad J, \quad m_n = \frac{\lambda_n^2}{\mu_n}, \quad c_n = -\frac{\lambda_{on}}{\lambda_n}; \quad \beta_n, \quad b_n = -\frac{\beta_{on}}{\lambda_n}. \quad (3.110)$$

Если рассматривается не тело вращения, а тело, имеющее две плоскости симметрии, то коэффициентам (3.110) надо присвоить индексы s , p или q и заменить знак «—» перед c_n и b_n «+». Роль коэффициентов J , m_n , b_n в преобразованных аналогичным образом уравнениях вращения вокруг продольной оси (3.99) играют

$$J, \quad m_{nq} = \frac{\lambda_{on1}^2}{\mu_{nq}}, \quad b_{nq} = \frac{\beta_{on1}}{\lambda_{nq}}. \quad (3.111)$$

В работах [29, 30] показано, что уравнения (3.107) описывают плоское возмущенное движение твердого тела, к которому подвешены k математических маятников, в плоскопараллельном поле массовых сил с градиентом \mathbf{j} при наличии системы демпферов. Масса этого тела m_0 , момент инерции J_0 , координата центра масс x_0 относительно полюса O , масса n -го маятника, его расстояние от точки O до оси подвеса c_n и длина l_n определяются формулами

$$\begin{aligned} m_0 &= m^\circ + m - \sum_{n=1}^k m_n; \quad J_0 = J^\circ + J - \sum_{n=1}^k m_n c_n^2; \\ x_0 &= \frac{m^\circ + m}{m_0} x_G - \frac{1}{m_0} \sum_{n=1}^k m_n c_n; \quad m_n = \frac{\lambda_n^2}{\mu_n}; \quad (3.112) \\ c_n &= -\frac{\lambda_{on}}{\lambda_n}; \quad l_n = \frac{j}{\omega_n^2}. \end{aligned}$$

В пределе при $k \rightarrow \infty$ число маятников стремится к бесконечности.

Можно показать, используя приближенную формулу, следующую из (6.81) гл. 6, что параметры d_n (3.104) удовлетворяют следующему соотношению:

$$d_n = \frac{C_n}{N_n^2} = \frac{\lambda_n}{\mu_n x_n} \approx \frac{\Omega}{\lambda_n} = a_n.$$

Таким образом, если обозначить $\frac{s_n}{d_n} = \zeta'_n$, то из первой формулы (3.104) следует

$$\zeta_n = \zeta'_n + \psi,$$

т. е. ζ_n и ζ'_n углы отклонения n -го эквивалентного маятника относительно оси O^*x^* и оси Ox соответственно.

Таким образом, параметры m_n , c_n , ζ_n и ζ'_n приобретают отчетливый физический смысл.

Параметры (3.110) целесообразно представить в безразмерной форме, что будет сделано ниже.

Рассмотрим снова движение в плоскости $O^*x^*z^*$ и вращение вокруг оси Ox и введем упрощенные обозначения, которые используются в дальнейшем.

Сформулируем общий алгоритм определения параметров (3.110) применительно к отсеку и телу с двумя плоскостями симметрии.

1. Решение основных однородных краевых задач

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_S = 0; \quad (3.113)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \kappa \varphi \right) \Big|_{\Sigma} = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_{\Sigma} = 1 \text{ при } y = y^*, z = z^*.$$

2. Решение основных неоднородных краевых задач

$$\Delta \Psi = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right|_S = z v_x - x v_z; \quad (3.114)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right|_{\Sigma} = 0. \quad (3.114)$$

$$\Delta \Psi_1 = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \right|_S = y v_z - z v_y; \quad (3.115)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \right|_{\Sigma} = 0. \quad (3.115)$$

3. Расчет основных безразмерных коэффициентов при $l=1$, $\rho=1$, $j=1$ и переход к коэффициентам для реальных значений l , ρ , j по формулам

$$\begin{aligned} m &= \rho l^3 \bar{m}; \quad J = \rho l^5 \bar{J}; \quad \Omega = \rho l^4 \bar{\Omega}; \\ m_n &= \rho l^3 \bar{m}_n; \quad c_n = \bar{l} \bar{c}_n; \quad \omega_n^2 = \frac{j}{l} \bar{\omega}_n^2; \\ \bar{m}_n &= \frac{\bar{\lambda}_n^2}{\mu_n}; \quad \bar{c}_n = - \frac{\bar{\lambda}_{on}}{\bar{\lambda}_n}; \\ m_{nq} &= \rho l^5 \bar{m}_{nq}; \quad \bar{m}_{nq} = \frac{\bar{\lambda}_{on1}^2}{\mu_{nq}}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

4. Расчет дополнительных безразмерных диссипативных коэффициентов при $l=1$, $\rho=1$, $\omega=1$ и переход к коэффициентам для реальных значений l , ρ , ω .

В наиболее важном случае тела вращения получим

$$\begin{aligned} \beta &= \rho l^5 \omega_0 \bar{\beta}; \quad \beta^0 = \rho l^5 \omega^0 \bar{\beta}^0; \\ \beta_n &= \omega_n \bar{\beta}_n; \quad b_n = \omega_n l \bar{b}_n; \quad \bar{b}_n = - \frac{\bar{\beta}_{on}}{\bar{\lambda}_n}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Формулы (3.117) справедливы для отсеков с гладкими стенками и с внутренними ребрами, меняются только безразмерные коэффициенты β , β^0 , β_n , β_{on} . В случае гладких стенок эти коэффициенты можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{\tilde{\beta}}{V R_0}; \quad \bar{\beta}^0 = \frac{\tilde{\beta}^0}{V R^0}; \\ \bar{\beta}_n &= \frac{\tilde{\beta}_n}{V R_n}; \quad \bar{\beta}_{on} = \frac{\tilde{\beta}_{on}}{V R_n}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Безразмерные диссипативные коэффициенты для случая отсеков с внутренними ребрами приведены в разд. 6.7. Для сравнения с результатами, имеющимися в литературе, удобно ввести вспомогательные параметры

$$\tilde{\delta}_n = \pi \tilde{\beta}_n; \quad \tilde{\delta}_{on} = \frac{\pi \tilde{\beta}_{on}}{\mu_n}, \quad (3.119)$$

первый из которых — логарифмический декремент колебаний.

На рис. 3.2, а представлены теоретические и экспериментальные зависимости основных безразмерных коэффициентов от без-

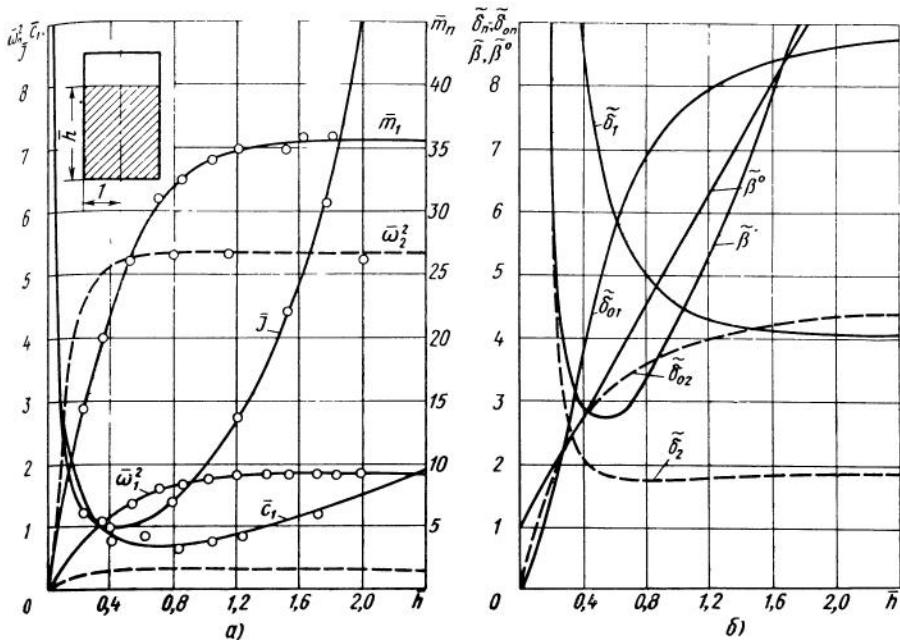


Рис. 3.2. Гидродинамические коэффициенты для отсека в форме прямого кругового цилиндра с плоским днищем:

a — основные коэффициенты (— теория, о — эксперимент); *б* — вспомогательные (диссипативные) коэффициенты

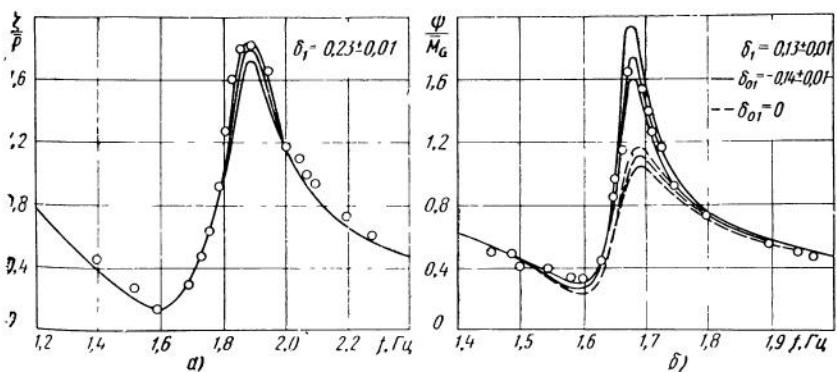


Рис. 3.3. Амплитудно-частотные характеристики цилиндрического отсека с жидкостью:

a — боковая сила — поступательное перемещение; *б* — пара сил — угловое перемещение (— теория; о — эксперимент)

размерной глубины жидкости \bar{h} для бака в форме прямого кругового цилиндра с плоским днищем [29], а на рис. 3.2, б — зависимость теоретических значений дополнительных коэффициентов от \bar{h} [30].

На рис. 3.3 показаны теоретические и экспериментальные амплитудно-частотные характеристики разомкнутой системы корпус — бак при поступательных и угловых перемещениях в плоскости $O^*x^*z^*$ [45, 29]. При расчете теоретических характеристик были использованы теоретические значения $\tilde{\delta}_1$ с эмпирическим множителем 1,4.

Как видно из рис. 3.2 и 3.3 теоретические и экспериментальные значения гидродинамических коэффициентов практически полностью совпадают (с учетом эмпирической поправки в $\tilde{\beta}_n$ или $\tilde{\delta}_n$, о которой говорилось выше). Аналогичная картина наблюдается и для баков более сложной геометрической конфигурации [29].

Важно отметить, что величина массы эквивалентного маятника \bar{m}_n резко уменьшается с увеличением номера тона (на рис. 3.2, а — примерно на два порядка при переходе от $n=1$ к $n=2$), что типично для большинства баков, встречающихся на практике. Исключение составляют баки со сложными радиальными перегородками, у которых, по крайней мере, первые две формы колебаний, возбуждающиеся при движении в плоскости $O^*x^*z^*$ или $O^*x^*y^*$, имеют соизмеримые значения \bar{m}_n .

Поскольку такие баки в дальнейшем не рассматриваются, есть все основания для замены каждого бака при движении в одной из плоскостей стабилизации системой с одной степенью свободы, соответствующей первому антисимметричному тону колебаний жидкости ($n=1$), что и делается в следующем разделе, разд. 4.6 и во всех уравнениях ч. III.

Индекс n означает в этих случаях не номер формы колебаний жидкости, а номер бака при учете одной доминирующей гармоники в каждом баке.

3.5. Уравнения возмущенного движения баллистических и крылатых РН в плоскостях стабилизации

Уравнения возмущенного движения в плоскостях стабилизации РН с корпусом в форме тела вращения (тандемная компоновка) или совокупности блоков, имеющих форму тел вращения (пакетная компоновка), с учетом подвижности компонентов жидкого топлива в баках могут быть получены из уравнений (3.99), (3.100), (2.18) (2.19) и (2.20). При этом учитывая сравнительно малую скорость понижения уровня жидкости в баках, из которых идет выработка топлива, можно свести учет измененности массы к введению «медленного» (реального) времени в качестве параметра во все гидродинамические коэффициенты и

в координаты метацентра. Уравнения (3.107) при отсутствии волновых движений, т. е. $s_n \equiv 0$, будут тогда отличаться от уравнений (2.18) и (2.19) только заменой x_{G_0} на x_G . В уравнениях (3.99) надо учесть при наличии радиальных ребер присоединенный момент инерции I , который суммируется с I^0 . В остальном при наличии в баках радиальных или кольцевых ребер уравнения (3.99) и (3.100) сохраняют свою структуру, хотя гидродинамические коэффициенты будут уже не такими, как в случае баков с гладкими стенками, причем диссипативные коэффициенты становятся нелинейными функциями амплитуд некоторых характеристических скоростей (см. разд. 6.8).

Рассмотрим в качестве примера РН пакетной схемы (см. рис. 0.1), последнюю из разгонных ступеней РН тандемной схемы с возвращаемой крылатой ступенью (см. рис. 0.4) и баллистическую РН тандемной схемы (см. рис. 0.2). В первых двух случаях не будем выписывать диссипативные члены и уравнения АС. Кроме того, предположим, что в случае РН пакетной схемы свободные поверхности имеются только у жидкости, находящейся в боковых блоках. В третьем случае — для РН наиболее распространенной сейчас тандемной схемы выпишем полные системы уравнений возмущенного движения в плоскости $O^*x^*z^*$ и вращения относительно оси O^*x^* .

РН пакетной схемы с четырьмя боковыми блоками

~ Предположим, что имеются четыре одинаковых блока, расположенных симметрично вокруг оси Ox , причем в каждом имеются два бака — окислителя и горючего (см. рис. 0.1). Продольные оси боковых блоков образуют малые углы с продольной осью корпуса Ox , так что свободные поверхности жидкости во всех баках имеют форму, близкую к круговой (эллипс с малым экс-

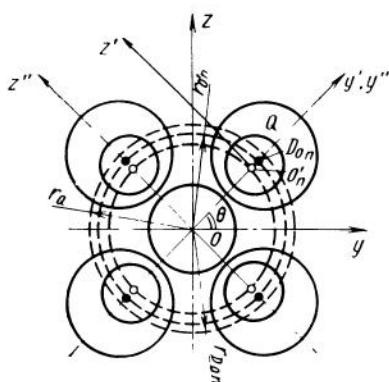


Рис. 3.4. Системы координат для баков РН пакетной схемы с малым углом между осями центрального и бокового блоков

центриситетом). Плотность и глубину жидкости будет считать во всех баках окислителя и горючего одинаковыми.

Введем для расстояния от продольной оси корпуса до центра масс D_{On} затвердевшей жидкости в полости, находящейся на n -м уровне, и до центра тяжести C'_n площасти свободной поверхности обозначения $r_{D_{On}}$ и $r_{O'n}$, а для расстояний от точки O до точки O'_n и метацентра жидкости в баках n -го уровня $-x'_{O_n}$ и $x_{D'_n}$ ($n=1, 2$) (O'_n — как и в гл. 1, произвольная точка на оси, проходящей через C'_n параллельно j , рис. 3.4). Воспользуемся новыми системами координат $O'_n x'y'z'$ и $O''_n x''y''z''$, представленными на рис. 3.4, и формулами (3.92).

В результате получим из (3.93) следующие системы уравнений движения в плоскости рыскания $O^*x^*z^*$ и вращения вокруг оси Ox :

$$(m^\circ + m)\ddot{\zeta} + 2 \sum_{n=1}^2 \lambda_n \ddot{s}_n = P_z;$$

$$(J^\circ + J)\ddot{\psi} + 2 \sum_{n=1}^2 \lambda_{on} \ddot{s}_n = M_{Oy}; \quad (3.120)$$

$$\mu_n (\ddot{s}_n + \omega_n^2 s_n) + \lambda_n \ddot{\zeta} + \lambda_{on} \ddot{\psi} = 0$$

$$(n=1, 2).$$

$$(I^\circ + I)\ddot{\varphi} + 4 \sum_{n=1}^2 \lambda_{on1} \ddot{q}_n = M_{Ox};$$

$$\mu_n (\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) + \lambda_{on1} \ddot{\varphi} = 0 \quad (3.121)$$

$$(n=1, 2).$$

Первая из этих систем по форме ничем не отличается от соответствующей системы уравнений для РН тандемной схемы (3.100) с двумя топливными баками (если в последней пренебречь диссипативными коэффициентами). Коэффициенты уравнений (3.120), (3.121) выражаются следующими формулами [29]:

$$x_G = x_{G_0} + \frac{2 \sum_{n=1}^2 \Omega_n}{m^\circ + m}; \quad \lambda_{on} = \lambda'_{on} - x'_{O_n} \lambda'_n;$$

$$J = 4 \sum_{n=1}^2 \left[J'_n + 2m'_n x'_{O_n} x'_{D'_n} - m'_n x'^2_{O_n} - \frac{1}{2} m'_n r'^2_{O'_n} + m'_n r'_{O'_n} r_{D_{On}} \right];$$

$$\lambda_{on1} = \lambda'_{on1} + r'_{O_n} \lambda'_n; \quad I = 4 \sum_{n=1}^2 m'_n r_{D_{on}}^2; \quad (3.122)$$

$$\lambda_n \equiv \lambda'_n, \quad \mu_n \equiv \mu'_n,$$

где μ'_n , λ'_n , λ'_{on} , m'_n , J'_n относятся к одному баку (здесь m'_n — масса жидкости).

В случае баков с параллельными осями $r_{O_n'} = r_{D_{on}}$ и

$$J = 4 \sum_{n=1}^2 \left(J'_n + 2m'_n x_{O_n'} x_{D_n'} - m'_n x_{O_n'}^2 + \frac{1}{2} m'_n r_{O_n'}^2 \right). \quad (3.122a)$$

Эта формула представляет собой обобщение теоремы Штейнера [26].

РН tandemной схемы с возвращаемой крылатой ступенью

Положим, что корпус (см. рис. 0.4) представляет собой тело вращения с баками, имеющими форму круговых цилиндров с днищами произвольной конфигурации, которые свободная поверхность не пересекает.

Введем системы координат $O^o x^o y^o z^o$ и $O^* x^* y^* z^*$, первая из которых связана с телом в невозмущенном движении так, что ось $O^o x^o$ совпадает с его продольной осью, а вторая — с градиентом поля массовых сил \mathbf{j} , которому антипараллельна ось $O^* x^*$. Начало координат $O^o \equiv O^*$ поместим в центре невозмущенной

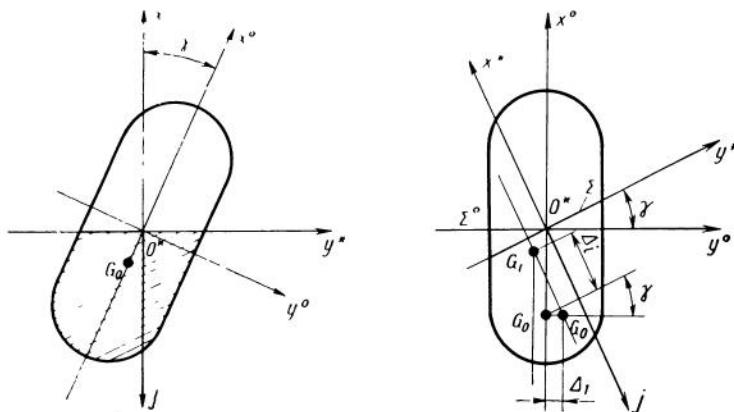


Рис. 3.5. Системы координат для бака РН с крылатой последней ступенью при немалом угле наклона нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости к продольной оси корпуса

свободной поверхности жидкости. Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что система координат $O^*x^*y^*z^*$ не совпадает с системой координат $O'x'y'z'$, а повернута вокруг оси $O'z'$ на «немалый» угол γ (рис. 3.5).

Производные $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$ будем полагать малыми величинами более высокого порядка, чем аналогичные производные, связанные с поворотом плоскости, аппроксимирующей свободную поверхность жидкости в возмущенном движении (соответствующий динамический эффект нетрудно учесть). Связанные системы координат, совпадающие в невозмущенном движении с системами координат $O^*x^*y^*z^*$ и $O^*x^*y^*z^*$, обозначим $Oxyz$ и $O'x'y'z'$ соответственно ($O' \equiv O$). Движение системы координат $Oxyz$ относительно $O^*x^*y^*z^*$ будем описывать обобщенными координатами u_i , θ_i ($i=1, 2, 3$); системы координат $O'x'y'z'$ относительно $O^*x^*y^*z^*$ — обобщенными координатами ξ , η , ζ , φ , ψ , ϑ . Воспользуемся уравнениями (3.93), которые подвергнем некоторым преобразованиям, учитывая специфические особенности рассматриваемой задачи [48].

Приняв следующие обозначения: G_0 и G_0^* — центры масс системы корпус — жидкость при $\gamma=0$ и $\gamma \neq 0$, G_i ($i=2, 3$) — метacentры той же системы при $\gamma \neq 0$, Δ_1 и Δ_i — координаты точек G'_0 и G_i ($i=2, 3$), получим в системе координат $O^*x^*y^*z^*$

$$x_{G_i} = x_{G_0} \cos \gamma - \Delta_1 \sin \gamma + \Delta_i; \quad y_{G_2} = y_{G_3} = x_{G_0} \sin \gamma + \Delta_1 \cos \gamma; \\ z_{G_2} = z_{G_3} = 0, \quad (3.123)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\rho \operatorname{tg} \gamma}{m^\circ + m} \int \limits_{\Sigma} y^2 dS = \frac{\pi \rho r_0^4 \operatorname{tg} \gamma}{4(m^\circ + m)}; \\ \Delta_2 = \frac{\rho}{m^\circ + m} \int \limits_{\Sigma} z^2 dS = \frac{\pi \rho r_0^4}{4(m^\circ + m) \cos \gamma}; \quad (3.124) \\ \Delta_3 = \frac{\rho}{m^\circ + m} \int \limits_{\Sigma} y^2 dS = \frac{\pi \rho r_0^4}{4(m^\circ + m) \cos^3 \gamma}$$

(Σ° и Σ — площади свободной поверхности жидкости при $\gamma=0$ и $\gamma \neq 0$).

В системе координат $O^*x^*y^*z^*$

$$x_{G_i} = x_{G_i} \cos \gamma + y_{G_i} \sin \gamma; \quad y_{G_i} = -x_{G_i} \sin \gamma + y_{G_i} \cos \gamma. \quad (3.125)$$

В случае возмущенного движения в плоскости $O^*x^*y^*$ имеем

$$\theta_3 = \vartheta; \quad u_1 = \xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma; \quad u_2 = \xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma;$$

$$P_x = P_x \cos \gamma + P_y \sin \gamma; \quad P_y = P_y \cos \gamma - P_x \sin \gamma; \quad (3.126)$$

$$x_{G_3} = x_{G_0} + \frac{\pi \rho r_0^4 \sec^2 \gamma}{4(m^\circ + m)}; \quad y_{G_3} = -\frac{\pi \rho r_0^4 \operatorname{tg}^3 \gamma}{4(m^\circ + m)},$$

где P_x и P_y — проекции главного вектора внешних сил на оси O^*x^* и O^*y^* . После подстановки соответствующих выражений в уравнения (3.93) и переноса начала координат в метацентр получим

$$\begin{aligned} (m^\circ + m)\ddot{\xi} + \sum_{n=1}^k \lambda_{n2} \sin \gamma p_n &= P_x; \\ (m^\circ + m)\ddot{\eta} + \sum_{n=1}^k \lambda_{n2} \cos \gamma \ddot{p}_n &= P_y; \\ (I_{33}^\circ + I_{33})\ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^k \lambda_{on3} p_n &= M_{G_3 z}; \end{aligned} \quad (3.127)$$

$$\mu_{np}(\ddot{p}_n + \omega_{np}^2 p_n) + \lambda_{n2} \sin \gamma \ddot{\xi} + \lambda_{n2} \cos \gamma \ddot{\eta} + \lambda_{on3} \dot{\vartheta} = 0 \\ (n = 1, 2, \dots, k).$$

Суммарный момент инерции $I^\circ_{33} + I_{33}$ определяется по теореме Штейнера:

$$I_{33}^\circ + I_{33} = J_{33}^\circ + J_{33} - (m^\circ + m)(x_{G_3}^2 + y_{G_3}^2), \quad (3.128)$$

где J_{33}° и J_{33} — момент инерции тела и присоединенный момент инерции жидкости относительно точки O .

В возмущенном движении в плоскости $O^\circ x^\circ z^\circ$ и при вращении относительно оси $O^\circ x^\circ$

$$\begin{aligned} u_2 &= \zeta; \quad \theta_1 = \varphi \cos \gamma - \psi \sin \gamma; \quad \theta_2 = \varphi \sin \gamma + \psi \cos \gamma; \\ M_x &= M_x \cos \gamma + M_y \sin \gamma; \quad M_{y^\circ} = M_y \cos \gamma - M_x \sin \gamma; \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$x_{G_2} = x_{G_0} + \frac{\pi \rho r_0^4}{4(m^\circ + m)}; \quad y_{G_2} = 0.$$

После соответствующих подстановок в уравнения (3.93) и переноса начала в метацентр G_2 получим

$$\begin{aligned} (m^\circ + m)\ddot{\zeta} + \sum_{n=1}^k \lambda_{n3} s_n &= P_{z^\circ}; \\ I_{11}^\circ \ddot{\varphi} + \sum_{n=1}^k (\lambda_{on2} \sin \gamma \ddot{s}_n + \lambda_{on1} \cos \gamma \dot{q}_n) &= M_{G_2 x}; \\ (I_{22}^\circ + I_{22})\ddot{\psi} + \sum_{n=1}^k (\lambda_{on2} \cos \gamma \dot{s}_n - \lambda_{on1} \sin \gamma q_n) &= M_{G_2 y^\circ}; \end{aligned} \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ns}(\ddot{s}_n + \omega_{ns}^2 s_n) + \lambda_{n3} \zeta + \lambda_{on2} \sin \gamma \ddot{\varphi} + \lambda_{on2} \cos \gamma \ddot{\psi} &= 0; \\ \mu_{nq}(\ddot{q}_n + \omega_{nq}^2 q_n) + \lambda_{on1} \cos \gamma \ddot{\varphi} - \lambda_{on1} \sin \gamma \ddot{\psi} &= 0 \\ (n = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

Моменты инерции I^o_{22} и I_{22} здесь приведены к метацентру G_2 . В рассматриваемом случае боковое движение и вращение относительно продольной оси оказываются связанными между собой, как и поперечное движение и движение в направлении продольной оси.

РН тандемной схемы с корпусом в форме тела вращения, имеющая k баков

Для этого наиболее важного случая (см. рис. 0.2) выпишем полные системы уравнений возмущенного движения в плоскостях рыскания и крена, следующие из (3.99), (3.100), (2.19), (2.20), если совместить начало координат с метацентром:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\zeta + a'_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\psi}\psi + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + a_{\zeta\delta_\psi} &= a'_{\zeta\zeta} w_\zeta + \bar{P}_z(t); \\ \ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\psi}\psi + \sum_{n=1}^k (a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a'_{\psi s_n} \dot{s}_n) + a_{\psi\delta_\psi} &= a'_{\psi\zeta} w_\zeta + \bar{M}_{G_y}(t); \\ (3.131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n} \ddot{\zeta} + a_{s_n} \psi \ddot{\psi} + a'_{s_n} \dot{\psi} &= 0; \\ \delta_\psi &= \mathcal{L}'_1(\psi) - \mathcal{L}'_2(\zeta^\circ); \\ \zeta^\circ &= \zeta - (x^\circ - x_{G_0})\psi \\ (n = 1, 2, \dots, k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + a'_{\varphi\varphi}\dot{\varphi} + a_{\varphi\delta_\varphi} \delta_\varphi &= \bar{M}_{G_x}(t); \\ (3.132) \end{aligned}$$

$$\delta_\varphi = \mathcal{L}'_3(\varphi).$$

Правые части и коэффициенты в уравнениях (3.131) приведены к метацентру; кроме того, роль момента инерции играет $J^o + J$ (см. уравнение (3.100)).

Уравнения (3.132) отличаются от (2.20) тем, что в случае внутренних радиальных ребер момент инерции относительно продольной оси равен $I^o + I$ (3.99). Выражения для коэффициентов уравнений (3.131) и (3.132) приведены в разд. 4.5.

РАКЕТА КАК УПРУГОЕ ТЕЛО С ОТСЕКАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ЖИДКОСТЬ

4.1. Предварительные замечания

Будем в соответствии со сказанным в разд. 1.5 схематизировать корпус РН упругим стержнем с присоединенными к нему отсеками с жидкостью.

Возможность независимого решения задачи об осесимметричных колебаниях отсека с жидкостью приводит к методической общности задач о продольных, поперечных и крутильных колебаниях упругих стержней с отсеками, содержащими жидкость. В основу динамической схемы РН в свете этой концепции может быть положен некоторый эквивалентный упругий стержень с присоединенными к нему осцилляторами.

На рис. 4.1 показана схема перехода от исходной конструкции (рис. 4.1, а) к принимаемой расчетной модели при продольных колебаниях корпуса РН с tandemной компоновкой.

Рис. 4.1, б иллю-

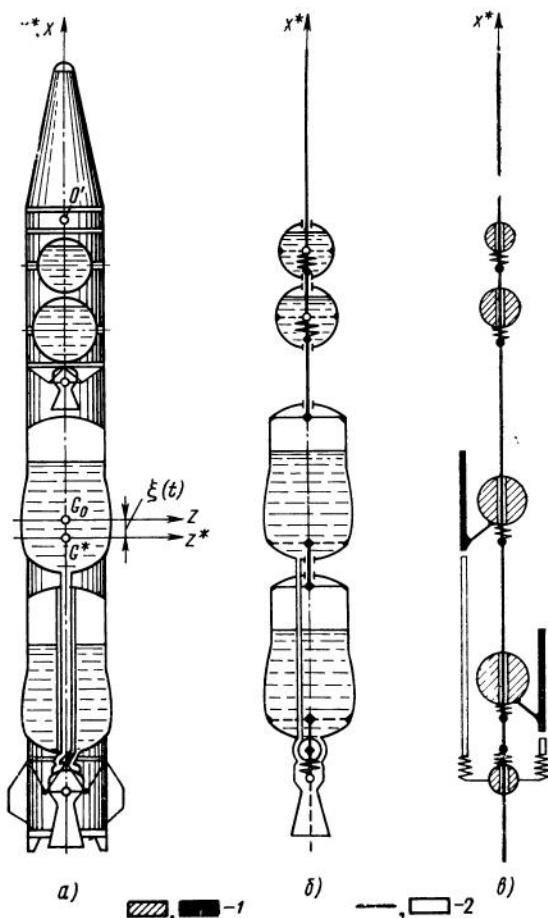


Рис. 4.1. Динамическая схема РН при продольных колебаниях:

а — исходная конструкция с деформирующимиися (как оболочки) несущими баками и жесткими подвесными;
б — упрощенный механический аналог; *в* — эквивалентный упругий стержень, 1 — жесткие элементы, 2 — упругие элементы

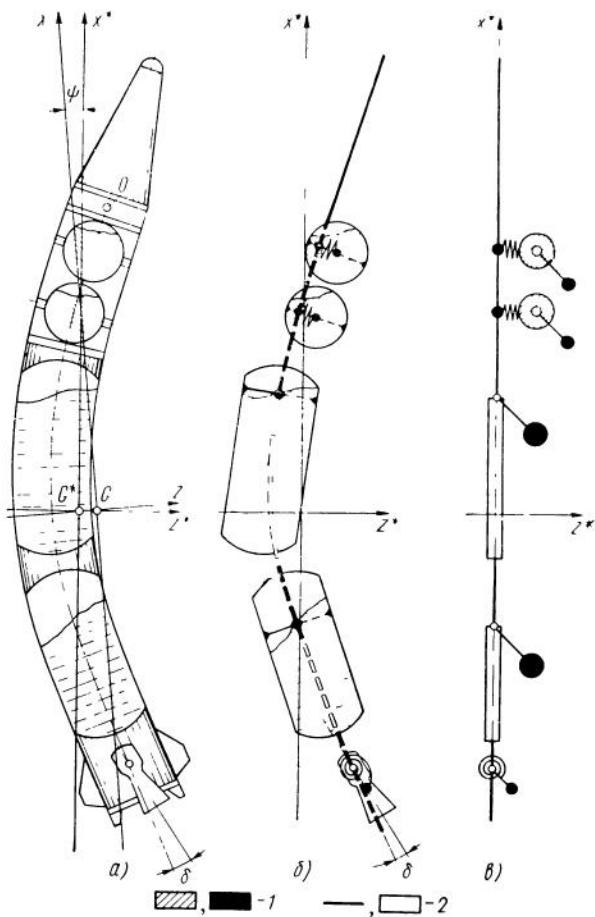


Рис. 4.2. Динамическая схема РН при поперечных колебаниях:

a — исходная конструкция с деформирующими балками и жесткими подвесными баками, *б* — упрощенный механический аналог, *в* — эквивалентный упругий стержень, 1 — жесткие элементы, 2 — упругие элементы

стрирует упругий стержень с отсеками, содержащими жидкость, верхние два из которых соответствуют жестким подвесным бакам на упругих связях, допускающих перемещение баков вдоль оси корпуса, а нижние — несущим цилиндрическим бакам, связанным со стержнем через усиленные шлангоуты.

На рис. 4.1, *в*, дана окончательная динамическая схема, на которой показаны те из эквивалентных масс на упругих связях, которые имитируют массы жидкости в баках и двигатель, а также упругие (светлые) и жесткие (темные) элементы стержней, соответствующих жидкости в магистралях окислителя и горю-

чего. На рис. 4.1 принято, что имеется только две магистрали, оси которых близки к продольной оси корпуса (см. гл. 1).

На рис. 4.2 показана схема перехода к расчетной модели той же исходной конструкции, что и на рис. 4.1, а, только при попе-речных колебаниях.

В соответствии со сказанным в разд. 1.5 здесь сначала вво-дятся жесткие отсеки с жидкостью, поворачивающиеся благода-ря наличию связей вместе с некоторыми сечениями корпуса (см. рис. 4.2, б). В работе [30] показано, что для подвесных ба-ков эти сечения совпадают с плоскостью опорных шпангоутов, а для несущих — лежат вблизи свободной поверхности жидкости. Предполагается, что подвесные отсеки могут перемещаться в направлении, перпендикулярном упругой оси корпуса вследст-вие деформации упругих связей.

Затем осуществляется переход к одномерной системе типа балки с распределенными и сосредоточенными параметрами, при-чем волновые движения жидкости в баках (первый тон) имити-руются некоторыми эквивалентными маятниками [29, 30], а дви-гатель — маятником с дополнительной упругой связью (см. гл. 1).

Аналогичным образом выбирается расчетная схема при кру-тильных колебаниях.

Используя элементарные расчетные модели такого рода можно построить и более сложные модели, воспроизводящие в рассматриваемом диапазоне частот динамические свойства РН пакетной конструкции.

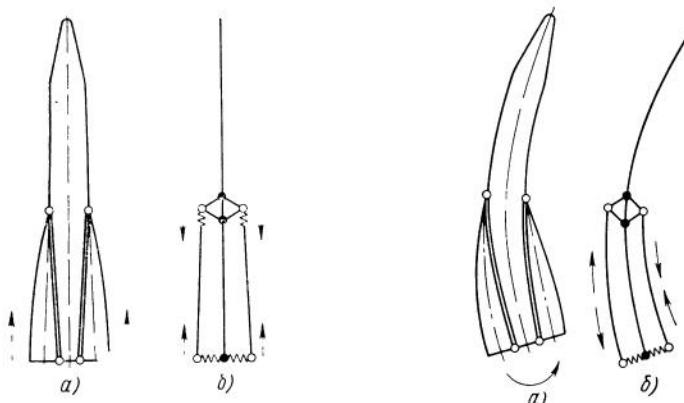


Рис. 4.3. Деформация корпуса РН пакетной схемы при продольных коле-баниях:

а — качественная картина, б — простейшая расчетная схема

Рис. 4.4. Деформация корпуса РН пакетной схемы при поперечных коле-баниях:

а — качественная картина, б — простейшая расчетная схема

На рис. 4.3 и 4.4 показана общая картина продольных и по-перечных деформаций корпуса таких РН и сильно упрощенные «глобальные» расчетные модели, каждому элементу которых, соответствуют «локальные» модели типа представленных на рис. 4.1 и 4.2.

Важным обстоятельством здесь является появление деформаций растяжения и сжатия боковых блоков при поперечных колебаниях РН пакетной схемы в плоскостях тангажа и рыскания. Колебания таких конструкций в плоскости крена сопровождаются изгибом боковых блоков, что накладывает определенный отпечаток на динамическую устойчивость, как и возбуждение волновых движений жидкости в этих блоках.

Уравнения в частных производных, описывающие колебания механических систем рассматриваемого типа с распределенными параметрами, можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом, известным в литературе под названием метода Бубнова — Галеркина или метода Галеркина, широко применяемым в динамике сооружений. В основе его лежит принцип возможных перемещений.

Суть этого метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде ряда по некоторой полной системе линейно независимых координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи, а затем приравниваются нулю интегралы из произведений левой части исходного уравнения на различные координатные функции.

По существу это означает приравнивание нулю элементарной работы суммы обобщенных сил, действующих на рассматриваемую механическую систему, при виртуальных перемещениях системы. Если выбрано счетное множество координатных функций, образующих полную систему, то в результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка, эквивалентная исходному уравнению в частных производных. Существенным моментом здесь является удовлетворение координатными функциями граничных условий задачи, чем и обеспечивается совместимость рассматриваемых перемещений со связями, т. е. их виртуальность.

Был сделан ряд попыток преодолеть это ограничение, т. е. ослабить требования к системе координатных функций в смысле удовлетворения граничным условиям задачи, не вступая в то же время в противоречие с принципом возможных перемещений, т. е. с существом метода Галеркина. В качестве примера укажем на эффективный метод, предложенный В. П. Шмаковым [62].

Ниже метод Бубнова — Галеркина используется в качестве основного метода для упрощения описания динамической схемы РН. При этом следует еще раз подчеркнуть, что принимаемая динамическая схема корпуса РН как тонкостенного упругого стержня с отсеками, содержащими жидкость, справедлива только для определенного круга задач и в определенном диапазоне

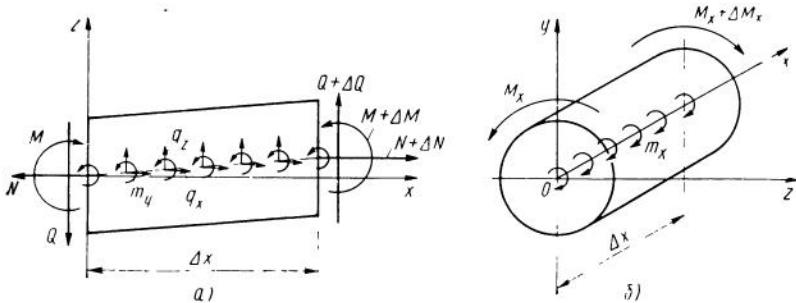


Рис. 4.5. Деформация элемента стержня и основные силовые факторы:
а — растяжение (сжатие) и изгиб; б — кручение

частот, причем по мере введения дополнительных ограничений область применимости соответствующих уравнений становится уже.

Выпишем в заключение обычные уравнения поперечных, продольных и крутильных колебаний тонкостенных стержней, соответствующие рис. 4.5 [10, 15, 56], и граничные условия для случая свободных концов стержня $x=0, l$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q_z(x, t); \quad (4.1)$$

$$EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad \text{при } x=0, l.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -q_x(x, t);$$

$$u=0; \quad EF \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0, l. \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_d \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -m_x(x, t); \quad (4.3)$$

$$\varphi=0; \quad GJ_d \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x=0, l,$$

где $u(x, t)$, $v(x, t)$, $\varphi(x, t)$ — функции, описывающие растяжение (сжатие), изгиб и кручение стержня; F , J , J_p — площадь, экваториальный и полярный моменты инерции поперечного сечения; ρ — массовая плотность материала; EJ , EF , GJ_d — изгибная, продольная и крутильная жесткости.

Начальные условия имеют вид:

$$v|_{t=0} = v_0(x); \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{v}_0(x);$$

$$u|_{t=0} = u_0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{u}_0(x); \quad (4.4)$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0(x).$$

Из сопоставления уравнений продольных и крутильных колебаний видна полная идентичность этих уравнений; то же относится к граничным и начальным условиям.

Приведем дополнительные граничные условия при продольных и поперечных колебаниях, полагая, что в произвольном сечении $x=x_i$ приложены сосредоточенные продольная сила P_i , поперечная сила Q_i и пара сил M_{yi} , действующая в положительном направлении по отношению к сечению, находящемуся левее точки $x=x_i$:

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} &= 0; \quad v \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} = 0; \\ EF \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} &= -P_i; \quad EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} = -M_{yi}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x_i=0}^{x_i+0} &= -P_i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=x_i} + Q_i. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Приведем также более общее уравнение поперечных колебаний, соответствующее учету продольной силы $N(x, t)$ и инерции поворота поперечных сечений стержня:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho J \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t^2} \right) + \\ + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q_z(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} m_y(x, t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Наиболее широко применяются в динамике сооружений уравнения (4.1), (4.2) и (4.3). В дальнейшем эти уравнения рассматриваются независимо. При этом для упрощения записи вводится одно и то же обозначение $u(x, t)$ для функций, характеризующих упругую линию стержня при продольных и поперечных колебаниях (вместо u и v).

4.2. Колебания столба жидкости в магистрали с сосредоточенной емкостью на нижнем конце

Рассмотрим в качестве примера уравнения продольных колебаний столба жидкости в магистрали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4.7)$$

где величина c^2 определяется формулой (1.25).

В случае трубы с бесконечно жесткими стенками $c_2^2 \rightarrow \infty$; $c^2 \rightarrow c_1^2$. В случае несжимаемой жидкости $c_1^2 \rightarrow \infty$; $c^2 \rightarrow c_2^2$. В дальнейшем полезно будет иметь выражение для изменения давления в произвольном сечении:

$$p = -\rho^* c^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (4.8)$$

где ρ^* — невозмущенное значение массовой плотности жидкости. Из выражения (4.8) видно, что положительные значения p (сжатие жидкости) соответствуют отрицательным значениям $\frac{\partial u}{\partial x}$, что согласуется с введенным правилом знаков.

Границные условия в случае закрытого нижнего конца трубы и открытого верхнего имеют вид

$$u(x, t)|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l'} = 0 \quad (4.9)$$

и соответствуют по форме консольно закрепленному упругому стержню (верхний конец свободен, нижний заделан).

Краевая задача для определения форм продольных колебаний столба жидкости $\eta_j(x)$ имеет вид

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \left(\frac{\gamma}{l'}\right)^2 \eta = 0. \quad (4.10)$$

$$\eta(x)|_{x=0} = 0; \quad \eta'(x)|_{x=l'} = 0. \quad (4.11)$$

Краевую задачу (4.10), (4.11) необходимо дополнить условием нормировки, которое примем в виде

$$\eta(x)|_{x=l'} = 1. \quad (4.12)$$

Формы и частоты собственных колебаний определяются формулами

$$\eta_j(x) = (-1)^{j+1} \sin \gamma_j x; \quad (4.13)$$

$$\sigma_j = \frac{c \gamma_j}{l'},$$

где

$$\gamma_j = \frac{\pi}{2} (2j - 1) \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (4.14)$$

Рассмотрим теперь случай наличия кавитационных каверн, в качестве расчетной схемы которых примем сосредоточенную емкость в сечении $x=0$ (рис. 4.6, а); массой жидкости в этой емкости пренебрежем. Обозначим частоту колебаний столба несжимаемой жидкости в трубе с жесткими стенками, обусловленных только упругостью стенок емкости, через ω^0 . Введем безразмер-

ный параметр γ° , связанный с ω° формулой (4.13), в которой надо положить $\sigma_j = \omega^\circ$, $\gamma_j = \gamma^\circ$.

Давление на нижний конец столба жидкости, находящейся в емкости, имеет вид

$$p = -\rho^* \omega^2 l' u \Big|_{x=0}. \quad (4.15)$$

Это приводит к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \left(c^2 \frac{\partial u}{\partial x} - \omega^2 l' u \right) \Big|_{x=0} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l'} &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Соответственно вместо (4.11) получим условия

$$\begin{aligned} \left[\eta'(x) - \frac{\gamma^{\circ 2}}{l'} \eta(x) \right] \Big|_{x=0} &= 0; \\ \eta'(x) \Big|_{x=l'} &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Формы собственных колебаний определяются теперь в силу (4.10) и (4.17) следующей формулой:

$$\eta_j(x) = \frac{1}{\sin \gamma_j} \left[1 + \left(\frac{\gamma_j}{\gamma^{\circ 2}} \right)^2 \right] \left[\sin \left(\frac{\gamma_j x}{l'} \right) + \frac{\gamma_j}{\gamma^{\circ 2}} \cos \left(\frac{\gamma_j x}{l'} \right) \right] \quad (4.18)$$

$$(j=0, 1, 2, \dots),$$

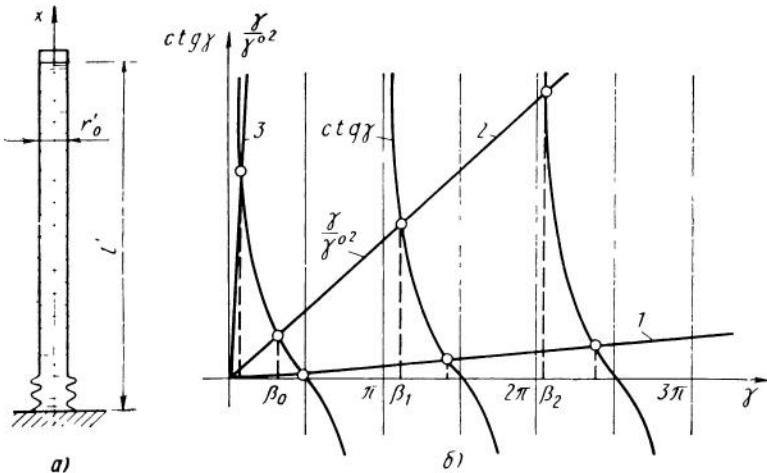


Рис. 4.6. К определению частот собственных колебаний столба жидкости в упругой магистрали с сосредоточенной емкостью на нижнем конце:
а — геометрические характеристики; б — графическое решение трансцендентного уравнения 1 — жесткость стенок мала; 2 — имеет промежуточное значение; 3 — велика

где γ_j — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{\gamma}{\gamma^{\circ 2}} . \quad (4.19)$$

На рис. 4.6, б представлено графическое решение этого уравнения. Корни γ_j соответствуют точкам пересечения прямой $z_1(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma^{\circ 2}}$ с ветвями функции $z_2(\gamma) = \operatorname{ctg} \gamma$. При $\gamma^{\circ} \rightarrow \infty$ (исчезающее малый объем каверн) корни уравнения (4.19) стремятся к значениям (4.14), а функции (4.18) — к функциям (4.13).

При $\gamma^{\circ} \rightarrow 0$ (относительно большой объем каверн) «нулевой» корень γ_0 стремится к γ° , а соответствующая форма колебаний — к единице. Последующие формы колебаний и корни стремятся к значениям, соответствующим упругому стержню со свободными концами. Изменение давления, определяемое формулой (4.8), стремится для этих форм к нулю. Этот случай наиболее важен для практики и именно он рассматривается в дальнейшем.

4.3. Демпфирование колебаний жидкости при сложном сопротивлении на выходе из магистралей

Рассмотрим магистрали окислителя и горючего, которым мы условно припишем индексы «1» и «2», подходящие к соответствующим насосам, образующим с турбиной единый турбонасосный агрегат ЖРД. Полагая, что выполняется обычное условие $c_j \gg c_{0j}$, где c_{0j} — скорость стационарного движения жидкости в j -й магистрали при работе ЖРД, мы можем рассматривать задачу о колебаниях жидкости в той же постановке, что и в разд. 4.2, заменив только жесткую диафрагму в сечении $x=x_0$ некоторым сложным сопротивлением на выходе из магистралей. Кроме того, предположим, что жидкость несжимаемая (деформируются только стенки магистрали и кавитационные каверны).

Введем следующие обозначения для параметров потока в этом сечении, которое примем за начало координат ($x_0=0$): p_j^* и p_j — стационарное значение и вариация давления; μ_j^* и μ_j — стационарное значение и вариация массового секундного расхода (положительной считается вариация, соответствующая увеличению давления или расхода жидкости).

Обозначим далее через P^* стационарное значение тяги ЖРД, а через δ — вариацию тяги, отнесенную к P^* . В общем случае эти величины связаны следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} \delta &= \sum_{n=1}^2 \mathcal{L}_n(p) \frac{p_n}{p_n^*}; \\ \frac{\mu_m}{\mu_m^*} &= \sum_{n=1}^2 W_{mn}(p) \frac{p_n}{p_n^*} \quad (m=1, 2), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $\mathcal{L}_n(p)$ и $W_{mn}(p)$ ($m, n=1, 2$) — известные передаточные функции, которые обычно можно считать заданными соответствующими частотными характеристиками.

Заметим, что $\mu_n^* = c_0 \rho_n S_n$, где ρ_n и S_n — массовая плотность и площадь поперечного сечения столба жидкости (знак * здесь уже не нужен). Условимся приписывать верхний индекс «—» или «+» величинам, относящимся к сечениям, лежащим по обе стороны сосредоточенной смкости, расположенной между магистралью и ЖРД, которая имитирует слой кавитационных каверн.

Границные условия в сечении $x=0$ имеют вид:

$$\begin{aligned} p_m^+ = p_m^- &= -\varrho_m c_m^2 \frac{\partial u_m^+}{\partial x} = -\varrho_m \omega_m^2 l_m' (u_m^+ - u_m^-); \\ \mathfrak{u}_m^+ = \mathfrak{u}_m^- &= -\dot{u}_m^- \varrho_m S_m = \mathfrak{u}_m^* \sum_{n=1}^2 W_{mn}(p) \frac{p_n^-}{p_n^+}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Продифференцируем первое из граничных условий по t , подставим в него \dot{u}_m^- из второго условия и опустим после этого верхние индексы. Присоединяя к полученным условиям уравнения колебаний жидкости в каждой из магистралей, придем к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - c_m^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} = 0. \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} c_m^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0} &= \\ = \omega_m^2 l_m' \left[\frac{\partial u_m}{\partial t} - \frac{\mu_m^*}{S_m \varrho_m} \sum_{n=1}^2 W_{mn}(p) \frac{\varrho_n c_n^2}{p_n^*} \frac{\partial u_n}{\partial x} \right] &\quad (m=1, 2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Таким образом, колебания жидкости в магистролях окислителя и горючего связаны между собой через ЖРД даже при отсутствии колебаний корпуса (т. е. в стендовых условиях).

Однако в большинстве случаев частоты колебаний ω_1^* и ω_2^* значительно отличаются, так что можно пренебречь функциями $W_{ii}(p)$ ($i \neq j$), по сравнению с $W_{jj}(p)$ при $p \sim i\omega_1^*$ или $p \sim i\omega_2^*$, т. е. считать колебания в каждой из магистралей независимыми (при отсутствии колебаний корпуса). Это позволяет опустить индексы и перейти к более простой краевой задаче [30]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (4.24)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0} = \omega^2 l' \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\mu^* c^2}{p^* S} W(p) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (4.25)$$

где c, μ^*, p^* — соответствующие стационарные значения.

Относительно безразмерной передаточной функции $W(p)$ мы предположим, что она не имеет особенностей вблизи собственных чисел краевой задачи (4.24), (4.25) и более того — соответствующие области плоскости p не пересекаются.

Кроме того, примем, что соответствующая частотная характеристика может быть записана в форме (1.14):

$$W(i, \omega) = D(\omega) e^{i\omega} = \varepsilon \tilde{D}(\omega) e^{i\omega}, \quad (4.26)$$

где ε — малый параметр и $|\tilde{D}(\omega)|_{\max}$ имеет порядок единицы в области значений ω , соответствующих собственным числам краевой задачи.

Полагая

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \chi(x), \quad (4.27)$$

где λ — комплексное собственное значение, подлежащее определению; $\chi(x)$ — комплексная функция вещественного переменного, имеющая нормировку

$$\operatorname{Re} \chi(l') = 1; \operatorname{Im} \chi(l') = 0, \quad (4.28)$$

приведем условие (4.25) к виду

$$\frac{\chi(0)}{\chi'(0)} = \frac{c^2}{\omega^2 l'} \left[1 + \frac{\mu^* \omega^2 l'}{p^* \lambda S} W(\lambda) \right].$$

В результате краевая задача, сформулированная выше, переходит в следующую:

$$\chi'(x) - \frac{\lambda^2}{c^2} \chi(x) = 0. \quad (4.29)$$

$$\chi(0) - c^2 \left[\frac{1}{\omega^2 l'} + \frac{\mu^*}{p^* \lambda S} W(\lambda) \right] \chi'(0) = 0; \quad (4.30)$$

$$\chi'(l') = 0; \chi(l') = 1.$$

Принятая малость $|W(i\omega)|$ в области частот ω , соответствующих минимум частям собственных значений λ рассматриваемой краевой задачи, позволяет искать собственные значения и соответствующие собственные функции в форме

$$\begin{aligned} \lambda &= a + i\omega = \varepsilon \tilde{a} + i\omega; \\ \chi(x) &= \xi(x) + i\eta(x) = \xi(x) + i\varepsilon \tilde{\eta}(x), \end{aligned} \quad (4.31)$$

где $\xi(x)$ и $\eta(x)$ — некоторые вещественные функции переменной x .

Решение уравнения (4.29) имеет вид

$$\chi(x) = C_1 e^{\frac{\lambda_x}{c}} + C_2 e^{\frac{-\lambda_x}{c}},$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные, или с учётом граничных условий при $x=l'$

$$\chi(x) = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{\lambda}{c}(x-l')} + e^{-\frac{\lambda}{c}(x-l')} \right].$$

После подстановки λ из (4.31) и отделения вещественной части от мнимой получим

$$\begin{aligned} \chi(x) = & \operatorname{ch} \left[\frac{a}{c} (x - l') \right] \cos \left[\frac{\omega}{c} (x - l') \right] + \\ & + i \operatorname{sh} \left[\frac{a}{c} (x - l') \right] \sin \left[\frac{\omega}{c} (x - l') \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Учитывая малость $|\alpha| = |\operatorname{Re} \lambda|$ (4.31), в граничных условиях при $x=0$ от передаточной функции $W(p)$ можно перейти к частотной характеристики (4.26). В результате из (4.30) и (4.32) после некоторых упрощений получим следующую систему уравнений для определения $\operatorname{Re} \lambda$ и $\operatorname{Im} \lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega^2 l'} - \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\omega l'}{c} \right)}{c \operatorname{ch}^2 \left(\frac{a l'}{c} \right) \left[\operatorname{th}^2 \left(\frac{a l'}{c} \right) + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\omega l'}{c} \right) \right]} + \\ + \frac{\mu^*}{p^* S} D(\omega) \sin \psi(\omega) = 0; \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{\omega^2 l'} + \frac{\operatorname{th} \left(\frac{a l'}{c} \right)}{c \cos^2 \left(\frac{\omega l'}{c} \right) \left[\operatorname{th}^2 \left(\frac{a l'}{c} \right) + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\omega l'}{c} \right) \right]} - + \\ + \frac{\mu^*}{p^* S} D(\omega) \cos \psi(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами порядка ε^2 по сравнению с ε и величинами порядка ε по сравнению с единицей, получим следующие уравнения первого приближения для определения ω и a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \gamma - \frac{\gamma}{\gamma^2} = & \frac{\varepsilon \mu^* c}{p^* S} \tilde{D}(\omega) \sin \psi(\omega); \\ a \left(1 + \frac{\sin^2 \gamma}{\gamma^2} \right) = & - \frac{\varepsilon \mu^* c^2 \sin^2 \gamma}{p^* l' S} \tilde{D}(\omega) \cos \psi(\omega), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где

$$\gamma = \frac{\omega l'}{c}; \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2 l'}{c}. \quad (4.35)$$

Первое из уравнений (4.34) имеет бесконечное множество решений $\gamma_n = \frac{\omega_n l'}{c}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), близких к решениям уравнения (4.19).

Подставляя в уравнение (4.24) выражение

$$u_n(x, t) = \chi_n(x) s_n(t),$$

где

$$s_n(t) = e^{\lambda_n t},$$

и учитывая (4.31), получим уравнение для функций $s_n(t)$, верное с точностью до членов порядка ϵ ,

$$\ddot{s}_n - 2a_n \dot{s}_n + \omega_n^2 s_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.36)$$

Далее, обозначив $\tilde{x} = \frac{x}{l'}$, найдем

$$\xi_n(x) \approx \cos \gamma_n(\tilde{x} - 1);$$

$$\eta_n(x) \approx \frac{\gamma_n a_n}{\omega_n} (\tilde{x} - 1) \sin \gamma_n(\tilde{x} - 1). \quad (4.37)$$

Таким образом, эффект сложного сопротивления на выходе из магистрали может быть сведен к некоторому изменению собственной частоты и эквивалентному демпфированию, характеризуемому коэффициентом $\beta_n = -2a_n$ для каждой формы колебаний столба жидкости с данным значением ω_n .

Рассмотрим предельный случай, когда местная жесткость в сечении $x=0$ «бесконечно мала»:

$$(\omega^2 \rightarrow 0; \gamma^2 \rightarrow 0).$$

Первая из собственных частот системы приближается к ω° и в формулах (4.34) при $n=0$ можно положить

$$\operatorname{tg} \gamma_0 \approx \gamma_0; \sin \gamma_0 \approx \gamma_0.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 &= \gamma^{\circ 2} \left[1 - \frac{\omega_0 \mu^* l'}{p^* S} D(\omega_0) \sin \psi(\omega_0) \right]; \\ a_0 \left(1 + \frac{\gamma_0^2}{\gamma^{\circ 2}} \right) &= -\frac{\omega_0^2 \mu^* l'}{p^* S} D(\omega_0) \cos \psi(\omega_0); \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\gamma^{\circ 2}}{\gamma + \frac{\epsilon c \mu^* \gamma^{\circ 2}}{p^* S} \tilde{D}(\omega) \sin \psi(\omega)} \rightarrow \frac{\gamma^{\circ 2}}{\gamma} \\ (\gamma &= \gamma_n, \omega = \omega_n; n = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$a_n \left(1 + \frac{\gamma_n^2 + \gamma^\circ{}^2}{\gamma^\circ{}^4} \right) = - \frac{\varepsilon \mu^* c^2}{p^* l' S} \tilde{D}(\omega_n) \cos \psi(\omega_n).$$

При

$$D(\omega_n) = \varepsilon \tilde{D}(\omega_n) \rightarrow 0;$$

$$\gamma_0 \rightarrow \gamma^\circ; \quad \eta_0(x) \rightarrow 1;$$

$$a_n \rightarrow - \frac{\omega^\circ{}^2 \mu^* l'}{2 p^* S} D(\omega^\circ) \cos \psi(\omega^\circ). \quad (4.39)$$

$$\gamma_n \rightarrow \pi n; \quad \gamma_n(x) \rightarrow \cos \gamma_n(x-1) = (-1)^n \cos \gamma_n(x);$$

(4.40)

$$a_n \rightarrow - \frac{\mu^* c^2 \gamma^\circ{}^4}{p^* l' \gamma_n^2 S} D(\omega_n) \cos \psi(\omega_n).$$

Этот предельный случай, соответствующий жесткой магистрали с сосредоточенной емкостью и глухой диафрагмой на нижнем конце, в наибольшей степени отвечает реальному соотношению параметров жидкости, магистрали и кавитационных каверн для современных объектов.

4.4. Вынужденные колебания жидкости в топливной магистрали и баке при колебаниях корпуса

Рассмотрим вынужденные продольные колебания столба жидкости, гидравлически связанного с подвесным баком в сечении $x=l'$, при наличии в сечении $x=0$ емкости, эквивалентной кавитационным кавернам.

Будем полагать, что движение бака, магистрали как жесткого тела и диафрагмы, закрывающей нижний конец магистрали, при j -й форме продольных колебаний корпуса описывается функциями $g_j q_j(t)$; $b_j q_j(t)$ и $d_j q_j(t)$.

Воспользуемся собственными функциями (4.18) задачи о свободных колебаниях жидкости в магистрали. Представим абсолютное перемещение в произвольном сечении корпуса с координатой x в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} d_j q_j(t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \eta_n(x) & (0 \leq x < l') \\ g_j q_j(t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) & (l' \leq x \leq l' + h). \end{cases} \quad (4.41)$$

Если пренебречь некоторыми второстепенными членами, то уравнения вынужденных колебаний жидкости в магистрали с

учетом диссипативного эффекта сложного сопротивления на ее нижнем конце можно записать в виде

$$\mu_n(\ddot{s}_n + \beta_n s_n + \omega_n^2 s_n) + \lambda_{jn} \dot{q}_j = Q_n, \quad (4.42)$$

где s_n — перемещение столба жидкости в трубе в окрестности полюса днища l' бака, а коэффициенты выражаются формулами [30]

$$\begin{aligned} \mu_n &= \pi \rho r_0^2 \int_0^{l'} \eta_n^2(x) dx = \\ &= \frac{m'}{2} \left[A_n^2 + B_n^2 + \frac{\sin^2 \gamma_n}{2 \gamma_n} (B_n^2 - A_n^2) + \frac{2}{\gamma_n} A_n B_n \sin^2 \gamma_n \right]; \\ \lambda_{jn} &= \pi \rho r_0^2 \left[d_j \int_0^{l'} \eta_n(x) dx + g_j h \right] = \\ &= m' \left[\tilde{h} g_j + \frac{2 d_j \sin \frac{\gamma_n}{2}}{\gamma_n} \left(A_n \sin \frac{\gamma_n}{2} + B_n \cos \frac{\gamma_n}{2} \right) \right]; \\ Q_n &= \int_0^{l'} q_x^\circ(x, t) \eta_n(x) dx, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$A_n = \frac{\gamma^2}{\gamma_n \cos \gamma_n + \gamma^2 \sin \gamma_n}; \quad B_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_n \cos \gamma_n + \gamma_0^2 \sin \gamma_n}; \quad \tilde{h} = \frac{h}{l'}; \quad (4.44)$$

h — глубина жидкости в баке; ρ — массовая плотность жидкости; l' , r_0 — длина и радиус магистрали; $m' = \pi \rho r_0^2 l'$ — масса жидкости в магистрали; $q_x^\circ(x, t)$ — погонная сила, приложенная в сечении x столба жидкости.

Об определении ω_n и β_n говорилось выше. При $\gamma^\circ \rightarrow 0$ коэффициенты (4.43) стремятся к следующим предельным значениям:

при $n = 0$

$$\mu_n \rightarrow m'; \quad \lambda_{0n} \rightarrow (1 + \tilde{h}); \quad \lambda_{jn} \rightarrow m'(d_j + \tilde{h} g_j) \quad (j \neq 0); \quad (4.45)$$

при $n \neq 0$

$$\mu_n \rightarrow \frac{m'}{2}; \quad \lambda_{0n} \rightarrow \tilde{h}; \quad \lambda_{jn} \rightarrow m' \tilde{h} g_j \quad (j \neq 0). \quad (4.46)$$

В этой ситуации при совместных колебаниях столба жидкости в магистрали и корпуса доминирует «нулевая» гармоника (деформируется только каверна). Это связано с тем, что, как видно из (4.45) и (4.46), коэффициент присоединенной массы, играющий ту же роль, что и $\frac{\lambda_n^2}{\mu_n}$ в задачах о волновых движениях

жидкости, имеет порядок m' для нулевой гармоники ($n=0$) и $m'\tilde{h}^2$ для высших гармоник ($n \neq 0$). В задачах динамической устойчивости наибольшую роль играет длинная магистраль (самая низкая частота ω°), для которой $\tilde{h}^2 \ll 1$. Это дает основание для пренебрежения при проектировочных расчетах всеми высшими гармониками, подобно тому, как это делается в дальнейшем в отношении волновых движений жидкости в баках. Таким образом, столб жидкости в каждой магистрали представляется в виде массы на упругой связи, жесткость которой определяется объемом кавитационных каверн (см. разд. 1.4).

Расчетные формулы для ω_0^2 и a_0 , следующие из (4.40), имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \omega^\circ 2 \left[1 - \frac{\omega_0^2 \mu^* l'}{p^* S} D(\omega_0) \sin \psi(\omega_0) \right]; \\ a_0 \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^\circ 2} \right) &= - \frac{\omega_0^2 \mu^* l'}{p^* S} D(\omega_0) \cos \psi(\omega_0).\end{aligned}\quad (4.47)$$

Обычно поправка к квадрату частоты не превышает нескольких процентов, так что можно принять для эквивалентного коэффициента демпфирования $\beta_0 = -2a_0$ значение

$$\beta_0 \approx \frac{\omega_0^2 \mu^* l'}{p^* S} D(\omega_0) \cos \psi(\omega_0). \quad (4.48)$$

Для одновременного учета диссипации энергии, связанный с влиянием ЖРД и вязкостью жидкости, следует подставить в уравнение, получаемое из (4.36) или (4.42) при $n=0$, коэффициент β_0 , равный сумме коэффициента (4.48) и соответствующего коэффициента, учитывающего гидравлические потери.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания отсека с жидкостью при упругих поперечных колебаниях корпуса.

Пусть известны функции $\eta_j(x)$ и параметры g_j (абсолютное поперечное перемещение подвесного отсека), т. е. формы собственных колебаний корпуса.

Если учесть, что при принятой расчетной схеме поперечное смещение бака при j -й форме колебаний корпуса составляет $\eta_j(x_H)q_j$ в случае несущего бака и $g_j q_j$ в случае подвесного, а угол поворота $-\eta_j'(x_H)q_j$ или $-g_j'(x_O)q_j$ соответственно (знак « $-$ », так как положительный угол отсчитывается от оси Oz к Ox), то

в силу уравнений (3.107) получим уравнение, аналогичное (4.42):

$$M_n(\zeta_n + \beta_n \dot{\zeta}_n + \omega_n^2 \zeta_n) + \Lambda_{jn} \ddot{q}_j + \Lambda'_{jn} \dot{q}_j = 0. \quad (4.49)$$

Обобщенная координата ζ_n — это угол поворота плоскости, аппроксимирующей в смысле минимума среднего квадратичного отклонения свободную поверхность жидкости при n -й форме колебаний, а q_j характеризует перемещение сечения $x=0$ корпуса при j -й форме его поперечных колебаний.

Коэффициенты уравнений (4.49) определяются следующими формулами.

Несущий отсек

$$\begin{aligned} \Lambda_{jn} &= [c_n \eta'_j(x_H) + \eta_j(x_H)] \Omega; \\ \Lambda'_{jn} &= b_n \eta'_j(x_H) \Omega; \quad M_n = \frac{\Omega^2}{\mu_n}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Подвесной отсек

$$\begin{aligned} \Lambda_{jn} &= [c_{no} \eta'_j(x_O) + g_j] \Omega; \\ \Lambda'_{jn} &= b_n \eta'_j(x_O); \quad M_n = \frac{\Omega^2}{\mu_n}, \end{aligned} \quad (4.50a)$$

где x_O и x_H — координаты плоскости подвески бака к корпусу (подвесной бак) и оси подвески маятника, соответствующего n -му тону волновых движений жидкости (несущий бак). В работе [30] показано, что в случае цилиндрических баков можно принять $x_H \approx h + x_O$, где x_O — координата полюса днища.

Коэффициенты m_n , Ω , b_n , c_n' , c_{no} определяются формулами (3.109), (3.110), причем c_n' и c_{no} отличаются от c_n только центром приведения, имеющим координату x_H в первом случае и x_O во втором.

В случае крутильных колебаний корпуса с отсеками, имеющими форму тел вращения, жидкость практически не участвует в колебаниях (если нет внутренних радиальных ребер).

В дальнейшем, учитывая результаты, полученные выше в этом разделе и в разделе (3.4), будем принимать во внимание только «нулевую» форму колебаний столба жидкости в магистрали ($n=0$) и первую форму волновых движений жидкости в баке ($n=1$).

В соответствии с этим индекс n в уравнениях разд. 4.5 и 4.6 и в уравнениях всех последующих глав будет означать не номер тона колебаний, а номер бака (для корпуса с k баками $n=1, 2, \dots, k$).

4.5. Уравнения колебаний корпуса как эквивалентного стержня с присоединенными осцилляторами

Рассмотрим корпус объекта тандемной схемы, имеющий форму тела вращения, состоящий из подкрепленных цилиндрических оболочек. В сечениях с координатами $x=x_{O_n}$ ($n=1, 2, \dots, k$) расположены усиленные шпангоуты, являющиеся опорными для баков, частично заполненных жидкостью, причем первые k_1 баков (считая от опорных кронштейнов) являются несущими, а последующие $k-k_1$ — подвесными.

При анализе продольных колебаний примем дополнительно, что имеется k_2 симметрично расположенных относительно оси Ox магистралей, которые начинаются в полюсе днища каждого отсека и заканчиваются общей жесткой диафрагмой, связанный с опорным шпангоутом в сечении $x=x_P$. Предположим, что в этом же сечении на каждой магистрали имеется сосредоточенная сила. Длину n -й магистрали будем обозначать l_n , внутренний радиус — r_{0n} .

Назовем эквивалентным исходной конструкции упругий стержень с такими же интегральными характеристиками каждого сечения, как у соответствующей ортотропной оболочки, включая и распределение погонных и сосредоточенных масс. Расчетные схемы эквивалентных стержней представлены на рис. 4.1, в и 4.2, в.

Выписав выражения для сил, приложенных со стороны отсеков с жидкостью, можно составить уравнения поперечных, продольных и крутильных колебаний эквивалентных стержней на основе использования уравнений (4.1) — (4.3).

Далее следует сформулировать краевые задачи для координатных функций, обеспечивающих при последующем применении метода Бубнова — Галеркина получение достаточно простых систем уравнений возмущенного движения с минимальным заполнением коэффициентных матриц.

Опыт показывает, что в качестве таких краевых задач можно выбрать следующие [30, 46]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dx^2} \left(EJ^0 \frac{d^2\eta}{dx^2} \right) - \omega^2 \left\{ [\mu^0(x) + \mu(x)] \eta + \right. \\
 & + \sum_{n=k-k_1}^k \sigma_1(x - x_{O_n}) \frac{m_{n0}\omega_{n0}^2}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \left(\eta + x_{G_n} \frac{d\eta}{dx} \right) + \\
 & + \sum_{n=k-k_1}^k \sigma_2(x - x_{O_n}) \left[(J_{n0} - m_{n0}x_{G_n}^2) \frac{d\eta}{dx} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{m_{n0}\omega_{n0}^2 x_{G_n}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \left(\eta + x_{G_n} \frac{d\eta}{dx} \right) \right] \right\} = 0; \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \left(EJ^0 \frac{d^2\eta}{dx^2} \right) \Big|_{x=0, t} = 0; \quad EJ^0 \frac{d^2\eta}{dx^2} \Big|_{x=0, t} = 0;$$

$$g_n = \frac{\omega_{n0}^2 \eta(x_{O_n})}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2} + \frac{\sigma^2 x_{G_n} \eta'(x_{O_n})}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(ES^0 \frac{d\eta}{dx} \right) + \sigma^2 \left[\mu^0(x) \eta + \sum_{n=1}^k \sigma_1(x - x_{O_n}) \frac{m_{n0} \omega_{n0}^2}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2} \right] &= 0 \\ ES^0 \frac{d\eta}{dx} \Big|_{x=0, t} &= 0; \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$g_n = \frac{\omega_{n0}^2 \eta(x_{O_n})}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2}.$$

$$\frac{d}{dx} \left(GJ_d^0 \frac{d\eta}{dx} \right) + \sigma^2 I^0(x) \eta = 0; \quad (4.53)$$

$$GJ_d^0 \frac{d\eta}{dx} \Big|_{x=0, t} = 0,$$

где $\sigma_1(x - x_{O_n})$ и $\sigma_2(x - x_{O_n}) = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_1(x - x_{O_n})$ — единичные импульсивные функции первого и второго порядка [15]; EJ^0 , ES^0 , GJ_d^0 — эквивалентные жесткости при изгибе, сжатии (растяжении) и кручении; m_{n0} , x_{G_n} , J_{n0} — координата метацентра, масса и момент инерции относительно оси $O_n y_n$ с учетом соответствующих присоединенных масс жидкости (при поперечных колебаниях эти массы равны физическим, а при продольных — близки к ним); ω_{n0} — парциальная частота продольных или поперечных колебаний массы m_{n0} ; $\mu^0(x)$ и $I^0(x)$ — масса и момент инерции на единицу длины корпуса,

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^k \sigma^{(n)}(x) \rho_n S_n;$$

$$\sigma^{(n)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_{O_n} \leq x \leq x_{H_n} \\ 0 & \text{при } x < x_{O_n}; \quad x > x_{H_n}; \end{cases} \quad (4.54)$$

ρ_n и S_n — массовая плотность жидкости в n -м отсеке и площадь поперечного сечения столба жидкости.

При наличии в баках внутренних радиальных ребер к $I^0(x)$ должна быть добавлена функция $I(x)$, аналогичная $\mu(x)$.

Включим в правые части уравнений (4.1) — (4.3) диссипативные силы, связанные с конструкционным демпфированием [30, 40] и волновыми движениями жидкости в баках (поперечные колебания) или продольными колебаниями жидкости в магистралях.

Используя собственные функции $\eta_j(x)$ краевых задач (4.51), (4.52) и (4.53) в качестве координатных функций и учитывая их условия ортогональности, можно получить методом Бубнова — Галеркина, пренебрегая некоторыми второстепенными членами [30], следующие уравнения возмущенного движения.

Поперечные колебания

$$\begin{aligned} (m^\circ + m)\ddot{\zeta} + \sum_{n=1}^k \lambda_n \ddot{s}_n &= P_z; \\ (J^\circ + J)\ddot{\psi} + \sum_{n=1}^k (\lambda_{on}\ddot{s}_n + \beta_{on}\dot{s}_n) &= M_{Gy}; \\ a_j(\dot{q}_j + \beta_{q_j}\dot{q}_j + \sigma_j^2 q_j) + \sum_{n=1}^k (\lambda_{jn}\ddot{s}_n + \beta_{jn}\dot{s}_n) &= Q_j; \\ \mu_n(\ddot{s}_n + \beta_{s_n}\dot{s}_n + \omega_n^2 s_n) + \lambda_n \ddot{\zeta} + \lambda_{on}\ddot{\psi} + \beta_{on}\dot{\psi} + \sum_{j=1}^m (\lambda_{jn}\ddot{q}_j + \beta_{jn}\dot{q}_j) &= 0 \\ (j = 1, 2, \dots, m; n = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Продольные колебания

$$\begin{aligned} (m^\circ + m)\ddot{\xi} + \sum_{n=1}^k \lambda_n \ddot{s}_n &= P_x; \\ a_j(\dot{q}_j + \beta_{q_j}\dot{q}_j + \sigma_j^2 q_j) + \sum_{n=1}^k \lambda_{jn}\ddot{s}_n &= Q_j; \\ \mu_n(\ddot{s}_n + \beta_{s_n}\dot{s}_n + \omega_n^2 s_n) + \lambda_n \ddot{\xi} + \sum_{j=1}^m \lambda_{jn}q_j &= 0 \\ (j = 1, 2, \dots, m; n = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Крутильные колебания

$$\begin{aligned} (I^\circ + I)\ddot{\varphi} &= M_x; \\ a_j(q_j + \beta_{q_j}\dot{q}_j + \sigma_j^2 q_j) &= Q_j \\ (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (4.57)$$

При отсутствии в баках радиальных ребер $I = 0$, число m соответствует количеству учитываемых форм упругих колебаний корпуса (оно, конечно, может быть различным в уравнениях (4.55), (4.56) и (4.57)). Обобщенные координаты, коэффициенты и правые части также имеют различный смысл в уравнениях (4.55) — (4.57). Обычно для собственных функций краевых задач (4.51), (4.52), (4.53) (форм собственных колебаний корпуса) удобно принять нормировку $\eta_j(0) = 1$. Тогда обобщенные координаты

q_j ($j=1, 2, \dots$) в уравнениях (4.55)–(4.57) — суть поперечные и продольные перемещения сечения $x=0$ и углы поворота этого сечения соответственно.

Заметим, что при $q_j \equiv 0$ уравнения (4.55) переходят в (3.100), если в последних перейти от полюса O к метацентру G , т. е. положить $x_G = 0$.

4.6. Общие уравнения возмущенного движения РН с учетом подвижности жидкости в баках и магистралях и упругости корпуса

Ниже в качестве примера рассматривается первая ступень РН с компоновкой, аналогичной РН «Сатурн-5». При этом принимаются во внимание кориолисовы, аэродинамические и управляющие силы, а также диссипативные силы, связанные с вязкостью жидкости, влиянием ЖРД и конструкционным демпфированием при упругих колебаниях корпуса. Это последнее учитывается только через посредство коэффициентов, стоящих на главной диагонали коэффициентной матрицы. Внутренние и внешние аэроупругие эффекты вообще не учитываются (исключение составляют только ветровые возмущения), так как в рассматриваемых задачах они играют второстепенную роль. В некоторых случаях пренебрежение аэроупругими эффектами недопустимо, например при наличии крылатой последней ступени. Тогда можно в первом приближении воспользоваться выражениями, приведенными в разд. 1.5.

На рис. 4.7 показана принятая упрощенная схема магистралей. Предполагается, что все гидравлическое сопротивление каждой магистрали сосредоточено на ее нижнем конце (клапан, расходная шайба). Наличие периферийных маршевых двигателей приводит к необходимости рассмотрения дополнительных инерционных сил, связанных с колебаниями жидкости в магистралах не только при продольных колебаниях корпуса, но и при движении в плоскости рыскания (как и в плоскости тангажа). Соответствующие колебания давления на входе в насосы ЖРД приводят к рассогласованию тяг периферийных маршевых двигателей.

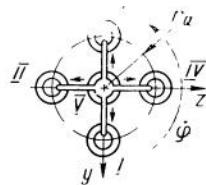
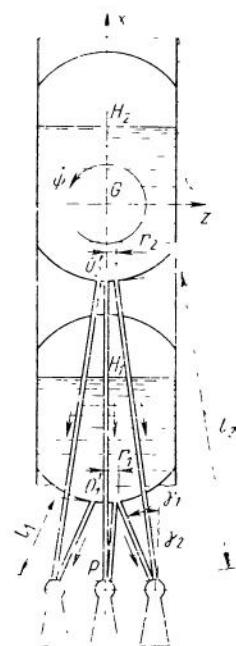


Рис. 4.7. Схема для определения возмущений, связанных с движением жидкости в топливных магистралях РН тандемной схемы

лежащих в той из плоскостей, в которой происходят колебания. Следствием является воздействие на корпус дополнительных возмущающих сил, которые в принципе могут давать дестабилизирующий эффект.

Появляются также дополнительные кориолисовы силы. В этом разделе мы примем во внимание также упругость подвески двигателей в направлении продольной оси, предполагая, что она учтена и при расчете форм продольных и поперечных колебаний корпуса (каждый двигатель считается при этом массой m^* на упругой связи, которая обеспечивает возможность перемещений в направлении оси Gx). Упругость связей по отношению к повороту двигателей при неподвижном вале рулевой машины учитывается в самих уравнениях движения настоящего раздела. Введем в соответствии с этим некоторые новые обобщенные координаты.

Движение в плоскости рыскания:

$$\begin{aligned}\xi_m &= \frac{1}{2} (s_{II}^{(m)} - s_{IV}^{(m)}) \quad (m=1, 2); \\ \delta_\xi &= \frac{1}{2} (\delta_{II} - \delta_{IV}); \quad d_{\xi j} = \frac{1}{2} (d_{II}^{(j)} - d_{IV}^{(j)}).\end{aligned}\tag{4.58}$$

Движение в направлении продольной оси:

$$\begin{aligned}s_n &= \frac{1}{4} \sum_{N=1}^{IV} s_N^{(n)} \quad (n=1, 2) \quad s_n = s_V^{(n)} \quad (n=3, 4); \\ \delta_1 &= \frac{1}{4} \sum_{N=1}^{IV} \delta_N; \quad \delta_2 = \delta_V; \\ d_{1j} &= \frac{1}{4} \sum_{N=1}^{IV} d_N^{(j)}; \quad d_{2j} = d_V^{(j)}.\end{aligned}\tag{4.59}$$

Здесь $s_N^{(n)}$ или $s_n^{(m)}$ — смещение столба жидкости относительно сечения корпуса $x=x_P$ в направлении от двигателя к баку в n -й (m -й) магистрали; N — означает номер двигателя (см. гл. 2); δ_{II} и δ_{IV} — в отличие от гл. 2 — относительное изменение тяги двигателя II или IV; $d_N^{(j)}$ — абсолютное смещение N -го двигателя в направлении оси Gx при j -й форме колебаний корпуса, различное при продольных и поперечных колебаниях (аналог g_{nj}). Центральному двигателю присвоен номер V.

Будем считать, что расстояния r_1 и r_2 (см. рис. 4.7) малы по сравнению с r_Q , так что можно принять $r_1 \approx 0$, $r_2 \approx 0$. Теперь мож-

но составить уравнения возмущенного движения, расшифровав правые части уравнений (4.55) — (4.57). При этом целесообразно сохранить обозначения, использованные в гл. 2 и 3 и разд. 4.4, для кинематических параметров, характеризующих движение в плоскости рыскания и в направлении продольной оси. Поскольку эти движения для баллистических РН можно считать независимыми, совпадение обозначений не может привести к недоразумениям; в то же время обеспечивается большая преемственность при рассмотрении вопросов устойчивости в ч. III. В возмущающих силах и моментах, входящих в правые части уравнений, явно выделяются члены, зависящие от скорости ветра; оставшиеся возмущающие воздействия обозначаются верхним индексом \bar{O} . Уравнения движения в плоскости рыскания приведены к метацентру. Поэтому роль центра масс системы играет в них метацентр (в том числе и в уравнениях, характеризующих движение РН как твердого тела). Как и в предыдущем разделе, предполагается, что первые от опорных кронштейнов k_1 баков — несущие, а последующие $k_2 = k - k_1$ — подвесные ($k_1 \geq 2$).

Движение в плоскости рыскания

$$\begin{aligned}
& \ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\psi}\psi + \sum_{j=1}^{m_1} a_{\zeta q_j} q_j + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + \\
& + \sum_{m=1}^2 a_{\zeta \xi_m} \ddot{\xi}_m + a''_{\zeta \delta_\psi} \ddot{\delta}_\psi + a_{\zeta \delta_\psi} \delta_\psi = \bar{P}_z(t); \\
& \dot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\psi}\psi + \sum_{j=1}^{m_1} a_{\psi q_j} q_j + \sum_{n=1}^k (a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a'_{\psi s_n} \dot{s}_n) + \\
& + \sum_{m=1}^2 a_{\psi \xi_m} \dot{\xi}_m + a''_{\psi \delta_\psi} \dot{\delta}_\psi + a_{\psi \delta_\psi} \delta_\psi + a_{\psi \delta_\xi} \delta_\xi = \bar{M}_{Gy}(t); \\
& \ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + \sum_{n=1}^k (a_{q_j s_n} \dot{s}_n + a'_{q_j s_n} \dot{s}_n) + \\
& + \sum_{m=1}^2 a_{q_j \xi_m} \ddot{\xi}_m + a_{q_j \delta_\psi} \ddot{\delta}_\psi + a_{q_j \delta_\psi} \delta_\psi + a_{q_j \delta_\xi} \delta_\xi = \bar{Q}_j(t); \\
& s_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n \zeta} \dot{\zeta} + a_{s_n \psi} \dot{\psi} + a'_{s_n \psi} \dot{\psi} + \\
& + \sum_{j=1}^{m_1} (a_{s_n q_j} q_j + a'_{s_n q_j} \dot{q}_j) = 0;
\end{aligned}$$

$$\ddot{\xi}_m + \beta_{\xi_m} \dot{\xi}_m + \omega_{\xi_m}^2 \xi_m + a_{\xi_m} \zeta + a_{\xi_m} \psi + \sum_{j=1}^{m_1} a_{\xi_m q_j} \ddot{q}_j = 0; \quad (4.60)$$

$$\ddot{\delta}_\gamma + \beta_\delta \dot{\delta}_\gamma + \omega_\delta^2 \delta_\gamma + a''_{\delta q} \zeta + a'_{\delta q} \psi + a_{\delta q} (\psi + \delta) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_1} (a''_{\delta q_j} \ddot{q}_j + a_{\delta q_j} q_j) - \omega_\delta^2 \delta_\gamma = 0;$$

$$\delta_\psi^\circ = \mathcal{L}'_1(\psi^\circ) - \mathcal{L}'_2(\zeta^\circ);$$

$$\delta_\xi = \mathcal{L}_1(\xi_1^\circ) + \mathcal{L}_2(\xi_2^\circ);$$

$$\zeta^\circ = \zeta - (x^\circ - x_G) \psi + \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j(x^\circ) q_j;$$

$$\psi^\circ = \psi - \sum_{j=1}^{m_1} \eta'_j(x^\circ) q_j;$$

$$\xi_m^\circ = - a_{\xi_m} (\beta_{\xi_m} \dot{\xi}_m + \omega_{\xi_m}^2 \xi_m).$$

$$(j=1, 2, \dots, m_1; n=1, 2, \dots, k; m=1, 2).$$

В случае управления путем рассогласования тяг двигателей II и IV

$$\delta_\gamma = \delta_\psi^\circ \equiv 0;$$

$$\delta_\xi = \mathcal{L}'_1(\psi^\circ) - \mathcal{L}'_2(\zeta^\circ) + \mathcal{L}_1(\xi_1^\circ) + \mathcal{L}_2(\xi_2^\circ).$$

Движение в плоскости крена

$$\ddot{\varphi} + a'_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} + a''_{\varphi\varphi} \ddot{\delta}_\varphi + a_{\varphi\delta} \delta_\varphi = \bar{M}_x(t);$$

$$\ddot{p}_j + \beta_{p_j} \dot{p}_j + \omega_{p_j}^2 p_j + a''_{p_j} \ddot{\delta}_\varphi + a_{p_j} \delta_\varphi = \bar{Q}_j(t);$$

$$\ddot{\delta}_\varphi + \beta_\delta \dot{\delta}_\varphi + \omega_\delta^2 \delta_\varphi + a''_{\delta\varphi} \dot{\varphi} + \sum_{j=1}^{m_1} a''_{\delta p_j} p_j - \omega_\delta^2 \delta_\varphi^\circ = 0; \quad (4.61)$$

$$\delta_\varphi^\circ = \mathcal{L}'_3(\varphi^\circ);$$

$$\varphi^\circ = \varphi + \sum_{j=1}^{m_1} \eta_j(x^\circ) p_j$$

$$(j=1, 2, \dots, m_2).$$

Движение в направлении продольной оси

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\xi} + a_{\xi\xi}\dot{\xi} + \sum_{n=1}^4 a_{\xi s_n} \dot{s}_n - \sum_{k=1}^2 a_{\xi \delta_k} \dot{\delta}_k = \bar{P}_x(t); \\
 & \ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + \sum_{n=1}^4 a_{q_j s_n} \ddot{s}_n - \sum_{k=1}^2 a_{q_j \delta_k} \dot{\delta}_k = \bar{Q}_j(t); \\
 & \ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n \xi} \dot{\xi} + \sum_{j=1}^{m_3} a_{s_n q_j} \dot{q}_j = 0; \\
 & \delta_1 = \mathcal{L}_1(s_1) + \mathcal{L}_2(s_2); \quad \delta_2 = \mathcal{L}_1(s_3) + \mathcal{L}_2(s_4); \quad \ddot{s}_n = -a_{s_n}^o (\beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n)
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$(n = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, \dots, m_3)$.

В уравнениях (4.60) — (4.62), помимо уравнений уже использованных в гл. 2 и 3, введены следующие обозначения:

- q_j — обобщенные координаты, характеризующие поперечные или продольные колебания корпуса;
- p_j — обобщенные координаты, характеризующие крутильные колебания корпуса;
- $s_n (n = 1, 2, \dots, k)$ — в уравнениях (4.60) — обобщенные координаты, соответствующие углу поворота плоскости, аппроксимирующей свободную поверхность жидкости в n -м баке;
- $s_n (n = 1, 2)$ — в уравнениях (4.62) — среднее смещение столба жидкости в магистралях, идущих к первому или второму баку от четырех периферийных ЖРД;
- $s_n (n = 3, 4)$ — смещение столба жидкости в магистралях, идущих к тем же бакам от центрального ЖРД;
- $\xi_m (m = 1, 2)$ — полуразность смещений столбов жидкости в магистралях периферийных ЖРД III и I;
- $\delta_\xi, \delta_\phi^\circ, \delta_\varphi^\circ$ — полуразность приращений тяги ЖРД III и I, отнесенных в номинальной тяге, и обобщенные координаты, определяемые через углы поворота валов рулевых машин, приведенные к оси вращения ЖРД;
- δ_1, δ_2 — среднее относительное приращение тяги периферийных двигателей и относительное приращение тяги центрального двигателя;
- k — число баков, в которых жидкость имеет свободную поверхность;

m_1, m_2, m_3 —число учитываемых форм поперечных, крутильных и продольных колебаний корпуса;

$\mathcal{L}_m' (m=1, 2, 3)$ —операторы, описывающие АС;

$\mathcal{L}_n (n=1, 2)$ —операторы, описывающие динамику ЖРД.

В уравнениях (4.60)–(4.62) опущены некоторые второстепенные члены и введены дополнительные упрощающие предположения, вытекающие из специфики рассматриваемых задач. В частности, принято, что силовое кольцо, воспринимающее тягу маршевых двигателей и передающее ее на корпус, не деформируется при изгибных и крутильных деформациях корпуса.

В уравнениях (4.60)–(4.62) использованы уравнения связи вариаций давления на входе в насосы с обобщенными координатами, описывающими колебания жидкости в магистралях с учетом диссипации энергии вследствие наличия ЖРД и сосредоточенного гидравлического сопротивления на входе в каждый из насосов. Предполагается, что картина продольных колебаний полностью симметрична относительно продольной оси, так что колебания в каждой из четырех пар магистралей окислителя и горючего, питающих периферийные двигатели, и самих двигателей одинаковы, поэтому им присвоены только два индекса $n=1, 2$. Колебания центрального двигателя и жидкости в соответствующих магистралях в общем случае могут быть иными; этому соответствуют значения $n=3, 4$.

Приведем выражения для коэффициентов уравнений (4.60)–(4.62), характеризующих влияние различных динамических факторов.

Коэффициенты уравнений (4.60)

Коэффициенты, характеризующие объект как жесткое твердое тело переменной массы

$$\begin{aligned} a_{\zeta}^{'} &= \frac{c_n^{\beta} q S}{(m^{\circ} + m) v}; \quad a_{\zeta} = \left[\frac{c_n^{\alpha} q S l}{v} + 2\tilde{\mu}(x_G - x_A) \right] \frac{1}{m^{\circ} + m}; \\ a_{\zeta \zeta} &= \frac{c_n^{\beta} q S + P}{m^{\circ} + m}; \quad a_{\zeta \delta_2} = \frac{2m^*(x_Q - x_D)}{m^{\circ} + m}; \\ a_{\zeta \delta_2} &= \frac{P^*}{m^{\circ} + m} = \frac{2P^*}{m^{\circ} + m}; \\ a_{\zeta \zeta} &= \frac{c_n^{\beta} q S (x_G - x_C)}{(l^{\circ} + l) v}; \quad a_{\psi} = \frac{c_n^{\beta} q S (x_G - x_C)}{l^{\circ} + l}; \quad (4.63) \\ a_{\psi}^{'} &= \left[\frac{m_y^{\beta} q l^2 S}{v} + \tilde{\mu}(x_G - x_A)^2 + 2r_Q^2 \sum_{n=1}^2 \mu_n^* - \right. \end{aligned}$$

$$-5 \sum_{n=1}^2 \mu_n^* (x_{H_n} - x_G)^2 + \omega_0 \sum_{n=1}^k \bar{\beta}^{(n)} \rho_n R_n^5 \Bigg] \frac{1}{J^\circ + J} ;$$

$$\bar{P}_z(t) = \frac{P_z^\circ(t)}{m^\circ + m} + a'_\xi w; \quad \bar{M}_{\sigma_y}(t) = \frac{M_{Gy}^\circ(t)}{J^\circ + J} + a'_\psi \varphi w.$$

Коэффициенты, связанные с поворотом
двигателей

$$\begin{aligned} a''_{\delta_\psi} &= \frac{2J^*}{J^\circ + J} + \frac{2m^*(x_G - x_Q)(x_Q - x_D)}{J^\circ + J}; \\ a''_{\delta_\psi} &= \frac{2P^*}{J^\circ + J} (x_G - x_Q) + \frac{2m^*j}{J^\circ + J} (x_Q - x_D); \\ a''_{\delta_\xi} &= \frac{M^\delta}{J^\circ + J} = \frac{2P^*r_Q}{J^\circ + J}; \\ a''_{\delta\xi} &= \frac{m^*}{J^*} (x_Q - x_D); \quad a''_\delta = 1 + \frac{m^*(x_G - x_Q)(x_Q - x_D)}{J^*}; \\ a''_{\delta\psi} &= \frac{m^*j}{J^*} (x_Q - x_D); \quad \beta_\delta = \omega_\delta \bar{\beta}_\delta = \frac{\omega_\delta \delta_\delta}{\pi}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Коэффициенты, характеризующие подвижность
жидкости в топливных баках

$$\begin{aligned} a_{\xi s_n} &= \frac{\Omega_n}{m^\circ + m}; \quad a'_{\xi s_n} = -\frac{(\bar{c}_n R_n + x_{O'n} - x_G) \Omega_n}{J^\circ + J}; \quad a'_{\xi s_n} = -\frac{\omega_{s_n} \bar{b}_n \Omega_n R_n}{J^\circ + J}; \\ x_G &= x_{G_0} + \frac{\sum_{n=1}^k \Omega_n}{m^\circ + m}; \quad x_{D_n} = x_{D_{0n}} + \frac{\Omega_n}{m}; \quad \Omega_n = \frac{\pi \rho_n}{4} R_{0n}^4; \\ \omega_{s_n}^2 &= \frac{j}{R_n} \bar{\omega}_{s_n}^2; \quad \beta_{s_n} = \omega_{s_n} \bar{\beta}_{s_n} = \frac{\omega_{s_n} \delta_{s_n}}{\pi}; \\ a_{s_n \xi} &= \frac{\bar{m}_n \rho_n R_n^3}{\Omega_n}; \quad a_{s_n \psi} = -(\bar{c}_n R_n + x_{O'n} - x_G) \frac{\bar{m}_n \rho_n R_n^3}{\Omega_n}; \\ a'_{s_n \psi} &= -\frac{\omega_{s_n} \bar{b}_n \bar{m}_n R_n^4}{\Omega_n} - \frac{2(\tilde{\mu} x_G - 5 \sum_{n=1}^2 \mu_n^* x_{H_n}) \bar{m}_n \rho_n R_n^3}{(m^\circ + m) \Omega_n}; \\ J &= \sum_{n=1}^k [\bar{J}^{(n)} R_n^2 + \bar{Q}^{(n)} [(x_{D_n} - x_G)^2 - (x_{Dn} - x_{O'n})^2]] \rho_n R_n^3. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Коэффициенты, характеризующие подвижность жидкости в топливных магистрлях

$$\begin{aligned}
 a_{\xi_m} &= \frac{2r_Q m_m}{(m^\circ + m) l_m}; \quad a_{\dot{\xi}_m} = \frac{2m_m r_Q}{(J^\circ + J) l_m} (x_{o'_m} - x_G); \\
 a_{\xi_m \zeta} &= \frac{r_Q}{l_m}; \quad a_{\xi_m \psi} = -(x_{o'_m} - x_G) \frac{r_Q}{l_m}; \\
 \beta_{\xi_m} &= \omega_{\xi_m} \left[\frac{\delta_{\xi_m}}{\pi} + \frac{\omega_{\xi_m} \mu_m^* l_m}{p_m^* S_m} D(\omega_{\xi_m}) \cos \psi(\omega_{\xi_m}) \right]; \quad (4.66) \\
 \omega_{\xi_m}^2 &= \omega_{\xi_m}^2 \left[1 - \frac{\omega_{\xi_m} \mu_m^* l_m}{p_m^* S_m} D(\omega_{\xi_m}) \sin \psi(\omega_{\xi_m}) \right]; \\
 a_{\dot{\xi}_m} &= \frac{\rho_m l_m}{p_m^*}; \quad S_m = \pi r_{0m}^2; \quad m_m = \rho_m l_m S_m.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты, характеризующие упругость корпуса

$$\begin{aligned}
 \omega_{q_j}^2 &= \omega_{q_j}^2 + \left\{ \int_1^k N^0(x) \eta_j'^2(x) dx - P^* \eta_j(x_P) \left[3\eta_j'(x_P) + \frac{2d_{\xi j}}{r_Q} \right] \right\} \frac{1}{a_j}; \\
 \beta_{q_j} &= \omega_{q_j} \bar{\beta}_{q_j} = \frac{\omega_{q_j} \delta_{q_j}}{\pi}; \quad (4.67) \\
 a_{\xi q_j} &= \frac{P^*}{m^\circ + m} \left[3\eta_j'(x_P) + 2 \frac{d_{\xi j}}{r_Q} \right]; \\
 a_{\dot{\xi} q_j} &= \left\{ P^* (x_P - x_G) \left[3\eta_j'(x_P) + \frac{2d_{\xi j}}{r_Q} \right] - P \eta_j(x_P) \right\} \frac{1}{J^\circ + J}; \\
 a_{q_j \delta_\psi}'' &= - \frac{2d_{\xi j}}{r_Q a_j} [J^* + m^* (x_P - x_Q)(x_Q - x_D)] + \\
 &+ \frac{2m^*}{a_j} \left[\eta_j(x_P) - \frac{d_{\xi j}}{r_Q} (x_P - x_Q) \right] (x_Q - x_D); \\
 a_{q_j \delta_\psi} &= \frac{2}{a_j} \left\{ P^* \left[\eta_j(x_P) - \frac{d_{\xi j}}{r_Q} (x_P - x_Q) \right] - \frac{m_j^* d_{\xi j}}{r_Q} (x_Q - x_D) \right\};
 \end{aligned}$$

$$a_{q_j \xi} = -\frac{M^{\delta}}{a_j} \frac{d_{\xi j}}{r_Q} = -\frac{2P^* d_{\xi j}}{a_j}; \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} a_j &= \int_0^l [\mu^0(x) + \mu(x)] \eta_j^2(x) dx + \\ &+ \sum_{n=k_1+1}^k [m_{no} g_{nj}^2 + J_{no} \eta'_j(x_{O_n})] + 2m^* d_{\xi j}^2; \\ a_{q_j}^* &= -\frac{d_{\xi j}}{r_Q J^*} [J^* + m^*(x_P - x_Q)(x_Q - x_D)] + \\ &+ \frac{m^*(x_Q - x_D)}{J^*} \left[\eta_j(x_P) - \frac{d_{\xi j}}{r_Q} (x_P - x_Q) \right]; \\ a_{\xi j} &= -\frac{m^* j(x_Q - x_D) d_{\xi j}}{J^* r_Q}; \\ \bar{Q}_j(t) &= \left[Q_j(t) + \frac{qSw}{v} \int_0^l \frac{\partial c_n^\beta(x)}{\partial x} \eta_j(x) dx \right] \frac{1}{a_j}. \end{aligned}$$

Коэффициенты, связанные с гидроупругостью

$$\begin{aligned} a_{q_j s_n} &= \begin{cases} [(R_n \bar{c}_n - h_n) \eta'_j(x_{H_n}) + \eta_j(x_{H_n})] \frac{\Omega_n}{a_j} & (n=1, 2, \dots, k_1), \\ [(R_n \bar{c}_n - h_{n0}) \eta'_j(x_{O_n}) + g_{nj}] \frac{\Omega_n}{a_j} & (n=k_1+1, k_1+2, \dots, k); \end{cases} \\ & \quad (n=k_1+1, k_1+2, \dots, k); \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$a'_{q_j s_n} = \begin{cases} \frac{\omega_s n \bar{b}_n \Omega_n R_n \eta'_j(x_{H_n})}{a_j} & (n=1, 2, \dots, k_1); \\ \frac{\omega_s n \bar{b}_n \Omega_n R_n \eta'_j(x_{O_n})}{a_j} & (n=k_1+1, k_1+2, \dots, k) \end{cases}$$

$$a_{q_j \xi_m} = \frac{2r_Q m_m}{l_m a_j} \left\{ \eta_j(x_P) + (x_{O'_m} - x_P) \frac{d_{\xi j}}{r_Q} \right\};$$

$$\begin{aligned} a_{s_n q_j} &= \begin{cases} [(R_n \bar{c}_n - h_n) \eta'_j(x_{H_n}) + \eta_j(x_{H_n})] \frac{\rho_n \bar{m}_n R_n^3}{\Omega_n} & (n=1, 2, \dots, k_1) \\ [(R_n \bar{c}_n - h_{n0}) \eta'_j(x_{O_n}) + g_{nj}] \frac{\rho_n \bar{m}_n R_n^3}{\Omega_n} & (n=k_1+1, k_1+2, \dots, k); \end{cases} \end{aligned}$$

$$a'_{s_n q_j} = \begin{cases} \frac{\omega_s \bar{b}_n \bar{m}_{n \theta n} \eta'_j (x_{H_n}) R_n^4}{\Omega_n} & (n=1, 2, \dots, k_1) \\ \frac{\omega_s \bar{b}_n \bar{m}_{n \theta n} \eta'_j (x_{O_n}) R_n^4}{\Omega_n} & (n=k_1+1, k_1+2, \dots, k); \end{cases}$$

$$a_{\xi_m q_j} = \frac{r_Q}{l_m} \left[[\eta_j(x_P) + (x_{o'_m} - x_P) \frac{d_{\xi j}}{r_Q}] \right].$$

Здесь $N^0(x)$ и j (там где j не является индексом) — продольная сила, действующая на корпус, и модуль кажущегося ускорения в невозмущенном движении;

$P_z^o(t)$, $Q_j^o(t)$, $M^o G_y(t)$ — возмущающие обобщенные силы, заданные как функции времени, при $w=0$;

m' , m , m^* — массы корпуса, жидкости и одного маршевого двигателя;

J^o , J , J^* — момент инерции корпуса, приведенный момент инерции жидкости относительно оси Gy и момент инерции одного двигателя относительно оси вращения Qy ;

$\tilde{\mu}_n$, $\tilde{\mu}$ — массовый секундный расход одного компонента и суммарный по всем компонентам и двигателям;

P^* , P — тяга одного ЖРД и суммарная тяга всех двигателей;

S , l — площадь миделевого сечения и длина корпуса;

x_G , x_A , x_Q , x_D , x_P , x_{O_n} , $x_{o'_m}$, x_{H_n} — координаты метацентра системы корпуса —

жидкость и других характерных точек, показанных на рис. 2.4;

R_n , h_n , h_{n0} — характерный размер n -го бака, глубина жидкости и расстояние от характерной точки O_n' до плоскости подвески бака;

v , q , w — скорость полета, скоростной напор и скорость ветра в невозмущенном движении;

c_z^β , c_n^β , c_n^m , m_y^m — безразмерные аэродинамические коэффициенты;

$\frac{\partial c_n^\beta(x)}{\partial x}$ — коэффициент c_n^β на единицу длины корпуса;

R_{0n} — радиус свободной поверхности жидкости в n -м баке;

ω_0 , ω_{s_n} , ω_{ξ_m} , ω_q^* , ω_δ — характерная частота системы корпус — AC в канале рыскания, частоты собственных колебаний жидкости в n -м баке, m -й магистрали, j -го тона упругих колебаний корпуса при отсутствии продольных сил, частота колебаний двигателя при неподвижном вале рулевой машины;

$\bar{\omega}_{s_n}^2$, \bar{m}_n , $\bar{J}^{(n)}$, $\bar{Q}^{(n)}$, \bar{c}_n , $\bar{\beta}_{s_n}$, $\bar{\beta}^{(n)}$, \bar{b}_n — безразмерные гидродинамические коэффициенты (см. гл. 3);

δ_{q_j} , δ_{ξ_m} , δ_δ — логарифмические декременты поперечных упругих колебаний корпуса (j -я форма), столба жидкости в m -й магистрали при неработающем ЖРД и колебаний двигателя при неподвижном вале рулевой машины.

Остальные обозначения встречались в предыдущем разделе.

Коэффициенты уравнений (4.61)

Коэффициенты, характеризующие объект как жесткое твердое тело переменной массы

$$\begin{aligned} a'_{\varphi\varphi} &= \left[\frac{m_x^\omega q S l^2}{v} + \omega^0 \sum_{n=1}^k \bar{\beta}^{(n)} \rho_n R_n^5 + 4 r_Q^2 \sum_{n=1}^2 \mu_n^* \right] \frac{1}{I^o + I}; \\ a''_{\varphi\delta} &= \frac{4 m^* (x_Q - x_D) r_Q}{I^o + I}; \quad a_{z\delta} = \frac{4 P^* r_Q}{I^o + I}; \\ a''_{\delta\varphi} &= \frac{m^* (x_Q - x_D) r_Q}{J^*}; \\ \bar{M}_x(t) &= \frac{M_x^*(t)}{I^o + I}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Коэффициенты, характеризующие упругость корпуса

$$\beta_{p_j} = \omega_{p_j} \bar{\beta}_{p_j} = \frac{\omega_{p_j} \delta_{p_j}}{\pi}; \quad a_{p_j \delta} = \frac{4 P^* r_Q \eta_j(x_p)}{a_j}; \quad (4.71)$$

$$a''_{p_j \delta} = \frac{4 m^* (x_Q - x_D) r_Q \eta_j(x_p)}{a_j}; \quad a''_{\delta p_j} = \frac{m^* (x_Q - x_D) r_Q \eta_j(x_p)}{J^*};$$

$$a_J = \int_0^l [I^0(x) + I(x)] \eta_j^2(x) dx; \quad \bar{Q}_j = \frac{Q_j^*(t)}{a_j}.$$

Здесь $M_x(t)$, $Q_j(t)$ — возмущающий момент относительно оси Gx , заданный как функция времени, и соответствующая обобщенная сила;

- I^0 , I — момент инерции корпуса относительно оси Gx и присоединенный момент инерции жидкости при наличии внутри баков радиальных ребер (если их нет, $I \equiv 0$);
- $I^0(x)$, $I(x)$ — погонные моменты инерции корпуса и погонный присоединенный момент инерции жидкости (при наличии радиальных ребер);
- r_Q — расстояние от продольной оси корпуса до оси сопла периферийного маршевого двигателя;
- m_x^m — безразмерный коэффициент аэродинамического демпфирующего момента относительно продольной оси корпуса;
- ω^0 — характеристическая частота системы корпус — АС в канале крена;
- $\bar{\beta}_0^{(n)}$ — безразмерный коэффициент демпфирования относительно продольной оси, связанного с вязкостью жидкости в баках;
- δ_{p_j} — логарифмический декремент j -й формы крутильных колебаний корпуса.

Коэффициенты уравнений (4.62)

Коэффициенты, характеризующие
упругость корпуса

$$\begin{aligned} a'_{\xi\xi} &= \frac{2c_x q S}{v(m^0 + m)} ; \quad a_{\xi\delta_1} = \frac{4P^*}{m^0 + m} ; \quad a_{\xi\delta_2} = \frac{P^*}{m^0 + m} ; \\ \omega_{q_j}^2 &= \omega_{q_j}^{\circ 2} ; \quad \beta_{q_j} = \omega_{q_j} \bar{\beta}_{q_j} = \omega_{q_j} \frac{\delta_{q_j}}{\pi} ; \quad (4.72) \\ a_{q_j\delta_1} &= \frac{4P^* d_{1j}}{a_j} ; \quad a_{q_j\delta_2} = \frac{P^* d_{2j}}{a_j} ; \\ a_j &= \int_0^l \mu^0(x) \eta_j^2(x) dx + \sum_{n=1}^k m_{n0} g_{nj}^2 + m^* (4d_{1j}^2 + d_{2j}^2) ; \\ \bar{P}_x(t) &= \frac{P_x^\circ(t)}{m^0 + m} ; \quad \bar{Q}_j(t) = \frac{Q_j^\circ(t)}{a_j} . \end{aligned}$$

Коэффициенты, характеризующие
подвижность жидкости
в топливных магистралях и гидроупругость

$$\begin{aligned}
 a_{\xi s_n} &= \frac{5m_n}{l_n} (x_{H_n} - x_P); \quad a_{q_j s_n} = 4m_n \left(d_{1j} + \frac{h_n}{l_n} g_{nj} \right) \quad (n=1, 2); \\
 a_{q_j s_3} &= m_1 \left(d_{2j} + \frac{h_1}{l_1} g_{1j} \right); \quad a_{q_j s_4} = m_2 \left(d_{2j} + \frac{h_2}{l_2} g_{2j} \right); \\
 a_{s_n \xi} &= \frac{x_{H_n} - x_P}{l_n}; \quad a_{s_n q} = d_{1j} + \frac{h_n}{l_n} g_{nj} \quad (n=1, 2); \quad (4.73) \\
 a_{s_3 q_j} &= d_{2j} + \frac{h_1}{l_1} g_{1j}; \quad a_{s_4 q_j} = d_{2j} + \frac{h_2}{l_2} g_{2j};
 \end{aligned}$$

$a_{\xi_n}^{\circ}$, $\omega_{\xi_n}^2$, β_{ξ_n} определяются формулами (4.66) ($n=m$).

Обозначения в формулах (4.72) и (4.73) соответствуют введенным выше. Если предположить, что учитываемые частоты поперечных колебаний корпуса и жидкости в баках существенно ниже частот колебаний жидкости в магистралях и, кроме того, упругость подвески всех двигателей и длины всех магистралей, идущих к бакам окислителя и горючего, одинаковы, то можно принять в уравнениях (4.60) $\xi_m \equiv 0$, $\delta_{\xi} \equiv 0$, а в уравнениях (4.62) $s^{\circ}_3 \equiv s^{\circ}_1$, $s^{\circ}_4 \equiv s^{\circ}_2$; $\delta_1 = \delta_2$. Обычно можно без большой погрешности пренебречь в первых двух уравнениях (4.60) суммами членов, пропорциональных q_j . Выпишем соответствующие упрощенные уравнения, близкие к уравнениям, приведенным в книге [30].

Уравнения движения в плоскости рыскания

$$\begin{aligned}
 \ddot{\zeta} + a'_{\zeta \zeta} \dot{\zeta} + a'_{\zeta \psi} \dot{\psi} + a'_{\zeta \delta} \dot{\delta} + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + a''_{\zeta \delta} \ddot{\delta} + a_{\zeta \delta} \delta &= \bar{P}_z(t); \\
 \ddot{\psi} + a'_{\psi \zeta} \dot{\zeta} + a'_{\psi \psi} \dot{\psi} + a'_{\psi \delta} \dot{\delta} + \sum_{n=1}^k (a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a'_{s_n} \dot{s}_n) + a''_{\psi \delta} \ddot{\delta} + a_{\psi \delta} \delta &= \bar{M}_{Gy}(t); \\
 \ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + \sum_{n=1}^k (a_{q_j s_n} \ddot{s}_n + a'_{q_j s_n} \dot{s}_n) + & \\
 + a''_{q_j \delta} \ddot{\delta} + a_{q_j \delta} \delta &= \bar{Q}_j(t); \quad (4.74) \\
 \ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n} \zeta + a_{s_n} \psi + a'_{s_n} \dot{\psi} + & \\
 + \sum_{j=1}^m (a_{s_n q_j} \ddot{q}_j + a'_{s_n q_j} \dot{q}_j) &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\ddot{\delta} + \beta_{\delta}\dot{\delta} + \omega_{\delta}^2\delta + a''_{\delta\zeta}\ddot{\zeta} + a''_{\delta\psi}\ddot{\psi} + \\ + a_{\delta\zeta}(\psi + \delta) + \sum_{j=1}^m(a''_{\delta q_j}\dot{q}_j + a_{\delta q_j}q_j) - \omega_{\delta}^2\delta = 0; \\ \delta^* = \mathcal{L}'_1(\psi^*) - \mathcal{L}'_2(\zeta^*);$$

$$\zeta^* = \zeta - (x^* - x_G)\psi + \sum_{j=1}^m \eta_j(x^*)q_j$$

$$\psi^* = \psi - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x^*)q_j; (j=1, 2, \dots, m; n=1, 2, \dots, k).$$

Уравнения движения в направлении продольной оси

$$\ddot{\xi} + a'_{\xi\xi}\dot{\xi} + \sum_{n=1}^2 a_{\xi s_n}\ddot{s}_n - a_{\xi\delta}\delta = \bar{P}_x(t); \\ \ddot{q}_j + \beta_{q_j}\dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + \sum_{n=1}^2 a_{q_j s_n}\ddot{s}_n - a_{q_j\delta}\delta = \bar{Q}_j(t); \\ \ddot{s}_n + \beta_{s_n}\dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n\xi}\dot{\xi} + \sum_{j=1}^m a_{s_n q_j}\ddot{q}_j = 0; \\ \delta = \mathcal{L}_1(s_1^*) + \mathcal{L}_2(s_2^*); \quad (4.75) \\ s_n^* = -a_{s_n}(\beta_{s_n}\dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n) \quad (j=1, 2, \dots, m; n=1, 2).$$

Уравнения (4.74) и (4.75) считаются в ч. III основными уравнениями для исследования динамической устойчивости РН.

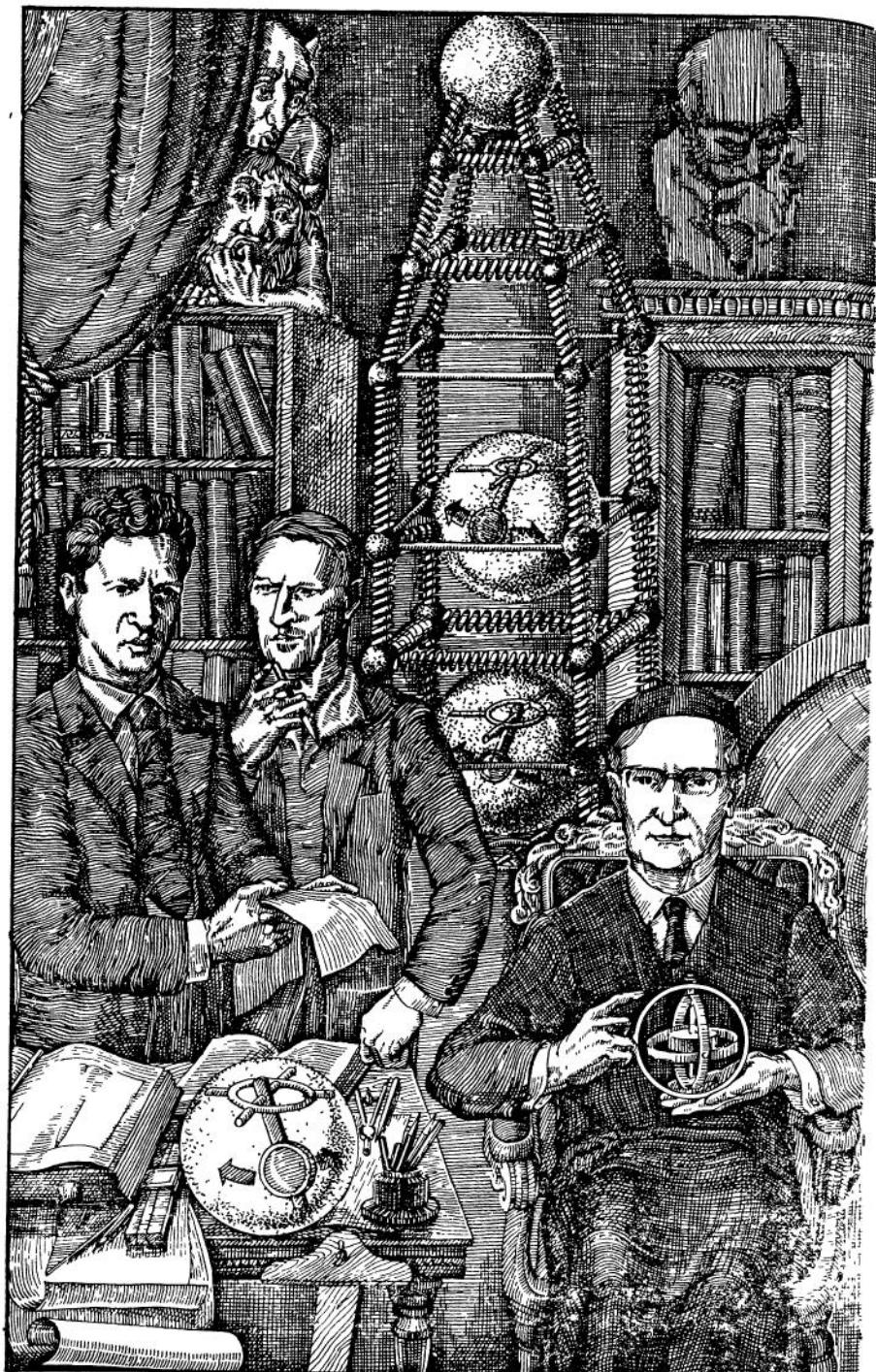
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К. А., Рапопорт И. М. Динамика ракет. М., «Машиностроение», 1969, 378 с.
2. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М., «Наука», 1966, 307 с.
3. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М., «Наука», 1971, 767 с.
4. Бенедикт Э. Невесомость. Физическое явление и биологические эффекты. М., «Мир», 1964, 275 с.
5. Боднер В. А. Системы управления летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1973, 503 с.
6. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961, 339 с.

7. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М. Об уравнениях движения ракеты. — ПММ, 1947, т. XI, вып. 3, с. 301—312
8. Гликман Б. Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей М., «Машиностроение», 1974, 394 с.
9. Дербенцев Д. А. Колебания сверхзвукового газового потока, протекающего в канале конечной длины с осциллирующими стенками. — ПМ, 1966, т. II, вып. 9, с. 124—127.
10. Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. М., Гостехиздат, 1948, 208 с.
11. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью. Избранные сочинения, т I, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1948, 391 с.
12. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Избранные сочинения, т II, М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1948, 422 с.
13. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. — ПММ, 1956, т. XX, вып. 6, с. 733—755.
14. Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М., «Наука», 1968, 142 с.
15. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле М.—Л., Гостехиздат, 1946, 423 с.
16. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования М., «Машиностроение», 1969, 298 с.
17. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления М.—Л., ГОНТИ, 1938, 456 с.
18. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I, М., Гостехтеоретиздат, 1948, 535 с.
19. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II, М., Гостехтеоретиздат, 1948, 612 с.
20. Кочин Н. Е. Гидродинамическая теория решеток. М.—Л., Гостехиздат, 1949, 103 с.
21. Крокко Л., Чжен Синь-И. Теория неустойчивости горения в ЖРД. М., ИЛ, 1958, 351 с.
22. Лаврентьев М. А., Шабат В. Б. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958, 606 с.
23. Лаврентьев М. А., Шабат В. Б. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973, 416 с.
24. Ландау Л. Д., Либниц Е. Н. Механика сплошных сред. М.—Л., ГИТТЛ, 1953, 788 с.
25. Лебедев А. А., Карабанов В. А. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. М., «Машиностроение», 1965, 528 с.
26. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Часть II М., Гостехиздат, 1940, 468 с.
27. Майлс Дж. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963, 272 с.
28. Микишев Г. Н., Невская Е. А., Дорожкин Н. Я. и др. Об экспериментальном исследовании возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью — «Космические исследования», 1965, т. III, вып. 2, с. 208—220
29. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., «Машиностроение», 1968, 532 с.
30. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М., «Машиностроение», 1971, 563 с.
31. Моисеев Н. Н. Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью. ДАН СССР, 1952, т. 85, № 4, с. 719—722.
32. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкую массу, имеющие свободную поверхность. Математический сборник № 32 (74), вып. 1, АН СССР, 1953, с. 61—96.
33. Моисеев Н. Н. К теории колебаний упругих тел, имеющих полости с жидкостью. — ПММ, 1959, т. XXIII, № 5, с. 862—878

34. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965, 439 с.
35. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. ВЦ АН СССР, 1966, 269 с.
36. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. — ПММ, 1956, т. XX, вып. 1, с. 21—38.
37. Овсянников Б. В., Боровский Б. И. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей. М., «Машиностроение», 1971, 540 с.
38. Оходимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — ПММ, 1956, т. XX, вып. 1, с. 3—20.
39. Павленко Г. Е. Качка судов. Л., Гострансиздат, 1935, 312 с.
40. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М. — Л., Физматгиз, 1960, 193 с.
41. Рабинович Б. И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. — ПММ, 1956, т. XX, вып. 1, с. 39—50.
42. Рабинович Б. И. Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности. — «Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», 1959, № 4, с. 63—68.
43. Рабинович Б. И. О малых гармонических колебаниях цилиндрической оболочки, вдоль оси которых течет со сверхзвуковой скоростью идеальный газ. — ПММ, 1959, т. ХХIII, вып. 5, с. 879—884.
44. Рабинович Б. И. К теории малых колебаний твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. — ПМ, 1968, т. IV, № 9, с. 88—96.
45. Рабинович Б. И., Ефименко Г. Г., Дорожкин Н. Я. Исследование динамических характеристик твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. — ПМ, 1969, т. V, вып. 9, с. 11—19.
46. Рабинович Б. И., Шмаков В. П., Кобычкин В. С. К теории колебаний конструкций, несущих упругие резервуары с жидкостью. Сб. «Исследования по теории сооружений», № 18, М., Стройиздат, 1970, с. 68—83.
47. Рабинович Б. И., Роговой В. М. Об учете вязкости жидкого топлива при исследовании движения управляемых аппаратов с ЖРД. — «Космические исследования», 1970, т. VIII, № 3, 315—328.
48. Рабинович Б. И. Об уравнениях возмущенного движения тела с жидкостью при немалых углах отклонения нормали к свободной поверхности от оси полости. — «Математическая физика», Республиканский межведомственный сборник, вып. 13, АН УССР, 1973, с. 118—124.
49. Рапопорт И. М. Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью. М., «Машиностроение», 1966, 393 с.
50. Риман И. С., Крепс Р. Л. Присоединенные массы тел различной формы. — «Труды ЦАГИ», № 635, 1947, 27 с.
51. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., ГИТТЛ, 1957, 375 с.
52. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэrodинамики. М., «Наука», 1966, 448 с.
53. Седов Л. И. Механика сплошных сред. т. I, М., «Наука», 1973, 536 с.
54. Седов Л. И. Механика сплошных сред. т. II, М., «Наука», 1973, 584 с.
55. Сретенский Л. Н. Колебания жидкости в подвижном сосуде. — «Известия АН СССР, ОТН», 1951, № 10, с. 1483—1494.
56. Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. М. — Л., Оборонгиз, 1939, 110 с.
57. Халфмен Р. Л. Динамика. М., «Наука», 1972, с. 567.
58. Чебаевский В. Ф., Петров В. И. Кавитационные характеристики высококоортовых шнеко-центробежных насосов. М., «Машиностроение», 1973, 152 с.
59. Черноуско Ф. Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. — ПММ, 1966, т. XXX, вып. 6, с. 977—992.
60. Черноуско Ф. Л. Колебания сосуда с вязкой жидкостью. — «Известия АН СССР. Механика жидкости и газа», 1967, № 1, с. 58—66.

61. Черноуско Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. ВЦ АН СССР, 1968, 230 с.
62. Шмаков В. П. Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова — Галеркина к решению краевых задач. «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1967, № 5, с. 129—136.
63. Bono R., Gatland K. Frontiers of space. London, The Macmillan Company, 1969, 247 p.
64. Cooper R. M. Dynamics of liquids in moving containers.—«ARS Journal», 1960, vol. 30, N. 8, 725—729.
65. Greensite A. L. Analysis and design of space vehicle flight control systems vol. I, Short periodic dynamics. NASA CR-820, 1967, Washington, D. C., 44 p.
66. Greensite A. L. Analysis and design of space vehicle flight control systems, vol XV, Elastic body equations. NASA CR-834 1967, Washington, D C, 103 p.
67. Kana D. D., Ko W. L., Francis P. H. Coupling between structure and liquid propellants in a parallel stage space shuttle design.—«Journal of Spacecraft and Rockets», 1972, vol. 9, N. 11, p. 789—790.
68. McDonoug G. F. Stability problems in the control of Saturn launch vehicles, Dynamic stability of structures, Proc. of an International Conference held at Northeastern University, Evanston, Illinois, 1965, Oct., p. 113—127.
69. Pinson L. D., Leonard H. W. Longitudinal vibration characteristics of 1/10 — scale Apollo/Saturn V replica model, NASA D-5159 1969, Washington, D. C., 95 p.
70. Sack L. E., Nottage H. B. Oscillations associated with cavitating inducers.—«ASME Paper» N. 65-FE-14, p. 917—924.
71. Stripling I. B. Cavitation in turbo pumps — Part 2, Basic Engineering, Transaction of ASME Paper, N. 61-WA-98, 13 p.
72. Stripling I. B., Acosta A. J. Cavitation in turbo pumps — Part I.—«Journal of Basic Engineering», Transaction of ASME Paper, N. 61-WA-112, 11 p.



ЧАСТЬ II

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ДИНАМИЧЕСКУЮ СХЕМУ

Метод необходим для отыскания истины.

Ренэ Декарт. Правила для руководства ума.

Сложную континуальную механическую систему корпус — жидкость, имеющую бесконечное число степеней свободы, можно в практических целях заменить упрощенным механическим аналогом с конечным числом степеней свободы, представляющим собой комбинацию масс, пружин и маятников («выбор динамической схемы»). Задача расчета коэффициентов уравнений возмущенного движения этой системы может рассматриваться как задача определения характеристик соответствующего аналога, в первую очередь, форм и частот его собственных колебаний и соответствующих обобщенных масс, а также коэффициентов демпфирования.

Эффективное решение этой задачи достигается только при сочетании теоретических и экспериментальных методов. Ниже рассматриваются некоторые теоретические и эмпирико-теоретические методы.

Выбор оптимального для каждой стадии проектирования метода очень важен и в то же время не тривиален, так как требования надежности, простоты, быстродействия, точности, устойчивости машинного счета часто вступают в противоречие. Ряд материалов, способствующих решению этого вопроса, содержится во II части книги.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СХЕМЫ

5.1. Коэффициенты уравнений возмущенного движения как параметры, характеризующие динамическую схему

Динамическая схема РН формализуется, как было описано выше, в виде некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в первом приближении — линейных с правыми частями, которые предполагаются известными функциями времени.

Хотя на самом деле это некоторая стохастическая система, правые части и коэффициенты которой являются случайными функциями, детерминированный подход является единственной возможной альтернативой на стадии предварительных исследований, когда информация о будущем объекте очень ограничена. Носителями этой информации, определяющей возможность решения задач динамической устойчивости на рассматриваемом этапе исследования, являются коэффициенты и в несколько меньшей степени — правые части уравнений возмущенного движения. Недостаток информации о конкретных значениях этих коэффициентов в каждый момент времени может быть отчасти компенсирован рассмотрением некоторой области в пространстве коэффициентов, определяемой технологическими, эксплуатационными и иными возможными разбросами аэродинамических, массовых, центровочных и других конструктивных параметров объекта, включая ЖРД, а также разбросами параметров атмосферы.

Ограничимся методологической стороной определения тех коэффициентов, которые характеризуют корпус как упругое тело с жидкостью, полагая, что исходная информация об объекте является достаточно полной, чтобы построить, например, методом Монте — Карло всю потребную совокупность значений соответствующих коэффициентов.

Определение массовых и центровочных характеристик, моментов инерции объекта как твердого тела, возмущающих сил и моментов, связанных с ветром, эксцентризитетом тяги, аэrodинамической несимметрией и т. д., как и всей совокупности аэrodинамических коэффициентов, представляет собой совершенно самостоятельный комплекс задач, выходящих далеко за рамки книги.

Возвращаясь к более узкой задаче, можно выделить три группы коэффициентов, характеризующих в определенном смысле динамическую схему.

1. Гидродинамические коэффициенты, а именно: частоты собственных колебаний жидкости в баках, а также присоединенные массы жидкости и коэффициенты демпфирования, т. е. элементы тензора инерции эквивалентного твердого тела, характеристики эквивалентных маятников и коэффициенты диссипативной функции.

2. Коэффициенты, определяемые упругостью корпуса, а именно: частоты собственных продольных, поперечных и крутильных колебаний, обобщенные массы и другие коэффициенты, зависящие от формы колебаний, и коэффициенты демпфирования для каждой из форм.

3. Коэффициенты, связанные с гидроупругостью, т. е. взаимодействием колебаний жидкости тех или иных видов в баках и магистралях и упругими колебаниями корпуса в целом и его элементов (обечайки и днища баков, магистрали и т. д.). Сюда же можно отнести, в частности, и частоты собственных колебаний жидкости в магистралях.

Можно выделить два принципиально различных метода определения этих коэффициентов: теоретический и экспериментальный. Эти методы являются взаимно дополняющими друг друга, и каждый из них имеет свою оптимальную сферу применения. Экспериментальные методы незаменимы при исследовании баков сложной геометрической конфигурации, с развитыми внутренними конструктивными элементами (промежуточные емкости, перфорированные диафрагмы, сложные заборные устройства и т. д.), а также при исследовании сложных упругих систем, сочетающих в себе элементы балок, рам, ферм, подкрепленных оболочек и т. д., что достаточно характерно для корпусов РН.

Надежное определение диссипативных коэффициентов, связанных с конструкционным демпфированием корпуса или демпфированием колебаний жидкости в баках с развитыми внутренними конструктивными элементами, в настоящее время возможно только экспериментальным путем. То же самое относится к определению частот собственных колебаний жидкости в магистралях, зависящих от объема кавитационных каверн, которые образуются на кромках шнеков высокооборотных шнеко-центробежных насосов ЖРД, определению динамических характеристик при нелинейных колебаниях жидкости в баках (большие амплитуды) и т. д. Экспериментальные исследования оказывают также неоценимую помощь в выработке рациональных расчетных схем и различных полуэмпирических методов расчета.

Говоря об экспериментальных исследованиях, мы подразумеваем исследования на физически подобных моделях, в частности на конструктивно подобных моделях, натурные динамические испытания реальных конструкций или их элементов, стендовые и огневые испытания и, наконец, летно-конструкторские испытания. Последние играют особую роль в определении или уточнении некоторых параметров динамической схемы, а иногда и самой дина-

мической схемы, т. е. структуры принятой системы уравнений возмущенного движения.

Методика и техника экспериментальных исследований и методика обработки их результатов представляют собой совершенно самостоятельный раздел динамики деформируемых систем, которому посвящена обширная литература. В частности, комплекс вопросов, связанных с экспериментальными исследованиями на моделях, рассмотрен Г. Н. Микишевым в соответствующих главах книг [35, 36].

Теоретические методы дают надежные результаты в случаях объектов более простой геометрической и жесткостной конфигурации и имеют преимущества в относительной простоте применения и быстроте получения результатов. Эти методы, основанные на широком использовании ЭВМ, незаменимы на ранних стадиях исследования, когда возможности экспериментальных исследований весьма ограничены из-за недостатка информации об объекте. Возможности теоретических методов могут быть существенно расширены путем усложнения самих расчетных схем и уточнения некоторых теоретических зависимостей по данным эксперимента. Примерами могут служить теоретические методы определения гидродинамических коэффициентов для баков с внутренними ребрами или кольцами малой ширины на основе экспериментальных зависимостей коэффициента сопротивления элемента ребра от скорости.

Следует подчеркнуть, что современные ЭВМ третьего и четвертого поколения резко расширили возможности теоретических исследований, сделав доступными для решения задачи такой размерности (больше 1000 степеней свободы), которые двадцать лет назад были бы признаны безнадежными. Применение на машинах последнего поколения развитых внешних устройств, в частности систем отображения информации (дисплеев), дает совершенно новые качественные возможности в использовании математических методов для решений сложных краевых задач, на которых строится определение параметров динамической схемы РН.

Следует подчеркнуть, что имеется целый ряд задач, где теоретические и экспериментальные методы являются конкурентоспособными, что дает возможность отработки тех и других методов на некоторых эталонных задачах (малые колебания жидкости в полостях вращения не очень сложной геометрической конфигурации, упругие колебания балок или тонкостенных стержней переменного сечения, колебания тонкостенных оболочек с жидкостью и т. д.).

Ниже обсуждаются общие аспекты применения теоретических методов для определения параметров динамической схемы РН и дается краткая характеристика некоторых методов, получивших наибольшее распространение в практике проектирования.

5.2. Некоторые теоретические методы решения практических задач определения коэффициентов

Остановимся на двух группах коэффициентов (4.65), (4.67), имея в виду, что вопросам гидроупругости посвящена специальная литература (см., например, обзор, приведенный в работе [36]), а определение дополнительных коэффициентов связи между колебаниями жидкости в баках и магистралях и упругими колебаниями корпуса не требует в рамках принятой расчетной модели (см. гл. 4) решения каких-либо новых задач.

При теоретическом определении коэффициентов уравнений возмущенного движения большое значение имеет гарантированная точность результатов и время, потребное на их получение.

Можно выделить основные коэффициенты — частоты и присоединенные массы жидкости, частоты и обобщенные массы корпуса при упругих колебаниях, некоторые дополнительные коэффициенты, зависящие от форм колебаний и их производных, которые необходимо вычислять с большей точностью, и вспомогательные коэффициенты — диссипативные, которые можно вычислять (если это вообще возможно) грубее, так как интегралы уравнений возмущенного движения замкнутой системы с АС и ДУ обычно зависят от них в меньшей степени.

Исключением являются РН, неустойчивые «в малом», устойчивость которых «в большом» обеспечивается иногда путем нелинейного демпфирования колебаний жидкости в баках или магистралях.

Сформулировать однозначно требования к потребной точности (относительно истинных значений, которые проявляются в полете) вычисления коэффициентов уравнений возмущенного движения не представляется возможным. Однако значения максимальной погрешности 1—2% для частот колебаний жидкости и корпуса, 5—10% — для присоединенных масс жидкости (обобщенных масс в задачах об упругих колебаниях корпуса), 10—25% — для диссипативных коэффициентов являются достаточно реальными как исходя из потребностей на всех стадиях проектирования, так и возможностей (с учетом ошибок идеализации реальной конструкции, будь то бак, магистраль или корпус в целом).

На начальной стадии проектирования указанные требования к точности могут быть, конечно, снижены при наличии достаточных надежных оценок точности более грубого метода.

Вместе с тем рациональная организация вычислительного процесса сама по себе требует наличия нескольких дублирующих методов, обеспечивающих надежный контроль результатов и предварительное получение некоторых опорных точек перед массивным счетом, создающих, так сказать, каркас будущей матрицы

коэффициентов. Этому удовлетворяет совокупность методов, которые можно разбить на три группы:

1) высокоточные (естественно, наиболее сложные) методы, гарантирующие удовлетворение самым жестким требованиям по точности и учет всех конкретных особенностей конструкции;

2) приближенные методы, позволяющие ценой известной потери точности быстро получить основные результаты (на начальной стадии исследования) и опорные точки для реализации более точного метода;

3) достаточно тонкие оценки, желательно, двусторонние, дающие возможность объективно контролировать все основные результаты, а иногда и получать простые приближенные формулы, являющиеся альтернативой для методов второй группы.

Следует подчеркнуть, что массовое применение в расчетной практике современных методов вычислительной математики и вычислительной техники заставляет провести некоторую переоценку ценностей, отдав в качестве методов первой группы предпочтение таким, которые обеспечивают получение алгоритмов, наиболее просто реализуемых на ЭВМ, перед так называемыми «точными решениями», выраженными через сложные специальные функции, мало приспособленные для расчета на ЭВМ (например, функции Матье). Напротив, методы второй и особенно третьей группы, реализация которых иногда возможна на простейших настольных клавишных машинах или с помощью логарифмической линейки, должны характеризоваться наибольшей простотой и прозрачностью, вплоть до получения обозримых конечных формул, в которых можно проследить влияние геометрических, жесткостных, массовых и других конструктивных параметров объекта.

Наконец, следует сказать о таких требованиях, к общим методам, как устойчивость машинного счета, хорошие критерии сходимости, достаточно высокое быстродействие, большая универсальность с одновременным максимальным учетом индивидуальных особенностей объекта исследования. Некоторые из этих требований вступают в противоречие друг с другом, что и делает задачу выбора оптимальных методов решения рассматриваемых задач отнюдь не тривиальной.

Перечислим методы решения практических задач, получившие наибольшее распространение благодаря наилучшему соответствию требованиям, сформулированным выше.

Расчет основных гидродинамических коэффициентов требует решения некоторых смешанных краевых задач для трехмерного уравнения Лапласа и последующего вычисления квадратур. Здесь оказываются приемлемыми многие методы приближенного анализа, описанные в книге [19], в особенности вариационный метод Ритца — Трефтца [19, 37]. Последний нашел наиболее широкое применение в практике расчета частот и присоединенных масс жидкости для полостей самой различной конфигурации в

качестве метода первой группы и как основа для различных приближенных методов (см. список литературы к ч. II).

Этот метод обладает большой гибкостью и сводится к простым расчетным алгоритмам, легко реализуемым на ЭВМ. Большое количество конкретных задач, решенных этим методом, содержится в книгах [35, 38, 60, 63] и в литературе, приведенной в этих книгах.

Последнее время появились работы с изложением приемов, расширяющих возможности вариационного метода [8, 16, 54] и повышающих его универсальность. В настоящей книге метод Ритца — Трефта и примыкающий к нему метод Галеркина рассматриваются как основные расчетные методы в сочетании с методом разделения переменных и конформных отображений. На основе этих методов получены приближенные формулы для оценки частот, применяемые в сочетании с формулой Рэлея. Для оценки присоединенных масс имеются весьма эффективные формулы, полученные с помощью равенства Парсеваля [35, 55, 60].

Альтернативным методом является метод сеток и его частный случай — метод прямых [12]. Этот метод, широко применяемый при решении самых различных краевых задач математической физики, не нашел пока сколько-нибудь широкого применения в практике расчета гидродинамических коэффициентов, хотя есть успешные попытки в этом направлении [20]. Имеется еще целый ряд приближенных методов большей или меньшей эффективности, используемых с успехом для решения конкретных задач, которые, однако, не могут претендовать на универсальность вариационных и сеточных методов (см. обзоры литературы в работах [35, 38, 60, 63, 65, 70]).

Но есть еще один метод, на котором следует остановиться особо в силу больших возможностей, заложенных в нем, — это метод возмущений [6, 21]. Ниже применяется один из вариантов этого метода для учета влияния кольцевых и радиальных ребер малой относительной ширины на частоты и присоединенные массы жидкости [36, 46, 48, 67]. Кроме того, аналогичный метод используется для расчета диссилиативных коэффициентов на основе эмпирической зависимости коэффициента сопротивления элемента ребра от числа Струхала [35, 36, 73, 78].

Из многочисленных методов решения задач о колебаниях сложных упругих систем, описанных во многих фундаментальных трудах [2, 5, 13, 23, 61], в наибольшей степени отвечает всем требованиям, которые можно предъявить к методам первой группы, метод конечных элементов [64, 66]. Следующими по степени общности являются методы дискретизации [14, 56] и прогонки [4, 18], которые могут играть роль методов как первой, так и второй группы, в зависимости от степени дискретизации. Методами третьей группы для приближенного определения частоты доминирующей гармоники могут служить оценки, доставляемые формулами Рэлея, Граммеля, Дункерлея и др. [26, 43]. Ниже

рассматриваются вкратце метод дискретизации и метод прогонки, получившие широкое распространение в практике расчета частот и форм основных гармоник колебаний корпусов РН. Здесь также необходимо упомянуть о больших возможностях различных теоретико-экспериментальных методов, позволяющих в результате совместной обработки свести к минимуму систематические ошибки результатов расчета и случайные ошибки эксперимента. Один из таких методов описан в разд. 7.3 [10, 52].

Резюмируя изложенное выше, следует подчеркнуть, что работа по определению параметров динамической схемы таких сложных объектов, как современные РН, является чрезвычайно громоздкой и трудоемкой. В качестве примера приведем данные, заимствованные из отчета [71], которые характеризуют трудозатраты и время на расчет методом конечных элементов параметров принятой динамической схемы первой ступени РН «Сатурн-5», зависящих от упругости конструкции, при одном уровне топлива (для последующего анализа динамической устойчивости):

человеко-месяцы — 75;

машинное время на ЭВМ IBM-360 — 60 ч;

общая продолжительность работы — 18 месяцев.

Сюда не входит время на расчет аэродинамических, гидродинамических и прочих коэффициентов, характеризующих корпус как жесткое тело с жидкостью.

Следует учесть, что работу выполнял коллектив весьма высокой квалификации, обладавший большим опытом и располагавший всеми необходимыми исходными данными для расчета местных жесткостей и обобщенных масс конечных элементов, и принять во внимание большое быстродействие ЭВМ IBM-360 (15 миллионов «коротких» операций в секунду, т. е. сложений или вычитаний).

Если к этому добавить, что в процессе отработки адекватной динамической схемы рассматривались четыре последовательно усложнявшихся математических модели, самая сложная из которых имела 1200 степеней свободы, и расчеты корректировались на основе сравнения с результатами испытаний конструктивно-подобной модели первой ступени в масштабе 1/10 и результатами натурных динамических испытаний первой ступени на уникальном стенде [71, 72, 79, 81], то становится ясным, насколько громоздка и трудоемка рассматриваемая задача.

РАСЧЕТ ЧАСТОТ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС ЖИДКОСТИ

6.1. Метод разделения переменных в случае цилиндрических баков

В гл. 3 показано, что расчет всех гидродинамических коэффициентов, т. е. частот собственных колебаний, присоединенных масс (моментов инерции) и коэффициентов демпфирования, сводится к нахождению потенциалов смещения Ψ_j ($j=1, 2, 3$), являющихся решениями некоторых неоднородных краевых задач (3.25) и собственных функций φ_n ($n=1, 2, \dots$) некоторой однородной краевой задачи (3.21).

В этой главе излагаются методы решения этих задач для наиболее распространенных форм баков. На ряде примеров иллюстрируется также расчет частот и присоединенных масс, а в последнем разделе — и коэффициентов демпфирования (для баков с внутренними ребрами, для которых это наиболее важно).

В случае цилиндрических баков с плоскими днищами и невозмущенной поверхностью жидкости, перпендикулярной продольной оси, можно отделить одну из переменных (x) и свести все трехмерные краевые задачи к двухмерным (в плоскости y, z).

В результате проблема сводится к решению двух плоских краевых задач — однородной и неоднородной. Введем следующие обозначения:

Q — область, занятая жидкостью;

S_1 — поверхность нижнего днища;

S_2 — боковая (смоченная) поверхность;

Σ — невозмущенная свободная поверхность (как и в гл. 3);

S — поперечное сечение столба жидкости плоскостью $x=\text{const}$;

Γ — контур этого сечения;

\mathbf{v}, \mathbf{s} — орты внешней нормали и касательной к контуру Γ ;

τ — угол между вектором \mathbf{v} и осью Oy (рис. 6.1).

Краевые задачи (3.25), (3.21) для составляющих потенциала смещений приобретают в данном случае следующий вид:

$$\Delta_1 \Psi_1 = 0 \text{ в области } S;$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\Gamma} = y v_z - z v_y = y \sin \tau - z \cos \tau. \quad (6.1)$$

$$\Delta \Psi_2 = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right|_{S_1} = z; \quad \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right|_{\Sigma} = z_0; \quad \left. \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mathbf{v}} \right|_{S_2} = x v_z = x \sin \tau. \quad (6.2)$$

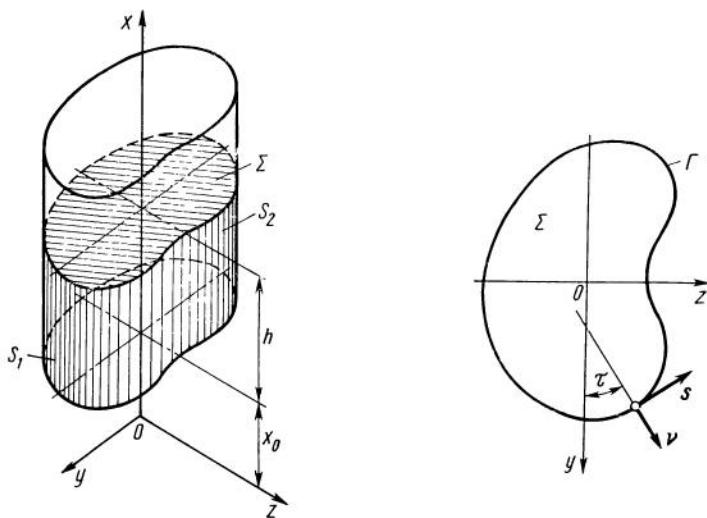


Рис. 6.1. Системы координат и основные обозначения в случае цилиндрических полостей

$$\Delta \Psi_3 = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \Big|_{S_1} = -y; \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = -y_0; \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial v} \Big|_{S_1} = -xv_y = -x \cos \tau. \quad (6.3)$$

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{S_1} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = -\frac{\omega^2 \varphi}{j}; \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_{S_2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = 1 \quad \text{при } y = y^*, z = z^*,$$

где (y^*, z^*) — произвольно выбираемая точка контура Γ ;
 Δ, Δ_1 — трехмерный и двухмерный операторы Лапласа;

j — модуль ускорения поля массовых сил невозмущенного движения;

ω_n^2 ($n = 1, 2, \dots$) — квадрат частоты собственных колебаний жидкости, соответствующий n -му собственному числу краевой задачи (6.4);

y_0, z_0 — координаты центра масс площади Σ .

Последнее из условий (6.4) — это условие нормировки функций φ_n ($n = 1, 2, \dots$).

Если ввести, следуя Н. Е. Жуковскому [17], функции F_j , связанные с Ψ_j ($j=1, 2, 3$) уравнениями

$$\frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial v}; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial s} = -\frac{\partial F_1}{\partial v}; \quad (6.5)$$

$$F_2 = \Psi_2 + x(z - 2z_0); \quad F_3 = \Psi_3 - x(y - 2y_0),$$

то неоднородные краевые задачи (6.1) — (6.3) заменятся следующими:

$$\Delta_1 F_1 = 0 \text{ в области } S;$$

$$F_1|_r = -\frac{y^2 + z^2}{2} + C. \quad (6.1a)$$

$$\Delta F_2 = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = 2(z - z_0); \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} \Big|_{x=x_0+h} = z - z_0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial v} \Big|_{S_2} = 0. \quad (6.2a)$$

$$\Delta F_3 = 0 \text{ в области } Q;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = -2(y - y_0); \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} \Big|_{x=x_0+h} = -(y - y_0); \quad \frac{\partial F_3}{\partial v} \Big|_{S_2} = 0. \quad (6.3a)$$

Применяя метод разделения переменных и вводя в рассмотренные частные решения $X_n(x)$ и $X_n^*(x)$, у которых матрица производных при $x=x_0$ и $x=x_0+h$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} X_n'(x_0) & X_n'(x_0+h) \\ X_n^*(x_0) & X_n^{*\prime}(x_0+h) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (6.6)$$

можно представить функции φ_n ($n=1, 2, \dots$), Ψ_1, F_2, F_3 в следующей форме [35]:

$$\varphi_n = X_n(x) \varphi_n(y, z);$$

$$F_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{N_n^2} K_n(x) \psi_n(y, z);$$

$$F_3 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{N_n^2} K_n(x) \psi_n(y, z); \quad (6.7)$$

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{N_n^2} \psi_n(y, z),$$

где

$$\begin{aligned}
 K_n(x) &= 2X_n^*(x) + X_n(x) = \frac{\operatorname{ch} k_n(x - x_0) - 2 \operatorname{ch} k_n(x - x_0 - h)}{k_n \operatorname{sh}(k_n h)}; \\
 X_n(x) &= \frac{\operatorname{ch} k_n(x - x_0)}{k_n \operatorname{sh}(k_n h)}; \quad X_n^*(x) = -\frac{\operatorname{ch} k_n(x - x_0 - h)}{k_n \operatorname{sh}(k_n h)}; \quad (6.8) \\
 C_n &= \int_S z \psi_n dS; \quad D_n = \int_S y \psi_n dS; \quad E_n = \int_S \Psi_1 \psi_n dS; \quad N_n^2 = \int_S \psi_n^2 dS.
 \end{aligned}$$

Параметры k_n^2 и функции ψ_n являются собственными числами и собственными функциями следующей двухмерной краевой задачи:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi &= 0; \\
 \frac{\partial \psi}{\partial v} \Big|_{\Gamma} &= 0; \quad (\psi(y^*, z^*))|_{\Gamma} = 1. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Последнее условие в (6.9) — условие нормировки (y^* , z^* — координаты произвольно выбранной точки контура).

Если функции ψ_n ($n = 1, 2, \dots$) являются точными решениями задачи (6.9), то, используя формулу Грина на плоскости

$$\int_S (\varphi \Delta_1 \psi - \psi \Delta_1 \varphi) dS = \oint_{\Gamma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) ds,$$

свойства сопряженности функций y и z на контуре Γ

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial s}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial s} \quad (6.10)$$

и интегрирование по частям, можно привести выражения для коэффициентов C_n , D_n , E_n (6.8) к следующей эквивалентной форме [35]:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} \psi_n \frac{\partial z}{\partial v} ds = -\frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} \psi_n \frac{\partial y}{\partial s} ds = -\frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} y \frac{\partial \psi_n}{\partial s} ds; \\
 D_n &= \frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} \psi_n \frac{\partial y}{\partial v} ds = \frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} \psi_n \frac{\partial z}{\partial v} ds = -\frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} z \frac{\partial \psi_n}{\partial s} ds; \quad (6.11) \\
 E_n &= \frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} \psi_n \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} ds = \frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} \psi_n \frac{\partial F_1}{\partial s} ds = \frac{1}{k_n^2} \oint_{\Gamma} (y^2 + z^2) \frac{\partial \psi_n}{\partial s} ds.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты (6.11) связаны, как коэффициенты Фурье, следующими равенствами Парсеваля [35]:

$$S = \oint_{\Gamma} y dz = - \oint_{\Gamma} z dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 D_n^2}{N_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 C_n^2}{N_n^2};$$

$$J_y = \int_S (z - z_0)^2 dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{N_n^2}; \quad J_z = \int_S (y - y_0)^2 ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^2}{N_n^2}; \quad (6.12)$$

$$\Omega_x = \int_S (\Psi_1 - \Psi_0)^2 dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^2}{N_n^2}; \quad \Psi_0 = \frac{1}{S} \int_S \Psi_1 ds;$$

$$\Omega_{xx} = - \oint_{\Gamma} \Psi_1 (y dy + z dz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 E_n^2}{N_n^2}.$$

Все они могут быть получены непосредственно путем подстановки вместо y, z, Ψ_1 рядов

$$y - y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n \psi_n}{N_n^2}; \quad z - z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n \psi_n}{N_n^2}; \quad \Psi_1 - \Psi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n \psi_n}{N_n^2}$$

и почлененного интегрирования.

Если область S многосвязная, то под Γ следует понимать совокупность ограничивающих ее контуров Γ_j , при положительном обходе которых область S всегда остается слева. Границные условия (6.1a) и (6.9) для функций F_1 и ψ в этом случае имеют вид

$$F_1|_{\Gamma_j} = -\frac{y^2 + z^2}{2} + C^{(j)}; \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial v} \right|_{\Gamma_j} = 0,$$

где $C^{(j)}$ — постоянные, одна из которых является произвольной, а остальные должны быть определены из условия однозначности функции ψ .

В дальнейшем ограничимся областью S , обладающей по крайней мере одной осью симметрии, за которую мы примем Oy . Безразмерные гидродинамические коэффициенты (3.116) определяются в этом случае формулами (l — характерный размер):

$$\bar{J}_{11} = \bar{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{k}_n^2 \bar{E}_n^2}{\bar{N}_n^2} = -\frac{\bar{h}}{l^4} \oint_{\Gamma} \Psi_1 (y dy + z dz) = \bar{h} \bar{\Omega}_{xx};$$

$$\bar{J}_{22} = \left\{ (2\bar{x}_0 - \bar{h}) \bar{J}_y + \frac{\bar{S}}{3} [(\bar{x}_0 + \bar{h})^3 - \bar{x}_0^3] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \bar{C}_n^2}{\bar{N}_n^2} + \bar{h} \bar{z}^2 \bar{S} \right\};$$

$$\bar{J}_{33} = \left\{ (2\bar{x}_0 - \bar{h}) \bar{J}_z + \frac{\bar{S}}{3} [(\bar{x}_0 + \bar{h})^3 - \bar{x}_0^3] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \bar{D}_n^2}{\bar{N}_n^2} + \bar{h} \bar{y}^2 \bar{S} \right\}. \quad (6.13)$$

$$\bar{\omega}_n^2 = \bar{k}_n \operatorname{th}(\bar{k}_n \bar{h}); \quad \bar{\mu}_n = \frac{\bar{N}_n^2}{\bar{\omega}_n^2};$$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{on1} &= \bar{E}_n; \quad \bar{\lambda}_{n2} = \bar{D}_n; \quad \bar{\lambda}_{n3} = \bar{C}_n; \\ \bar{\lambda}_{on2} &= -\bar{\lambda}_{n3} \bar{c}_n^*; \quad \bar{\lambda}_{on3} = \bar{\lambda}_{n2} \bar{c}_n^*,\end{aligned}\tag{6.14}$$

где

$$\begin{aligned}H_n &= \frac{1}{l} [K_n(x_0 + h) - 2K_n(x_0)] = \frac{5 \operatorname{ch}(\bar{k}_n \bar{h}) - 4}{\bar{k}_n \operatorname{sh}(\bar{k}_n \bar{h})}; \\ \bar{c}_n^* &= \bar{x}_0 + \bar{h} - \frac{1}{l} K_n(x_0 + h) = \bar{x}_0 + \bar{h} + \frac{2 - \operatorname{ch}(\bar{k}_n \bar{h})}{\bar{k}_n \operatorname{sh}(\bar{k}_n \bar{h})}; \\ \bar{x}_0 &= \frac{x_0}{l}; \quad \bar{h} = \frac{h}{l}; \quad \bar{k}_n = k_n l; \\ \bar{C}_n &= \frac{C_n}{l^3}; \quad \bar{D}_n = \frac{D_n}{l^3}; \quad \bar{E}_n = \frac{E_n}{l^4}; \quad \bar{N}_n^2 = \frac{N_n^2}{l^2}; \\ \bar{S} &= \frac{S}{l^2}; \quad \bar{J}_y = \frac{J_y}{l^4}; \quad \bar{J}_z = \frac{J_z}{l^4}; \quad \bar{\Omega}_{xx} = \frac{\Omega_{xx}}{l^4}.\end{aligned}\tag{6.15}$$

Рассмотрим в качестве примера некоторые простейшие области S , представляющие интерес для практики.

Прямоугольник

Поместим начало координат в центр прямоугольника (рис. 6.2), размеры которого $2a \times 2b$, и примем за характерный размер $l = \sqrt{ab}$. Параметром задачи является $\bar{b} = \frac{b}{a}$.

Метод разделения переменных приводит к следующим двум уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y}{dy^2} + k_p^2 Y &= 0; \\ \frac{d^2Z}{dz^2} + k_s^2 Z &= 0,\end{aligned}\tag{6.16}$$

где k_p и k_s — некоторые постоянные, причем

$$k_n^2 = k_p^2 + k_s^2.\tag{6.17}$$

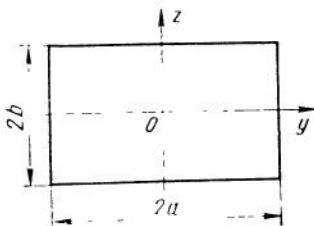


Рис. 6.2. К решению краевых задач для бака с прямоугольным контуrom

Границные условия имеют вид

$$\frac{dY}{dy} \Big|_{y=\pm a} = 0; \quad \frac{dZ}{dz} \Big|_{z=\pm b} = 0. \quad (6.18)$$

Система функций ψ_n распадается на следующие три ортогональные на области Σ подсистемы (см. гл. 3):

$$\begin{aligned} \psi_{ns} &= \cos k_{ns}(z+b); \quad \psi_{np} = \cos k_{np}(y+a); \\ \psi_{nq} &= \psi_{\nu\mu q} = \cos k_{\nu p}(y+a) \cos k_{\mu s}(z+b), \\ (n, \nu, \mu) &= 1, 3, 5, \dots, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где

$$\begin{aligned} k_{ns} &= \frac{\zeta_n}{2b}; \quad k_{np} = \frac{\zeta_n}{2a}; \quad k_{nq} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta_\nu^2}{a^2} + \frac{\zeta_\mu^2}{b^2}}; \\ \zeta_m &= \pi m \quad (m=n, \nu, \mu). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Коэффициенты C_n, D_n, E_n и нормы N_{nr}^2 систем функций (6.19) ($r=s, p, q$) определяются формулами

$$\begin{aligned} C_n &= \int_S z \cos k_{ns}(z+b) dS = 2a \int_{-b}^b z \cos k_{ns}(z+b) dz = -\frac{16b^2a}{\zeta_n^2}; \\ D_n &= \int_S y \cos k_{np}(y+a) dS = 2b \int_{-a}^a y \cos k_{np}(y+a) dy = -\frac{16a^2b}{\zeta_n^2}; \\ E_n &= \frac{1}{k_{nq}^2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \psi_{nq}}{\partial s} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) ds = \\ &= \frac{1}{k_{nq}^2} \left[\int_{-b}^b (a^2 + z^2) k_{\mu s} \sin k_{\mu s}(z+b) dz - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-a}^a (b^2 + y^2) k_{\nu p} \sin k_{\nu p}(y+a) dy \right] = \\ &= \frac{32a^2b^2(a^2\zeta_\mu^2 - b^2\zeta_\nu^2)}{(a^2\zeta_\mu^2 + b^2\zeta_\nu^2)\zeta_\mu^2\zeta_\nu^2} \quad (\mu, \nu = 1, 3, 5 \dots); \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$N_{ns}^2 = N_{nn}^2 = \int_S \cos^2 k_{np}(y+a) dS = 2b \int_{-a}^a \cos^2 k_{np}(y+a) dy = 2ab;$$

$$N_{nq}^2 = \int_{\Sigma} \cos^2 k_{vp}(y+a) \cos^2 k_{vs}(z+b) dS = \\ = \int_{-a}^a \cos^2 k_{vp}(y+a) dy \int_{-b}^b \cos^2 k_{vs}(z+b) dz = ab.$$

Безразмерные коэффициенты (6.15), соответствующие основному тону колебаний жидкости ($\mu=0, n=1$), имеют вид

$$C_1 = -\frac{16V\bar{b}}{\pi^2}; \quad D_1 = -\frac{16}{\pi^2 V\bar{b}}; \quad E_1 = \frac{32(1-\bar{b}^2)}{\pi^4(1+\bar{b}^2)}; \\ N_{1s}^2 = N_{1p}^2 = 2; \quad N_{1q}^2 = 1; \quad (6.22) \\ \bar{k}_{1s} = \frac{\pi}{2\sqrt{\bar{b}}}; \quad \bar{k}_{1p} = \frac{\pi\sqrt{\bar{b}}}{2}; \quad \bar{k}_{1q} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\bar{b} + \frac{1}{\bar{b}}}.$$

Для решения неоднородной задачи введем, следуя Н. Е. Жуковскому, гармоническую функцию Ψ^* , которая связана с Ψ соотношением

$$\Psi = \Psi^* - yz$$

и поэтому должна удовлетворять граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial y} \right|_{y=\pm a} = 0; \quad \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \right|_{z=-b} = 2y. \quad (6.23)$$

Используя снова метод разделения переменных, получим

$$\Psi = -yz - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n z}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}} \cos \frac{\pi n (y+a)}{2a}. \quad (6.24)$$

Безразмерный присоединенный момент инерции относительно оси Ox слоя жидкости единичной глубины выражается формулой

$$\overline{J}_{11} = \overline{I} = \frac{1}{\bar{b}} \left[\frac{\bar{b}^2 - 3}{12} + \frac{64}{\bar{b}} \sum_{v=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{th} \left(\zeta_v \frac{\bar{b}}{2} \right)}{\zeta_v} \right] \\ v = 1, 3, 5, \dots \quad (6.25)$$

Решение этой задачи получено Н. Е. Жуковским [17].

Задача о волновых движениях жидкости в подвижной полости в форме прямоугольного параллелепипеда (случай гармонических колебаний) впервые была рассмотрена Г. Е. Павленко [42].

В качестве второго примера рассмотрим область S в виде кругового кольца с радиусами внешней и внутренней окружностей r_0 и r_1 (рис. 6.3). В частном случае $r_1=0$ область S переходит в круг радиуса r_0 , которому соответствует наименее важная для приложений полость в виде прямого кругового цилиндра. Примем r_0 за характерный размер. Параметром задачи является $\delta=r_1/r_0$.

Вводя полярные координаты

$$y=r \cos \theta, z=r \sin \theta$$

и ограничиваясь решениями вида

$$\psi_s = Z(r) \sin \theta, \quad \psi_p = Z(r) \cos \theta, \quad (6.26)$$

соответствующими движению в плоскостях Oxz и Oxy , придем к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \right) Z &= 0; \\ \frac{dZ}{dr} \Big|_{r=r_0} &= \frac{dZ}{dr} \Big|_{r=r_0\delta} = 0; \quad Z \Big|_{r=r_0} = 1. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Последнее условие — условие нормировки функций $Z(r)$.

Собственные функции и собственные числа краевой задачи (6.27) имеют вид

$$\begin{aligned} Z_1(\xi_n \bar{r}) &= \frac{J_1(\xi_n \bar{r}) N'_1(\xi_n) - N_1(\xi_n \bar{r}) J'_1(\xi_n)}{J_1(\xi_n) N'_1(\xi_n) - N_1(\xi_n) J'_1(\xi_n)}; \\ k_n &= \frac{\xi_n}{r_0}; \quad \bar{r} = \frac{r}{r_0}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где ξ_n ($n=1, 2, \dots$) — корни трансцендентного уравнения

$$J'_1(\delta \xi) N'_1(\xi) - N'_1(\delta \xi) J'_1(\xi) = 0; \quad (6.29)$$

$J_1(z)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка;
 $N_1(z)$ — функция Неймана первого порядка.

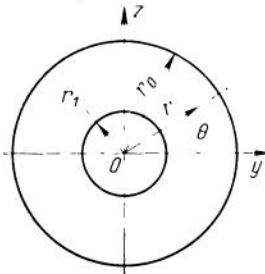


Рис. 6.3. К решению краевых задач для бака с двусвязным контуром, образованным концентрическими окружностями

Нормы систем функций ψ_{ns} и ψ_{np} и коэффициенты C_n и D_n выражаются формулами [7]

$$N_{ns}^2 = N_{np}^2 = N_n^2 = \frac{\pi r_0^2}{2\xi_n^2} [\xi_n^2 - 1 - (\delta^2 \xi_n^2 - 1) Z_1^2(\xi_n \delta)]; \quad (6.30)$$

$$C_n = D_n = \frac{\pi r_0^3}{\xi_n^2} [1 - \delta Z_1(\xi_n \delta)].$$

Безразмерные коэффициенты уравнений возмущенного движения соответствующей цилиндрической полости с жидкостью бесконечной глубины, отнесенные к радиусу r_0 , выражаются формулами

$$\bar{\omega}_n^2 = \xi_n; \quad \bar{\lambda}_n = \frac{\pi}{\xi_n^2} [1 - \delta Z_1(\xi_n \delta)]; \quad (6.31)$$

$$\bar{\mu}_n = \frac{\pi}{2\xi_n^3} [\xi_n^2 - 1 - (\delta^2 \xi_n^2 - 1) Z_1^2(\xi_n \delta)].$$

При $\delta \rightarrow 0$ кольцевая область S вырождается в круговую и выражения (6.28), (6.30) переходят в следующие:

$$Z_1(\xi_n \bar{r}) = J_1(\xi_n \bar{r}); \quad (6.32)$$

$$N_n^2 = \frac{\pi r_0^2 (\xi_n^2 - 1)}{2\xi_n^2}; \quad C_n = D_n = \frac{\pi r_0^3}{\xi_n^2},$$

где ξ_n — корни уравнения;

$$J_1'(\xi) = 0. \quad (6.33)$$

Первые шесть корней уравнения (6.33) имеют следующие значения [1.7].

Таблица 6.1

n	1	2	3	4	5	6
ξ_n	1,8412	5,3315	8,5363	11,7060	14,8633	18,0155

Задачи о движении жидкости в подвижных полостях в форме соосных цилиндров и кругового цилиндра были впервые рассмотрены Г. С. Наримановым [40] и Д. Е. Охочимским [41].

Имея в виду особую роль случая $\delta = 0$, выпишем выражения безразмерных гидродинамических коэффициентов для соответст-

вующей полости (характерная точка — центр нижнего днища $x_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \pi \left[\frac{\bar{h}^3}{3} - \frac{\bar{h}}{4} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \operatorname{ch}(\xi_n \bar{h}) - 4}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1) \operatorname{sh}(\xi_n \bar{h})} \right]; \\ \bar{\omega}_n^2 &= \xi_n \operatorname{th}(\xi_n \bar{h}); \quad \bar{\lambda}_n = \frac{\pi}{\xi_n^2}; \\ \bar{\lambda}_{on} &= -\frac{\pi}{\xi_n^2} \left[\bar{h} + \frac{2 - \operatorname{ch}(\xi_n \bar{h})}{\xi_n \operatorname{sh}(\xi_n \bar{h})} \right]; \quad \bar{\mu}_n = -\frac{\pi (\xi_n^2 - 1)}{2 \xi_n^3 \operatorname{th}(\xi_n \bar{h})}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Кривые, представленные на рис. (3.2, a), построены по формулам (6.34). Экспериментальные значения коэффициентов (6.34) при $n=1$ и $n=2$ практически совпадают с расчетными [35]. При $\bar{h} \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \pi \left[\frac{\bar{h}^3}{3} - \frac{\bar{h}}{4} + 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)} \right]; \\ \bar{\omega}_n^2 &= \xi_n; \quad \bar{\lambda}_n = \frac{\pi}{\xi_n^2}; \quad \bar{\lambda}_{on} = -\frac{\pi}{\xi_n^2} \left(\bar{h} - \frac{1}{\xi_n} \right); \\ \bar{\mu}_n &= \frac{\pi (\xi_n^2 - 1)}{2 \xi_n^3}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Выпишем для последнего случая еще и выражения коэффициентов демпфирования, приведенные для произвольных значений \bar{h} в работе [36] (см. также рис. 3.2, б):

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} &= \frac{\pi}{V^2} \left\{ 1 + 4\bar{h} + 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^3 (\xi_n^2 - 1)^2} - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)} + \right. \\ &\quad \left. + 40 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_n^2 - \xi_m^2} \left[\frac{1}{\xi_n (\xi_m^2 - 1)} - \frac{1}{\xi_m (\xi_n^2 - 1)} \right] \right\}; \\ \tilde{\beta}^0 &= \frac{\pi}{2 V^2} (1 + 4\bar{h}); \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\tilde{\delta}_n = \pi \tilde{\beta}_n = \frac{\pi}{V^2} \frac{\xi_n^2 + 1}{\xi_n^2 - 1};$$

$$\tilde{\delta}_{on} = \frac{\pi \tilde{\beta}_{on}}{\tilde{\mu}_n} = -\frac{\pi \sqrt{2} \xi_n^2}{\xi_n^2 - 1} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_m (\xi_m + \xi_n)} \right].$$

Предельные значения $\tilde{\delta}_n$ и $\tilde{\delta}_{on}$, вычисленные по формулам (6.36), представлены в табл. 6.2 ($\hbar \rightarrow \infty$).

Таблица 6.2

n	1	2	3
$\tilde{\delta}_n$	4,084	1,8271	1,5560
$\tilde{\delta}_{on}$	-8,9905	-4,4239	-3,6541

Значения $\tilde{\delta}_1$, полученные экспериментально, совпадают с вычисленными по формуле (6.36) при $n=1$ и по соответствующей формуле при $\hbar \neq \infty$, если в эти формулы ввести эмпирический множитель 1,4. Значения $\tilde{\delta}_{o1}$ совпадают с расчетными в пределах точности эксперимента, по крайней мере, в наиболее интересном диапазоне чисел Рейнольдса (см. работу [35] и рис. 3.3).

6.2. Методы Бубнова — Галеркина и Ритца — Трефта

Проиллюстрируем применение метода Бубнова — Галеркина, использованного выше в одномерных краевых задачах (гл. 4), для решения двухмерной краевой задачи (6.9), основной для исследования волновых движений жидкости в цилиндрических полостях. Рассмотрим сразу два варианта области S — односвязную, ограниченную контуром Γ , и двусвязную, ограниченную внутренним контуром Γ_1 и внешним Γ_2 . Опустим для упрощения записи индекс n и запишем краевую задачу (6.9) в виде

$$\begin{aligned} \Delta\psi + k^2\psi &= 0; \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \Big|_{\Gamma} &= 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \Big|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j=1, 2), \end{aligned} \tag{6.37}$$

где Δ в данном случае двухмерный оператор Лапласа. Предположим, что выбрана некоторая полная система линейно независимых координатных функций ψ_m ($m=1, 2, \dots$), удовлетворяющих граничным условиям и ортогональных константе на области S .

Умножим левую часть уравнения (6.37) на функцию φ , являющуюся элементом этой системы функций, и проинтегрируем по области S . В результате получим

$$\int_S (\Delta\psi + k^2\psi)\varphi dS = 0.$$

В силу первой формулы Грина

$$\int_S \varphi \Delta \psi dS = \begin{cases} \oint_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds - \int_S \nabla \psi \nabla \varphi dS & \text{(односвязная область } S) \\ \sum_{j=1}^2 \oint_{\Gamma_j} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds - \int_S \nabla \psi \nabla \varphi dS & \text{(двусвязная область } S). \end{cases}$$

Учитывая граничные условия (6.37), получим основное интегральное соотношение метода Бубнова — Галеркина:

$$\int_S \nabla \psi \nabla \varphi dS - k^2 \int_S \varphi \psi dS = 0. \quad (6.38)$$

Здесь ∇ — двухмерный оператор Гамильтона.

Заметим, что совершенно аналогичный вид это соотношение имеет для мембраны, когда граничные условия таковы:

$$\psi|_{\Gamma_j} = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (6.37a)$$

Положим теперь

$$\psi = \sum_{m=1}^l a_m \gamma_m; \quad \varphi = \gamma_n, \quad (6.39)$$

где a_m — неизвестные пока коэффициенты; n — произвольное значение индекса m ; l — некоторое целое число.

Обозначив $k^2 = \lambda$, получим из (6.38) следующую однородную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^l (\alpha_{mk} - \lambda \beta_{mk}) a_k = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, l), \quad (6.40)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{mk} &= a_{km} = \int_S \nabla \gamma_m \nabla \gamma_k dS; \\ \beta_{mk} &= \beta_{km} = \int_S \gamma_m \gamma_k dS. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Введя симметричные квадратные матрицы **A** и **B** l -го ранга с элементами α_{mk} и β_{mk} и l -мерный вектор **a** с компонентами a_m , можно записать систему уравнений (6.40) в более компактной форме:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} - \lambda \mathbf{B}\mathbf{a} = 0. \quad (6.42)$$

Решение матричного уравнения (6.42) является классической задачей линейной алгебры. Существует ряд алгоритмов ее решения, реализованных на ЭВМ. В результате получается сово-

купность l собственных чисел λ , которые вследствие симметрии матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} всегда вещественны, и соответствующих им собственных векторов \mathbf{a} , определяемых с точностью до постоянного множителя, зависящего от условия нормировки. При практическом использовании разложения (6.39) можно ограничиться значением l , при котором переход к $l+1$ не влияет в пределах принятой точности на значения собственных чисел λ и коэффициентов Фурье C_n , D_n , E_n , соответствующих тем значениям индекса n , которые представляют интерес для практики (обычно $n=1, 2$). Заметим, что для вычисления коэффициентов C_n , D_n , E_n необходимо пользоваться формулами (6.8), а не (6.11), так как каждая из функций γ_m не удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.37).

Быстрота сходимости последовательности (6.39) зависит в сильной степени от удачного выбора координатных функций γ_m , которые должны быть возможно ближе к искомым собственным функциям краевой задачи и в то же время не быть чрезмерно сложными. Эта задача сильно упрощается, если предварительно осуществить конформное отображение области S на более простую область (см. разд. 6.4).

Рассмотрим теперь вариационный метод решения основных краевых задач динамики жидкости в подвижных полостях (3.21) и (3.25), который из-за своей гибкости и универсальности получил наибольшее распространение в практике проектирования РН и КА.

Твердое тело с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, представляет собой консервативную систему, к которой применим принцип Гамильтона [25]. Рассмотрим для иллюстрации движение тела с двумя плоскостями симметрии в плоскости Oxz , которому соответствуют краевые задачи (3.113) и (3.114). Подставляя в выражение действия по Гамильтону кинетическую и потенциальную энергию системы тело — жидкость и отделяя функции времени от функций пространственных координат, можно получить следующие два функционала:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_Q (\nabla \varphi)^2 dQ - \frac{\kappa}{2} \int_S \varphi^2 dS. \quad (6.43)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_Q (\nabla \Psi)^2 dQ - \int_S \Psi (z v_x - x v_z) dS. \quad (6.44)$$

Первые вариации этих функционалов имеют вид

$$\begin{aligned} \delta V_1 &= \int_Q \nabla \varphi \nabla (\delta \varphi) dQ - \kappa \int_S \delta \varphi dS = \int_Q \nabla (\delta \varphi \nabla \varphi) dQ - \int_Q \Delta \varphi \delta \varphi dQ - \\ &- \kappa \int_S \varphi \delta \varphi dS = - \int_Q \Delta \varphi \delta \varphi dQ + \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \delta \varphi dS + \int_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \kappa \varphi \right) \delta \varphi dS \right); \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\delta V_2 = \int_Q \nabla \Psi \nabla (\delta \Psi) dQ - \int_S (z v_x - x v_z) \delta \Psi dS = - \int_Q \Delta \Psi \delta \Psi dQ + \\ + \int_S \left[\frac{\partial \Psi}{\partial v} - (z v_x - x v_z) \right] \delta \Psi dS + \int_{\Sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial v} \delta \Psi dS.$$

Здесь использованы формула

$$\nabla(\psi \nabla \varphi) = \nabla \psi \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi = \nabla \psi \nabla \varphi + \psi \Delta \varphi$$

и формула Гаусса — Остроградского

$$\int_Q \nabla(\psi \nabla \varphi) dQ = \oint_{S+\Sigma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial v} dS,$$

где $\psi = \delta \varphi$, Δ и ∇ — трехмерные операторы Лапласа и Гамильтона. В соответствии с принципом Гамильтона вариации δV_1 и δV_2 должны равняться нулю, каковы бы ни были $\delta \varphi$ и $\delta \Psi$ в области Q и на поверхностях S , Σ . Это возможно только при равенстве нулю коэффициентов при этих вариациях под знаком интегралов в (6.45), что приводит к краевым задачам (3.113), (3.114). С другой стороны, если функции φ и Ψ являются решениями краевых задач (3.113) и (3.114) соответственно, то вариации δV_1 и δV_2 тождественно равны нулю. Это доказывает эквивалентность задач о стационарном значении функционалов (6.43) и (6.44) краевым задачам (3.113) и (3.114), что позволяет воспользоваться прямыми методами вариационного исчисления. К числу таких методов, получивших большое распространение в расчетной практике, относится метод Ритца, формализм которого излагается ниже [37].

Будем искать функции φ и Ψ в виде последовательности линейных комбинаций координатных функций γ_m и ζ_m , предполагая, что они обладают полнотой в области Q [37], обеспечивающей сходимость этих последовательностей,

$$\varphi \approx \varphi^{(k)} = \sum_{m=1}^k a_m \gamma_m; \quad \Psi = \Psi^{(k)} = \sum_{m=1}^k b_m \zeta_m. \quad (6.46)$$

Подставим суммы (6.46) в выражения для функционалов V_1 и V_2

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^k a_{mp} a_m a_p - \frac{x}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^k \beta_{mp} a_m a_p. \quad (6.47)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^k \delta_{mp} b_m b_p - \sum_{p=1}^k d_p b_p. \quad (6.48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{mp} &= a_{pm} = \int_Q \nabla \gamma_m \nabla \gamma_p dQ; \quad \beta_{mp} = \beta_{pm} = \int_{\Sigma} \gamma_m \gamma_p dS; \\ \delta_{mp} &= \delta_{pm} = \int_Q \nabla \zeta_m \nabla \zeta_p dQ; \quad d_p = \int_S \zeta_p (z \nu_x - x \nu_z) dS. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Выражения (6.47) и (6.48) представляют собой квадратичные формы конечного числа переменных a_m и b_m . Приравняв нулю частные производные по неопределенным коэффициентам a_p и b_n , получим линейные системы алгебраических уравнений, однородную для a_m и неоднородную для b_m :

$$\sum_{p=1}^k (\alpha_{mp} - \beta_{mp}) a_p = 0 \quad (m=1, 2, \dots, k). \quad (6.50)$$

$$\sum_{p=1}^k \delta_{mp} b_p = d_m \quad (m=1, 2, \dots, k) \quad (6.51)$$

или в более компактной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{B}\mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (6.52)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{b} = \mathbf{d}, \quad (6.53)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} — симметричные квадратные матрицы k -го ранга с элементами α_{mp} , β_{mp} , δ_{mp} ; \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{d} — k -мерные векторы с компонентами a_m , b_m , d_m соответственно.

При увеличении числа приближений k величина x_n ($n=1, 2, \dots, k$), удовлетворяющая (6.52), приближается к квадрату частоты n -го тона колебаний жидкости в баке (при единичном модуле ускорения j).

Для нахождения множителя, с точностью до которого определяется собственный вектор $a^{(n)}$, можно воспользоваться условием нормировки (3.113):

$$\sum_{m=1}^k a_m^{(n)} \frac{\partial \gamma_m}{\partial x} = 1 \text{ при } x=x^\circ, y=y^\circ, z=z^\circ, \quad (6.54)$$

где x° — аппликата невозмущенной свободной поверхности Σ ; y° и z° — координаты произвольно выбранной точки контура области Σ ; в рассматриваемом случае удобно принять $y^\circ=0$. Вариационный метод Ритца дает решение краевых задач (3.113) и (3.114), приближенное в том смысле, что оно удовлетворяет им лишь «в среднем». Поэтому при вычислении присоединенных масс целесообразно пользоваться тем из вариантов выражений (3.29), (3.44), (3.63), который позволяет наиболее полно учесть это обстоятельство (см. 6.55).

В силу того, что граничные условия (3.113) и (3.114) являются естественными, никаких дополнительных ограничений на выбор системы координатных функций, кроме упомянутых выше, не накладывается. Однако удовлетворение функциями γ_m и ζ_m хотя бы части граничных условий или дифференциальных уравнений (3.113) и (3.114) обычно улучшает сходимость последовательностей (6.46), что является особенно важным при массовых расчетах на ЭВМ. Если, например, функции γ_m удовлетворяют граничным условиям, что вполне реально для цилиндрических баков, то алгоритмы методов Ритца и Бубнова — Галеркина совпадают. В случае нецилиндрических полостей удовлетворение граничным условиям становится затруднительным. Опыт показывает, что наилучшие результаты дает выбор γ_m и ζ_m в классе гармонических функций, так как это позволяет свести объемные интегралы в выражениях a_{mp} к поверхностным, что дает при вычислении последних резкую экономию машинного времени. Соответствующий вариант метода Ритца известен в литературе под названием метода Трефтца [37]. Дальнейшие упрощения достигаются при $\zeta_m = \gamma_m$. Общий алгоритм определения основных гидродинамических коэффициентов вариационным методом Трефтца выглядит следующим образом.

1. Расчет вспомогательных коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_{mp} &= a_{pm} = \delta_{mp} = \delta_{pm} = \int_Q \nabla \gamma_m \nabla \gamma_p dQ = \\ &= \oint_{S+\Sigma} \gamma_m \frac{\partial \gamma_p}{\partial v} dS = \oint_{S+\Sigma} \gamma_p \frac{\partial \gamma_m}{\partial v} dS; \\ \beta_{mp} &= \beta_{pm} = \int_{\Sigma} \gamma_m \gamma_p dS; \quad d_p = \int_S \gamma_p (z \gamma_x - x \gamma_z) dS; \\ \gamma_m &= \int_Q \frac{\partial \gamma_m}{\partial z} d\Omega = \int_S \gamma_m \gamma_z dS = \oint_{S+\Sigma} z \frac{\partial \gamma_m}{\partial v} dS. \end{aligned} \quad (6.55)$$

2. Нахождение собственных значений κ_n и компонент векторов $\mathbf{a}^{(n)}$ и \mathbf{b} из уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{a} - \kappa \mathbf{B}\mathbf{a} = 0; \quad \mathbf{D}\mathbf{b} = \mathbf{d}; \quad (6.56)$$

$$\sum_{m=1}^k a_m \frac{\partial \gamma_m}{\partial x} \Big|_{\Sigma} = 1 \quad \text{при } y=0, z=z^*.$$

3. Расчет присоединенных масс и момента инерции:

$$\lambda_n = \sum_{m=1}^k a_m \gamma_m; \quad \lambda_{on} = \sum_{m=1}^k a_m d_m = \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^k a_{mp} a_m b_p;$$

$$\begin{aligned}\mu_n &= (\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \kappa_n (\mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = \kappa_n \sum_{m=1}^k \sum_{p=1}^k \beta_{mp} a_m a_p; \\ J &= (\mathbf{D} \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}) = \sum_{m=1}^k b_m d_m; \\ m_n &= \frac{\lambda_n^2}{\mu_n}; \quad c_n = -\frac{\lambda_{on}}{\lambda_n}.\end{aligned}\tag{6.57}$$

Аналогичным образом решается вариационным методом Трефтца задача (3.115).

6.3. Оценка значений частот и присоединенных масс жидкости

Используя вариационные методы, равенства Парсеваля и теорему Штейнера, можно получить достаточно тонкие оценки для основных параметров ω_n^2, m_n, c_n, J ($n=1, 2$). Оценки величины ω_i^2 имеются в работах [38, 60]. Оценки, охватывающие всю совокупность параметров, были получены в работах [11, 55] и получили дальнейшее развитие в работе [35]*. В дальнейшем мы в основном следуем работам [55, 60]. Для определенности рассмотрим движение в плоскости $O^*x^*z^*$ и вращение вокруг оси Ox .

Имеются две возможности, которые мы рассмотрим последовательно.

1. Известны решения Ψ и Ψ_1 основных неоднородных краевых задач:

$$\begin{aligned}\Delta \Psi &= 0; \quad \Delta \Psi_1 = 0 \text{ в области } Q; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} \Big|_S &= z \nu_x - x \nu_z; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \Big|_S = y \nu_z - z \nu_y; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} \Big|_{\Sigma} &= 0; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \Big|_{\Sigma} = 0\end{aligned}\tag{6.58}$$

и решение Φ следующей вспомогательной неоднородной краевой задачи:

$$\begin{aligned}\Delta \Phi &= 0 \text{ в области } Q; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big|_S &= 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Big|_{\Sigma} = z.\end{aligned}\tag{6.59}$$

Легко видеть, что последнее соответствует движению жидкости в неподвижной полости, при котором задана определенная форма свободной поверхности, а именно — плоскость.

* Простейшие из оценок такого типа были получены Л. И. Алексеевым и Г. А. Монсеевым.

Задача заключается в установлении неравенств, которые позволяют оценить безразмерные параметры \bar{m}_n и \bar{c}_n по известным значениям $\bar{\omega}_n^2$ ($n=1, 2$) или обеспечить контроль значений этих величин, полученных каким-либо независимым методом (теоретическим или экспериментальным).

Используя разложение функции z в обобщенный ряд Фурье по функциям $\psi_n(y, z)$

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{N_n^2} \psi_n(y, z) \quad (6.60)$$

и аналогичное разложение для функции $\Psi(x, y, z)$ на области Σ :

$$\Psi|_{\Sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{on}}{N_n^2} \psi_n(y, z), \quad (6.61)$$

где

$$C_n = \int_{\Sigma} z \psi_n dS; \quad C_{on} = \int_{\Sigma} \Psi \psi_n dS; \quad N_n^2 = \int_{\Sigma} \psi_n^2 dS, \quad (6.62)$$

а также выражения (3.29), (3.44), (3.63) и (3.116), можно получить следующие формулы (l — характерный размер):

$$\frac{1}{l^4} \int_{\Sigma} z^2 dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{m}_n}{\bar{\omega}_n^2}; \quad (6.63)$$

$$-\frac{1}{l^5} \int_{\Sigma} \Psi z dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{m}_n \bar{c}_n}{\bar{\omega}_n^2}. \quad (6.64)$$

Учитывая последнюю формулу и (3.105), найдем

$$\bar{J}' - \bar{J} - \frac{2}{l^5} \int_{\Sigma} \Psi z dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{m}_n}{\bar{\omega}_n^4}. \quad (6.65)$$

Принимая во внимание формулы

$$\bar{J} = \frac{1}{l^5} \int_S \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} dS = \frac{1}{l^5} \int_S \Psi (z \nu_x - x \nu_z) dS;$$

$$\bar{J}' = \frac{1}{l^5} \oint_{S+\Sigma} \Psi' \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu} dS = \frac{1}{l^5} \oint_{S+\Sigma} \Psi' (z \nu_x - x \nu_z) dS$$

и граничные условия (6.58), а также учитывая ортогональность гармонических функций Ψ и Ψ' константе на области Σ и используя формулу Грина, получим

$$\begin{aligned}
I^5(\bar{J}' - \bar{J}) &= \int_S \left(\Psi' \frac{\partial \Psi}{\partial v} - \Psi \frac{\partial \Psi'}{\partial v} \right) dS + \int_S \Psi' \frac{\partial \Psi'}{\partial v} dS = \\
&= \oint_{S+\Sigma} \left(\Psi' \frac{\partial \Psi}{\partial v} - \Psi \frac{\partial \Psi'}{\partial v} \right) dS + \int_{\Sigma} (\Psi + \Psi') \frac{\partial \Psi'}{\partial v} dS = \quad (6.66) \\
&= \int_{\Sigma} (\Psi + \Psi') z dS.
\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (6.65) и используя равенство

$$\Phi = \Psi' - \Psi,$$

вытекающее из определения функции Φ , найдем

$$\bar{J}' - \bar{J} - \frac{2}{l^5} \int_{\Sigma} \Psi z dS = \frac{1}{l^5} \int_{\Sigma} \Phi z dS. \quad (6.67)$$

Теперь можно с помощью (6.61), (6.65) и (6.66) получить две важные формулы, аналогичные (6.63) и (6.64),

$$\frac{1}{l^6} \int_{\Sigma} \Psi^2 dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{m}_n \bar{c}_n^2}{\omega_n^2}; \quad (6.68)$$

$$\frac{1}{l^5} \int_{\Sigma} \Phi z dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{m}_n}{\omega_n^4}. \quad (6.69)$$

Для случая вращения вокруг продольной оси можно получить формулу, аналогичную (6.63) и (6.68):

$$\frac{1}{l^6} \int_{\Sigma} \Psi_1^2 dS = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{m}_{nq}}{\omega_{nq}^2}, \quad (6.70)$$

где

$$\bar{m}_{nq} = \frac{\bar{\lambda}_{onl}^2}{\mu_{nq}} \quad (\text{см. (3.63) и (3.116)}).$$

Равенства (6.63), (6.68) и (6.70) — суть равенства Парсеваля, для произвольных полостей, совпадающие с полученными выше (6.12) для цилиндрических полостей. Можно показать, что при надлежащем выборе полюса O' можно все параметры \bar{c}_n ($n = 1, 2, \dots$), а следовательно, все члены ряда (6.64) сделать положительными. Тогда все ряды (6.63), (6.64), (6.68) и (6.69) оказываются рядами с положительными членами, откуда вытекают следующие две группы оценок [60]:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{m}_1}{\omega_1^2} + \frac{\bar{m}_2}{\omega_2^2} &\leq d_{11}; \quad \frac{\bar{m}_1}{\omega_1^4} + \frac{\bar{m}_2}{\omega_2^4} \leq d_{12}; \\ \frac{\bar{m}_1}{\omega_1^2} \bar{c}_1 + \frac{\bar{m}_2}{\omega_2^2} \bar{c}_2 &\leq d_{21}; \quad \frac{\bar{m}_1}{\omega_1^2} \bar{c}_1^2 + \frac{\bar{m}_2}{\omega_2^2} \bar{c}_2^2 \leq d_{22}, \end{aligned} \quad (6.71)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{l^4} \int_{\Sigma} z^2 dS; \quad d_{12} = \frac{1}{l^5} \int_{\Sigma} \Phi z dS; \\ d_{21} &= \frac{1}{l^5} \left| \int_{\Sigma} \Psi z dS \right|; \quad d_{22} = \frac{1}{l^6} \int_{\Sigma} \Psi^2 dS. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Заменив знак \leq на $=$, можно получить из (6.71) и (6.72) приближенные формулы для \bar{m}_1 , \bar{m}_2 , \bar{c}_1 и \bar{c}_2 . Знак строгого равенства в выражениях (6.71) и (6.72) соответствует случаю, когда $\bar{m}_n = 0$ при $n \geq 2$ (пример — полость в форме обратного кругового конуса с углом полурасщепления 45°). Полагая $n=1$, получим из (6.71) два варианта оценок, соответствующих основному тону колебаний жидкости,

$$\bar{m}_1 \leq \bar{\omega}_1^2 d_{11}; \quad \bar{m}_1 \leq \bar{\omega}_1^4 d_{12}. \quad (6.73)$$

$$\bar{c}_1 \leq \frac{\bar{\omega}_1^2 d_{21}}{\bar{m}_1}; \quad \bar{c}_1^2 \leq \frac{\bar{\omega}_1^2 d_{22}}{\bar{m}_1}. \quad (6.74)$$

Аналогичную оценку можно получить из (6.70) для присоединенной массы \bar{m}_{1q} :

$$\bar{m}_{1q} \leq \bar{\omega}_{1q}^2 \bar{\Omega}_x; \quad \bar{\Omega}_x = \frac{1}{l^6} \int_{\Sigma} \Psi_1^2 dS. \quad (6.75)$$

Наиболее удобной является первая из оценок (6.73), которая оказывается обычно настолько тонкой (см. [11, 35, 55]), что можно положить

$$\bar{m}_1 \approx \bar{\omega}_1^2 \bar{\Omega}; \quad \bar{\Omega} = d_{11} = \frac{J_y}{l^4}. \quad (6.76)$$

Для полостей, рассматриваемых ниже, погрешность формулы (6.76) не превышает 1—3 %. Особенно эффективна формула (6.76) для цилиндрических баков, так как позволяет найти с помощью (6.13) — (6.15) все основные безразмерные параметры для всех относительных глубин \bar{h} по известному значению квадрата безразмерной частоты $\omega_1^2 = \bar{k}_1$, соответствующей бесконечно глубокой жидкости. Например, при движении в плоскости $O^*x^*z^*$

$$\bar{\omega}_1^2 = \bar{k}_1 \operatorname{th}(\bar{k}_1 \bar{h}); \quad \bar{m}_1 \approx \bar{k}_1 \bar{\Omega} \operatorname{th}(\bar{k}_1 \bar{h});$$

$$\bar{c}_1 = \bar{x}_0 + \bar{h} + \frac{2 - \operatorname{ch}(\bar{k}_1 \bar{h})}{\bar{k}_1 \operatorname{sh}(\bar{k}_1 \bar{h})}; \quad (6.77)$$

$$\bar{J} \approx \bar{J}^{(0)} + \left[2(\bar{x}_0 - \bar{h}) + \frac{5 \operatorname{ch}(\bar{k}_1 \bar{h}) - 4}{\bar{k}_1 \operatorname{sh}(\bar{k}_1 \bar{h})} \right] \bar{\Omega},$$

где $\bar{J}^{(0)}$ — безразмерный момент инерции затвердевшей жидкости.

2. Нет никакой предварительной информации о гидродинамических коэффициентах и функциях Ψ и φ_n . Требуется получить оценки для первой частоты собственных колебаний жидкости и выразить через нее оценки для всех остальных гидродинамических коэффициентов, так чтобы они не зависели от функции Ψ , как оценки (6.73).

Поскольку последовательность значений $\omega_1^{(k)}$, получаемых методом Ритца — Трефта (когда $k=1, 2, \dots$), сходится к первому собственному значению сверху, можно с помощью выражения (6.43) получить следующую оценку:

$$\bar{\omega}_1^2 \leqslant \frac{l \int_Q (\nabla \varphi)^2 dQ}{\int_{\Sigma} \varphi^2 dS}. \quad (6.78)$$

Положив $\varphi = z$, получим простейшую оценку

$$\bar{\omega}_1^2 \leqslant \frac{lQ}{J_y} = \frac{\bar{Q}}{\bar{\Omega}}, \quad (6.79)$$

где $\bar{Q} = \frac{Q}{l^3}$ — безразмерный объем жидкости. Для параболоида вращения формула (6.79) дает точное значение. Использование формулы Рэлея позволяет получить принципиально иную оценку, чем (6.78):

$$\bar{\omega}_1^2 \leqslant \frac{l \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 dS}{\int_Q (\nabla \varphi)^2 dQ}. \quad (6.80)$$

С помощью неравенств (6.78) и (6.80) можно получить и более совершенные оценки, чем (6.79), и простые асимптотические формулы для частот и присоединенных масс жидкости (см. работы [35, 60] и разд. 6.4—6.7).

Выберем в качестве φ функцию Φ , являющуюся решением краевой задачи (6.59). Подставив ее в правую часть (6.80) и преобразовав интеграл по объему Q в интеграл по поверхности

$S + \Sigma$, можно придать оценке (6.80) следующую форму:

$$\omega_1^2 \leq \frac{\bar{Q}I_5}{\int_S \Phi z dS}. \quad (6.81)$$

Если заменить в (6.81) знак \leq на \approx , то получается приближенная формула, обладающая очень высокой точностью (для кругового цилиндра, например, погрешность не превышает 0,5%).

Дадим теперь двусторонние оценки параметров \bar{c}_n , относящиеся к классу полостей, для которых $\varphi_n v_z$ — положительно-определенная функция x на поверхности S при $x_0 < x < x_0 + h$.

Воспользуемся формулой [40]:

$$\lambda'_{on} = \oint_{S+\Sigma} \varphi_n \left(z \frac{\partial x}{\partial v} - x \frac{\partial z}{\partial v} \right) dS = \oint_{S+\Sigma} \varphi_n \left[\frac{\partial(xz)}{\partial v} - 2xv_z \right] dS. \quad (6.82)$$

После интегрирования по частям получим из (6.82), применяя теорему о среднем и учитывая свойства функции $\varphi_n v_z$, оговоренные выше, а также формулу (3.44), следующее выражение:

$$\lambda'_{on} = (x_0 + h)\lambda_n - 2 \oint_{S+\Sigma} x \varphi_n v_z dS = (x_0 + h - 2x_n)\lambda_n, \quad (6.83)$$

где x_0 — координата полюса днища; x_n — координата, удовлетворяющая условию

$$x_0 \leq x_n \leq x_0 + h. \quad (6.84)$$

Используя выражение (6.83), неравенство (6.84) и формулу (3.105), которая при переходе к безразмерным величинам имеет вид

$$\bar{\lambda}_{on} = \bar{\lambda}'_{on} - \frac{\bar{\lambda}_n}{\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}}, \quad (6.85)$$

найдем двустороннюю оценку для безразмерных параметров \bar{c}_n :

$$\bar{x}_0 - \bar{h} + \frac{1}{\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}} \leq \bar{c}_n \leq \bar{x}_0 + \bar{h} + \frac{1}{\frac{\omega_n^2}{\omega_n^2}}. \quad (6.86)$$

В частности, при $n=1$ имеем

$$\bar{x}_0 - \bar{h} + \frac{1}{\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2}} \leq \bar{c}_1 \leq \bar{x}_0 + \bar{h} + \frac{1}{\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2}}. \quad (6.87)$$

Из (6.87) ясно, что всегда можно выбрать начало координат (а следовательно, x_0) так, чтобы все величины c_n ($n=1, 2, \dots$) были положительны, что в дальнейшем предполагается выполненным.

В пределе при $\bar{h} \rightarrow 0$ из (6.87) получим следующую асимптотическую формулу:

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \bar{c}_1 = \bar{x}_0 + \frac{1}{\bar{\omega}_1^2}. \quad (6.88)$$

Например, для сферы $1/\bar{\omega}_1^2 \rightarrow 1$ при $\bar{h} \rightarrow 0$, для цилиндра $1/\bar{\omega}_1^2 \rightarrow \infty$ при $\bar{h} \rightarrow 0$, так что (6.88) согласуется с результатами, полученными выше. Как показывает численный анализ, оценка (6.87) справедлива для более широкого класса полостей вращения, чем тот, для которого выполняются сформулированные выше достаточные условия, в частности для тороидальных полостей.

Переходим к оценке безразмерного присоединенного момента инерции.

Аналог теоремы Штейнера [26] доставляет следующую нижнюю оценку, справедливую для любой полости:

$$\bar{J} > \bar{m} \bar{x}_D^2, \quad (6.89)$$

где \bar{x}_D — безразмерная координата метацентра массы жидкости; $\bar{m} = m/\rho l^3$ — безразмерная масса.

Используя оценку

$$\bar{J}^{(o)} > \bar{J}' \geq \bar{m} \bar{x}_{D_0}^2, \quad (6.90)$$

полученную в работе [17] ($\bar{J}^{(o)}$ — безразмерный момент инерции затвердевшей жидкости; \bar{x}_{D_0} — безразмерная координата ее центра масс), а также формулы (6.87), (6.69), и оценки (6.71), (6.86), можно получить двусторонние оценки \bar{J} для того же класса полостей, что и (6.86), (6.87):

$$\bar{m} \bar{x}_{D_0}^2 + 2\bar{\Omega}(\bar{x}_0 - \bar{h}) + \frac{\bar{m}_1}{\bar{\omega}_1^4} \leq \bar{J} < \bar{J}^{(o)} + 2\bar{\Omega}(\bar{x}_0 + \bar{h}) + \frac{\bar{\Omega}}{\bar{\omega}_1^2}. \quad (6.91)$$

Как показывает численный анализ, полученные оценки можно использовать как для приближенного вычисления гидродинамических коэффициентов, так и для надежного независимого контроля результатов, получаемых другими методами, заменив знак \leq знаком $=$.

6.4. Применение конформного отображения и метода Бубнова-Галеркина для решения двухмерных краевых задач

Рассмотрим сначала решение неоднородной краевой задачи (6.1, a) для односвязной области S с гладким контуром Γ и двусвязной с контуром, образованным непересекающимися гладкими линиями Γ_1 и Γ_2 .

Вводя в рассмотрение функцию

$$W(u) = \Psi_1(y, z) + iF_i(y, z)$$

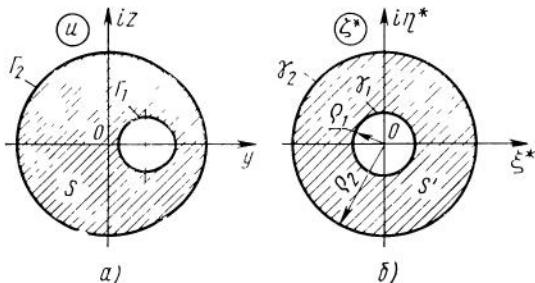


Рис. 6.4. К решению неоднородной краевой задачи в случае произвольной двусвязной области:
а — исходная область; б — ее конформное отображение на круговое кольцо

комплексного переменного

$$u = y + iz,$$

получим следующее граничное условие:

$$F_1|_{\Gamma_j} = -\frac{1}{2} u \bar{u} + C^{(j)}. \quad (6.92)$$

В случае двусвязной полости значения индекса $j=1, 2$ соответствуют внутреннему и внешнему контурам; в случае односвязной области индекс j можно опустить.

Введем в рассмотрение новую комплексную переменную

$$\zeta^* = \xi^* + i\eta^*.$$

Пусть функция $u(\zeta^*)$ отображает рассматриваемую область S плоскости u на кольцо, ограниченное окружностями γ_1 и γ_2 с радиусами r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$), если эта область двусвязная, и на область, внутреннюю по отношению к окружности γ радиуса $r=1$ в плоскости переменной ζ^* , если область S односвязная (рис. 6.4). Диапазон изменения координат ζ^* , η^* определяется неравенствами

$$0 \leq \xi^* \leq \xi_0^*; \quad 0 \leq \eta^* \leq \eta_0^* \quad (S \text{ — односвязная});$$

$$\xi_1^* \leq \xi^* \leq \xi_2^*; \quad 0 \leq \eta^* \leq \eta_0^* \quad (S \text{ — двусвязная}),$$

где $\xi^* = \xi_0^*$ соответствует контуру Γ ; $\xi^* = \xi_j^*$ — контурам Γ_j ($j=1, 2$); $\eta^* = \eta_0^*$ — полному обходу контура Γ или обоих контуров Γ_j .

Граничное условие (6.92) теперь приобретает форму

$$F_1|_{\rho=\rho_j} = -\frac{u(\zeta^*) \bar{u}(\zeta^*)}{2} \Big|_{\rho_j} + C^{(j)}. \quad (6.93)$$

Комплексный потенциал также является теперь функцией ζ^* :

$$W[u(\zeta^*)] = w(\zeta^*).$$

Функцию, осуществляющую рассматриваемое конформное ото-

бражение, можно в общем случае аппроксимировать мероморфной функцией

$$u(\zeta^*) = \frac{\sum_{n=1}^m A_n \zeta^{*n}}{\sum_{n=1}^m B_n \zeta^{*n}}, \quad (6.94)$$

где некоторые из коэффициентов A_n и B_n могут быть равны нулю. В случаях, представляющих наибольший интерес для практики, число m не настолько велико, чтобы это могло вызвать затруднение при численной реализации.

Для обеспечения преемственности методов решения неоднородной и однородной краевых задач воспользуемся методом рядов Фурье [39]. С этой целью представим $w(\zeta^*)$ в виде ряда Лорана:

$$w(\zeta^*) = a_0 + i b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_k - i b_k) \zeta^k + \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{\zeta^k} \right]. \quad (6.95)$$

В случае односвязной области ряд (6.95) переходит в ряд Тэйлора ($a_{-k} = b_{-k} = 0$).

Положив $\zeta^* = \rho e^{i\theta}$, получим представление функций $\Psi_1(\rho, \theta)$ и $F_1(\rho, \theta)$ в виде рядов Фурье:

$$\Psi_1(\rho, \theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k \rho^k + a_{-k} \rho^{-k}) \cos k\theta - (b_k \rho^k - b_{-k} \rho^{-k}) \sin k\theta]; \quad (6.96)$$

$$F_1(\rho, \theta) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k \rho^k - a_{-k} \rho^{-k}) \sin k\theta + (b_k \rho^k + b_{-k} \rho^{-k}) \cos k\theta],$$

где $a_0, b_0, a_k, a_{-k}, b_k, b_{-k}$ ($k = 1, 2, \dots$) — не определенные пока коэффициенты.

Аналогичное представление можно получить, используя выражения (6.93) и (6.94):

$$F_1|_{\rho=\rho_j} = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{kj} \cos k\theta + d_{kj} \sin k\theta) + c_{0j} + C^{(j)}, \quad (6.97)$$

где c_{0j}, c_{kj}, d_{kj} ($k = 1, 2, \dots; j = 1, 2$) в отличие от (6.96) — известные коэффициенты. В случае односвязной области $j = 2$ и этот индекс можно опустить.

Сравнивая коэффициенты разложений (6.96) при $\rho = \rho_j$ и коэффициенты разложений (6.97), получим

$$\begin{aligned} b_0 &= c_{0j} + C^{(j)}; \\ \rho_j^k a_k - \rho_j^{-k} a_{-k} &= d_{kj}; \\ \rho_j^k b_k + \rho_j^{-k} b_{-k} &= c_{kj} \quad (j=1, 2). \end{aligned} \quad (6.98)$$

Отсюда для односвязной полости ($\rho_2 = 1$, $a_{-k} = b_{-k} \equiv 0$)

$$a_k = d_k; \quad b_k = c_k,$$

а для двусвязной

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{\gamma^k (d_{k1}\gamma^k - d_{k2})}{\rho_1^k (1 - \gamma^{2k})}; \quad a_{-k} = -\frac{\rho_1^k (d_{k2}\gamma^k - d_{k1})}{1 - \gamma^{2k}}; \\ b_k &= -\frac{\gamma^k (c_{k1}\gamma^k - c_{k2})}{\rho_1^k (1 - \gamma^{2k})}; \quad b_{-k} = -\frac{\rho_1^k (c_{k2}\gamma^k - c_{k1})}{1 - \gamma^{2k}}, \end{aligned} \quad (6.99)$$

где $\gamma = \rho_1/\rho_2$; коэффициент b_0 остается произвольным и его можно считать равным нулю.

Ряды (6.96) обладают абсолютной и равномерной сходимостью в рассматриваемой области плоскости ζ^* . Поэтому можно вычислить безразмерный момент инерции \bar{I}' слоя жидкости единичной толщины относительно оси, проходящей через точку O' плоскости u , которая переходит в начало координат плоскости ζ^* , по формуле

$$\bar{I}' = \frac{1}{2l^4} \left\{ \oint_{\Gamma_1} \Psi_1(\rho, \theta) d[u(\zeta^*) \bar{u}(\zeta^*)] - \oint_{\Gamma_2} \Psi_1(\rho, \theta) d[u(\zeta^*) \bar{u}(\zeta^*)] \right\}, \quad (6.100)$$

где l — как всегда характерный размер.

В случае односвязной полости в формуле (6.100) остается только один интеграл, причем $\gamma_2 \equiv \gamma$.

Переходим к решению однородной краевой задачи (6.9).

Воспользуемся снова конформным отображением области S плоскости u на новую область S' плоскости ζ , что соответствует общим рекомендациям, приведенным в книге [19] и реализованным при решении аналогичной задачи в работе [38]. Особенностью метода, используемого ниже, который предложен в работах автора [49, 51], является то, что в качестве преобразованной области выбирается прямоугольник S' , образованный прямыми, соответствующими элементами изотермической сетки в плоскости u (рис. 6.5). Как будет видно ниже, такое преобразование, в отличие от используемого обычно (6.94), целесообразно для таких областей S , которые не являются близкими к кругу, что как раз особенно важно для приложений.

Положим $u = u[\zeta^*(\zeta)]$, где $u(\zeta^*)$ функция, осуществляющая в

общем случае отображение области S' на кольцо в плоскости ζ^* , а ζ — новая комплексная переменная:

$$\zeta = \xi + i\eta.$$

Функция $\zeta^*(\zeta)$, обеспечивающая получение изотермической сетки в плоскости u , имеет вид

$$\zeta^* = e^\zeta \text{ или } \zeta^* = e^{i\zeta}. \quad (6.101)$$

В дальнейшем будем выбирать тот или иной вариант так, чтобы контурам Γ_j соответствовали линии $\xi = \text{const}$; функцию $u[\zeta^*(\zeta)]$ обозначим теперь просто $u(\zeta)$. Переменные ξ и η меняются в следующих пределах:

$$0 \leq \xi \leq \xi_0; \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (S \text{ — односвязная}); \\ \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2; \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 \quad (S \text{ — двусвязная}).$$

В случае области S с одной (Oy) или двумя (Oy и Oz) осями симметрии система собственных функций ψ_n распадается на взаимно ортогональные на области S подсистемы ψ_{ns} и ψ_{nr} в первом случае и подсистемы ψ_{ns} , ψ_{np} , ψ_{nq} — во втором (см. гл. 3). Границные условия для этих функций в плоскости ξ , η должны быть установлены исходя из соображений симметрии, условий периодичности по координате η , отсутствия особенностей в области S' и, наконец, равенства нулю производных по координате ξ на контурах Γ_j . Это будет сделано ниже при решении конкретных задач. Сейчас мы предположим, что построена некоторая система координатных функций $\gamma_m(\xi, \eta)$, удовлетворяющая всем этим условиям и условиям ортогональности константе на области S :

$$\int_S \gamma_m dS = \int_{S'} \gamma_m |u'(\zeta)|^2 dS' = 0, \quad (6.102)$$

где $|u'(\zeta)|^2$ — якобиан преобразования, осуществляемого функцией $u(\zeta)$. Удобнее всего конструировать такую систему функций, используя произведения тригонометрических функций.

Заметим, что уравнение (6.9) в переменных ξ , η имеет вид

$$\nabla^2 \psi + k^2 |u'(\zeta)|^2 \psi = 0, \quad (6.103)$$

где

$$\nabla = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{s} \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (6.104)$$

так что тригонометрические функции уже не являются его нетривиальными решениями ни при каких значениях $k \neq 0$.

Воспользуемся основным интегральным соотношением метода Бубнова — Галеркина (6.38), которое в переменных ξ , η выглядит

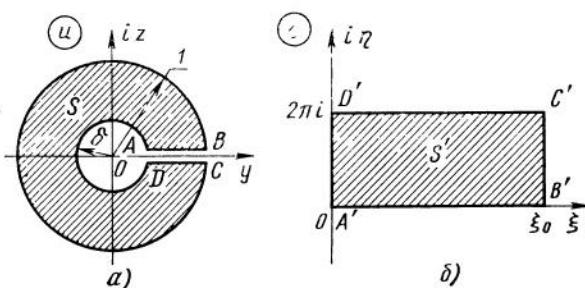


Рис. 6.5. К решению однородной краевой задачи для области в форме кругового кольца:

a — исходная область (с условным разрезом);
b — ее конформное отображение на прямоугольник

дит так:

$$\int_{S'} \nabla \psi \nabla \varphi dS' - k^2 \int_{S'} |u'(\zeta)|^2 \varphi \psi dS' = 0. \quad (6.105)$$

Использование разложения (6.39) приводит снова к уравнениям (6.40) с коэффициентами

$$a_{mk} = a_{km} = \int_{S'} \nabla \gamma_m \nabla \gamma_k dS' = \int_{S'} \nabla \gamma_m \nabla \gamma_k d\xi d\eta; \quad (6.106)$$

$$\beta_{mk} = \beta_{km} = \int_{S'} \gamma_m \gamma_k |u'(\zeta)|^2 dS' = \int_{S'} \gamma_m \gamma_k |u'(\zeta)|^2 d\xi d\eta.$$

Преимущества введенной замены переменных заключаются в том, что преобразованная область S' представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными $O\xi$ и $O\eta$, так что построение системы функций, удовлетворяющих на его сторонах граничным условиям задачи, не представляет труда. При использовании тригонометрических функций ряд (6.39) представляет собой отрезок двойного ряда Фурье, причем каждому значению индексов m и n отвечает некоторая комбинация двух индексов μ и v . Изложенный вариант метода Бубнова — Галеркина, описанного в разд. 6.2, обеспечивает чрезвычайно быструю сходимость получающихся рядов, так что обычно один-два первых члена дают приемлемую для практики точность определения частот и при соединенных масс жидкости.

Проиллюстрируем это на конкретных примерах [49, 51].

Область S в форме кругового кольца

Рассмотрим бак со стенками, образованными соосными круговыми цилиндрами; поперечное сечение столба жидкости имеет форму кругового кольца (рис. 6.5, а).

Введем в функцию

$$u(\zeta) = r_0 \delta e^\zeta, \quad (6.107)$$

где $\delta = r_1/r_0$, отображающую кольцевую область плоскости $u = y + iz$ с внешним радиусом r_0 и внутренним r_1 на прямоуголь-

ник в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 6.5, б):

$$0 \leq \xi \leq \xi_0; \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi; \quad \xi_0 = \ln \frac{1}{\delta}; \quad \delta = e^{-\xi_0}. \quad (6.108)$$

При этом

$$y = r_0 e^{\xi - \xi_0} \cos \eta; \quad z = r_0 e^{\xi - \xi_0} \sin \eta; \quad |u'(\zeta)|^2 = r_0^2 e^{2(\xi - \xi_0)}. \quad (6.109)$$

Координатные функции γ_{ms} , γ_{mp} , удовлетворяющие граничным условиям, следующим из (6.27),

$$\frac{\partial \gamma_{ms}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0, \xi_0} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{mp}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0, \xi_0} = 0, \quad (6.110)$$

а также условию (6.102) и условию периодичности

$$\gamma_{ms}|_{\eta=0} = \gamma_{ms}|_{\eta=2\pi}; \quad \gamma_{mp}|_{\eta=0} = \gamma_{mp}|_{\eta=2\pi} \quad (6.111)$$

могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{ms} &= \cos(m-1)\bar{\xi} \sin \eta; \\ \gamma_{mp} &= \cos(m-1)\bar{\xi} \cos \eta; \\ \bar{\xi} &= \frac{\xi}{\xi_0} \pi; \quad 0 \leq \bar{\xi} \leq \pi; \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Учитывая симметрию рассматриваемой области, ограничимся первым из этих выражений, опуская индекс s (движение в плоскости $O^*x^*z^*$). Подстановка (6.112) в (6.106) приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_{mk} &= \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq k \\ a_m & \text{при } m = k; \end{cases} \\ a_m &= \begin{cases} \pi \xi_0 & (m=1) \\ \frac{2\xi_0}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \left[\frac{\pi^2 (m-1)^2}{\xi_0^2} \sin^2(m-1)\bar{\xi} \cos^2 \eta + \right. \\ \left. + \cos^2(m-1)\bar{\xi} \sin^2 \eta \right] d\bar{\xi} d\eta = \frac{\pi \xi_0}{2} \left[\frac{(m-1)^2 \pi^2}{\xi_0^2} + 1 \right] & (m \neq 1); \end{cases} \\ \beta_{mk} &= \beta_{km} = \frac{2r_0^2 \xi_0}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi e^{2(\xi - \xi_0)} \cos(m-1)\bar{\xi} \cos(k-1)\bar{\xi} \cos^2 \eta d\bar{\xi} d\eta = \\ &= \frac{\pi r_0^2}{4} \left[\frac{(-1)^{m-k} - e^{-2\xi_0}}{1 + \frac{\pi^2 (m-k)^2}{4\xi_0^2}} + \frac{(-1)^{m+k-2} - e^{-2\xi_0}}{1 + \frac{\pi^2 (m+k-2)^2}{4\xi_0^2}} \right]; \end{aligned} \quad (6.113)$$

$$\beta_{mm} = \beta_m = \frac{\pi r_0^2}{4} (1 - e^{-2\xi_0}) \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{(m-1)^2 \pi^2}{\xi_0^2}} \right].$$

Система уравнений (6.40) имеет вид

$$\sum_{k=1}^l (\delta_{mk} a_{mk} - \lambda \beta_{mk}) a_k = 0 \quad (m=1, 2, \dots, l), \quad (6.114)$$

где

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=k \\ 0 & \text{при } m \neq k; \end{cases} \quad (6.115)$$

$$\sum_{m=1}^l (-1)^{m-1} a_m^{(n)} = 1$$

(условие нормировки (6.9)).

Подставляя выражение

$$\psi_n = \sum_{m=1}^l a_m^{(n)} \cos(m-1)\bar{\xi} \sin \eta \quad (6.116)$$

в (6.8), получим следующие выражения для коэффициентов N_n^2 , C_n , D_n :

$$N_n^2 = \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^l \beta_{mk} a_m^{(n)} a_k^{(n)}; \quad (6.117)$$

$$\begin{aligned} C_n &= r_0^3 \sum_{m=1}^l a_m^{(n)} \int_{S'} e^{3(\xi-\xi_0)} \sin^2 \eta \cos(m-1)\bar{\xi} d\xi d\eta = \\ &= \frac{\pi r_0^3}{3} \sum_{m=1}^l \frac{a_m^{(n)} [(-1)^{m-1} - \delta^3]}{\left[(m-1)^2 \left(\frac{\pi}{3\xi_0}\right)^2 + 1\right]}; \\ D_n &= C_n. \end{aligned}$$

Приведем еще выражения безразмерных гидродинамических коэффициентов для $\bar{h} \rightarrow \infty$ и $l=2$:

$$\bar{\omega}_1^2 = \bar{k}_1; \quad \bar{m}_1 = \frac{\bar{\lambda}_1^2}{\mu_1};$$

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\pi}{3} \left[a_1^{(1)} (1 - \delta^3) - a_2^{(1)} \frac{1 + \delta^3}{1 + \left(\frac{\pi}{3\xi_0}\right)^2} \right];$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{1}{\omega_1^2} (\bar{\beta}_1 a_1^{(1)2} + 2\bar{\beta}_{12} a_1^{(1)} a_2^{(1)} + \bar{\beta}_2 a_2^{(1)2}); \quad (6.118)$$

$$\bar{\beta}_1 = \frac{\pi}{2}(1-\delta^2); \quad \bar{\beta}_2 = \frac{\pi}{4}(1-\delta^2) \frac{2 + \frac{\pi^2}{\xi_0^2}}{1 + \frac{\pi^2}{\xi_0^2}}; \\ \bar{\beta}_{12} = -\frac{2\pi(1+\delta^2)}{4 + \frac{\pi^2}{\xi_0^2}}; \quad \xi_0 = \ln\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

В первом приближении при $l=m=1$

$$\overline{\omega_1^2} = \sqrt{\frac{2}{1-\delta^2} \ln \left(\frac{1}{\delta} \right)}; \quad \overline{\lambda}_1 = \frac{\pi(1-\delta)}{\overline{\omega}_1^4}; \quad \overline{\mu}_1 = \frac{\pi(1-\delta^2)}{2\overline{\omega}_1^2}. \quad (6.119)$$

Заметим, что выражения (6.31) переходят в (6.119) при $n=1$ и $\delta \rightarrow 1$, $Z_1(\xi\delta) \rightarrow 1$, т. е. представляют собой асимптотические формулы для «узкого» кольца ($\delta \rightarrow 1$).

На рис. 6.6 представлены в функции δ результаты расчета параметров ω_1^2 и m_1 по формулам первого приближения (6.119) (сплошная линия) и второго приближения (6.118) (пунктир). Параметры $k_1 = \lambda$, $a_1^{(1)}$ и $a_1^{(2)}$ определены в послед-

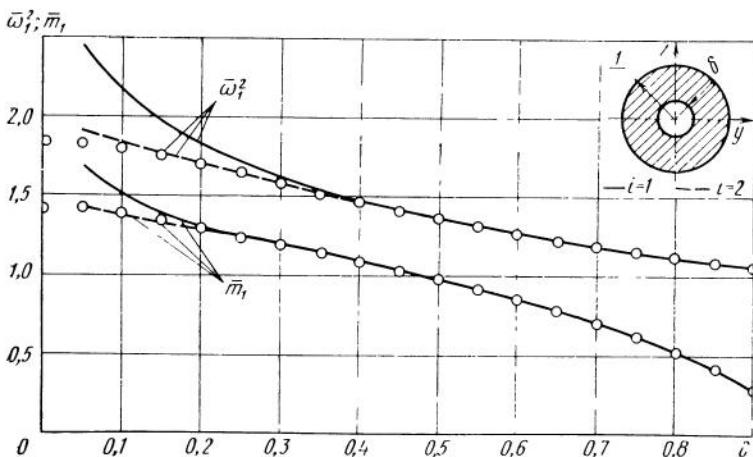


Рис. 6.6. Квадрат безразмерной частоты и безразмерная присоединенная масса для первого тона антисимметричных колебаний бесконечно глубокой жидкости в баке, образованном соосными цилиндрами.

\bullet — точное решение краевой задачи; \square — решение методом Галеркина с предварительным конформным отображением (см. рис. 6 6)

нем случае из уравнений (6.114) с учетом (6.115). Кружками показаны «точные» значения, полученные по формулам (6.31). Как видно из этого рисунка, изложенный метод дает практически точные результаты при использовании двух координатных функций в широком диапазоне изменения δ и вполне приемлемые результаты при использовании одной координатной функции, причем затраты труда на их получение при массовом счете не идут ни в какое сравнение с затратами при использовании функций Бесселя и Неймана.

Область S в форме эллипса

Рассмотрим бак в форме эллиптического цилиндра. Его попечечное сечение представляет собой эллипс с полуосами a , b и линейным эксцентриситетом c (рис. 6.7, а). За характерный размер примем $r_0 = \sqrt{ab}$. Начнем с решения неоднородной задачи (это решение широко известно [22] и излагается только для иллюстрации метода). Представим комплексный потенциал в форме

$$\begin{aligned} w(\zeta^*) &= F_1(\rho, \theta) + i\Psi_1(\rho, \theta); \\ \zeta^* &= \rho e^{i\theta}; \quad \bar{\zeta}^* = \rho e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Функция

$$u(\zeta^*) = \frac{c}{2} \left(\zeta^* - \frac{1}{\zeta^*} \right) \quad (6.121)$$

отображает эллипс с разрезом по линии, соединяющей фокусы, на кольцо с радиусами внутренней и внешней окружностей

$$\begin{aligned} p_1 &= 1; \quad p_2 = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} = e^{\xi_0}; \\ \xi_0 &= \ln\left(\frac{1}{\delta}\right), \end{aligned} \quad (6.122)$$

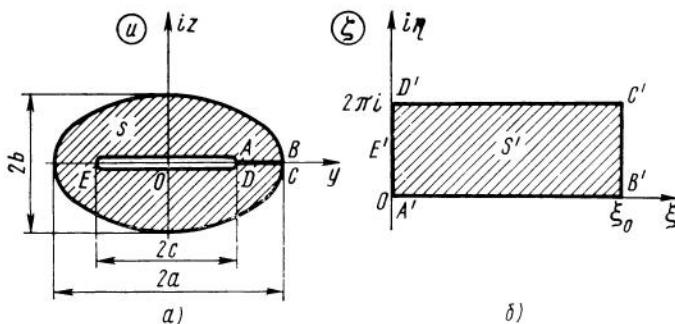


Рис. 6.7. К решению однородной краевой задачи для эллиптической области:
а — исходная область (с условным разрезом); б — ее конформное отображение на прямоугольник

где $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет эллипса — безразмерный параметр задачи, который будем предполагать удовлетворяющим неравенствам $0 < \varepsilon < 1$.

Отбрасывая несущественные константы и учитывая антисимметрию функции Ψ_1 по отношению к главным осям эллипса ($\Psi_1=0$ при $y=0, z=0$), получим следующие граничные условия для определения аналитической функции $w(\zeta^*)$:

$$\Psi_1|_{\rho=\rho_1}=0; F_1|_{\rho=\rho_2}=-\frac{u(\zeta^*)\bar{u}(\zeta^*)}{2}\Bigg|_{\rho=\rho_2}. \quad (6.123)$$

После простых преобразований получим, отбрасывая снова несущественную константу

$$\Psi_1|_{\rho=1}=0; F_1|_{\rho=\rho_2}=-\frac{c^2}{4}\cos 2\theta. \quad (6.124)$$

Условия (6.123) при представлении F_1 и Ψ_1 в форме

$$\begin{aligned} F_1 &= (b_2\rho^2 + b_{-2}\rho^{-2})\cos 2\theta; \\ \Psi_1 &= -(b_2\rho^2 - b_{-2}\rho^{-2})\sin 2\theta \end{aligned} \quad (6.125)$$

приводят к следующим значениям констант:

$$b_2 = b_{-2} = -\frac{c^4}{8(a^2 + b^2)} = -\frac{a^2\varepsilon^4}{8(1 + \bar{b}^2)}; \quad \bar{b} = \frac{b}{a}. \quad (6.126)$$

Отсюда

$$w = -\frac{a^2\varepsilon^4}{8(1 + \bar{b}^2)} \left(\zeta^{*2} + \frac{1}{\bar{\zeta}^{*2}} \right). \quad (6.127)$$

Полагая

$$\zeta^* = e^{\xi+i\eta}; \quad \bar{\zeta}^* = e^{\xi-i\eta}$$

и отделяя вещественные и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{a^2\varepsilon^4 \operatorname{ch} 2\xi \cos 2\eta}{4(1 + \bar{b}^2)}; \quad \Psi_1 = \frac{a^2\varepsilon^4 \operatorname{sh} 2\xi \sin 2\eta}{4(1 + \bar{b}^2)}; \\ \bar{J}_{11} = \bar{I} &= -\frac{1}{2r_0^4} \int_{2\pi}^0 \Psi_1(\xi_0, \eta) d[u(\zeta)\bar{u}(\zeta)]|_{\xi=\xi_0} = \\ &= \frac{c^6 \operatorname{sh} 2\xi_0}{8a^2b^2(a^2 + b^2)} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\eta d\eta = \frac{\pi\varepsilon^4}{8\bar{b}^2} \operatorname{th} 2\xi_0 = \frac{\pi}{4\bar{b}} \frac{\varepsilon^4}{1 + \bar{b}^2}. \end{aligned} \quad (6.128)$$

Выражения (6.128) совпадают (если в F_1 и Ψ_1 перейти к переменным y, z) с приведенными в книге [22]. Вычислим сразу же безразмерные параметры $\overline{\Omega}_r(r=s, p, q)$, позволяющие получить верхнюю оценку значений $\frac{m_{1r}}{\omega_{1r}^2}$ с помощью (6.73), (6.75):

$$\begin{aligned}\overline{\Omega}_s &= \overline{J}_y = \frac{\pi\bar{b}}{4}; \quad \overline{\Omega}_p = \overline{J}_z = \frac{\pi}{4\bar{b}}; \\ \overline{\Omega}_q &= \overline{\Omega}_x = \frac{1}{r_0^6} \int_S \Psi_1^2 dS = \\ &= \frac{\epsilon^{10}}{16\bar{b}^3(1+\bar{b}^2)^2} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \sin^2 2\xi \sin^2 2\eta (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta = \frac{\pi\epsilon^4}{24(1+b^2)^2}. \end{aligned}\quad (6.129)$$

Переходим к решению однородной задачи, которая обычно представляется через плохо приспособленные для расчетов на ЭВМ функции Матте и присоединенные функции Матте [31]. Преобразование, дающее изотермическую сетку на плоскости u , имеет вид

$$u = \frac{c}{2} (e^\zeta + e^{-\zeta}) = \frac{c}{2} \cosh \zeta. \quad (6.130)$$

Отсюда получим известные соотношения

$$\begin{aligned}y &= c \cosh \xi \cos \eta; \quad z = c \sinh \xi \sin \eta; \\ |u'(\zeta)|^2 &= \frac{c^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta). \end{aligned}\quad (6.131)$$

Область S переходит на плоскости ζ в прямоугольник S' (рис. 6.7, б):

$$\begin{aligned}0 &\leq \xi \leq \xi_0; \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi; \\ \cosh \xi_0 &= \frac{a}{c} = \frac{1}{\epsilon}; \quad \sinh \xi_0 = \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1}; \quad \xi_0 = \ln \left(\frac{1}{\delta} \right). \end{aligned}\quad (6.132)$$

Представим функции ψ_{nr} ($r=s, p, q$) в виде

$$\psi_{nr} = \sum_{m=1}^l a_{mr}^{(n)} \gamma_{mr} \quad (6.133)$$

и введем, учитывая соображения симметрии и периодичности искомых функций по переменной η , граничные условия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{nr}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} &= 0; \quad \psi_{nr} \Big|_{\eta=0} = \psi_{nr} \Big|_{\eta=2\pi} \quad (r=s, p, q); \\ \psi_{ns} \Big|_{\xi=0} &= \psi_{ns} \Big|_{\xi=\xi_0} = 0; \quad \frac{\partial \psi_{np}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial \psi_{np}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \end{aligned}\quad (6.134)$$

$$\psi_{nq}|_{\xi=0} = \psi_{nq}|_{y=0} = \psi_{nq}|_{z=0} = 0,$$

а также следующие условия нормировки:

$$\psi_{ns}|_{\xi=\xi_0, \eta=\frac{\pi}{2}} = \psi_{np}|_{\xi=\xi_0, \eta=0} = \psi_{nq}|_{\xi=\xi_0, \eta=\frac{\pi}{4}} = 1. \quad (6.135)$$

Если к условиям (6.134) присоединить еще отличие от нуля коэффициентов C_n, D_n, E_n , определяющих динамическое взаимодействие жидкости и корпуса, то можно дать следующее представление для координатных функций γ_{mr} :

$$\begin{aligned}\gamma_{ms} &= \sin\left(\frac{2m-1}{2}\right)\bar{\xi}\sin\eta; \\ \gamma_{mp} &= \cos(m-1)\bar{\xi}\cos\eta; \\ \gamma_{mq} &= \sin\left(\frac{2m-1}{2}\right)\bar{\xi}\sin 2\eta,\end{aligned}\quad (6.136)$$

где

$$0 \leq \bar{\xi} \leq \pi; \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi; \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{\xi_0} \pi. \quad (6.137)$$

Используя выражение (6.136), можно вычислить коэффициенты a_{mk}, β_{mk} ,

$$a_{mkr} = \begin{cases} a_{mr} = 2 \int_0^{\xi_0} \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial \gamma_{mr}}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_{mr}}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta & (m=k) \\ 0 & (m \neq k); \end{cases} \quad (6.138)$$

$$\beta_{mkr} = \beta_{kmr} = c^2 \int_0^{\xi_0} \int_0^\pi \gamma_{mr} \gamma_{kr} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta,$$

а затем — после решения уравнений, аналогичных (6.114), — коэффициенты N_{nr}^2, C_n, D_n, E_n :

$$N_{nr}^2 = \sum_{k=1}^l \sum_{m=1}^l \beta_{mk} a_{mr}^{(n)} a_{kr}^{(n)};$$

$$C_n = \frac{\xi_0 c^3}{\pi} \sum_{m=1}^l a_{ms}^{(n)} \int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{sh} \xi (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \sin^2 \eta \sin\left(\frac{2m-1}{2}\right) \bar{\xi} d\xi d\eta;$$

$$D_n = \frac{\xi_0 c^3}{\pi} \sum_{m=1}^l a_{mp}^{(n)} \int_0^\pi \int_0^\pi \operatorname{ch} \xi (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \cos^2 \eta \cos(m-1) \bar{\xi} d\xi d\eta;$$

$$E_n = \frac{\xi_0 c^6}{4\pi(a^2 + b^2)} \sum_{m=1}^l a_{mq}^{(n)} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin 2\xi \sin^2 2\eta (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \times \\ \times \sin\left(\frac{2m-1}{2}\right) \bar{\xi} d\bar{\xi} d\eta.$$

Все интегралы (6.138) и (6.139) берутся, что позволяет вычислить искомые коэффициенты по конечным формулам, которые мы здесь не приводим. Ограничимся только формулами первого приближения для параметров $\bar{\omega}_{1r}^2$ и \bar{m}_{1r} ($r=s, p, q$), соответствующих бесконечно глубокой жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{1r}^2 &= \bar{k}_{1r}; \quad \bar{k}_{1r}^2 = \frac{a_{1r}}{\bar{\beta}_{1r}}; \quad \bar{m}_{1r} = \frac{\bar{\lambda}_{1r}^2}{\mu_{1r}}; \quad \bar{\beta}_{1r} = \frac{\bar{\beta}_{1r}}{\omega_{1r}^2}; \\ a_{1s} &= \frac{\pi \xi_0}{2} \left[1 + \left(\frac{\pi}{2\xi_0} \right)^2 \right]; \quad a_{1p} = \pi \xi_0; \quad a_{1q} = \frac{\pi \xi_0}{2} \left[4 + \left(\frac{\pi}{2\xi_0} \right)^2 \right]; \\ \bar{\beta}_{1s} &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2 + \left(\frac{\pi}{2\xi_0} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi}{2\xi_0} \right)^2} + \frac{\xi_0}{\sinh 2\xi_0} \right]; \quad \bar{\beta}_{1p} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\xi_0}{\sinh 2\xi_0} \right); \\ \bar{\beta}_{1q} &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{2 + \left(\frac{\pi}{2\xi_0} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi}{2\xi_0} \right)^2} \right]; \quad \bar{\lambda}_{1s} = \frac{2\pi \sqrt{2} \cosh 3\xi_0}{3(\sinh 2\xi_0)^{3/2}} \frac{1}{4 + \left(\frac{\pi}{3\xi_0} \right)^2}; \\ \bar{\lambda}_{1p} &= \frac{\pi \sinh 3\xi_0}{3\sqrt{2}(\sinh 2\xi_0)^{3/2}}; \quad \bar{\lambda}_{1q} = \frac{\pi}{2 \sinh 2\xi_0} \frac{1}{4 + \left(\frac{\pi}{4\xi_0} \right)^2}. \end{aligned} \quad (6.140)$$

На рис. (6.8, а, б, в) представлены результаты расчета по этим формулам (сплошные линии), формулам второго приближения (штриховые линии), формулам (6.129) и, наконец, — с использованием функций Маттье (кружки). В качестве аргумента использован угол $\gamma = \arcsin e$. Параметр δ на рис. 6.8 позволяет сопоставить коэффициенты для эллипса и эквивалентного кольца с тем же значением δ (см. рис. 6.6). Как видно из рис. 6.8, второе приближение практически дает точное решение, а характер сходимости (отличие его от первого приближения) при изменении δ примерно такой же, как для кольца. Рис. 6.8, в свидетельствует об очень высоком качестве оценок (6.73), (6.75). Отличие от значений, полученных с помощью функций Маттье, на рис. 6.8 при больших эксцентриситетах эллипса объясняется ухудшением точ-

ности расчета последних, так что «точные» решения в данном случае хуже «приближенных».

Полученные результаты свидетельствуют о перспективности метода, изложенного выше, для расчета частот и присоединен-

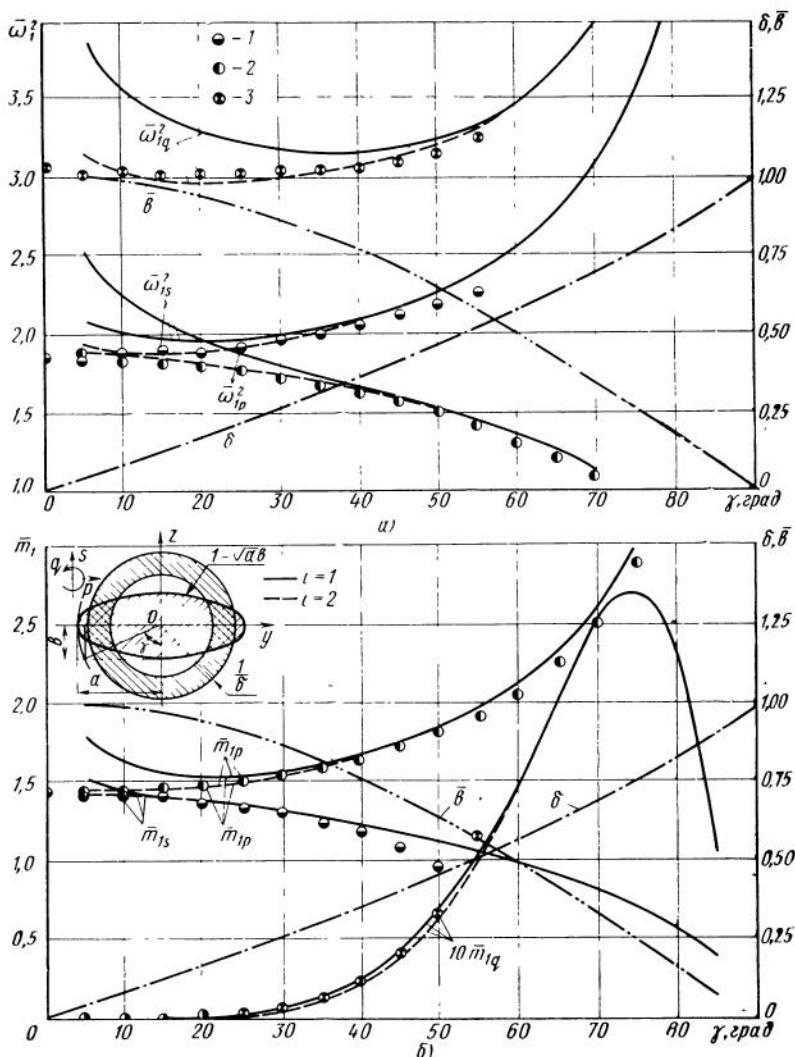
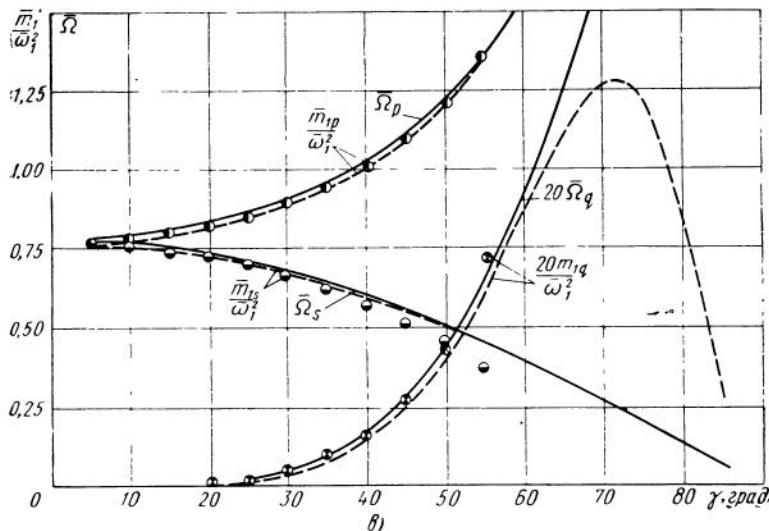


Рис. 6.8. Квадраты безразмерных частот и безразмерные присоединенные массы для первых антисимметричных гармоник при колебаниях бесконечно гладкой жидкости в эллиптическом цилиндре:

a — частоты; *b*, *v* — массы;

1 — движение в плоскости Oxz ; 2 — движение в плоскости Oxy ; 3 — вращение вокруг оси Ox ; 1, 2, 3 — решение с использованием функций Маттье; —— — решение методом Галеркина с предварительным конформным отображением (характерный размер — среднее геометрическое из полусосей эллипса)



ных масс по достаточно простым формулам, которые дают точные в асимптотическом смысле значения при увеличении эксцентриситета эллипса.

6.5. Применение метода Трефтца в случае баков, имеющих форму тел вращения

Рассмотрим основные краевые задачи для функций φ и ψ при использовании баков в форме тел вращения [27, 45]. Введем цилиндрическую систему координат (рис. 6.9):

$$x=x; \quad y=r \cos \theta; \quad z=r \sin \theta \quad (6.141)$$

и рассмотрим частные решения краевых задач (3.108) и (3.114) вида

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= f(x, r) \sin \theta; \\ \psi(x, y, z) &= F(x, r) \sin \theta, \end{aligned} \quad (6.142)$$

которые могут возбуждаться при движении бака в плоскости $O^*x^*z^*$ и влиять на это движение [35, 60] (замена $\sin \theta$ на $\cos \theta$ соответствует переходу к плоскости $O^*x^*y^*$).

Отделение координаты θ позволяет сформулировать краевые задачи (3.113) и (3.114) как двухмерные в области G (рис. 6.10). Решение их методом Трефтца приводит к алгоритму (6.55),

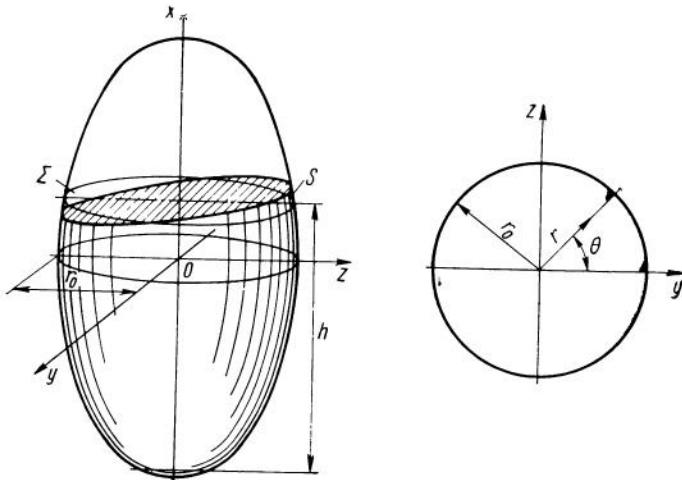


Рис. 6.9. Системы координат и основные обозначения в случае полостей вращения

(6.56), (6.57), причем параметры α_{mp} , β_{mp} , d_p , v_m (6.55) определяются формулами [60]

$$\alpha_{mp} = \alpha_{pm} = \pi \int_{L_0 + L_1} \frac{\partial \gamma_m}{\partial v} \gamma_p r ds; \quad (6.143)$$

$$\beta_{mp} = \beta_{pm} = \pi \int_{L_0} \gamma_m \gamma_p r ds;$$

$$d_p = \pi \int_{L_1} (r v_x - x v_r) \gamma_p r ds;$$

$$v_m = \pi \int_{L_1} \gamma_m v_r r ds.$$

Координатные функции в соответствии с методом Трефтца должны выбираться в класс частных решений уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{f}{r} = 0, \quad (6.144)$$

не имеющих особенностей в области G .

Уравнение (6.144) удобно записать в полярной системе координат R, ϑ :

$$\sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial R} \right) - f = 0. \quad (6.145)$$

Уравнение (6.145) имеет четыре системы линейно независимых решений. Опыт показывает, что результаты, полностью удовлет-

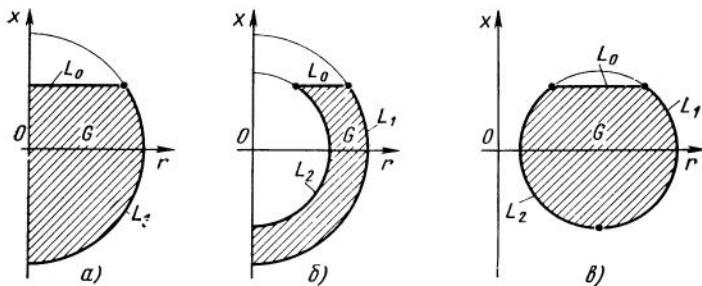


Рис. 6.10. Поперечные сечения полостей вращения с жидкостью:

а — односвязная полость с круговой свободной поверхностью; *б* — односвязная полость с кольцевой свободной поверхностью; *в* — двусвязная полость (тор) с кольцевой свободной поверхностью

Воряющие практическим требованиям, получаются при использовании двух систем

$$R^k P_k^{(1)}(\mu) \text{ и } \frac{1}{R^{k+1}} P_k^{(1)}(\mu),$$

где $P_k^{(1)}$ — присоединение функции Лежандра первого рода, первого порядка; $R = \sqrt{x^2 + r^2}$; $\mu = \cos \vartheta$.

В случае односвязных полостей вращения с круговой свободной поверхностью жидкости (см. рис. 6.10, *а*) краевые задачи эффективно решаются с использованием первой системы функций; в случае односвязных полостей с кольцевой свободной поверхностью жидкости (см. рис. 6.10, *б*) или двусвязных полостей типа тора (см. рис. 6.10, *в*) — при использовании обеих упомянутых систем функций.

В первом случае можно принять

$$\gamma_m(x, r) = \frac{2(m-1)!}{(m+1)!} R^m P_m^{(1)}(\mu), \quad (6.146)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= r, & \gamma_2 &= xr, & \gamma_3 &= x^2r - \frac{1}{4}r^3, \\ \gamma_4 &= x^3r - \frac{3}{4}r^3x, & \gamma_5 &= x^4r - \frac{3}{2}x^2r^3 + \frac{1}{8}r^5, \dots \end{aligned} \quad (6.147)$$

Функции $\gamma_m(x, r)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$(m-1)(x^2 + r^2)\gamma_{m-1} + (m+2)\gamma_{m+2} = (2m+1)x\gamma_m;$$

$$r \frac{\partial \gamma_m}{\partial r} = m\gamma_m - (m-1)x\gamma_{m-1}; \quad (6.148)$$

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial x} = (m-1)\gamma_{m-1},$$

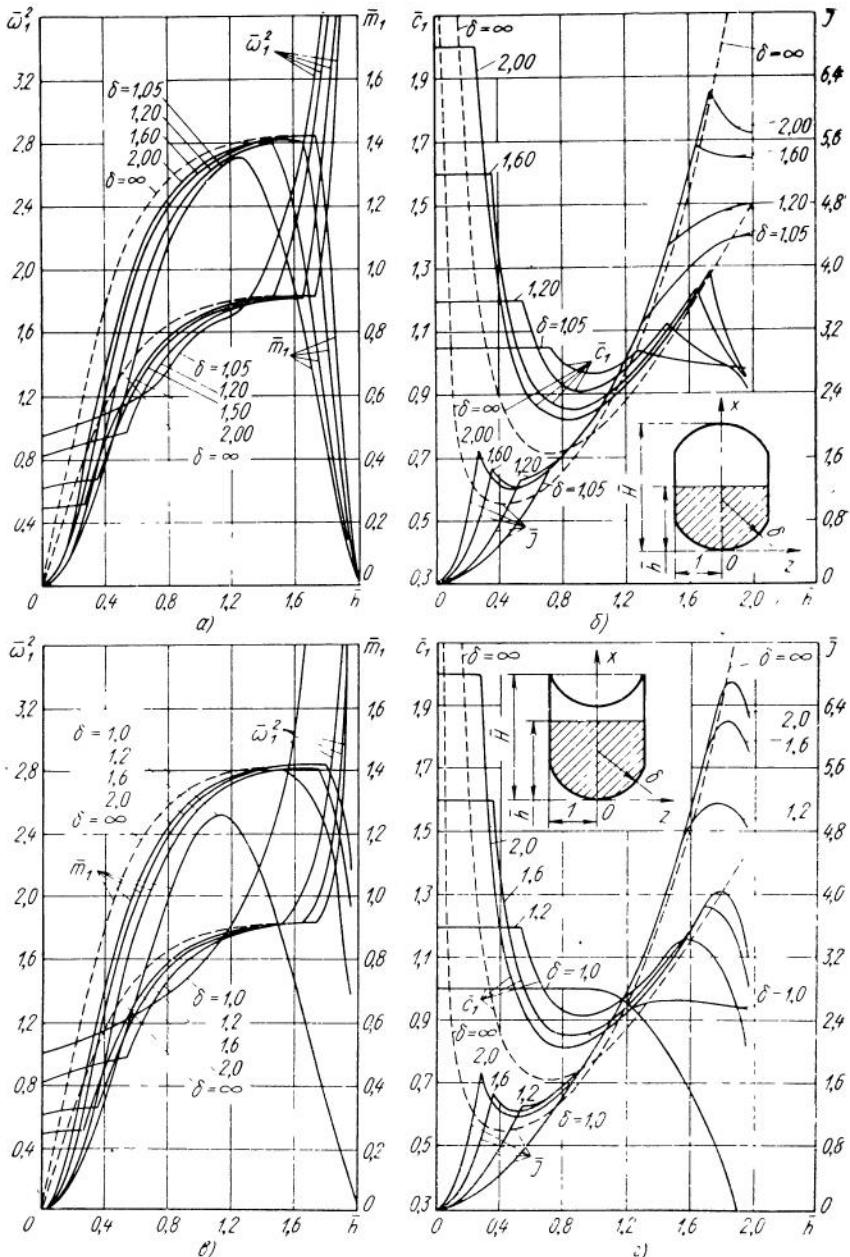
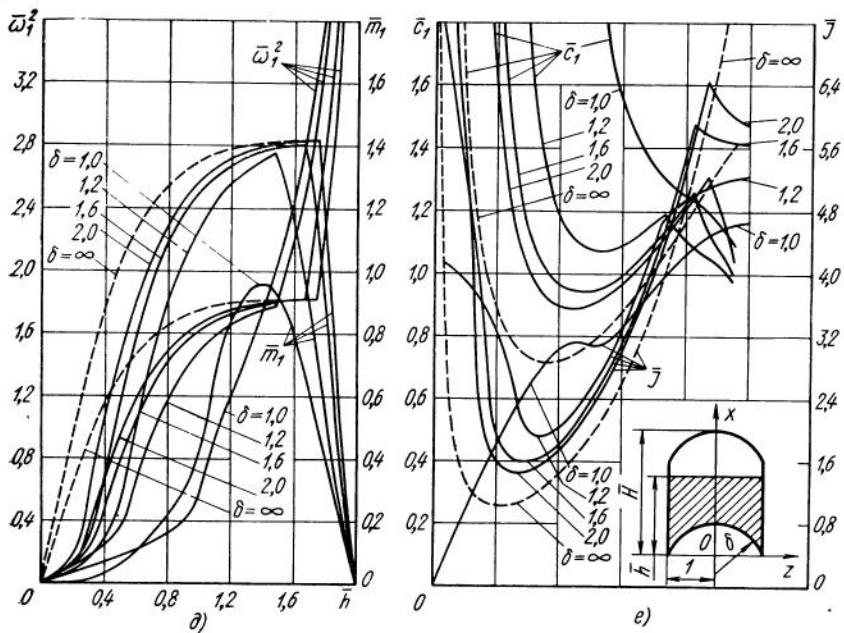


Рис. 6.11. Основные безразмерные гидродинамические коэффициенты для цилиндрических баков со сферическими днищами при $\bar{H}=2,0$:
 а, б — выпуклые днища; в, г — выпуклое нижнее и вогнутое верхнее; д, е — выпуклое верхнее днище и вогнутое нижнее



которые позволяют вычислять эти функции при любом значении индекса m . Во втором случае надо к системе функций (6.146) присоединить систему функций

$$\bar{\gamma}_m(x, r) = \frac{2(m-1)!}{(m+1)!} \frac{P_m^{(1)}(\mu)}{R^{m+1}} = \frac{\gamma_m(x, r)}{R^{2m+1}}, \quad (6.149)$$

удовлетворяющую рекуррентным соотношениям

$$(x^2 + r^2) \bar{\gamma}_m = \frac{2m+1}{m+2} x \bar{\gamma}_m - \frac{m-1}{m+1} \bar{\gamma}_{m-1}; \quad (6.150)$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_m}{\partial x} = -(m+2) \bar{\gamma}_{m+1}.$$

Имеется очень большой опыт применения метода Трефтца с координатными функциями (6.146) и (6.149) [16, 30, 35, 45, 54, 60]. В частности, на его основе Е. М. Стажковым была разработана сложная универсальная программа на языке АЛГОЛ-60, позволяющая рассчитать всю совокупность гидродинамических коэффициентов для баков в форме односвязных и двусвязных тел вращения произвольной конфигурации [54] (рис. 6.11, 6.12).

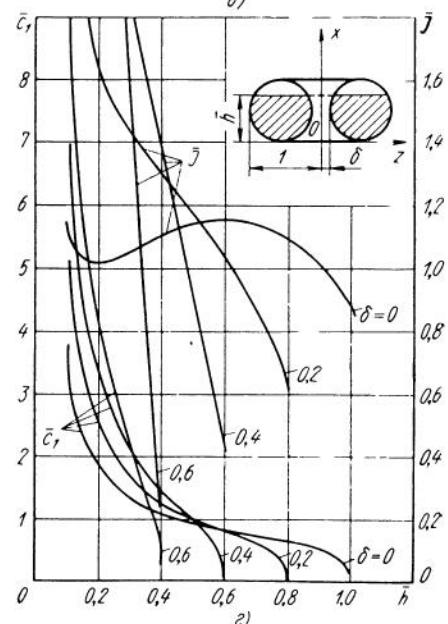
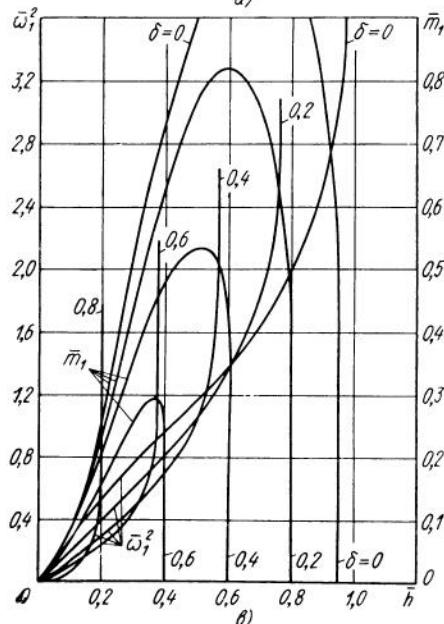
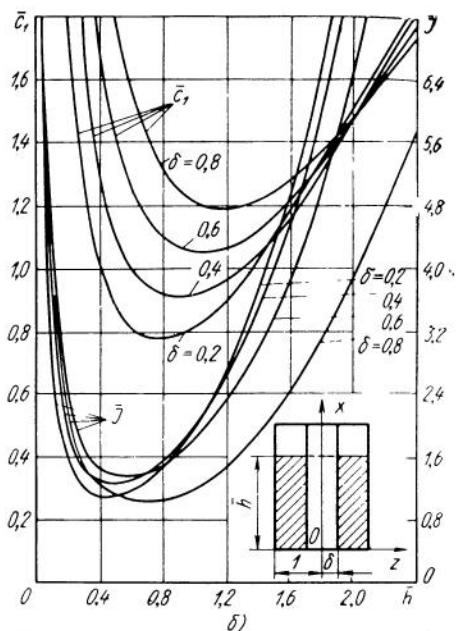
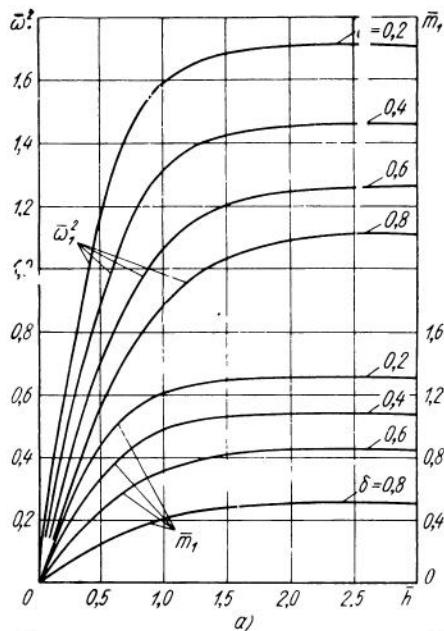
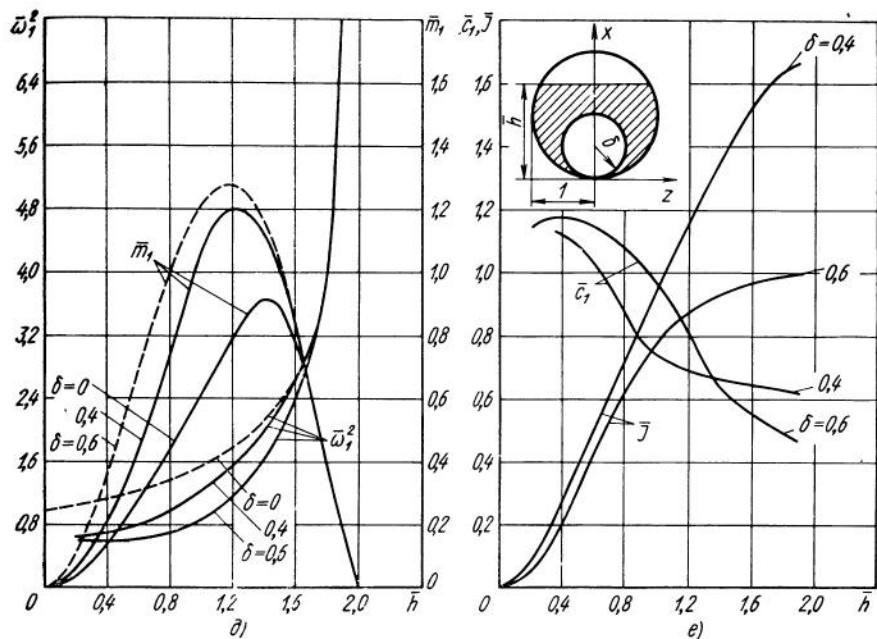


Рис. 6.12. Основные безразмерные гидродинамические коэффициенты для некоторых баков в форме двусвязных полостей вращения:
а, б — соосные цилиндры; в, г — тор; д, е — соосные сферы, с точкой касания в нижнем полюсе



Т а б л и ц а 6.3

k	$\bar{\omega}_1^2$	\bar{m}_1	\bar{c}_t	\bar{J}
1	8,8000	—	—	—
2	3,0855	2,4233	1,6323	11,000
3	2,0798	1,6327	1,8390	11,125
4	1,8821	1,4635	1,6889	11,469
5	1,8453	1,4382	1,6976	11,476
6	1,8407	1,4301	1,6947	11,478
7	1,8401	1,4277	1,6943	11,478
8	1,8401	1,4271	1,6944	11,479
9	1,8401	1,4270	1,6944	11,480
10	1,8401	1,4270	1,6944	11,480
Точное значение	1,8401	1,4270	1,6944	11,480

Примеры использования в качестве координатных функций комбинаций цилиндрических и гиперболических функций имеются в работах [35, 38, 63].

Проиллюстрируем характер сходимости и точность вариационного метода Трефтца, реализуемого этой программой, на примере полости в форме кругового цилиндра с относительной глубиной жидкости $\bar{h}=2,2$.

В табл. 6.3 приведены значения $\bar{\omega}_1^2$, $\bar{m}_1 = \frac{\bar{\lambda}_1^2}{\mu_1}$, $\bar{c}_1 = -\frac{\bar{\lambda}_{01}}{\bar{\lambda}_1}$,

\bar{J} в зависимости от количества приближений k , а также точные значения, рассчитанные по формулам (6.34). Начало координат в полюсе нижнего днища, характерный размер — радиус цилиндра.

На рис. 6.11 представлены результаты расчета тех же коэффициентов в функции безразмерной глубины \bar{h} для цилиндрических баков с выпуклыми и вогнутыми сферическими днищами, которые получили наибольшее распространение в реальных конструкциях РН. Роль параметра играет отношение δ радиусов кривизны днища и цилиндрической обечайки (последний принят везде за характерный размер). Значение $\delta=\infty$ соответствует плоскому днищу. Безразмерная полная длина бака составляет $\bar{H}=2,0$.

На рис. 6.12 приведены аналогичные результаты для более сложных баков, образованных соосными цилиндрическими, торoidalными и сферическими поверхностями. Такие баки иногда применяются на последних ступенях РН, но чаще на различных КА. Параметром на рис. 6.12 служит либо отношение радиусов внутреннего и внешнего цилиндров или тора, либо отношение радиусов внутренней и внешней сфер. Характерный размер — радиус внешнего цилиндра.

Наиболее полная сводка результатов, полученных для полостей вращения, имеется в работе [60].

6.6. Асимптотика глубокой жидкости

В настоящем разделе развивается алгоритм получения первого собственного значения и первой собственной функции однородной краевой задачи (3.113), основанный на использовании асимптотического выражения потенциала смещений, точного вблизи свободной поверхности жидкости, аналогичного предложенному И. А. Луковским [28]. При этом используется преобразование путем приближенного интегрирования по одной из координат исходного трехмерного функционала (6.43) в двухмерный. Последний соответствует двухмерной краевой задаче с естественными

граничными условиями на контуре типа использованных в работе [44]. При этом в отличие от работы [44], одновременно корректируются выражения как потенциальной, так и кинетической энергии. Это обстоятельство, а также учет кривизны смоченной поверхности S вблизи свободной поверхности жидкости Σ позволяет существенно повысить точность результатов и обобщить их на достаточно широкий класс полостей.

Рассмотрим полость с поверхностью S , имеющей непрерывно изменяющиеся от точки к точке главные радиусы кривизны. Пересечем поверхность S плоскостью, нормальной контуру Γ свободной поверхности и обозначим через ϑ и R угол наклона нормали к линии пересечения L к плоскости Σ и радиус кривизны в точке пересечения линий Γ_0 и L (на рис. 6.13 $\vartheta > 0$). Будем полагать, что относительная глубина жидкости $\bar{h} = \frac{h}{l}$, где l — характерный размер, велика ($\bar{h} \gg 1$). Краевая задача, связанная со свободными колебаниями жидкости, эквивалентна вариационной задаче на экстремум функционала (6.43) или функционала

$$\bar{V} = \int_Q (\nabla \varphi)^2 dQ - \nu \int_{\Sigma} \varphi^2 dS, \quad (6.151)$$

где $\varphi(x, y, z)$ — неизвестные собственные функции и собственные значения, образующие счетное множество. Поместим начало координат в плоскости Σ и будем искать φ в форме, аналогичной

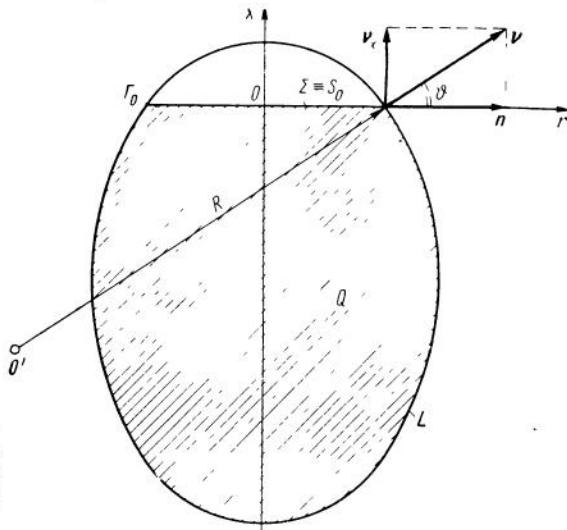


Рис. 6.13. Системы координат и основные обозначения при построении асимптотики глубокой жидкости

предложенной в работе [28] для полостей вращения:

$$\varphi = \frac{e^{xz}}{z} \psi(y, z), \quad (6.152)$$

где $x < 0$ (см. рис. 6.13).

После подстановки в (6.151) получим

$$\bar{V} = \frac{1}{\kappa^2} \left\{ \int_{-h}^0 e^{2xz} dx \int_{S_x} F(y, z) dS - x \int_{\Sigma} \psi^2 dS \right\}.$$

Здесь S_x — площадь поперечного сечения жидкости в сечении x

$$F(y, z) = (\nabla \psi)^2 + x^2 \psi^2.$$

Рассмотрим интеграл по площади S_x от функции F как приращение соответствующего интеграла по площади $S_0 \equiv \Sigma$, когда x получает малое приращение Δx , с точностью до величины первого порядка малости относительно приращения Δn , измеряемого в направлении внешней нормали к контуру Γ_0 . При переходе к контуру Γ_x , ограничивающему область S_x , получим (здесь предполагается, что контуры Γ_0 и Γ_x кусочно-гладкие и функция F удовлетворяет на контуре Γ_0 условиям Гельдера — Липшица)

$$\int_{S_x} F ds \approx \int_{S_0} F ds + \oint_{\Gamma_0} F \Delta n ds. \quad (6.153)$$

Ограничиваюсь двумя первыми членами разложения Δn в ряд Маклорена и полагая $\varepsilon = \frac{1}{2R}$, $\Delta x = x$, получим

$$\Delta n \approx -(x \operatorname{tg} \vartheta + \varepsilon x^2).$$

После соответствующих подстановок, интегрирования по частям и предельного перехода $h \rightarrow \infty$ получим следующее выражение для функционала $V = \kappa^3 \bar{V}$:

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{2} \int_{S_0} [(\nabla \psi)^2 - x^2 \psi^2] dS + \frac{1}{4\kappa^2} \oint_{\Gamma_0} [(\nabla \psi)^2 - x^2 \psi^2] \lambda ds + \\ + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_0} \lambda \psi^2 ds, \end{aligned} \quad (6.154)$$

где

$$\lambda = \lambda(s) = x \operatorname{tg} \vartheta - \varepsilon. \quad (6.155)$$

Воспользовавшись формулой (6.153), можно привести (6.154) к виду

$$V = \frac{1}{2} \int_{S^*} [(\nabla^* \psi)^2 - x^2 \psi^2] dS^* + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_0} \lambda \psi^2 ds. \quad (6.156)$$

Здесь

$$S^* = S_0 + \Delta S; \quad \Delta S = \oint_{\Gamma_0} \Delta n ds; \quad \Delta n = \frac{\lambda}{2\kappa^2};$$

$$(\nabla^* \psi)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z^*} \right)^2$$

(предполагается, что $\frac{|\Delta n|}{l} \ll 1$).

Положим

$$y^* = \frac{\Lambda}{\kappa} y; \quad z^* = \frac{\Lambda}{\kappa} z;$$

$$\Lambda = \kappa \sqrt{\frac{S^*}{S_0}} \approx \kappa \left(1 + \frac{\Delta S}{2S_0} \right) = \kappa + \frac{\lambda^\circ}{4\kappa} \left(\frac{\Gamma_0}{S_0} \right);$$

$$\lambda^\circ = \frac{1}{\Gamma_0} \oint_{\Gamma_0} \lambda ds = \frac{\kappa}{\Gamma_0} \oint_{\Gamma_0} \operatorname{tg} \vartheta ds - \frac{1}{\Gamma_0} \oint_{\Gamma_0} \varepsilon ds \quad (6.157)$$

(здесь Γ_0 — длина дуги контура области S_0).

В результате такой замены переменных получим новый двухмерный функционал, замечательный тем, что области интегрирования — свободная поверхность жидкости и ее контур

$$V = \frac{1}{2} \int_{S_0} [(\nabla \psi)^2 - \Lambda^2 \psi^2] dS + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_0} \lambda \psi^2 ds. \quad (6.158)$$

Вычислим первую вариацию этого функционала при варьировании функции ψ :

$$\delta V = - \int_{S_0} (\nabla \psi + \Lambda^2 \psi) \delta \psi dS + \oint_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} + \lambda \psi \right) \delta \psi ds;$$

Условие $\delta V = 0$ приводит к следующей эквивалентной краевой задаче:

$$\Delta \psi + \Lambda^2 \psi = 0 \quad \text{в области } S_0;$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial n} + \lambda(s) \psi \right] \Big|_{\Gamma_0} = 0. \quad (6.159)$$

Здесь n — орт внешней нормали к контуру Γ_0 ; λ и Λ определяются формулами (6.155) и (6.157).

Воспользуемся тем же методом, существенно облегчающим ее решение, что и в разд. 3.4, а именно осуществим с помощью функции $u(\zeta)$ конформное отображение области S_0 плоскости комплексного переменного $u = y + iz$ на область S_0' плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, ограниченную прямоугольником,

$$0 \leq \xi \leq \xi_0; \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \quad (6.160)$$

Контур Γ_0 области S_0 переходит при этом в отрезок прямой $\xi=\xi_0$.

В результате функционал (6.158) примет форму

$$V = \frac{1}{2} \int_{S'_0} [(\nabla' \psi)^2 - \Lambda^2 H^2 \psi^2] dS' + \frac{\lambda^\circ}{2} \int_{\Gamma'_0} \left(\frac{\lambda}{\lambda^\circ} \right) \psi^2 ds', \quad (6.161)$$

где

$$\begin{aligned} H &= H(\xi, \zeta) = |u'(\zeta)|; \quad dS' = d\xi d\eta; \\ (\nabla' \psi)^2 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2; \quad ds' = H(\xi_0, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (6.162)$$

Эквивалентная краевая задача имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \psi + H^2 \Lambda^2 \psi &= 0 \quad \text{в области } S_0; \\ \left. \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + H \lambda \psi \right) \right|_{\Gamma'_0} &= 0; \end{aligned} \quad (6.163)$$

где

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

К граничному условию (6.163) надо присоединить условия периодичности функций ψ по переменной η и отсутствия особенностей при $\xi=0$, а также условие нормировки. Полагая, как и выше, что область S_0 имеет, по крайней мере, одну ось симметрии, можно получить дополнительные условия при $\xi=0$ из соображений симметрии (см. разд. 6.4). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением алгоритма нахождения первого собственного значения краевой задачи (6.163) и соответствующей собственной функции для каждой независимой подсистемы функций ψ_{nr} . В случае области S_0 с двумя осями симметрии типа эллипса таких функций будет три: $\psi_{1s}, \psi_{1p}, \psi_{1q}$ (см. разд. 6.4). Для этой цели удобно воспользоваться методом Рэлея, полагая

$$\psi = a [\gamma_1 + \beta \lambda H(\xi, \eta) \gamma_2], \quad (6.164)$$

где γ_1 и γ_2 — первые собственные функции краевых задач

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_1 + \kappa^2 H^2 \gamma_1 &= 0; \\ \left. \frac{\partial \gamma_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_0} &= 0; \end{aligned} \quad (6.165)$$

$$\begin{aligned} \Delta \gamma_2 + \kappa^2 H^2 \gamma_2 &= 0; \\ \left. \gamma_2 \right|_{\xi=\xi_0} &= 0, \end{aligned} \quad (6.166)$$

удовлетворяющие дополнительным условиям периодичности и симметрии (см. разд. 6.4). Параметр β выбирается так, чтобы в

каждой точке контура Γ_0' удовлетворялось граничное условие (6.163):

$$\left(\beta \frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi} + \gamma_1 \right) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (6.167)$$

Собственное значение κ определяется из условия экстремума функционала

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0. \quad (6.168)$$

В результате получается характеристическое уравнение относительно κ .

Выбор аппроксимирующей функции в форме (6.164) обеспечивает близость ее к первой собственной функции краевой задачи, что иллюстрируется ниже на примере полости вращения с единичным радиусом свободной поверхности $r_0 = 1$.

Здесь конформное отображение не требуется и можно положить в соответствии со сказанным выше

$$\begin{aligned} \psi &= a \gamma \sin \theta; \quad \gamma = \gamma_1 + \beta \gamma_2; \\ \gamma_1 &= \frac{J_1(\xi_1 r)}{J_1(\xi_1)}; \quad \gamma_2 = \frac{J_1(\zeta_1 r)}{\zeta J'_1(\zeta_1)}, \end{aligned} \quad (6.169)$$

где θ — полярный угол; r — радиус-вектор цилиндрической системы координат; $\xi_1 = 1,8412$; $\zeta_1 = 3,8317$ — первые корни трансцендентных уравнений

$$J'_1(\xi) = 0; \quad J_1(\zeta) = 0$$

(J_1 — функция Бесселя первого рода, первого порядка).

В данном случае

$$\epsilon = \frac{1}{2R}; \quad \lambda^* = \lambda = \kappa \operatorname{tg} \vartheta - \epsilon; \quad \Lambda = \kappa + \frac{\lambda}{2\kappa}. \quad (6.170)$$

Определим β так, чтобы удовлетворялось граничное условие (6.159) на контуре Γ_0 и условие нормировки

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} + \lambda \gamma \right) \Big|_{r=1} = 0; \quad \gamma \Big|_{r=1} = 1.$$

Отсюда получим $\beta = -\lambda$, т. е.

$$\psi = a (\gamma_1 - \lambda \gamma_2) \sin \theta. \quad (6.171)$$

Подставив это выражение в (6.158) и приравняв нулю производную $\partial V / \partial \alpha$, получим после использования квадратурных формул из работ [7, 60] следующее однородное уравнение:

$$(\Lambda^2 - \zeta_1^2) \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{4\lambda}{v^2 - 1} + \xi_1^2 - 1 \right) - \lambda \xi_1^2 \left[\lambda \left(1 - \frac{1}{v^2} \right) + 2 \right] = 0, \quad (6.172)$$

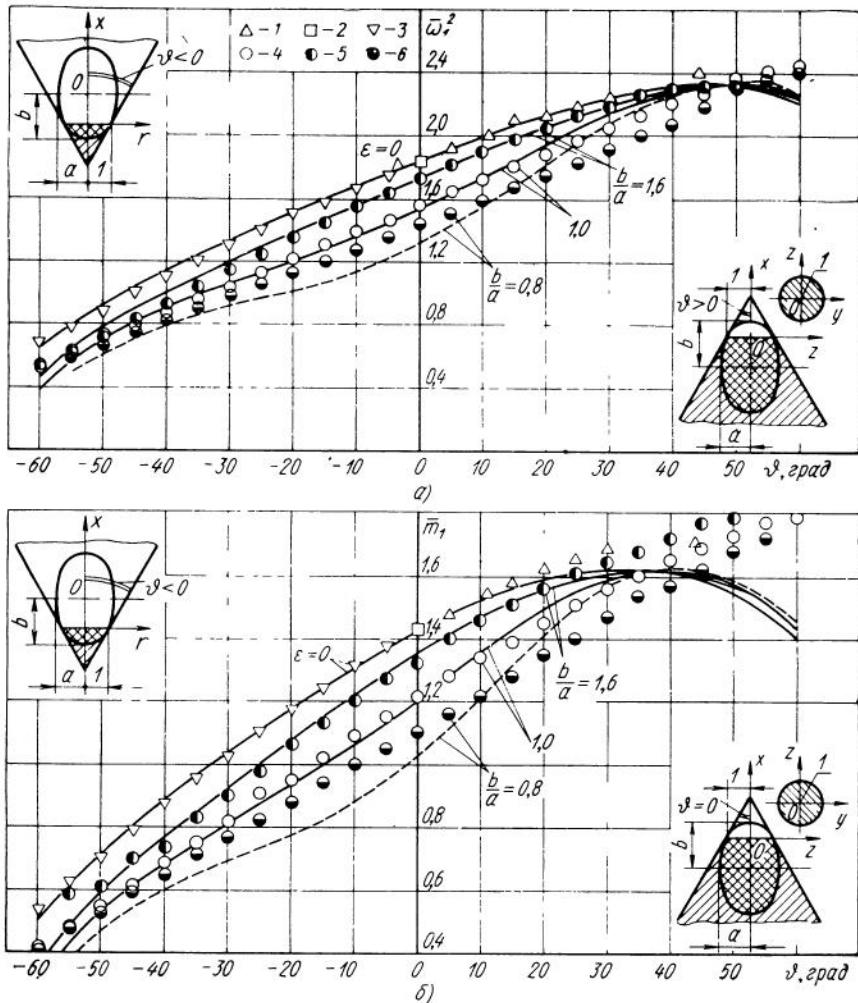
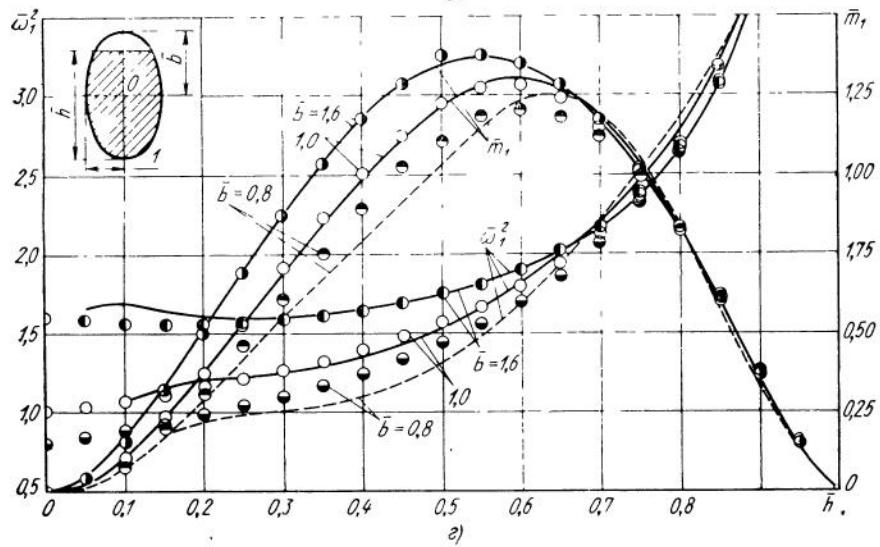
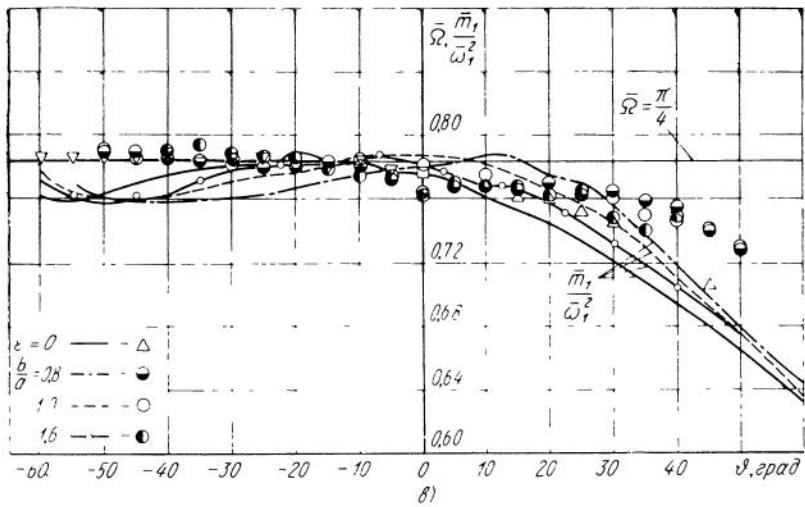


Рис. 6.14. Квадрат безразмерной частоты и безразмерная присоединенная масса для полостей в форме тел вращения:

1 — прямой конус; 2 — цилиндр; 3 — обратный конус; 4 — сфера; 5 — вытянутый эллипсоид; 6 — сплюснутый эллипсоид; 1, 3, 4 — вариационный метод Ритца — Трефтца; 2 — точное решение; — — — — — решение асимптотическим методом; a , b , v — характерный размер — радиус свободной поверхности; g — характерный размер — радиус мидлевого сечения

где

$$\nu = \frac{\zeta_1}{\xi_1}; \quad \Lambda = \frac{\lambda + \varepsilon}{\operatorname{tg} \vartheta} + \frac{\lambda \operatorname{tg} \vartheta}{2(\lambda + \varepsilon)}; \quad \chi = \frac{\lambda + \varepsilon}{\operatorname{tg} \vartheta}. \quad (6.173)$$



В случае прямого кругового цилиндра с жидкостью «бесконечной» глубины

$$\vartheta = 0; \quad \varepsilon = 0; \quad \Lambda = \kappa = \xi_1.$$

В случае сферы или эллипсоида, заполненных наполовину

$$\vartheta = 0; \quad \Lambda = \kappa - \frac{\varepsilon}{2\kappa}; \quad \lambda = -\varepsilon.$$

Можно показать, что уравнение (6.172) разрешимо при $\lambda > -1,2$ или $\lambda < -2$. Подставляя низший корень уравнения (6.172) в (6.171) и распространяя на функцию ψ условие нормировки (3.113) при $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим приближенное (в смысле Рэлея) выражение искомой собственной функции

$$\psi = \left[\frac{J_1(\xi_1 r)}{J_1(\xi_1)} - \lambda \frac{J_1'(\xi_1 r)}{\xi_1 J_1'(\xi_1)} \right] \sin \theta. \quad (6.174)$$

Подстановка ее в формулы (3.29), (3.44), (3.116) дает

$$\bar{m}_1 = \frac{2\pi \omega_1^{-2} \left(1 + \frac{\lambda}{v^2}\right)^2}{\xi_1^2 \left(\frac{\lambda^2}{v^2} + \frac{4\lambda}{v^2 - 1} + \xi_1^2 - 1\right)} ; \quad \bar{\omega}_1^2 = z. \quad (6.175)$$

Построенное асимптотическое решение по смыслу соответствует большой глубине жидкости, малой кривизне контура диаметрального сечения вблизи свободной поверхности и малому углу наклона к вертикали касательной к этому контуру, т. е. стремится к точному при $\bar{h} \rightarrow \infty$, $|\vartheta| \rightarrow 0$, $|\varepsilon| \rightarrow 0$.

Для объективной оценки критерия «малости» проведем сравнение параметров $\bar{\omega}_1^2$ и \bar{m}_1 , вычисленных методом, описанным выше, и методом Трефтца с использованием сферической системы координатных функций, для некоторых конических, сферических и эллипсоидальных полостей вращения, а также сравнение параметра $\frac{\bar{m}_1}{\bar{\omega}_1^2}$ с оценкой $\bar{\Omega}$ (6.73).

Соответствующие результаты представлены в функции угла ϑ на рис. 6.14, *a*, *b*, *v* (характерный размер — радиус свободной поверхности жидкости) и в функции относительной глубины жидкости на рис. 6.14, *g* (характерный размер — радиус миделева сечения).

Сплошные линии — расчет по методу, описанному выше, кружки и треугольники — расчет методом Трефтца с использованием до пятнадцати координатных функций [35, 60].

Горизонтальная линия на рис. 6.14, *v* соответствует верхней оценке $\bar{\Omega} = \pi/4$ величины $\bar{m}_1/\bar{\omega}_1^2$.

Как видно из рис. 6.14, описанный асимптотический метод даёт вполне удовлетворительные результаты для всех рассмотренных полостей при углах ϑ в пределах от -50° до $+50^\circ$, т. е. даже при таких глубинах, которые отнюдь не являются «большими» и углах, которые не являются «малыми». Естественно, что в случае

сплюснутого эллипсоида точность ниже, чем в случае вытянутого (сказывается «немалость» параметра ε).

Методом, изложенным выше, легко получаются (с использованием конформного отображения) асимптотические выражения для частот и присоединенных масс доминирующих гармоник, возбуждающихся при движении в плоскостях $O^*x^*z^*$ и $O^*x^*y^*$ и вращении вокруг оси Ox отсеков в форме трехосного эллипсоида и эллиптического конуса.

6.7. Асимптотика мелкой жидкости

Рассмотрим снова однородную краевую задачу (3.113), но в случае мелкой жидкости ($\bar{h} \ll 1$), когда применима теория длинных волн. Воспользуемся ее вариационной формулировкой [38].

Введем в рассмотрение функционал

$$V = \frac{1}{2} \int_{S_0} [h(\nabla\psi)^2 - \kappa\psi^2] dS. \quad (6.176)$$

Приравнивая нулю его первую вариацию

$$\delta V = - \int_{S_0} [\nabla(h\nabla\psi) + \kappa\psi] \delta\psi dS + \oint_{\Gamma_0} \left(h \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \delta\psi dS, \quad (6.177)$$

получим эквивалентную краевую задачу, которая обычно фигурирует в теории длинных волн:

$$\begin{aligned} \nabla(h\nabla\psi) + \kappa\psi &= 0 \text{ в области } S_0; \\ \left. \left(h \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) \right|_{\Gamma_0} &= 0. \end{aligned} \quad (6.178)$$

Воспользуемся снова, как и в предыдущем разделе, конформным отображением области S_0 плоскости $u = y + iz$ на область, внутреннюю по отношению к прямоугольнику S_0' плоскости $\zeta = \xi + i\eta$, с помощью функции $u(\zeta)$.

В результате функционал (6.176) перейдет в следующий:

$$V = \frac{1}{2} \int_{S_0'} [h(\nabla'\psi)^2 - \kappa H^2 \psi^2] dS', \quad (6.179)$$

где H , $(\nabla'\psi)^2$ и dS' определяются формулами (6.162).

Поскольку граничное условие (6.178) является естественным, причем обычно $h|_{\Gamma_0} = 0$, можно применить для нахождения стационарного значения функционала (6.179) метод Ритца с использованием полной системы линейно независимых координатных

функций, не накладывая ограничений на их значения на контуре области S_0' , кроме условий периодичности и отсутствия особенностей. Очень удобной для расчетов является система тригонометрических функций γ_m , удовлетворяющих на прямой $\xi = \xi_0$ одному из условий

$$\gamma_m \Big|_{\Gamma_0'} = 0 \text{ или } \frac{d\gamma_m}{d\xi} \Big|_{\Gamma_0'} = 0$$

(см. разд. 6.4).

Положив

$$\psi = \sum_{m=1}^l a_m \gamma_m \quad (6.180)$$

и используя обычный алгоритм метода Ритца (разд. 6.5), получим следующее характеристическое уравнение:

$$|a_{ij} - \kappa^2_{ij}| = 0, \quad (6.181)$$

где

$$a_{ij} = \int_{S_0'} h \nabla \gamma_i \nabla \gamma_j dS'; \quad (6.182)$$

$$\beta_{ij} = \int_{S_0'} \gamma_i \gamma_j H^2 dS'.$$

К (6.181) надо присоединить еще условия нормировки, например

$$\psi = 1 \text{ при } y = y^*, \quad z = z^*,$$

выбрав из соображений наглядности точку (y^*, z^*) контура Γ_0 .

Проиллюстрируем метод теории длинных волн на примере полости вращения с единичным радиусом свободной поверхности, когда конформное отображение не требуется и можно, поместив начало координат в полюс нижнего днища, положить

$$h(r) \approx h_0 + r \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \varepsilon_0 r^2, \quad (6.183)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2R_0}; \quad \operatorname{ctg} \vartheta_0 = \left. \frac{dx}{dr} \right|_{r=0}; \quad (6.184)$$

R_0 — радиус кривизны диаметрального сечения L поверхности S в точке $r=0$.

Рассмотрим для примера определение первой собственной функции (6.180) на основе двучленного приближения вида

(6.169), считая теперь $a_1=a$ и $a_2=a\beta$ неопределенными параметрами, которые определяются наименьшим корнем x_1 уравнения (6.181).

Поделив все коэффициенты a_{ij} и β_{ij} на π , получим

$$\beta_{11} = \frac{I_{11}}{\xi_1^2}; \quad \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{I_{21}}{\xi_1^2}; \quad \beta_{22} = \frac{I_{31}}{\xi_1^2}$$

$$a_{11} = h_0 I_{11} + \operatorname{ctg} \vartheta_0 I_{12} - \varepsilon_0 I_{13};$$

$$\alpha_{21} = \alpha_{12} = h_0 I_{21} + \operatorname{ctg} \vartheta_0 I_{22} - \varepsilon_0 I_{23};$$

$$a_{22} = h_0 + \operatorname{ctg} \vartheta_0 I_{32} - \varepsilon_0 I_{33}, \quad (6.185)$$

где коэффициенты I_{11} , I_{21} , I_{31} вычисляются с помощью квадратурных формул, приведенных в книгах [7, 60]:

$$I_{11} = \xi_1^2 - 1; \quad I_{21} = -\frac{2}{\sqrt{v^2 - 1}}; \quad I_{31} = \frac{1}{\sqrt{v^2}},$$

а остальные коэффициенты — путем численного выполнения квадратур методом Гаусса.

Значения I_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) сведены в табл. 6.4.

Таблица 6.4

j	i,		
	1	2	3
1	2,3900	-0,60043	0,23090
2	1,3239	-0,17041	0,62241
3	0,87334	-0,04735	0,46955

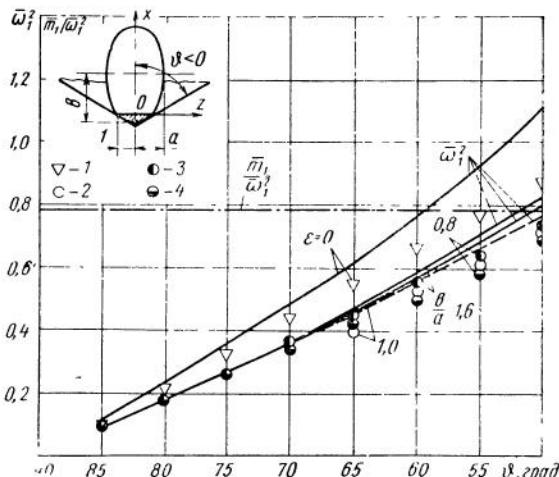


Рис. 6.15. Квадрат безразмерной частоты и безразмерная присоединенная масса для полостей в форме тел вращения:
 1 — прямой конус; 2 — сфера;
 3 — вытянутый эллипсоид;
 4 — сплюснутый эллипсоид,
 1, 2, 3, 4 — вариационный метод
 Ритца — Трефтца.
 — — — решение методом
 теории длинных волн

Результаты расчета параметров $\bar{\omega}_1^2$, $\frac{\bar{m}_1}{\bar{\omega}_1^2}$ представлены в функции угла ϑ на рис. 6.15. Кружки и треугольники здесь, как и на рис. 6.14, — расчет методом Трефтца с использованием трехмерного функционала (6.43) [35, 60].

Как видно из рис. 6.15, асимптотический характер полученных решений для мелкой жидкости проявляется еще более четко, чем для глубокой. Заметим, что рассчитанные приближенные значения $\bar{m}_1/\bar{\omega}_1^2$ практически одинаковы для всех рассмотренных полостей и совпадают с $\bar{\Omega} = \frac{\pi}{2}$.

6.8. Метод возмущений в задачах о колебаниях жидкости в баках с узкими кольцевыми или радиальными ребрами

Метод возмущений был впервые применен Майлсом и Бауэром для определения коэффициента нелинейного демпфирования и присоединенных моментов инерции жидкости в цилиндрической полости с кольцевым ребром [78, 67], а также Г. Н. Микишевым и Н. Я. Дорожкиным для определения коэффициента нелинейного демпфирования колебаний жидкости в цилиндрической полости с радиальными ребрами [34].

Дальнейшие обобщения были получены автором и В. М. Роговым [36, 46, 47, 48]. Достаточно подробный перечень теоретических и экспериментальных работ в этой области, включая некоторые точные решения, не связанные с предположениями о малости ширины ребер или колец, дан в книгах [35, 36].

Суть метода возмущений заключается в использовании поля скоростей порождающего движения идеальной жидкости в той же полости, но без ребер или колец.

Рассмотрим жесткий отсек с двумя плоскостями симметрии, имеющий внутренние ребра, которые целиком затоплены в жидкости и представляют собой части координатных поверхностей, ортогональных смоченной поверхности S .

Если система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 выбрана так, что координатная поверхность $q_1 = q_{10}$ совпадает с поверхностью S , то поверхности $q_2 = \text{const}$, имеющие общую с отсеком ось симметрии, соответствуют кольцевым ребрам, а поверхности $q_3 = \text{const}$ — радиальным.

Примем, что относительная ширина ребер $\bar{b} = b/l$ постоянна, если ребра кольцевые, и может меняться непрерывно по произвольному закону, если они радиальные, но всегда остается малой, т. е. $\bar{b}_{\max} \ll 1$ (рис. 6.16).

Рассмотрим сначала задачу об определении частот собственных колебаний жидкости и присоединенных масс для такого рода полостей, считая, что система собственных функций $\varphi_n = \varphi_{nr}$ ($r = s, p, q$), отвечающая свободным колебаниям жидкости в той

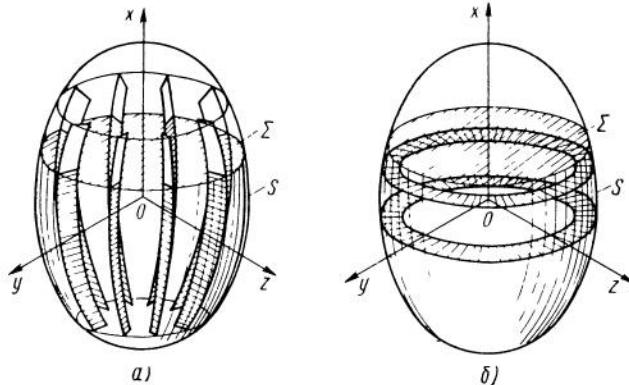


Рис. 6.16. Общая конфигурация радиальных и кольцевых ребер:
а — радиальные, б — кольцевые

же полости с гладкими стенками, известна, как и составляющие потенциала смещений Ψ_i ($i=1, 2, 3$). В дальнейшем будем для упрощения записи опускать индекс r , имея в виду, что $r=q, s, p$ при $i=1, 2, 3$.

Ниже излагается приближенный метод определения всех гидродинамических коэффициентов, пригодный в принципе для отсека произвольной конфигурации. В криволинейных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 уравнение Лапласа, которому должен удовлетворять искомый потенциал смещений χ , имеет вид [22]

$$\Delta\chi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \chi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \chi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \chi}{\partial q_3} \right) \right\} = 0, \quad (6.186)$$

где H_i ($i=1, 2, 3$) — параметры Ламе.

Составляющие смещения частиц жидкости по осям криволинейной системы координат q_1, q_2, q_3 определяются формулами

$$u_{q_i} = \text{grad}_{q_i} \chi = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \chi}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, 3). \quad (6.187)$$

Представим искомый потенциал χ в форме

$$\chi = \chi^0 + \chi', \quad (6.188)$$

где χ^0 — потенциал смещений «порождающего» движения жидкости в полости без ребер, а χ' — дополнительный потенциал, учитывающий эффект ребер. Идея метода, излагаемого ниже, заключается в том, что потенциал χ' рассматривается как возмущение, носящее характер малой поправки к χ^0 , существенной только в окрестностях каждого ребра, по обе стороны.

Далее предполагается, что потенциал $\chi'(q_1, q_2, q_3, t)$ почти не зависит от координаты q_3 , когда ребра кольцевые, и от координаты q_2 , когда они радиальные, что позволяет заменить трехмерное уравнение (6.186) следующими приближенными двухмерными:

$$\Delta\chi' = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \chi'}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \chi'}{\partial q_2} \right) \right\} = 0 \quad (6.189a)$$

(кольцевые ребра);

$$\Delta\chi' = \frac{1}{H_1 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_3}{H_1} \frac{\partial \chi'}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1}{H_3} \frac{\partial \chi'}{\partial q_3} \right) \right\} = 0 \quad (6.189b)$$

(радиальные ребра).

Ширина ребер в силу принятых допущений мала по сравнению с характерным размером, имеющим порядок минимального из главных радиусов кривизны поверхности S , и расстоянием между ребрами. Поэтому справедливо каждое из уравнений (6.189a) и (6.189b) в местной декартовой системе координат $O'x'y'$ (ось $O'x'$ выбирается так, что ее орт образует острый угол с вектором $-\mathbf{v}'$). При этом y' играет роль q_1 , а x' — роль q_2 в случае кольцевых ребер и q_3 в случае радиальных. Соответственно потенциал χ' отождествляется с потенциалом смещений, соответствующим потенциальному скоростям обтекания ребра, перпендикулярного прямолинейной стенке бесконечной протяженности [24].

Нормальная к ребру составляющая относительной скорости «порождающего движения» жидкости v_v' , определяется так (см. выражение (3.4)):

$$v_v' = (\mathbf{v}', \mathbf{v}) = - \left(\theta, \left(\mathbf{R} \times \mathbf{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial v}, \quad (6.190)$$

где v — орт нормали к ребру, образующий острый угол с вектором относительной скорости жидкости \mathbf{v}' .

Выражение χ' в случае k ребер, расстояние между которыми много больше максимальной ширины b , может быть записано после отбрасывания слагаемых, не играющих роли в рассматриваемой задаче, в виде

$$\chi' = (\theta, \Psi') + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \varphi_n', \quad (6.191)$$

где

$$\Psi' = \sum_{m=1}^k \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} - \mathbf{R} \times \mathbf{v} \right) \Big|_{L_m} \varphi';$$

$$\varphi_n' = \sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \Big|_{L_m} \varphi'; \quad \varphi' = \operatorname{Re} \sqrt{z'^2 + b^2}. \quad (6.192)$$

Здесь $z' = x' + iy'$ комплексная переменная, соответствующая местной системе координат $o'x'y'$, ось $o'x'$ которой совпадает со стенкой, а ось $o'y'$ — с ребром.

Вводя для составляющих потенциала смещений при отсутствии ребер новые обозначения Ψ_i° и φ_n° , учитывая (6.188) и (6.192), получим следующие выражения для соответствующих составляющих с учетом ребер:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \Psi_i + \Psi'_i = \Psi_i^\circ + \sum_{m=1}^k \left[\frac{\partial \Psi_i^\circ}{\partial v} - (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_i \right] \Big|_{L_m} \varphi'; \\ \varphi_n &= \varphi_n^\circ + \varphi'_n = \varphi_n^\circ + \sum_{m=1}^k \frac{\partial \varphi_n^\circ}{\partial v} \Big|_{L_m} \varphi' \quad (6.193) \\ (i &= 1, 2, 3; n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Аналогичные обозначения применим для всех коэффициентов, относящихся к отсеку без ребер. Используя формулы (6.193), (3.23), (3.44) и (3.63), можно учесть гидродинамический эффект ребер.

Для отсека с двумя плоскостями симметрии, учитывая, что при обходе контура Γ_m' по часовой стрелке (рис. 6.17)

$$\rho \int_{\Gamma_m'} \varphi' dy' = -\frac{\rho \pi b^2}{2} \quad (6.194)$$

(это соответствует теоретическому значению присоединенной массы \bar{m} в выражении (1.21) со знаком «—»), получим следующие выражения гидродинамических коэффициентов:

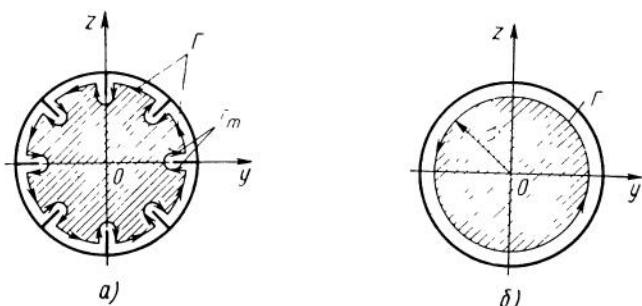


Рис. 6.17. Интегрирование по смоченной поверхности в сечении $x=\text{const}$: а — в случае радиальных ребер; б — в случае кольцевого ребра

$$\begin{aligned}
J_{ji} &= 0 \quad \text{при } i \neq j; \\
J_{jj} &= J_{jj}^{\circ} + \frac{\pi\rho}{2} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \left[(\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j - \frac{\partial \Psi_j^{\circ}}{\partial v} \right] (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j b^2 ds; \\
\lambda_{nj} &= \lambda_{nj}^{\circ} - \frac{\pi\rho}{2} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} v_j b^2 ds; \\
\lambda_{onj} &= \lambda_{onj}^{\circ} - \frac{\pi\rho}{2} \int_{L_m} \frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j b^2 ds; \\
\nu_n &= \nu_n^{\circ} + 2\rho \dot{x}_n \sum_{m=1}^k \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} \Big|_{L_m} \varphi_n^{\circ} \varphi' dS - \frac{\pi\rho}{2} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \left(\frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} \right)^2 b^2 ds; \\
\frac{1}{x_n} &= \frac{1}{x_n^{\circ}} \left[1 + \frac{\pi\rho}{2\mu_n} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \left(\frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} \right)^2 b^2 ds \right]. \tag{6.195}
\end{aligned}$$

При вычислении криволинейных интегралов в случае кольцевых ребер контуры следует обходить против часовой стрелки, а в случае радиальных — от нижнего полюса к верхнему (рис. 6.18).

Все функции в подынтегральных выражениях (6.195) принимают при каждом m значения, соответствующие m -му ребру, в частности, $b = b_m$, $v = v_m$, $\varphi' = \varphi'(z'_m, b_m)$ и т. д. В последних двух формулах отброшены члены второго порядка относительно φ' .

Фактически мы учли при получении формул (6.195) инерционную составляющую гидродинамической силы (1.22), приложенной к ребру. Переходим к учету диссипативной составляющей, предполагая теперь, как при выводе уравнений (3.93) и (3.131), что возмущенное движение носит характер квазигармонических колебаний.

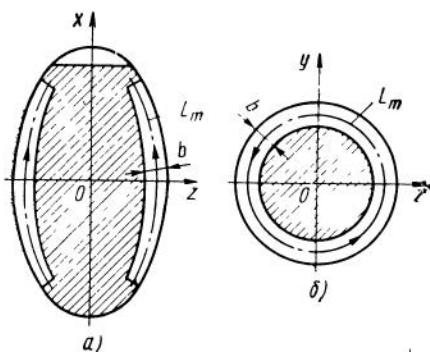


Рис. 6.18. Интегрирование по контуру, образованному средней линией ребра:

a — в случае радиальных ребер; *b* — в случае кольцевого ребра

Задачу будем решать при тех же предположениях, что и выше, с той лишь разницей, что неидеальность жидкости в данном случае приводит к вихреобразованию на острых кромках и соответственно к нелинейному демпфированию. Эффект пограничного слоя может быть учтен независимо, как это описано в гл. 3.

Воспользуемся формулой (1.22) для определения диссипативной составляющей гидродинамической силы, приложенной к элементу ребра длиной ds ,

$$df = \frac{K_i^{\circ}}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{v}_{0y}}{\pi b \omega}} \rho b^2 \omega v_y \varphi(x') ds, \quad (6.196)$$

где

$$\bar{v}_{0y} = \frac{v_{0y}}{l} = \tilde{v}_{0y} \bar{b}; \quad K_i^{\circ} = \frac{4}{3\sqrt{2}} K_i; \quad x' = \frac{1}{b} (\bar{h} + \bar{x}_o - \bar{x}); \quad (6.197)$$

$$\bar{b} = \frac{b}{l}; \quad \bar{h} = \frac{h}{l}; \quad \bar{x}_o = \frac{x_o}{l}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l};$$

v_{0y} — амплитуда относительной скорости v_y ; ω — характерная частота; l — характерный размер; x_o — расстояние от начала координат до полюса нижнего днища.

Коэффициенты K_i и функция $\varphi(x')$ определяются в соответствии с табл. 1.1.

В силу выражений (6.190)

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{v}_y = -\left[\dot{\theta}, \left(\mathbf{R} \times \mathbf{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \right] \mathbf{v}, \quad (6.198)$$

где \mathbf{v} — орт нормали к поверхности ребра, образующий острый угол с направлением относительной скорости жидкости \mathbf{v}' .

Исходя из такой концепции можно непосредственно воспользоваться уравнениями (3.93), приняв во внимание симметрию полости и считая теперь коэффициенты, связанные с диссипацией энергии, нелинейными функциями амплитуды, определяемыми на основе формулы (6.196) по аналогии с коэффициентами (3.94). Поверхностные интегралы при этом, естественно, переходят в интегралы по контуру, так что выражения для коэффициентов приобретают следующую форму:

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{\circ} &= 0 \quad (i \neq j); \\ \beta_{jj} = \beta_j^{\circ} &= K_i^{\circ} \frac{\rho \omega}{\pi} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \sqrt{\frac{\bar{v}_{0y}}{\pi b \omega}} \left[-(\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right]^2 b^2 \varphi(x') ds \\ &\quad (j = 1, 2, 3); \end{aligned}$$

$$\beta_{0nj} = K_i^{\circ} \frac{\rho \omega}{\pi} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \sqrt{\frac{\bar{v}_{0v}}{\pi b \omega}} \left[-(\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right] \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} b^2 \varphi(x') ds \\ (j=1, 2, 3; n=1, 2, \dots); \quad (6.199)$$

$$\beta_n = K_i^{\circ} \frac{\rho \omega}{\pi \mu_n} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \sqrt{\frac{\bar{v}_{0v}}{\pi b \omega}} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \right)^2 b^2 \varphi(x') ds \quad (n=1, 2, \dots),$$

где L_m — контур, образованный средней линией m -го ребра, к которому отнесены все подынтегральные выражения в (6.199).

При этом возникает вопрос о расшифровке выражений для амплитудных значений \bar{v}_{0v} . Имея в виду наиболее точное описание диссипации энергии при колебаниях системы на частотах, близких к частотам ее собственных колебаний, естественно принять, как в гл. 3, $\omega = \omega_n$ в уравнении для каждой из обобщенных координат s_n и $\omega = \omega_j^0$ в уравнении для j -й компоненты углового перемещения отсека θ_j , а переменной \bar{v}_{0v} присвоить значение амплитуды относительной скорости той гармоники, которая резонирует на данной частоте, т. е. положить

$$\bar{v}_{0v}^{(m)} \approx \frac{\dot{\theta}_{0j}}{\omega_j^0 l} \left| -(\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right| \Big|_{L_m} \quad \text{при } \omega = \omega_j^0; \quad (6.200)$$

$$\bar{v}_{0v}^{(m)} \approx \frac{\dot{s}_{0n}}{\omega_n l} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \right| \Big|_{L_m} \quad \text{при } \omega = \omega_n.$$

Здесь ω_j^0 — характерная частота системы корпус — АС
Формулам (6.199) можно теперь придать вид

$$\beta_j^0 = K_i^{\circ} \frac{\rho \omega_j^0}{\pi} \sqrt{\frac{\dot{\theta}_{0j}}{\pi \omega_j^0 l}} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \sqrt{\frac{1}{b l} \left| -(\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right|^2} \cdot$$

$$\cdot \left[-(\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right]^2 b^2 \varphi(x') ds \quad (j=1, 2, 3);$$

$$\beta_{0nj} = K_i^{\circ} \frac{\rho \omega_n}{\pi} \sqrt{\frac{\dot{s}_{0n}}{\pi l \omega_n}} \sum_{m=1}^k \int_{L_m} \sqrt{\frac{1}{b} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \right|^2} \cdot$$

$$\cdot \left[-(\mathbf{R} \times \mathbf{v})_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial v} \right] \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} b^2 \varphi(x') ds \quad (j=1, 2, 3; n=1, 2, \dots); \quad (6.201)$$

$$\beta_n = K_i \frac{!_{\rho \omega_n}}{\pi \mu_n} \sqrt{\frac{s_{0n}}{\pi l \omega_n}} \int_{L_m} \sqrt{\frac{1}{b} \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \right|} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \right)^2 b^2 \varphi(x') ds$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

Можно показать, как и в разд. (3.3), инвариантность этих коэффициентов относительно полюса O [36].

Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике бак в форме тела вращения с k радиальными ребрами или одним кольцевым ребром, перпендикулярным продольной оси бака. В последнем случае можно по-прежнему пользоваться функцией φ' (6.192) и присоединенной массой жидкости, соответствующей обтеканию ребра, перпендикулярного стенке, поскольку последняя близка к присоединенной массе при обтекании наклонного ребра, имеющего тот же размер в направлении нормали к стенке. Среднюю линию кольцевого ребра обозначим L_0 , ее радиус — r_0 , радиус миделевого сечения бака (характерный размер) — r_0 .

При использовании формул (6.195) требуется вычислить в каждом конкретном случае интеграл

$$E_m = \int \frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \Big|_{L_m} \varphi_n^\circ \varphi' dS \quad (6.202)$$

(кольцевое ребро — $m=0$, радиальные ребра — $m=1, 2, \dots, k$).

Можно показать, что эта задача может быть приближенно решена в общем виде. Воспользуемся с этой целью приближенным представлением потенциала смещений φ_n° для произвольной полости, имеющей форму тела вращения, предложенным И. А. Луковским в работе [28], которое в принятых обозначениях имеет вид (см. также работу [60]):

$$\varphi_n^\circ = \frac{e^{x_n^\circ \pi r} J_1(x_n^\circ r) \sin \theta}{x_n^\circ J_1(x_n^\circ r_1)}, \quad (6.203)$$

где r_1 — радиус свободной поверхности жидкости; J_1 — функция Бесселя первого рода, первого порядка (начало координат помещено в плоскости Σ).

Как показано в работах [28, 60], выражение (6.203) хорошо аппроксимирует искомый потенциал смещений вблизи свободной поверхности жидкости, что в данном случае и требуется. Функция φ_n° удовлетворяет двухмерному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \varphi_n^\circ + x_n^\circ \varphi_n^\circ = 0, \quad (6.204)$$

а φ' — двухмерному уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi' = 0. \quad (6.205)$$

Подставим в (6.202) выражение φ_n° из (6.204) и воспользуемся формулой Грина

$$\int_{\Sigma} (\varphi_n^\circ \Delta \varphi' - \varphi' \Delta \varphi_n^\circ) dS = \oint_{\Gamma + \Gamma_m'} \left(\varphi_n^\circ \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi_n^\circ}{\partial n} \right) ds.$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к контуру $\Gamma + \Gamma_m'$; Γ — контур, охватывающий свободную поверхность (окружность радиуса r_1 с исключёнными точками пересечения ее с радиальными ребрами);

Γ_m' — контур, охватывающий обе стороны ребра в плоскости, совпадающей с Σ , если ребро пересекает эту плоскость (см. рис. 6.17, а); в противном случае $\Gamma_m' \equiv 0$ (см. рис. 6.17, б); Δ — двухмерный оператор Лапласа.

В результате получим

$$E_m = -\frac{1}{\omega_n^2} \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n^\circ}{\partial n} \Big|_{L_m} \Delta \varphi_n^\circ \varphi' dS = \\ = -\frac{1}{\omega_n^2} \oint_{\Gamma + \Gamma_m'} \frac{\partial \varphi_n^\circ}{\partial n} \Big|_{L_m} \left(\varphi' \frac{\partial \varphi_n^\circ}{\partial n} - \varphi_n^\circ \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \right) ds. \quad (6.206)$$

Задача заключается в получении выражений безразмерных гидродинамических коэффициентов, связанных с коэффициентами (6.195) и (6.201) формулами (3.116) и (3.117). Безразмерные диссипативные коэффициенты для полости вращения удобно представить по аналогии с (3.118) в форме

$$\bar{\beta}^0 = \tilde{\beta}^0 \sqrt{\frac{\psi_0}{\omega^0}}; \quad \bar{\beta} = \tilde{\beta} \sqrt{\frac{\dot{\psi}_0}{\omega_0}}; \quad (6.207)$$

$$\bar{\beta}_n = \tilde{\beta}_n \sqrt{\frac{\dot{s}_{0n}}{\omega_n}}; \quad \bar{\beta}_{on} = \tilde{\beta}_{on} \sqrt{\frac{\dot{s}_{0n}}{\omega_n}}; \quad \dot{s}_{0n} = \frac{\dot{s}_{0n}}{r_0}.$$

Для сравнения с результатами, имеющимися в литературе, введем дополнительные параметры

$$\tilde{\delta}_n = \pi \tilde{\beta}_n; \quad \tilde{\delta}_{on} = \frac{\pi \tilde{\beta}_{on}}{\mu_n}, \quad (6.208)$$

первый из которых совпадает с логарифмическим декрементом колебаний.

Обозначив угол между m -м ребром и плоскостью Oxy через θ_m , получим (см. 6.142):

$$\varphi_n|_{L_m} = f_n(x, r)|_{L_m} \sin \theta_m; \quad \Psi_2^{\circ}|_{L_m} = F(x, r)|_{L_m} \sin \theta_m; \quad (6.209)$$

$$(z^y_x - x^y_z)|_{L_m} = -x|_{L_m} \sin \theta_m; \quad (y^y_z - z^y_y)|_{L_m} = r|_{L_m};$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \Big|_{L_m} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_m} \Big|_{L_m}; \quad \varphi^{\circ}|_{L_m, \Sigma} = \frac{1}{\kappa_n} \sin \theta_m;$$

$$\sum_{m=1}^k \sin^2 \theta_m = \sum_{m=1}^k \cos^2 \theta_m = \frac{k}{2}.$$

В случае сильно заглубленных ребер, не доходящих до свободной поверхности жидкости Σ ,

$$\varphi' \frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} \Big|_{\Gamma} \approx 0; \quad \varphi_n^{\circ} \frac{\partial \varphi'}{\partial v} \Big|_{\Gamma} \approx 0; \quad E_m \approx 0.$$

В частности, для полости в форме кругового цилиндра $\frac{\partial \varphi_n}{\partial v} \Big|_{\Gamma} = 0$, кроме того, κ_n^2 в уравнении (6.204) надо заменить на k_n^2 (см. разд. 6.1).

В случае ребер, пересекающих поверхность Σ ,

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial v} \Big|_{\Gamma_m'} = 0; \quad E_m \approx \frac{\pi}{\kappa_n^2} \left(b \frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} \right)^2 \Big|_{L_m, \Sigma} = \frac{\pi b^2}{2 \kappa_n^4 r^2} \Big|_{L_m, \Sigma} \cos^2 \theta_m, \quad (6.210)$$

где $\frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial v} \Big|_{\Gamma_m, \Sigma}$ — производная по нормали к ребру в точке пересечения средней линии ребра L_m и поверхности Σ .

В результате получим из (3.116), (6.195), (6.209) и (6.210) следующие формулы для основных безразмерных коэффициентов:

$$\bar{I} = \frac{\pi k}{2r_0^5} \int_{L_m} r^2 b^2 ds;$$

$$\bar{J} = \bar{J}^{\circ} + \frac{\pi k}{4r_0^5} \int_{L_m} \left(x + \frac{F}{r} \right) b^2 x ds;$$

$$\bar{\lambda}_n = \bar{\lambda}_n^{\circ} - \frac{\pi k}{4r_0^3} \int_{L_m} \frac{f_n}{r} b^2 ds; \quad (6.211)$$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{on} &= \bar{\lambda}_{on}^{\circ} + \frac{\pi k}{4r_0^4} \int_{L_m} \frac{x}{r} f_n b^2 ds; \\ \bar{\mu}_n &= \bar{\mu}_n^{\circ} - \frac{\pi k}{4r_0^3} \left[\int_{L_m} \left(\frac{f_n b}{r} \right)^2 ds - \frac{2}{\omega_n^3} \frac{b^2}{r^2} \Big|_{L_m} \right]; \\ \bar{\omega}_n^2 &= \frac{\omega_n^2}{1 + \frac{\pi k}{4\bar{\mu}_n r_0^3} \int_{L_m} \left(\frac{f_n b}{r} \right)^2 ds}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом решается вопрос о безразмерных диссипативных коэффициентах, которые в силу (3.117), (6.201), (6.207) и (6.209) определяются формулами

$$\begin{aligned}\bar{\beta}^{\circ} &= \frac{K_1^{\circ} k}{r_0^3} \int_{L_m} \sqrt{\frac{r}{r_0}} r^2 b^* \varphi(x') ds; \\ \bar{\beta} &= \frac{K_1^{\circ} k_1}{r_0^3} \int_{L_m} \sqrt{\frac{1}{r_0} \left| x + \frac{F}{r} \right|} \left(x + \frac{F}{r} \right)^2 b^* \varphi(x') ds; \\ \bar{\beta}_{on} &= \frac{K_1^{\circ} k_1}{r_0^2} \int_{L_m} \sqrt{\frac{|f_n|}{r}} \left(x + \frac{F}{r} \right) \frac{f_n}{r} b^* \varphi(x') ds; \\ \bar{\beta}_n &= \frac{K_1^{\circ} k_1}{\bar{\mu}_n r_0} \int_{L_m} \sqrt{\frac{|f_n|}{r}} \frac{f_n^2}{r^2} b^* \varphi(x') ds; \\ k_1 &= \sum_{m=1}^k |\cos \theta_m|^{\frac{5}{2}}; \quad b^* = \left(\frac{\bar{b}}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad \bar{b} = \frac{b}{r_0}.\end{aligned}\quad (6.212)$$

По формулам (6.211) и (6.212) были рассчитаны коэффициенты для кругового цилиндра с радиальными ребрами. Соответствующие результаты представлены в функции относительной глубины \bar{h} на рис. 6.19 ($k=8$) (см. также книгу [36]).

Кольцевое ребро, перпендикулярное продольной оси

В данном случае

$$\begin{aligned}\varphi_n^{\circ}|_{L_0} &= f_n(x, r)|_{L_0} \sin \theta; \quad \Psi_2^{\circ}|_{L_0} = F(x, r)|_{L_0} \sin \theta; \\ (zv_x - xv_z)|_{L_0} &= r'_0 \sin \theta; \quad (yv_z - zv_y)|_{L_0} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial v} \Big|_{L_0} &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{L_0}; \quad \varphi_n^{\circ}|_2 = \frac{1}{\omega_n^3} \sin \theta; \quad r_0|_{L_0} = r'_0.\end{aligned}\quad (6.213)$$

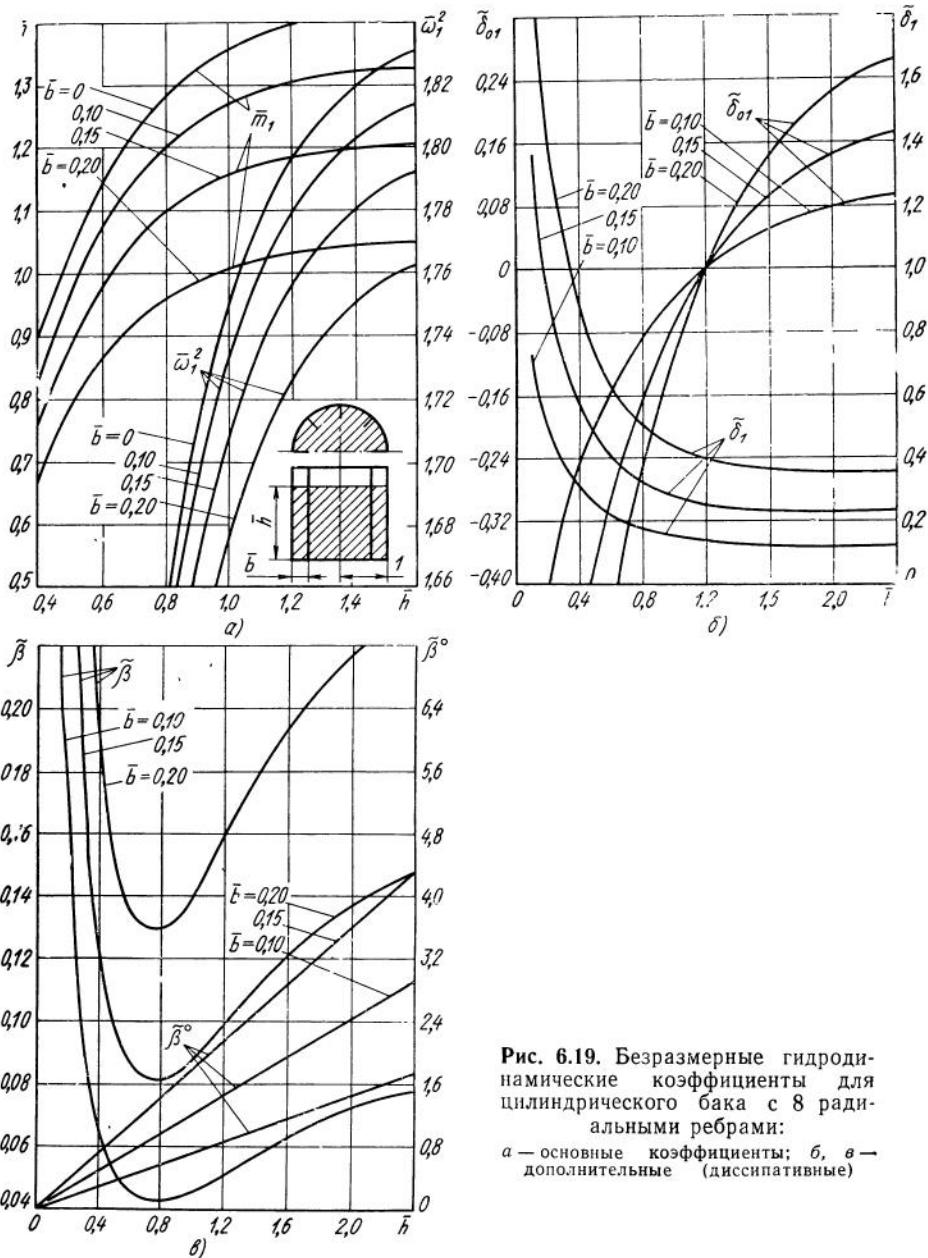


Рис. 6.19. Безразмерные гидродинамические коэффициенты для цилиндрического бака с 8 радиальными ребрами:
 а — основные коэффициенты; б, в — дополнительные (диссипативные)

Выражение (6.206) приобретает форму

$$E_0 = -\frac{1}{\mathbf{x}_n^2} \oint_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{L_0} \left(\varphi' \frac{\partial \varphi_n^{\circ}}{\partial n} - \varphi^{\circ} \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \right) ds = \\ = -\frac{\pi r_0'}{\mathbf{x}_n^2} \frac{\partial f_n}{\partial x} \Big|_{L_0} \left(\varphi' \frac{\partial f_n}{\partial r} - \frac{1}{\mathbf{x}_n^{\circ}} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right) \Big|_{\Gamma}. \quad (6.214)$$

Если полость мало отличается от цилиндра, то $E_0 \approx 0$. Еще одна особенность рассматриваемой задачи заключается в невозможности определить λ_n из формул (6.195), так как они дают $\lambda_n \equiv \lambda_n^{\circ}$, что связано не с существом дела, а с недостатком приближенной теории. Этую трудность можно обойти для доминирующей гармоники φ_1 ($n=1$), если воспользоваться приближенной формулой (6.76), в силу которой

$$\lambda_1^2 = \lambda_1^{\circ 2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_1^{\circ}} \right)^2.$$

Учитывая (3.116), (6.213) и (6.214), получим из формул (6.195)

$$\bar{J} = \bar{J}^{\circ} + \frac{\pi^2}{2} \left(\bar{r}'_0 - \frac{1}{r_0} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{L_0} \right) \bar{r}'_0^2 \bar{b}^2; \quad \bar{I} \equiv 0; \\ \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_1^{\circ 2} \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1^{\circ}} \right)^2; \\ \bar{\lambda}_{on} = \bar{\lambda}_{on}^{\circ} - \frac{\pi^2}{2} \frac{\partial f_n}{\partial x} \Big|_{L_0} \bar{r}'_0^2 \bar{b}^2; \quad (6.215)$$

$$\bar{\mu}_n = \bar{\mu}_n^{\circ} - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x} \right)^2 \Big|_{L_0} \bar{r}'_0 b^2 - \frac{2\pi \bar{r}'_0}{\mathbf{x}_n^{\circ} \bar{r}'_0^2} \frac{\partial f_n}{\partial x} \Big|_{L_0} \left(\varphi' \frac{\partial f_n}{\partial r} - \frac{1}{\mathbf{x}_n^{\circ}} \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right) \Big|_{\Gamma}; \\ \bar{\omega}_n^2 = \frac{\bar{\omega}_n^{\circ 2}}{1 + \frac{\pi^2 \bar{r}'_0 \bar{b}^2}{2 \bar{\mu}_n} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x} \right)^2 \Big|_{L_0}}; \\ \bar{r}'_0 = \frac{r'_0}{r_0}; \quad \bar{b} = \frac{b}{r_0}.$$

Аналогичным образом найдем из (3.117), (6.201), (6.207) и (6.213)

$$\tilde{\beta}^0 \equiv 0;$$

$$\tilde{\beta} = K_2^{\circ} k_2 \bar{r}'_0 b^* \sqrt{ \left| \frac{\partial F}{\partial x} - \bar{r}'_0 \right|_{L_0} \frac{1}{r_0} } \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial F}{\partial x} - \bar{r}'_0 \right)^2 \Big|_{L_0};$$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{on} &= K_2^o k_2 b^* \bar{r}_0'^2 \sqrt{\left| \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|} \left. \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|_{L_o} \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial F}{\partial x} - \bar{r}_0' \right) \Big|_{L_o}; \\ \tilde{\beta}_n &= \frac{K_2^o k_2 b^* \bar{r}_0'}{\mu_n r_0^3} \sqrt{\left| \frac{\partial f_n}{\partial x} \right|} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x} \right)^2 \Big|_{L_o}; \\ k_2 &= \int_0^{2\pi} |\sin \theta|^{\frac{5}{2}} d\theta = 2,875.\end{aligned}\quad (6.216)$$

По формулам (6.216) была рассчитана вся совокупность безразмерных гидродинамических коэффициентов для кругового цилиндра с кольцевым ребром [36].

На рис. 6.20 показаны в функции глубины \bar{h} безразмерные квадраты частот $\bar{\omega}_1^2$ и присоединенные массы \bar{m}_1 для цилиндрических баков с плоским и коническим днищами и сферического бака, полученные автором [46] и В. Л. Шетухиным [62]; квадратами, треугольниками и кружками изображены «точные» (в рамках концепции безотрывного обтекания ребра) значения, полученные В. А. Троценко [57, 58].

Сопоставление этих результатов свидетельствует о том, что метод возмущений, изложенный выше, сохраняет эффективность во всем рассмотренном диапазоне значений \bar{b} . Этим же методом автоматически учитывается наличие щели между ребром и стенкой бака, если заменить присоединенную массу жидкости при обтекании ребра в соответствии с рис. 1.12 и эмпирические константы в табл. 1.1 с учетом наличия щели [62].

Заканчивая главу, приведем расчетные значения $\bar{\omega}_n^2$, \bar{m}_n , $\bar{\omega}_n^2$, $\frac{m_n}{m^o + m}$, в функции безразмерного времени полета $\tau = \frac{t}{t_k}$, соответствующие основному тону колебаний жидкости в баках отделяющейся части первой ступени РН «Сатурн-5» (n — номер бака, 1 — горючее, 2 — окислитель). Размеры баков, принятые в расчете, выполненному методом Трефтаца (разд. 6.5), приведены в табл. 6.5.

Таблица 6.5

n	Радиус обечайки r_0 , м	Радиус кривизны днища R_n , м	Расстояние между полюсами днищ H_n , м
1	5,12	5,74	13,1
2	5,12	5,49	19,5

Изменение полной массы $m^o + m$ принято в соответствии с табл. 11.2 гл. 11. Результаты расчетов приведены на рис. 6.21.

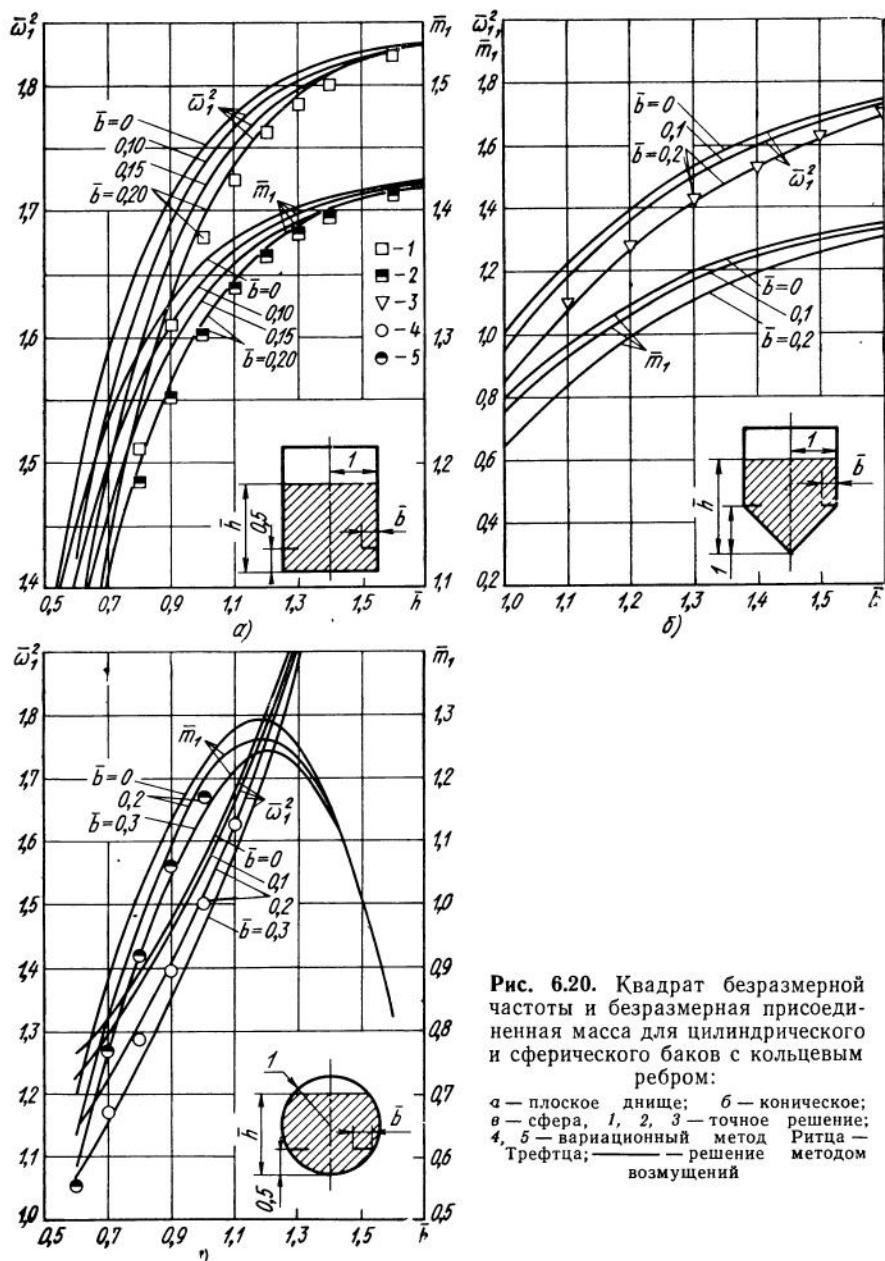


Рис. 6.20. Квадрат безразмерной частоты и безразмерная присоединенная масса для цилиндрического и сферического баков с кольцевым ребром:

а — плоское днище; б — коническое;
в — сфера, 1, 2, 3 — точное решение;
4, 5 — вариационный метод Ритца —
Трефтца; — — — решение методом
воздушений

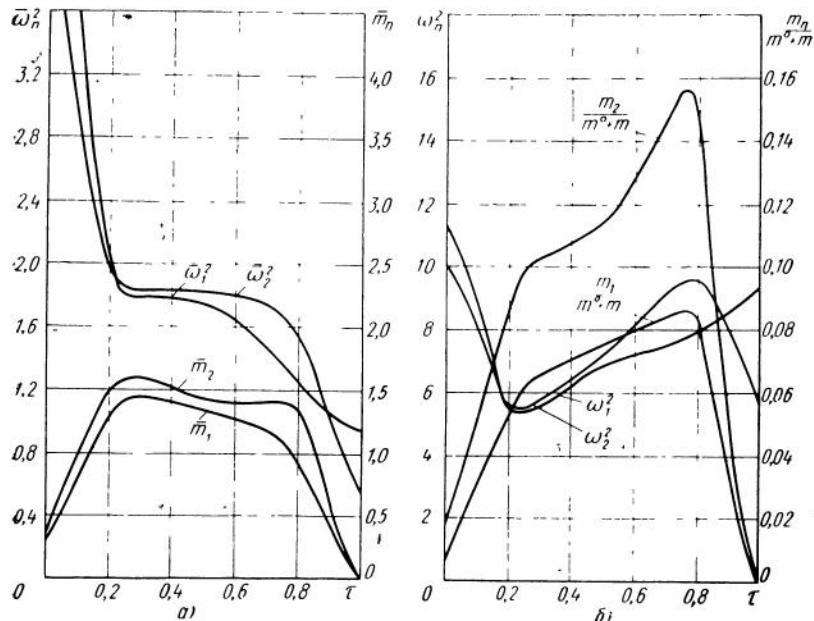


Рис. 6.21. Квадраты частот и присоединенные массы для баков горючего ($n=1$) и окислителя ($n=2$) отделяющейся части первой ступени РН «Сатурн-5»:

a — безразмерные; *b* — размерные

Резкое увеличение частоты в начальный момент времени связано с «малым» начальным радиусом свободной поверхности жидкости.

РАСЧЕТ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА

7.1. Метод дискретизации

Рассмотрим метод дискретизации, являющийся частным случаем широко распространенного сейчас в расчетной практике метода конечных элементов [5, 56].

Имея в виду задачи, рассматриваемые в настоящей книге, мы ограничимся системами типа упругих стержней, работающих на изгиб, растяжение (сжатие) и кручение.

Будем предполагать, что для исследуемой системы найдены коэффициенты влияния и построены функции влияния [53]. Тогда перемещение u_i i -й точки стержня под действием системы сосредоточенных сил P_j , приложенных в точках x_j ($j=1, 2, \dots, k$), определяется известной формулой

$$u_i = \sum_{j=1}^k \Delta_{ij} P_j, \quad (7.1)$$

где Δ_{ij} — коэффициенты влияния, равные обобщенному перемещению i -й точки стержня под действием обобщенной единичной силы, приложенной в j -й точке (в книге [53] эти коэффициенты обозначены через δ_{ij}).

Формула (7.1) описывает поперечные и продольные деформации, если под P_j и Δ_{ij} понимать соответствующие силы и коэффициенты влияния. Аналогичную структуру имеет формула, описывающая крутильные деформации стержня:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^k \Delta_{ij} L_j, \quad (7.2)$$

где φ_i — угол закручивания i -го сечения; L_j — крутящий момент, приложенный в j -м сечении; Δ_{ij} — коэффициент влияния, равный угловому перемещению i -го сечения под действием единичной пары сил, приложенной в j -м сечении.

Коэффициенты Δ_{ij} обладают в силу известной теоремы Бетти симметрией по отношению к индексам i и j и определяются следующими интегралами Максвелла — Мора [53]:

а) изгиб

$$\Delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i(x) M_j(x) dx}{E J_0}; \quad (7.3)$$

б) растяжение, сжатие

$$\Delta_{ij} = \int_0^l \frac{N_i(x) N_j(x) dx}{ES^0}; \quad (7.4)$$

в) кручение

$$\Delta_{ij} = \int_0^l \frac{L_i(x) L_j(x) dx}{G J_p^0}, \quad (7.5)$$

где $M_j(x)$ — изгибающий момент от сосредоточенной единичной поперечной силы, приложенной в j -м сечении;

$N_j(x)$ — продольная сила от сосредоточенной единичной продольной силы, приложенной в j -м сечении;

$L_j(x)$ — крутящий момент от единичной пары сил с плоскостью, перпендикулярной оси стержня, приложенной в j -м сечении;

EJ^0, ES^0, GJ_p^0 — жесткости при изгибе, растяжении (сжатии) и кручении, являющиеся функциями координаты x ;

l — длина стержня.

Предположим, что в сечениях $j=1, 2, \dots, k$ помещены сосредоточенные массы m_j , причем система совершает гармонические колебания (поперечные или продольные) с частотой σ , так что

$$u_j = g_j e^{i\sigma t}; \\ P_j = -m_j \ddot{u}_j = \sigma^2 m_j g_j. \quad (7.6)$$

Подставляя выражения (7.6) в (7.1), получим

$$g_i - \sigma^2 \sum_{j=1}^k m_j \Delta_{ij} g_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k). \quad (7.7)$$

Частотное уравнение для системы линейных уравнений (7.7) имеет вид

$$|m_j \Delta_{ij} - \delta_{ij} \lambda| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, k), \quad (7.8)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\sigma^2}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (7.9)$$

Индекс i в (7.8) соответствует номеру строки, j — номеру столбца. В результате решения этого уравнения определяются k частот σ_n собственных колебаний системы ($n=1, 2, \dots, k$) и k

форм собственных колебаний, соответствующих собственным векторам $\mathbf{g}^{(k)}$ с компонентами g_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, k$).

Рассмотрим в качестве примера, следуя книге [56], применение метода дискретизации к упругой системе типа балки со свободными концами (поперечные колебания).

Разобьем балку на k участков произвольной длины и сосредоточим массу m_i каждого участка на его конце. Изгибную жесткость, постоянную на каждом участке, обозначим EJ_i^0 . Наряду с системой координат $O^*x^*z^*$, которая неоднократно использовалась выше, введем новую связанную систему координат Oxz с началом на левом конце балки, ось Ox которой совпадает с касательной к упругой оси при $x=0$.

Таким образом, в системе координат Oxz балка представляет собой консоль, защемленную на левом конце. Обозначим теперь через $u^*(x, t)$ и $u(x, t)$ смещения в системах координат $O^*x^*z^*$ и Oxz соответственно. Эти смещения связаны соотношением

$$u^*(x, t) = u(x, t) + u'_0 x + u_0, \quad (7.10)$$

где u_0 и u'_0 — ординаты упругой линии и ее производная в точке $x=0$.

В частности, для $u^*(x_i, t) = u_i^*$ и $u(x_i, t) = u_i$ имеем

$$u_i^* = u_i + u'_0 x_i + u_0. \quad (7.11)$$

Полагая

$$u_i^* = g_i^* e^{i\omega t}; \quad u_i = g_i e^{i\omega t};$$

$$u_0 = g_0 e^{i\omega t}; \quad u'_0 = g'_0 e^{i\omega t},$$

получим по аналогии с (7.7) следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} g_i^* - \sigma^2 \sum_{j=1}^k m_j \Delta_{ij} g_j^* &= 0; \\ g_i^* = g_i + g'_0 x_i + g_0 & \\ (i = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Параметры g_i^* должны удовлетворять двум условиям динамического равновесия, вытекающим из законов сохранения количества движения и кинетического момента рассматриваемой системы материальных точек

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k m_i g_i^* &= 0; \\ \sum_{i=1}^k m_i x_i g_i^* &= 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Исключив с помощью уравнений (7.12) и (7.13) параметры g_0, g_0', g_i , получим следующую систему уравнений:

$$g_i^* - \sigma^2 \sum_{j=1}^k \Delta_{ij}^* m_j g_j^* = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (7.14)$$

где

$$\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij} + \frac{(l - Lx_i)a_j + (Mx_i - L)\beta_j}{L^2 - MJ};$$

$$M = \sum_{i=1}^k m_i; \quad L = \sum_{i=1}^k m_i x_i; \quad J = \sum_{i=1}^k m_i x_i^2; \quad (7.15)$$

$$a_j = \sum_{i=1}^k m_i \Delta_{ij}; \quad \beta_j = \sum_{i=1}^k m_i x_i \Delta_{ij}.$$

Коэффициенты влияния Δ_{ij} для консоли определяются следующими формулами:

$$\Delta_{ij} = \int_{l_0}^{l_j} \frac{(l_i - x)(l_j - x) dx}{EJ^0} = x_i(x_j a_j - b_j) - x_j b_j + c_j, \quad (7.16)$$

где

$$l_0 = \min\{l_i, l_j\}; \quad a_i = \sum_{n=1}^l \frac{x_n - x_{n-1}}{EJ_n^0};$$

$$l_i = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^l \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{EJ_n^0}; \quad c_i = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^l \frac{x_n^3 - x_{n-1}^3}{EJ_n^0}. \quad (7.17)$$

Частотное уравнение для системы (7.14) имеет вид, аналогичный (7.8), причем роль коэффициентов влияния играют коэффициенты Δ_{ij}^* для балки со свободными концами, связанные с коэффициентами Δ_{ij} для консольной балки формулами (7.15). Дальнейшая задача сводится к решению одним из численных методов характеристического уравнения и нахождению компонентов собственных векторов g_{ij}^* .

В решении такого рода задач на ЭВМ накоплен большой опыт. Следует подчеркнуть, что в силу симметрии коэффициентной матрицы уравнений (7.14) ($\Delta_{ij}^* = \Delta_{ji}^*$) собственные числа $\lambda_n = \frac{1}{\sigma_n^2}$ ($n=1, 2, \dots, k$) всегда вещественные.

Совершенно аналогичным методом решаются задачи о продольных и крутильных колебаниях упругого стержня со свободными концами и задачи о колебаниях упругих стержней с при-

соединенными осцилляторами. При этом в конечном счете задача всегда сводится к решению частотного уравнения (7.8), в котором, конечно, будут фигурировать иные значения коэффициентов $m_i \Delta_{ij}$. Замечательно, что применение более общего метода конечных элементов к наиболее сложным упругим системам, включающим в качестве элементов упругие стержни, пластиинки и оболочки, приводит к частотному уравнению вида

$$|a_{ij} - \lambda \beta_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots), \quad (7.18)$$

где

$$a_{ij} = a_{ji}; \quad \beta_{ij} = \beta_{ji}$$

— коэффициенты, характеризующие обобщенные массы и жесткости элементов.

Задача расчета частот и форм собственных колебаний системы сводится тем самым к задаче линейной алгебры о нахождении собственных значений λ_n и соответствующих им собственных векторов, решаемой на ЭВМ.

Основная трудность здесь заключается в высоком порядке системы уравнений (7.18), который может доходить до нескольких тысяч. Это требует разработки специальных методов борьбы с катастрофической потерей точности и предъявляет высокие требования к объему памяти и быстродействию ЭВМ.

Метод дискретизации и метод конечных элементов широко применялись, в частности, при исследовании математической модели корпуса РН «Сатурн-5». На рис. 7.1—7.3 представлены первые четыре формы и частоты собственных продольных колебаний корпуса первой ступени для трех моментов безразмерного времени полета $\tau = t/t_k$, (где t_k — продолжительность активного участка полета первой ступени носителя), заимствованные из работы [81]. Сплошными линиями показаны результаты расчета, выделенные точки и пунктир соответствуют испытаниям конструктивно-подобной модели, выполненной в масштабе 1/10 (в пересчете на натуральную); f_j — теоретические значения частоты; f_j^o — экспериментальные.

На рис. 7.4—7.6 показаны для того же объекта аналогичные кривые, соответствующие поперечным колебаниям, по данным работы [79]. (Эти рисунки соответствуют плоскости рыскания; частоты и формы колебаний в плоскости тангажа очень близки к ним).

На этих рисунках представлены для каждой формы колебаний также перемещения двигателей каждой из трех ступеней и элементов лунного модуля. Такого хорошего совпадения теории и эксперимента, которое видно на рис. 7.1—7.6, удалось добиться после последовательных усовершенствований расчетной модели, которая в конечном итоге имела 300 степеней свободы. Четыре первые формы и частоты колебаний корпуса, пред-

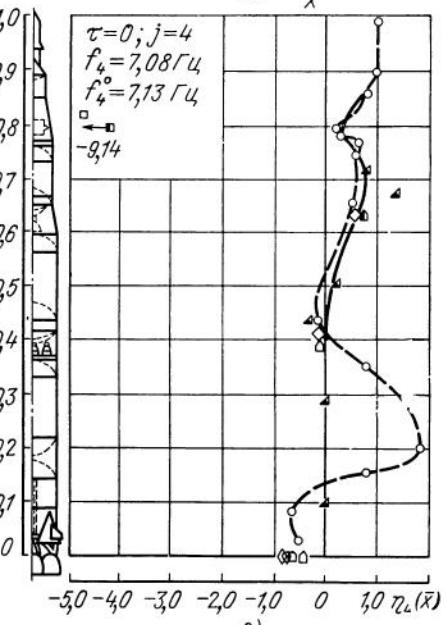
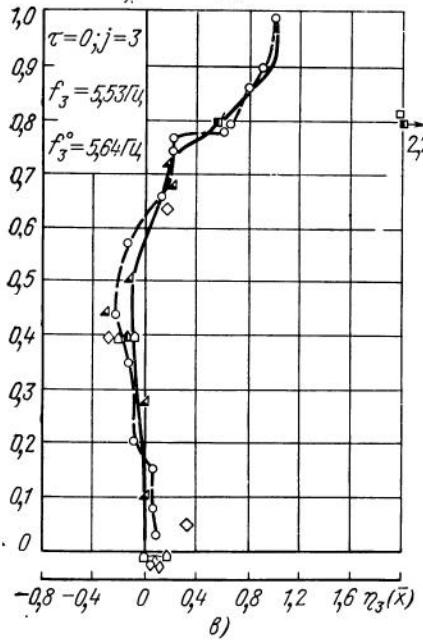
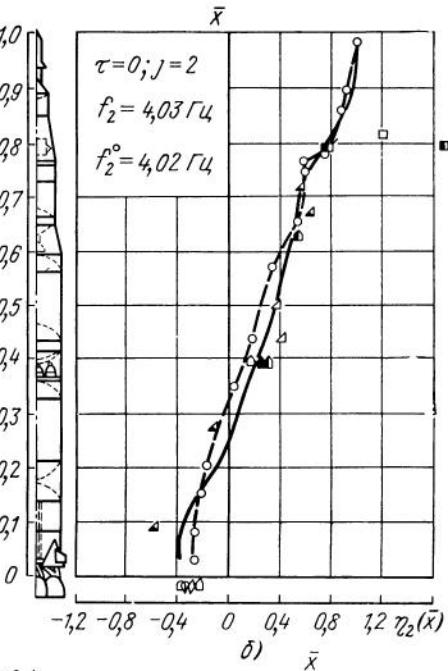
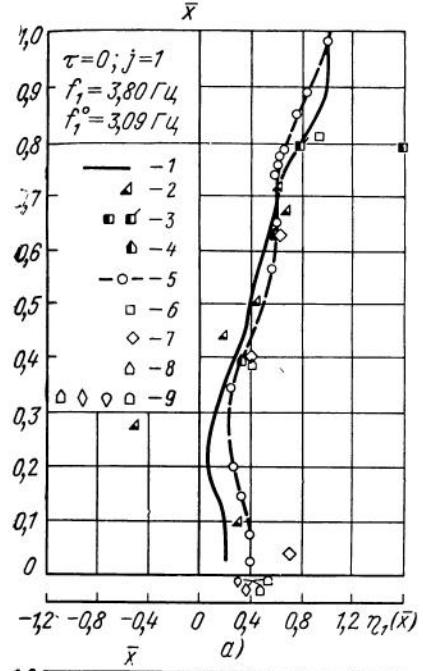
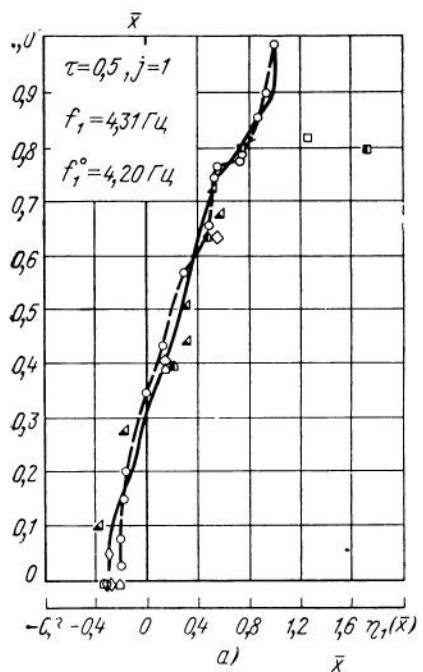
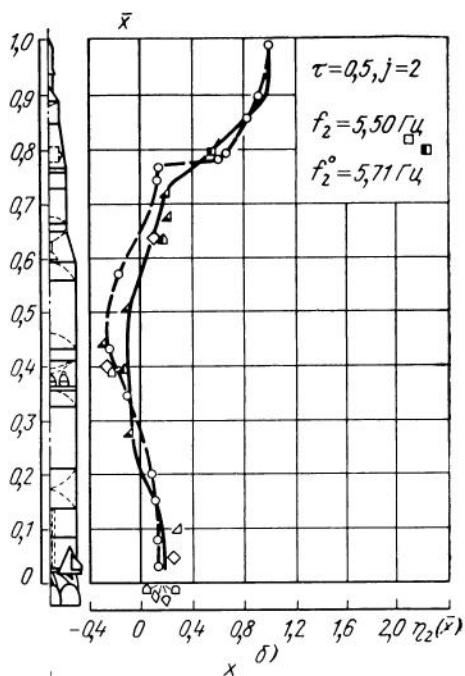


Рис. 7.1. Первые четыре формы продольных колебаний корпуса модели М 1:10 первой ступени РН «Сатурн-5» (а, б, в, г) в начале активного участка полета (в пересчете на натуральную):

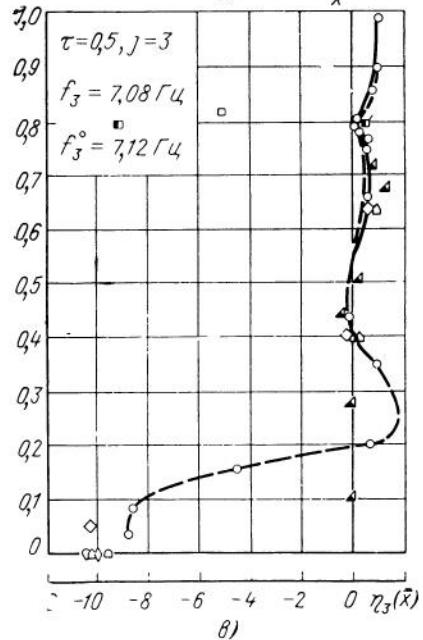
1 — обшивка, 2 — центр масс жидкости в баках; 3 — лунная кабина, обшивка и точка на продольной оси, 4 — периферийные двигатели второй ступени и двигатель третьей ступени (1, 2, 3, 4 — расчет), 5 — обшивка; 6 — лунная кабина, верхняя точки оси, 7 — рама, передающая на корпус усилия от двигателей, точка на оси; 8 — центральный двигатель второй ступени; 9 — периферийные двигатели первой ступени (5, 6, 7, 8, 9 — эксперимент на конструктивно-подобной модели)



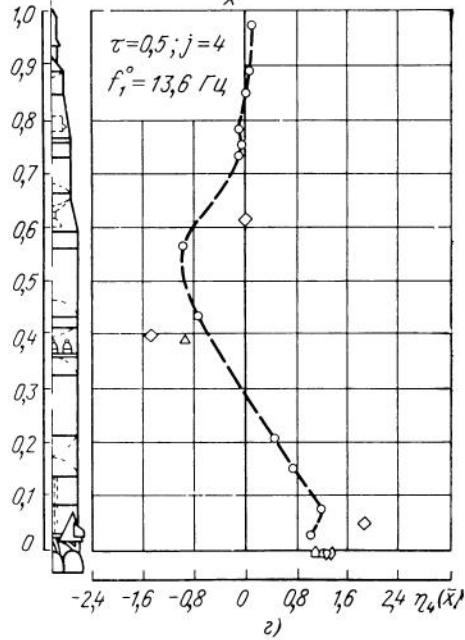
a)



b)



c)



d)

Рис. 7.2. Первые четыре формы продольных колебаний корпуса модели М 1 : 10 первой ступени РН «Сатурн-5» в середине активного участка полета (в пересчете на натуральную). Обозначения те же, что на рис. 7.1

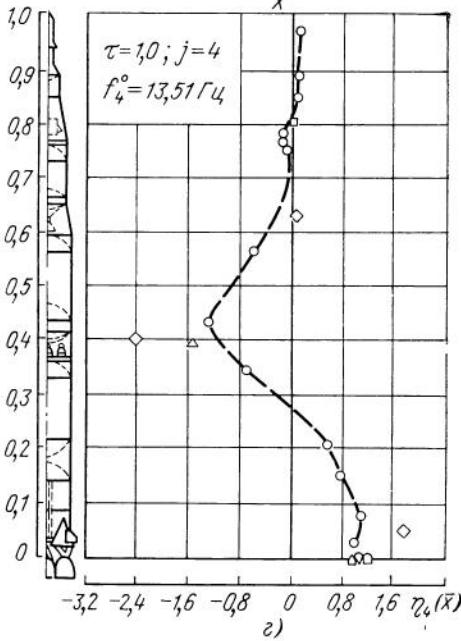
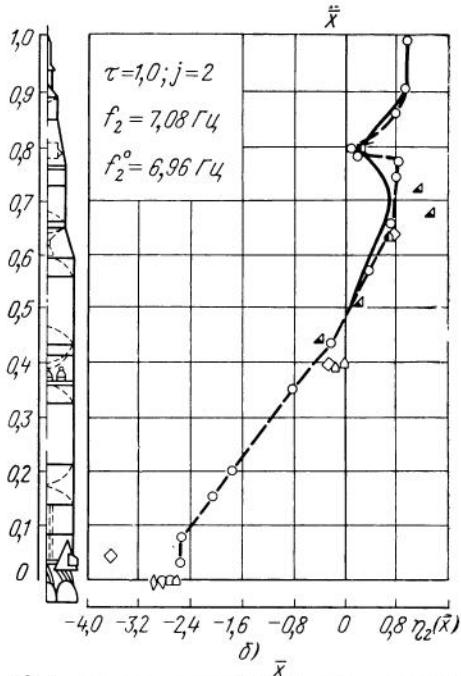
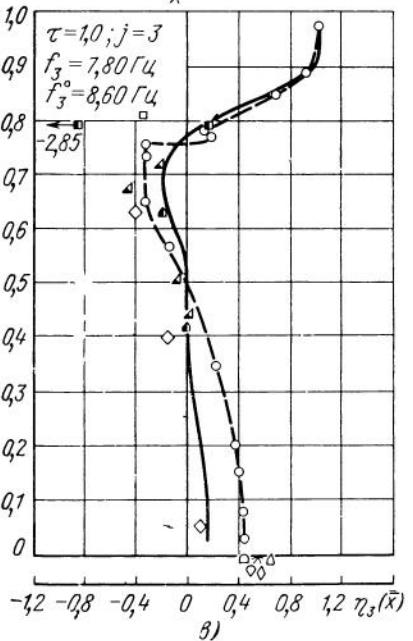
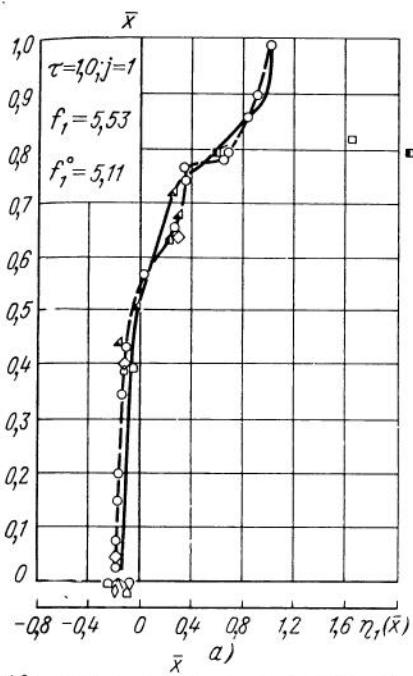


Рис. 7.3. Первые четыре формы продольных колебаний корпуса модели М 1:10 первой ступени РН «Сатурн-5» в конце активного участка полета (в пересчете на натуральную). Обозначения те же, что на рис. 7.1

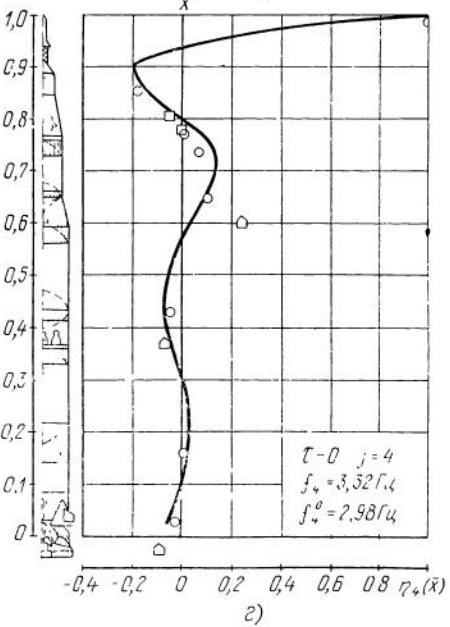
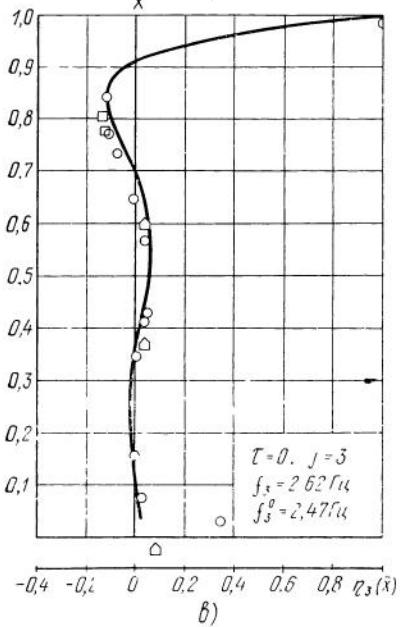
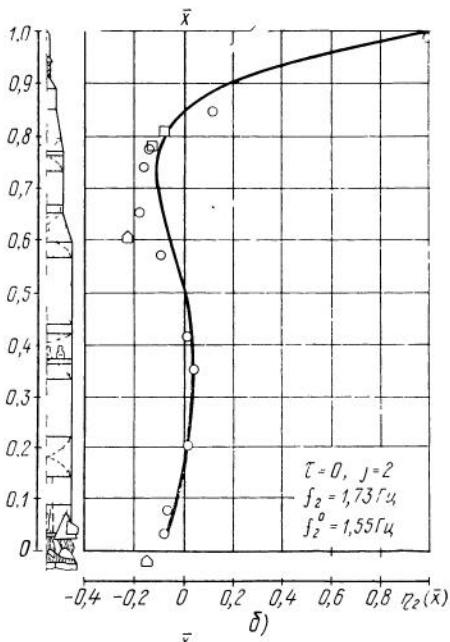
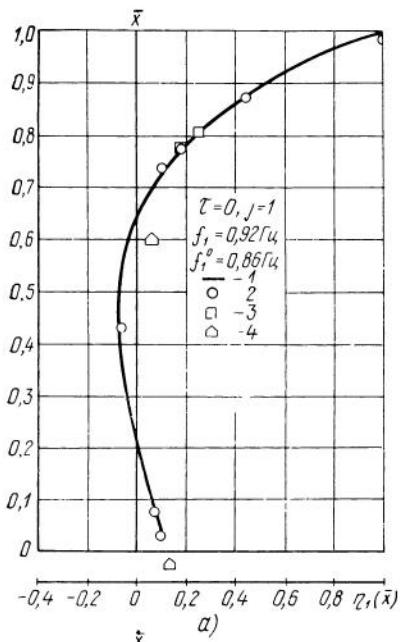


Рис. 7.4. Первые четыре формы поперечных колебаний корпуса модели М 1 : 10 первой ступени РН «Сатурн-5» (а, б, в, г) в начале активного участка полета (в пересчете на натуральную):

1 — обшивка (расчет); 2 — обшивка; 3 — лунная кабина, 4 — центральные двигатели первой и второй ступеней, двигатель третьей ступени (эксперимент на конструктивно подобной модели)

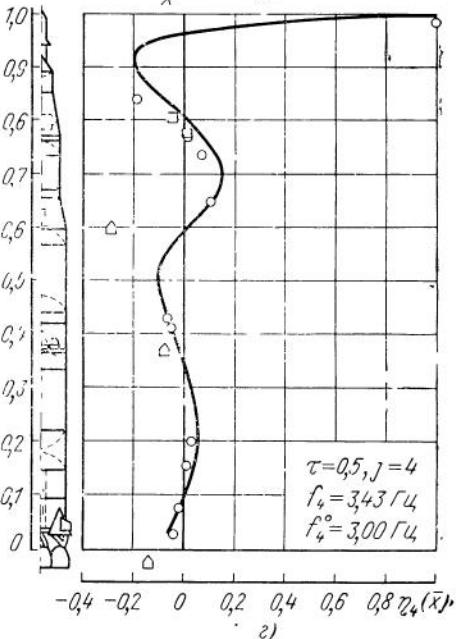
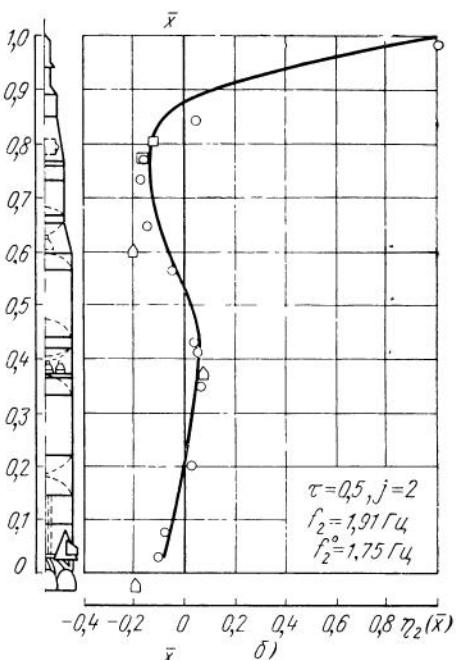
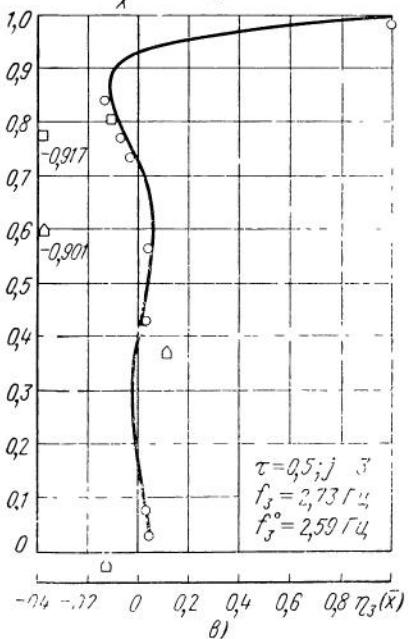
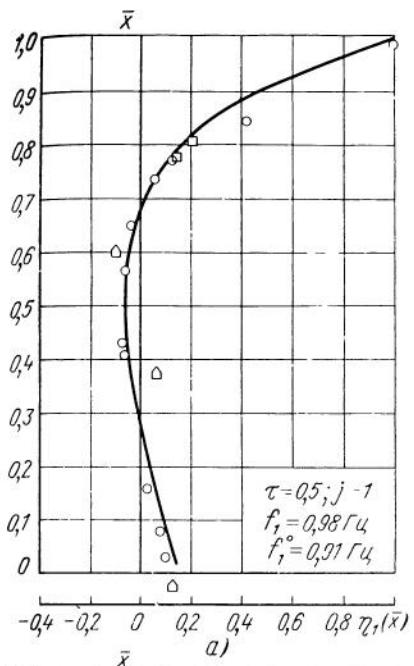


Рис. 7.5. Первые четыре формы поперечных колебаний корпуса модели М 1:10 первой ступени РН «Сатурн-5» (а, б, в, г) в середине активного участка полета (в пересчете на натуральную). Обозначения те же, что на рис. 7.4

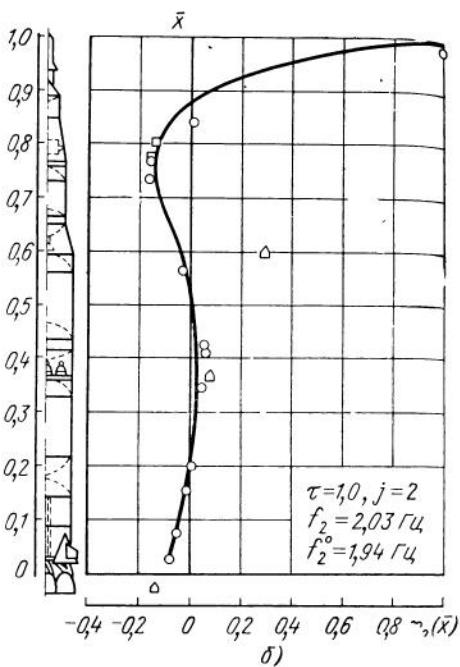
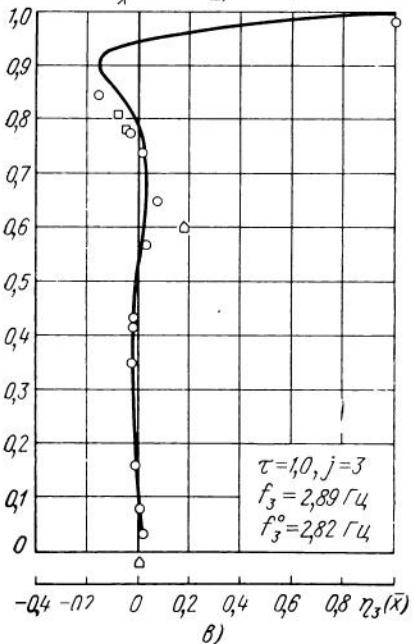
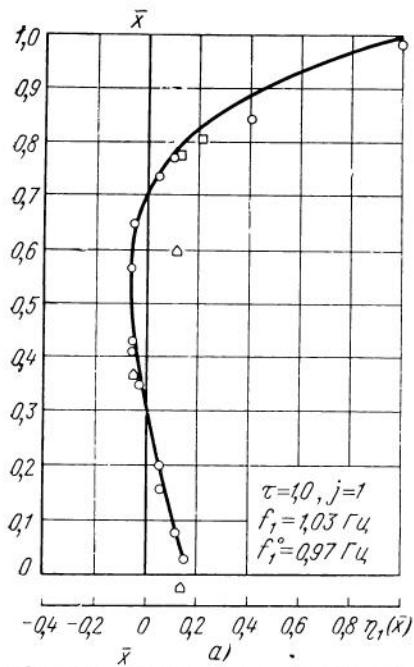


Рис. 7.6. Первые три формы поперечных колебаний корпуса модели М : 10 первой ступени РН «Сатурн-5» (а, б, в) в конце активного участка полета (в пересчете на натуральную величину). Обозначения те же, что на рис. 7.4

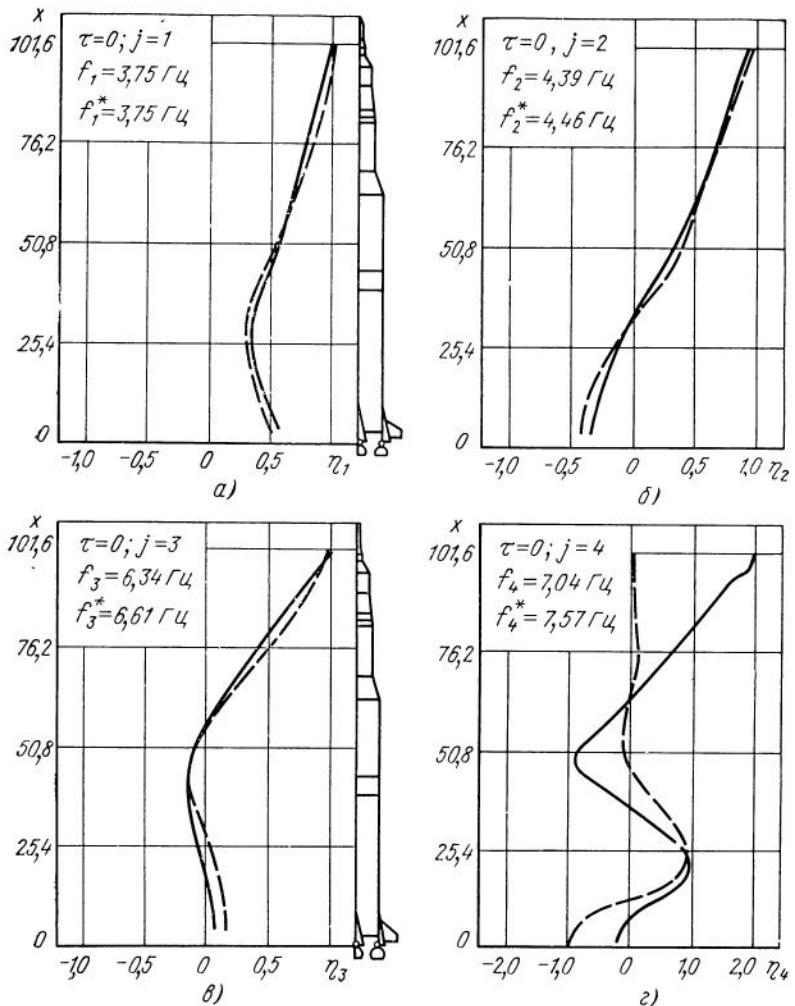


Рис. 7.7. Первые четыре формы продольных колебаний корпуса первой ступени РН «Сатурн-5» в начале активного участка полета (а, б, в, г):
— расчет; — — — натурные динамические испытания

ставленные на рисунках, были рассчитаны методом конечных элементов именно для этой модели. В работах [71, 72] говорится о больших трудностях, связанных с решением систем такого высокого порядка при применении достаточно совершенной вычислительной техники (IBM-360). Тем не менее, в результате специальных исследований удалось довести (ценой удвоения точности счета) порядок решаемых систем до 1200.

На рис. 7.7 и 7.8 [71, 72] приведено сравнение тех же расчет-

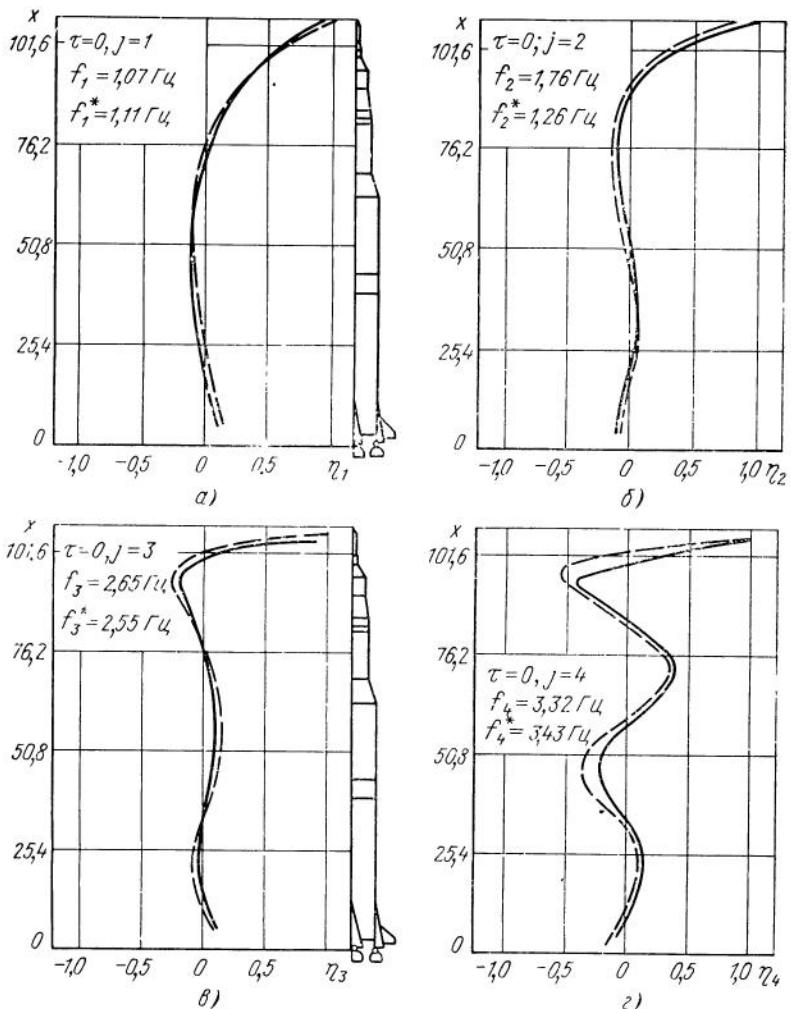


Рис. 7.8. Первые четыре формы поперечных колебаний корпуса первой ступени РН «Союз-5» в начале активного участка полета (а, б, в, г):
— расчет, — — — натурные динамические испытания

ных характеристик, что и на рис. 7.1—7.3 (сплошные линии) с результатами натурных динамических испытаний корпуса (пунктир); f_j — теоретические значения частоты, f_j^* — экспериментальные. Здесь получилось также вполне удовлетворительное совпадение, причем отличие результатов расчета с использованием весьма полной математической модели (f_j), экспериментов на конструктивно-подобной модели f_j^* и натурных динамических испытаний корпуса f_j^* одинакового порядка.

Это дало основание авторам работ [71, 72] сделать вывод о высокой эффективности метода, основанного на испытаниях конструктивно-подобных моделей, несравненно более дешевого, чем проведение натурных частотных испытаний таких гигантских конструкций как РН «Сатурн-5». Этот вывод согласуется также с отечественными результатами, полученными при исследовании динамической схемы РН «Восток» [36].

7.2. Метод начальных параметров

Метод начальных параметров, использованный А. Н. Крыловым для расчета балок на упругом основании, получил широкое применение в задачах статики и динамики сооружений. В последнее время в связи с развитием машинных методов счета он успешно применяется для расчета частот и форм собственных колебаний упругих систем (в том числе и систем с параметрами, меняющимися по длине), чаще всего под названием «метод протонки» [4, 18, 1, 36].

Этот метод оказался удобным для расчетов на ЭВМ и в случае большого количества присоединенных осцилляторов. Идея метода заключается в последовательном построении матриц переноса \mathbf{H}_i , связывающих вектор перемещений и усилий \mathbf{Z}_i в конце i -го участка стержня с аналогичным вектором \mathbf{Z}_{i-1} в начале этого участка, так что \mathbf{Z}_i выражается в виде произведения матрицы \mathbf{H}_i на вектор \mathbf{Z}_{i-1} справа:

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{Z}_{i-1} \quad (i=1, 2, \dots, k), \quad (7.19)$$

где k — число участков, на которые разбит стержень (длина этих участков совершенно произвольна).

Для вектора \mathbf{Z}_n последовательное применение соотношений для $i=1, 2, \dots, n$ приводит к равенству

$$\mathbf{Z}_n = \mathbf{H}_n \mathbf{Z}_0, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{H} = \prod_{i=n, n-1, \dots}^1 \mathbf{H}_i. \quad (7.21)$$

С помощью матрицы перехода \mathbf{H} (7.21) вектор \mathbf{Z}_k , соответствующий сечению стержня $x=l$, выразим через вектор \mathbf{Z}_0 , соответствующий сечению $x=0$. Наиболее целесообразно разбить стержень по длине на участки, на которых погонные массовые и жесткостные характеристики можно считать постоянными; кроме того, присоединенные осцилляторы должны попадать на границы между участками. В этом случае можно получить аналитическое выражение матрицы \mathbf{H} .

Рассмотрим задачу о поперечных колебаниях упругого стержня, разделенного на k участков, удовлетворяющих сформулированным выше условиям.

Обозначим частоту колебаний через σ , вектор \mathbf{Z}_i в текущей точке через $\mathbf{Z}(x) = \{\eta(x), \eta'(x), M(x), Q(x)\}$.

Компоненты вектора \mathbf{Z} — перемещения η , угол поворота сечения η' , поперечная сила Q и изгибающий момент M . В силу (7.20)

$$\mathbf{Z}(x) = \mathbf{H}(\xi) \mathbf{Z}(x_0). \quad (7.22)$$

$$\mathbf{H}(\xi) = \begin{vmatrix} S(\lambda\xi) & \frac{T(\lambda\xi)}{\lambda} & \frac{U(\lambda\xi)}{\lambda^2 E J^0} & \frac{V(\lambda\xi)}{\lambda^3 E J^0} \\ \lambda V(\lambda\xi) & S(\lambda\xi) & \frac{T(\lambda\xi)}{\lambda E J^0} & \frac{U(\lambda\xi)}{\lambda^2 E J^0} \\ \lambda^2 E J^0 U(\lambda\xi) & \lambda E J^0 V(\lambda\xi) & S(\lambda\xi) & \frac{T(\lambda\xi)}{\lambda} \\ \lambda^3 E J^0 T(\lambda\xi) & \lambda^2 E J^0 U(\lambda\xi) & \lambda V(\lambda\xi) & S(\lambda\xi) \end{vmatrix}; \quad (7.23)$$

$$\xi = x - x_0; \quad \lambda^4 = \frac{\sigma^2 m}{E J^0}.$$

Здесь $S(\xi)$, $T(\xi)$, $U(\xi)$, $V(\xi)$ — функции Крылова:

$$S(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi + \cos \xi); \quad T(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \xi + \sin \xi);$$

$$U(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi - \cos \xi); \quad V(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \xi - \sin \xi); \quad (7.24)$$

$m = \text{const}$ и $E J^0 = \text{const}$ — погонная масса и изгибная жесткость, постоянные на рассматриваемом участке стержня.

Рассмотрим сначала случай, когда имеются только погонные массы, распределение которых по длине стержня описывается некоторой кусочно-постоянной функцией $m(x)$.

Применив равенство (7.22) к i -му участку стержня и полагая

$$x_0 = x_{i-1} + 0; \quad x = x_i - 0; \quad \xi = \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

получим

$$\mathbf{Z}(x_i - 0) = \mathbf{H}_i(\Delta x_i) \mathbf{Z}(x_{i-1} + 0). \quad (7.25)$$

Последовательное применение равенства (7.25) и условия непрерывности перемещений и усилий при переходе от $x_i - 0$ к $x_i + 0$

$$\mathbf{Z}(x_i - 0) = \mathbf{Z}(x_i + 0) \quad (7.26)$$

($i = 1, 2, \dots, k$) приводит к следующему эквиваленту равенства (7.22) для произвольного сечения $x = x_n$:

$$\mathbf{Z}(x_n - 0) = \prod_{i=n, n-1, \dots}^1 \mathbf{H}_i(\Delta x_i) \mathbf{Z}(0). \quad (7.27)$$

В частности,

$$\mathbf{Z}(l) = \mathbf{H} \mathbf{Z}(0), \quad (7.28)$$

$$\text{где } \mathbf{H} = \prod_{i=k, k-1, \dots}^1 \mathbf{H}_i(\Delta x_i). \quad (7.29)$$

Если подставить в векторное уравнение (7.28) граничные условия при $x=0$ и $x=l$, то оно оказывается эквивалентным системе четырех однородных алгебраических уравнений. Например, в случае стержня со свободными концами в силу граничных условий

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(0) &= [\eta(0), \dot{\eta}(0), 0, 0]; \\ \mathbf{Z}(l) &= [\eta(l), \dot{\eta}(l), 0, 0],\end{aligned}\quad (7.30)$$

введя для элементов матрицы \mathbf{H} обозначения H_{ij} , из векторного равенства (7.28) получим

$$\begin{aligned}H_{11}\eta(0) + H_{12}\dot{\eta}(0) &= \eta(l); \quad H_{21}\eta(0) + H_{22}\dot{\eta}(0) = \dot{\eta}(l); \\ H_{31}\eta(0) + H_{32}\dot{\eta}(0) &= 0; \quad H_{41}\eta(0) + H_{42}\dot{\eta}(0) = 0.\end{aligned}\quad (7.31)$$

Условие разрешимости этой системы дает характеристическое уравнение для определения собственных значений λ_j , по которым определяются частоты собственных колебаний системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} H_{31}(\lambda) & H_{32}(\lambda) \\ H_{41}(\lambda) & H_{42}(\lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (7.32)$$

Элементы определителя $\Delta(\lambda)$ представляют собой сложные трансцендентные функции параметра λ , поэтому решение уравнения (7.32) возможно только численными методами. Для реализации на ЭВМ наиболее пригоден «метод пристрелки», который сводится к вычислению со все уменьшающимся шагом функции $\Delta(\lambda)$ в окрестности предполагаемых значений λ_j , пока разность двух последовательных значений λ , между которыми происходит перемена знака функции $\Delta(\lambda)$, не станет меньшей по модулю выбранного заранее малого числа ε .

После нахождения некоторой частоты σ_j соответствующие начальные параметры $\eta_j(0)$ и $\dot{\eta}_j(0)$ определяются с помощью любого из двух последних уравнений (7.32) и условия нормировки

$$\eta'_j(0) = -\frac{H_{31}(\lambda_j)}{H_{32}(\lambda_j)} \eta_j(0); \quad \eta_j(0) = 1. \quad (7.33)$$

Пусть теперь в точке с координатой x_n имеется осциллятор с массой m_{n0} , моментом инерции J_{n0} (относительно оси $O_n y_n$), координатой центра масс x_{Gn} и парциальной частотой ω_{n0} . Границные условия в этой точке приобретают форму (см. разд. 4.1):

$$\begin{aligned}\eta(x) \Big|_{x_n-0}^x &= \eta'(x) \Big|_{x_n-0}^x = 0; \\ M(x) \Big|_{x_n-0}^x &= K_{31}^{(n)}\eta(x_n) + K_{32}^{(n)}\eta'(x_n);\end{aligned}\quad (7.34)$$

$$Q(x) \begin{cases} x_n + 0 \\ x_n - 0 \end{cases} = K_{41}^{(n)} \eta(x_n) + K_{42}^{(n)} \eta'(x_n),$$

тде

$$\begin{aligned} K_{31}^{(n)} &= K_{42}^{(n)} = -\frac{\sigma^2 \omega_{n0}^2 m_{n0} x_{G_n}}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2}; \\ K_{32}^{(n)} &= -\sigma^2 \left(J_{n0} + \frac{\sigma^2 m_{n0} x_{G_n}^2}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2} \right); \\ K_{41}^{(n)} &= -\frac{\sigma^2 \omega_{n0}^2 m_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2} \end{aligned} \quad (7.35)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{Z}(x_n + 0) = \mathbf{K}_n \mathbf{Z}(x_n - 0), \quad (7.36)$$

где

$$\mathbf{K}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 1 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.37)$$

Принимая во внимание векторное равенство (7.36), являющееся обобщением (7.26), получим по аналогии с равенством (7.27)

$$\mathbf{Z}(x_{n+1} - 0) = \mathbf{K}_n \prod_{i=n, n-1, \dots}^1 \mathbf{H}_i(\Delta x_i) \mathbf{Z}(0). \quad (7.38)$$

Отсюда следует, что уравнение (7.28) остается в силе, если под **H** теперь понимать матрицу

$$\mathbf{H} = \prod_{i=k, k-1, \dots}^1 \mathbf{H}_i(\Delta x_i) \mathbf{K}_n \prod_{j=n, n-1, \dots}^1 \mathbf{H}_j(\Delta x_j). \quad (7.39)$$

Выражение (7.39) легко обобщается на случай произвольного количества присоединенных осцилляторов.

Дальнейшие операции, связанные с составлением и решением характеристического уравнения и нахождением начальных параметров, не отличаются от описанных выше.

Задача о продольных колебаниях упругого стержня, разбитого на k участков, на которых погонная масса $m(x)$ и жесткость на растяжение (сжатие) $ES^0(x)$ имеют постоянные значения, решается аналогичным образом.

Векторные соотношения (7.22) остаются в силе, но вектор $\mathbf{Z}(x)$ и матрица $\mathbf{H}(\xi)$ приобретают следующий вид:

$$\mathbf{Z}(x) = \{\eta(x), N(x)\}. \quad (7.40)$$

$$\mathbf{H}(\xi) = \begin{vmatrix} \cos \lambda \xi & \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda E S^0} \\ -\lambda E S^0 \sin \lambda \xi & \cos \lambda \xi \end{vmatrix}, \quad (7.41)$$

где

$$\xi = x - x_0; \quad \lambda^2 = \frac{\sigma^2 m}{S E^0}. \quad (7.42)$$

Компоненты вектора \mathbf{Z} — продольное перемещение η и продольная сила N . Точно так же остается справедливой формула (7.29), если элементы матриц $\mathbf{H}_i(\Delta x_i)$ определить с помощью выражения (7.41) при $\xi = \Delta x_i$.

В случае стержня со свободными концами

$$\mathbf{Z}(0) = \{\eta(0), 0\}; \quad \mathbf{Z}(l) = \{\eta(l), 0\} \quad (7.43)$$

из (7.28) находим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) = H_{21}(\lambda) = 0 \quad (7.44)$$

и выражение для $\eta_j(l)$

$$\eta_j(l) = H_{11}(\lambda_j) \eta_j(0); \quad \eta_j(0) = 1. \quad (7.45)$$

Если в сечении $x = x_n$ имеется присоединенный осциллятор с массой m_{n0} и парциальной частотой ω_{n0} , то матрица \mathbf{H} определяется формулой (7.39), в которой надо положить

$$\mathbf{K}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ K^{(n)} & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.46)$$

$$K^{(n)} = \frac{\sigma^2 m_{n0} \omega_{n0}^2}{\omega_{n0}^2 - \sigma^2}. \quad (7.47)$$

С помощью выражений, приведенных выше, легко описать различные частные случаи, представляющие интерес для практики. Так, при фиксации сосредоточенных масс относительно стержня следует положить $\omega_{n0}^2 \rightarrow \infty$.

При фиксации масс m_{n0} в плоскости, проходящей через их центры масс, $x_{G_n} \equiv 0$; в случае малости их момента инерции относительно экваториальной оси, лежащей в этой плоскости, $J_{n0} \equiv 0$ и т. д. (поперечные колебания).

Случай, когда $x_{G_n} = 0, J_{n0} = 0$ реализуется, например, для сферических подвесных отсеков с гладкими стенками, с узлами крепления, лежащими в диаметральной плоскости, перпендикулярной оси O^*x^* , если пренебречь моментом инерции стенок отсека.

Аналогично решается задача о крутильных колебаниях стержня.

Достоинством метода, описанного выше, является то, что соответствующий алгоритм сводится к решению задач линейной алгебры, что удобно для реализации на ЭВМ. При этом, хотя элементы характеристического определителя (7.32) являются более сложными, чем в методе дискретизации, это с лихвой компенсируется его несравненно более низкой размерностью, чем у определителя в левой части уравнения (7.8) или (7.18). Поэтому метод прогонки дает весьма конструктивный алгоритм, особенно удобный для систем типа РН тандемной схемы.

Ниже показывается, что при привлечении дополнительной экспериментальной информации этот метод позволяет получить формы и частоты доминирующих гармоник при использовании модели эквивалентного стержня с 28 кусочно-постоянными параметрами и 9 добавочными осцилляторами, мало уступающие по точности полученным методом конечных элементов с учетом 300 степеней свободы [81].

7.3. Теоретико-экспериментальный метод определения динамических характеристик эквивалентных стержней

При теоретическом определении динамических характеристик эквивалентных стержней (частот и форм колебаний, обобщенных масс), соответствующих как продольным, так и поперечным деформациям, неизбежны ошибки, прогрессивно нарастающие при увеличении номера тона. Эти ошибки связаны как с неточностью выбора расчетной схемы и неизбежной идеализацией, например при переходе от реальных упругих отсеков с жидкостью к эквивалентным осцилляторам, так и с неточным соответствием реальных массовых и жесткостных характеристик расчетным значениям (вследствие технологических разбросов и т. д.).

Следствием является то, что иногда наблюдаются заметные расхождения между экспериментальными значениями частот и форм собственных колебаний рассматриваемых конструкций и теоретическими, рассчитанными на основе схемы упругого стержня, даже для первых двух-трех тонов, не говоря о высших гармониках. Все это приводит к необходимости всесторонней экспериментальной проверки динамических характеристик упругих тонкостенных конструкций, полученных расчетным путем, и развития соответствующего широкого комплекса экспериментальных методов [36].

В настоящем разделе излагается теоретико-экспериментальный метод определения частот и форм собственных колебаний эквивалентных стержней, соответствующих доминирующими гармоникам [10, 52].

В основе этого метода лежит предположение, что эквивалентный стержень правильно отражает динамические свойства исходной системы в исследуемом диапазоне частот (в смысле совпадения соответствующих дифференциальных уравнений колебаний). При этом допускается возможность систематических погрешностей в оценке значений массовых и жесткостных характеристик стержня и присоединенных осцилляторов, но исключается возможность случайных погрешностей. В то же время предполагается, что экспериментальная информация о частотах и формах собственных колебаний свободна от систематических погрешностей, но может содержать случайные погрешности, подчиняющиеся произвольному центрированному закону распределения.

Метод решения задачи заключается в том, что параметры эквивалентного стержня варьируются в полосе их возможных разбросов так, чтобы обеспечить экстремум функционала, типа среднего квадратичного отклонения расчетных и экспериментальных значений собственных частот и ординат нормированных форм колебаний. При этом обеспечивается уменьшение как систематических ошибок (вследствие сближения расчетных значений и математического ожидания соответствующих экспериментальных значений), так и случайных погрешностей (вследствие большой избыточности экспериментальной информации).

В качестве одного из возможных минимизируемых функционалов может быть использован следующий:

$$\Phi = \sqrt{\sum_j \left\{ \sum_l K_{jl} \left[1 - \frac{\eta_j(x_l)}{\eta_j^*(x_l)} \right]^2 + C_j \left(1 - \frac{\sigma_j}{\sigma_j^*} \right)^2 + \sum_m L_{jm} \left(1 - \frac{g_{jm}}{g_{jm}^*} \right)^2 \right\}}, \quad (7.48)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots$ — номера учитываемых гармоник;

$l = 1, 2, 3, \dots$ — номера сечений корпуса, в которых установлены датчики перемещений;

$m = 1, 2, 3, \dots$ — номера присоединенных осцилляторов;

K_{jl}, C_j, L_{jm} — фиксированные весовые коэффициенты;

$\eta_j(x_l), \sigma_j$ — j -я форма собственных колебаний корпуса в сечении x_l , в котором особо важно согласовать теорию и эксперимент, и соответствующая частота;

g_{jm} — абсолютное перемещение массы m -го присоединенного осциллятора при j -й форме колебаний корпуса.

Верхний индекс « $*$ » присвоен экспериментальным значениям, которые предполагаются известными.

Полоса, в которой лежат искомые характеристики эквивалентного стержня, определяется неточностью принятой расчетной схемы и отличием характеризующих ее параметров от фактических значений в данной конкретной реализации.

Формализация процесса оптимизации достигается следующим образом: вводится n -мерный управляющий вектор $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$, функцией которого является Φ :

$$\Phi = \Phi(\mathbf{Z}). \quad (7.49)$$

Кроме того, предполагается, что объект имеет k выходов, определяемых k -мерным вектором $\mathbf{D} = \mathbf{D}\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, являющимся вектор-функцией вектора \mathbf{Z} , причем компоненты вектора \mathbf{D} удовлетворяют ограничениям вида

$$a_i \leq d_i \leq b_i, \quad (7.50)$$

где a_i и b_i ($i=1, 2, \dots, k$) — некоторые заданные константы.

Задача заключается в минимизации функционала Φ на множестве управляющих векторов \mathbf{Z} при наличии ограничений (7.50).

Фактически была разработана специальная программа на языке АЛГОЛ-60, реализующая соответствующий алгоритм с использованием стандартного блока случайного поиска [9] и блока решения краевой задачи (4.51), (4.52) или (4.53). Вектор управления формируется при этом на основе изменения погонной жесткости корпуса, а также массы и парциальной частоты колебаний отдельных осцилляторов. Критерием остановки счета является выполнение одного из неравенств

$$\cdot \frac{\Delta \Phi}{\Phi} < \varepsilon; n^* < N, \quad (7.51)$$

где n^* — число попыток.

Весовые коэффициенты K_{jl} , C_j , L_{jm} , малый параметр ε и число N , являющиеся параметрами настройки алгоритма, выбираются до начала счета.

Условия (7.50) проверяются для каждого значения вектора \mathbf{Z} , которое используется для вычисления Φ только при выполнении этих условий.

В процессе реализации алгоритма оптимизации может оказаться невозможным удовлетворительное согласование всех форм, соответствующих исследуемому диапазону частот, с экспериментальными при одном и том же распределении масс и жесткостей на длине эквивалентного стержня. Это означает необходимость уточнения не параметров, а самой расчетной схемы эквивалентного стержня.

Описанный метод применим в равной степени для получения «внутренне согласованных» форм продольных, поперечных и крутильных колебаний эквивалентных стержней. Приведем пример его применения для идентификации первых двух частот и форм продольных колебаний корпуса конструктивно-подобной модели в масштабе 1/10 первой ступени РН «Сатурн-5» с использованием тех же экспериментальных характеристик по данным работы

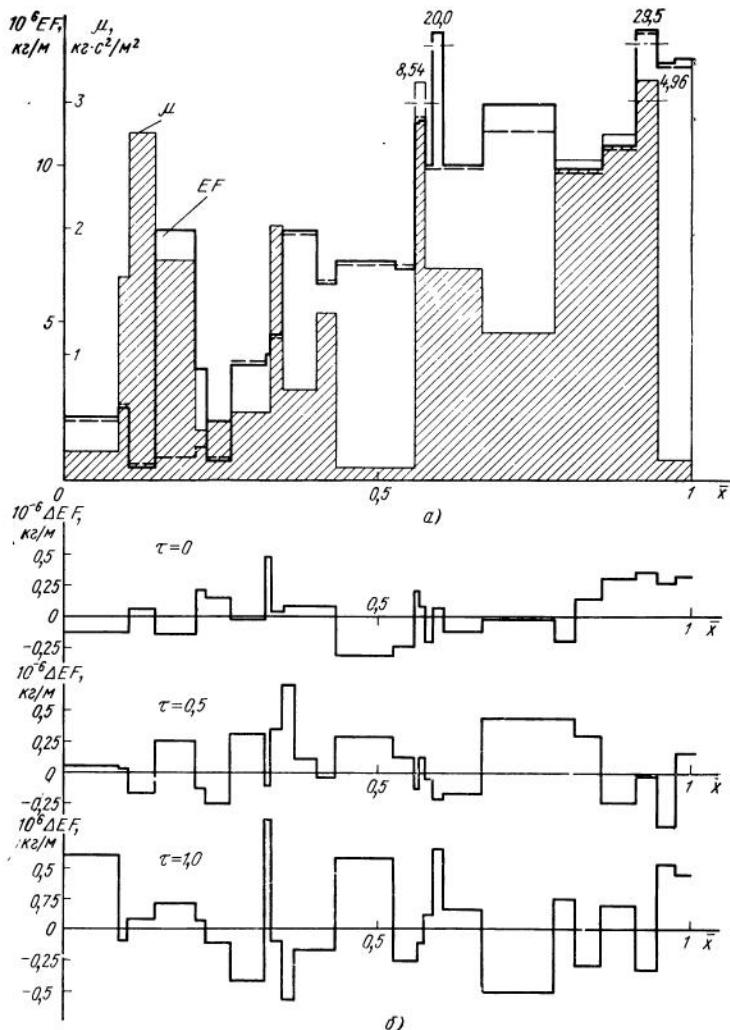


Рис. 7.9. К эмпирико-теоретическому методу расчета частот и форм продольных колебаний корпуса РН:

a — погонная масса и исходная погонная жесткость, *б* — изменение погонной жесткости, полученное при статистической оптимизации (минимизация невязок теоретических и экспериментальных частот и форм)

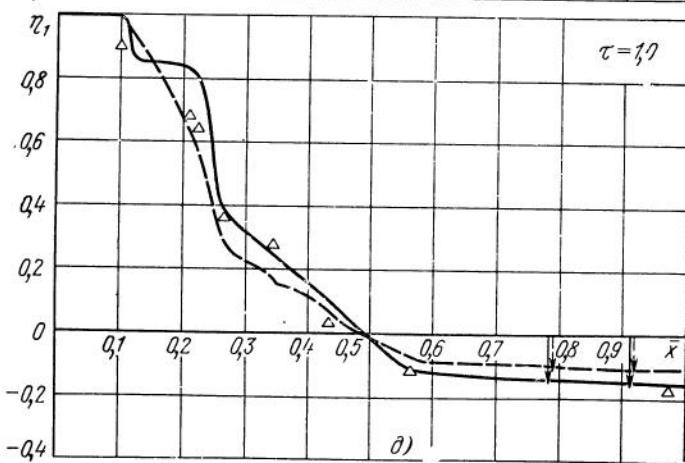
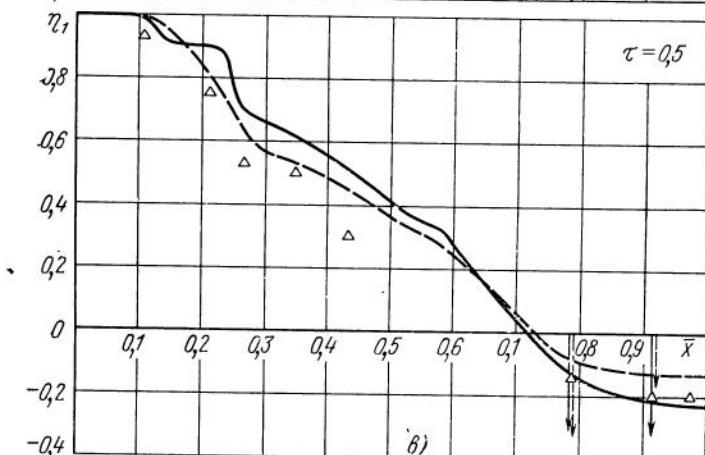
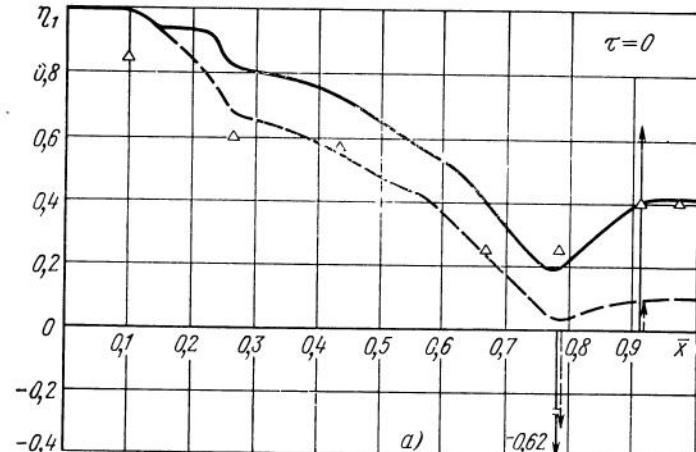


Рис. 7.10. Первые две формы продольных колебаний корпуса РН в начале активного участка (*a*, *b*), середине (*c*, *d*) и в конце (*d*, *e*):

— до оптимизации; —— — после оптимизации; Δ — эксперимент [8]

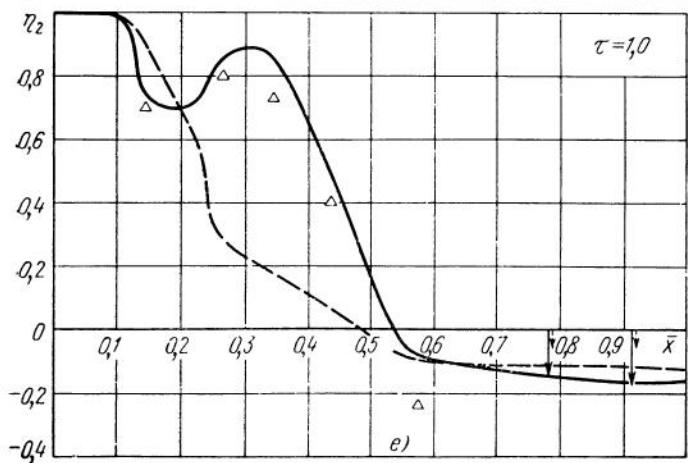
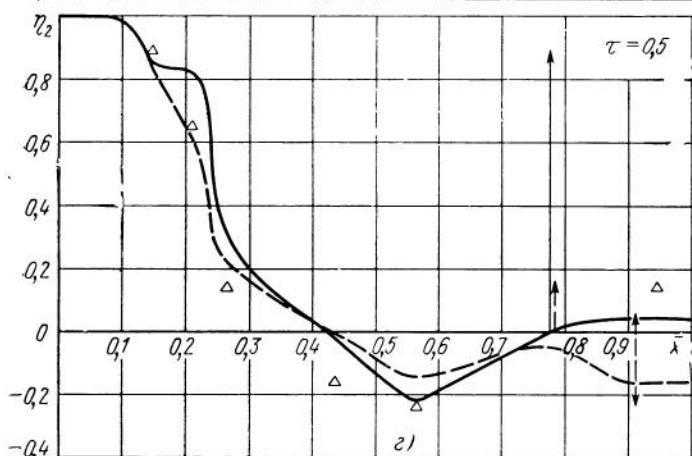
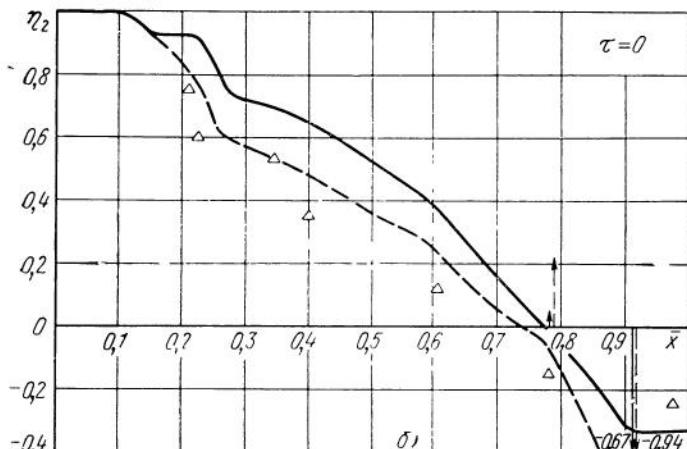


Таблица 7.1

m	\bar{x}	τ	$m_{m0} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^{-1}$	$10^{-5} \omega_{m0}^2, \text{с}^{-2}$	$10^{-5} \sigma_{m0}^{*2}, \text{с}^{-2}$
1	0,097	0	59,4	1,725	1,121
		0,5	27,4	3,738	2,920
		1,0	0,56	182,6	180,0
2	0,218	0	137,5	0,453	0,310
		0,5	69,8	0,891	1,330
		1,0	0,18	332,1	330,0

Таблица 7.2

j	τ	$10^{-5} \sigma_j^2, \text{с}^{-2}$	$10^{-5} \sigma_j^{*2}, \text{с}^{-2}$	$10^{-5} \sigma_j^{**2}, \text{с}^{-2}$
1	0	0,504	0,405	0,377
	0,5	0,636	0,690	0,696
	1,0	1,097	1,181	1,031
2	0	0,634	0,561	0,638
	0,5	1,171	1,289	1,287
	1,0	2,131	2,251	1,912

[81], которые (в пересчете на натуру) были приведены в разд. 7.2. В этом примере было принято $j=1$, $l \leq 28$, $m \leq 9$, $K_{1l}=L_{1m}=1$; $C_1=20$; $N=300$; параметр ϵ не задавался. Те из l сечений и m осцилляторов, для которых не было экспериментальных данных, в расчете не использовались.

На рис. 7.9, *a* представлено принятное исходное распределение погонных масс и жесткостей, на рис. 7.9, *б* — изменения продоль-

ной жесткости, найденные после 300 попыток, для моментов $\tau=0$; 0,5; 1,0. В табл. 7.1 даны значения масс m_{m0} и значения квадратов частот, соответствующих двум наиболее важным осцилляторам (баки горючего и окислителя), исходные (ω_{m0}^2) и полученные после оптимизации (ω_{m0}^{*2}).

В табл. 7.2 приведены значения квадратов первых двух частот собственных колебаний, исходных σ_j^2 , полученных после оптимизации Φ и осреднения погонной жесткости, найденной для $\tau=0$, $\tau=0,5$ и $\tau=1,0$ — σ_j^{*2} и экспериментальных — σ_j^2 .

На рис. 7.10, a , b , v , g , d , e показаны соответствующие формы колебаний. Стрелками изображены абсолютные перемещения масс первых двух осцилляторов (жидкость в баках горючего и окислителя).

Следует подчеркнуть, что согласование с экспериментом осуществлялось только по первой форме и частоте, а вторая форма

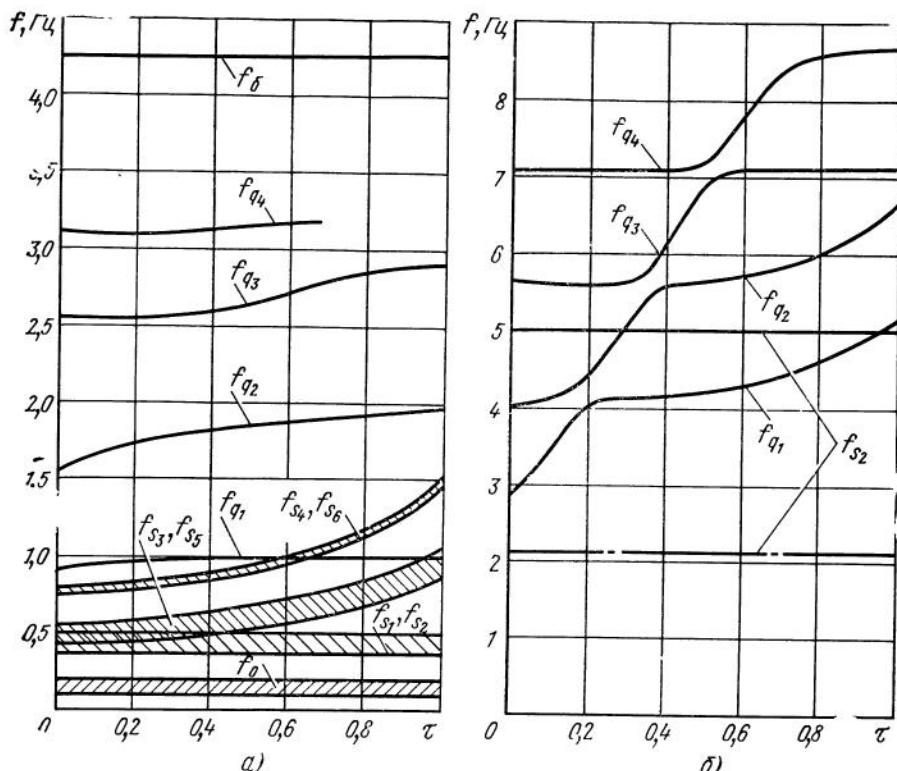


Рис. 7.11. Изменение по безразмерному времени активного участка парциальных частот собственных колебаний корпуса и жидкости в баках и магистралях первой ступени РН «Сатурн-5»:

a — частоты поперечных колебаний, *b* — частоты продольных колебаний

и соответствующая частота рассчитывались по полученным скорректированным значениям погонных жесткостей и парциальных частот присоединенных осцилляторов.

Приведенные результаты свидетельствуют о возможности компенсации несовершенства расчетной схемы, связанного с систематическими погрешностями расчетных значений массовых и жесткостных характеристик исходной конструкции при использовании экспериментальной информации даже только о первой частоте и форме собственных колебаний системы.

Чтобы дать более полное представление о характере изменения по времени наиболее важных частот собственных колебаний для типичного объекта рассматриваемого класса на рис. 7.11 приведены частоты (в герцах) поперечных и продольных колебаний корпуса первой ступени РН «Сатурн-5» и основного тона колебаний жидкости в баках окислителя и горючего и магистрали окислителя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балабух Л. И., Колесников К. С., Зарубин В. С. Строительная механика ракет. М., «Высшая школа», 1969, 494 с.
2. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958, 799 с.
3. Богояд И. Б. К решению задачи о колебаниях жидкости, частично заполняющей полость, вариационным методом. — ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 6, с. 1122—1127.
4. Бидерман В. Л. Применение метода прогонки для численного решения задач строительной механики. — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1967, № 5, с. 62—66.
5. Биценко К., Граммель Р. Техническая динамика. т. II, М.—Л., ГИТТЛ, 1953, 630 с.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967, 310 с.
7. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949, 779 с. (I), 220 с. (II).
8. Воробьев Н. М., Моисеев Г. А. О модификации метода Ритца при численном решении краевых задач гидродинамики. — ПМ, 1973, с. IX, вып. 10, с. 103—110.
9. Гайдуков А. Л. Применение случайного поиска при оптимальном проектировании. — В кн.: «Прикладные задачи технической кибернетики», «Советское Радио», 1966, с. 420—434.
10. Галлай Ю. М. Об одном теоретико-экспериментальном методе определения динамических характеристик упругих систем — В кн.: «Исследования по теории сооружений», № 18, М., «Стройиздат», 1970, с. 101—105.
11. Гатаулин И. Г., Столбцов В. И. О некоторых оценках коэффициентов уравнений возмущенного движения тела с жидкостью. — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1966, № 3, с. 40—46.
12. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973, 400 с.
13. Гроссман Е. П. Курс вибраций частей самолета. М., Оборонгиз, 1940. 311 с.
14. Ден-Гартог Д. П. Механические колебания М., Физматгиз, 1960, 580 с.
15. Докучаев Л. В. К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях. — ПММ, 1964, т. XXVIII, вып. I, с. 151—154.
16. Докучаев Л. В., Стажков Е. М. О вариационном методе определения

гидродинамических характеристик полостей вращения. — «Известия АН СССР. Механика твердого тела», 1974, № 3, с. 44—49.

17. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной капельной жидкостью. Избранные сочинения. т I. М.—Л., Гостехтеориздат, 1948, 391 с.

18. Ивович В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем Справочное пособие М., «Машиностроение», 1969, 94 с

19. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, 695 с.

20. Колин И. В. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде с кольцевой перегородкой. — «Ученые записки ЦАГИ», т I, № 4, 1970, с. 118—122.

21. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972, 274 с.

22. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., Гостехтеориздат, 1948, т. I, 535 с.

23. Крылов А. Н. Вибрации судов. Собрание трудов, т. X, М., АН СССР, 1948, 402 с.

24. Лаврентьев М. А., Шабат Б. Б. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958, 606 с.

25. Ланциш К. Вариационные принципы механики. М., «Мир», 1965, 408 с.

26. Лойцинский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Часть II, М., Гостехиздат, 1940, 468 с.

27. Луковский И. А. Волновые движения идеальной жидкости в сосудах, имеющих форму тел вращения. — УМЖ, 1962, т. XIV, № 2, с. 160—169

28. Луковский И. А. Об одном приближенном методе определения гидродинамических коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — «Гидроаэромеханика», вып. I, Изд. Харьковского гос. ун-та, 1965, с. 62—72.

29. Луковский И. А. Расчет характеристик движения массы жидкости в полости, имеющей форму эллипсоида вращения. — ПМ, 1965, т. I, вып. I, с. 101—106

30. Луковский И. А. К решению задачи о колебаниях жидкости в сосудах сложной геометрической формы. «Математическая физика». Республиканский межведомственный сборник, вып. 3, АН УССР, 1967, с. 274—283.

31. Мак-Лахлан Н. В. Теория и применения функций Матье. М., ИЛ, 1953, 476 с.

32. Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. — «Известия АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение», 1961, № 4, с. 48—53.

33. Микишев Г. Н., Невская Е. А., Дорожкин Н. Я. и др. Об экспериментальном исследовании возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — «Космические исследования», 1965, т. III, вып. 2, с. 208—220.

34. Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я. Экспериментальное определение гидродинамических коэффициентов для цилиндрической полости при наличии в ней радиальных перегородок. — «Известия АН СССР. Механика жидкости и газа», 1967, № 1, с. 84—87.

35. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., «Машиностроение», 1968, 563 с

36. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М., «Машиностроение», 1971, 563 с

37. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957, 476 с.

38. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., ВЦ АН СССР, 1966, 269 с.

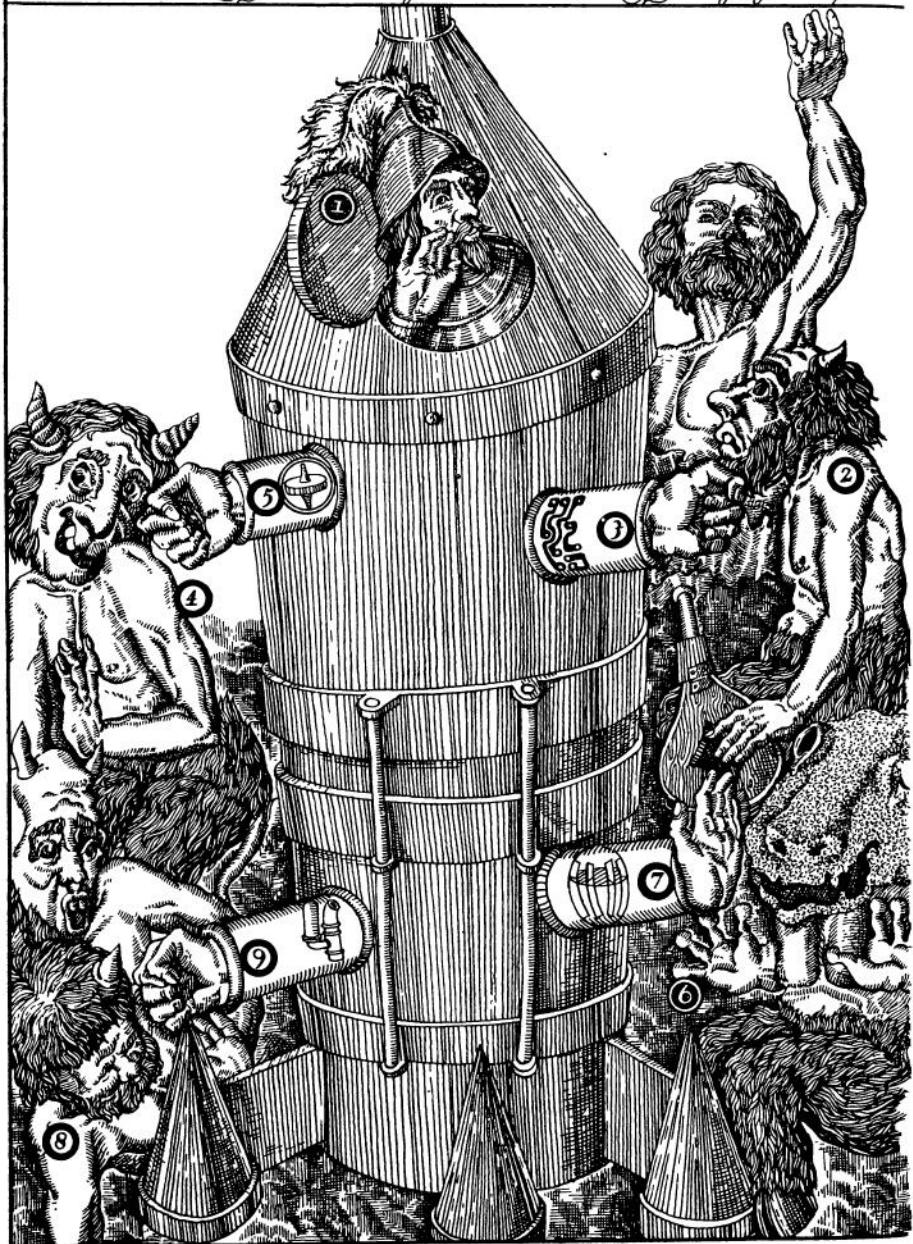
39. Мухчелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., АН СССР, 1949, 635 с.

40. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. — ПММ, 1956, т. XX, вып. I, с. 21—38.

41. **Охочимский Д. Е.** К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — ПММ, 1956, т. XX, вып. I, с. 3—20.
42. **Павленко Г. Е.** Качка судов. Л., Гострансиздат, 1935, 312 с.
43. **Пановко Я. Г., Губанова И. И.** Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967, 420 с.
44. **Пшеничнов Г. Н.** Свободные колебания жидкости в твердых сосудах. — ПММ, 1972, т. XXXVI, вып. 2, с. 248—254.
45. **Рабинович Б. И., Докучаев Л. В., Полякова З. М.** О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — «Космические исследования», 1965, т. III, вып. 2, с. 179—207.
46. **Рабинович Б. И.** О влиянии внутренних ребер на динамические характеристики жидкости в подвижных полостях. — ПМ, 1970, т. VI, вып. 8, с. 103—111.
47. **Рабинович Б. И., Роговой В. М.** Об учете вязкости жидкого топлива при исследовании движения управляемых аппаратов ЖРД. — «Космические исследования», 1970, т. VIII, № 3, с. 315—328.
48. **Рабинович Б. И.** О приближенном определении гидродинамических коэффициентов при колебаниях жидкости в подвижных цилиндрических полостях — ПМ, 1972, т. VIII, вып. 12, с. 106—117.
49. **Рабинович Б. И.** Об одном варианте решения задач о колебаниях жидкости в цилиндрических полостях методом Бубнова — Галеркина. — «Математическая физика», Республиканский межведомственный сборник, вып. II, АН УССР, 1972, с. 120—126.
50. **Рабинович Б. И.** Об уравнениях возмущенного движения тела с жидкостью при немальных углах отклонения нормали к свободной поверхности жидкости от оси полости. — «Математическая физика», Республиканский межведомственный сборник, вып. 13, АН УССР, 1973, с. 118—124.
51. **Рабинович Б. И.** Об упрощении выбора координатных функций метода Бубнова — Галеркина в двухмерных динамических задачах. — В кн. «Исследования по теории сооружений», № 20, М., Стройиздат, 1974, с. 31—42.
52. **Рабинович Б. И., Галлай Ю. М., Калинина А. В.** О построении областей динамической устойчивости продольных колебаний космических аппаратов с ЖРД. — «Космические исследования», 1973, т. XI, вып. 5, с. 651—662.
53. **Рабинович И. М.** Основы строительной механики стержневых систем. М., Изд-во лит. по строит. и архит., 1956, 454 с.
54. **Стажков Е. М.** Алгоритмы численного решения задачи по определению частот и присоединенных масс жидкости при расчете колебаний конструкций с жесткими резервуарами. В кн.: «Исследования по теории сооружений», № 20, М., «Стройиздат», 1974, с. 62—73.
55. **Столбецов В. И.** Приближенный метод расчета коэффициентов уравнений возмущенного движения тела с жидкостью. — ПМ, 1967, т. III, вып. 5, с. 109—113.
56. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967, 444 с.
57. **Троценко В. А.** Волновые движения идеальной жидкости в осесимметричных сосудах с кольцевыми ребрами. — «Математическая физика», Республиканский межведомственный сборник, вып. 4, АН УССР, 1968, с. 191—197.
58. **Троценко В. А.** О коэффициентах уравнений возмущенного движения тела с цилиндрической полостью, разделенной поперечными ребрами. — ПМ, 1969, т. V, вып. 10, с. 50—57.
59. **Троценко В. А.** О колебаниях жидкости в круговом цилиндре с несплошными радиальными перегородками. — «Математическая физика», Республиканский межведомственный сборник, вып. 9, АН УССР, 1971, с. 141—147.
60. **Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И. и др.** Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях, Киев, «Наукова Думка», 1969, 250 с.
61. **Филиппов, А. П.** Колебания деформируемых систем. М., «Машиностроение», 1970, 734 с.

62. Шетухин В. Л. Колебания жидкости в осесимметричных сосудах с кольцевыми ребрами. — ПМ, 1975, т. XI, вып 8, с. 89—95.
63. Вариационные методы в задачах о колебаниях жидкости и тела с жидкостью. М., ВЦ АН СССР, 1962, 246 с.
64. Численные методы в механике жидкостей. М., «Мир», 1973, 304 с.
65. Abramson H. N. (Ed) The dynamic behavior of liquids in moving containers with applications to space vehicle technology NASA SP-106, 1966, Washington, D. C. 467 p.
66. Archer J. S. Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques — «AIAA Journal», vol. 3, N. 10, 1965, p. 1910—1918.
67. Bauer H. F. Zur Belastung, Trägheitsmoment Erhöhung und Schwappmassen Reduktion durch Dämpfungsringe in Treibstofftank. «Raumfahrtforschung», Heft 4/67, s. 163—171.
68. Budiansky B. Sloshing of liquids in circular channels and spherical tanks. — «Journal of the Aero/Space Sciences», 1960, vol. 27, N. 3, p. 161—173.
69. Chu Wen-Hwa. Sloshing of liquids in cylindrical tanks of elliptic cross section. — «ARS Journal», 1960, Apr., p. 360—363.
70. Cooper R. M. Dynamics of liquids in moving containers. — «ARS Journal», 1960, vol. 30, N. 8, p. 725—729.
71. Grimes F. J., McTigue L. D., Riley G. F., Tilden D. I. Advancements in structural dynamic technology resulting from Saturn V programs, vol. I. NASA CR-1539, 1970, Washington, D. C. 44 p.
72. Grimes F. J., McTigue L. D., Riley G. F., Tilden D. I. Advancements in structural dynamic technology resulting from Saturn V programs, vol. II NASA CR-1540, 1970, Washington, D. C., 151 p.
73. Keulegan G. H., Carpenter L. H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. — «Journal of the National Bureau of Standards», 1958, vol. 60, N. 5.
74. Lawrence H. R., Wang C. I., Reddy R. B. Variational solution of fuel sloshing modes. — «Jet Propulsion», 1958, vol. 28, N. 11, p. 729—736.
75. Lomen D. Liquid propellant sloshing in mobile tanks of arbitrary shape. NASA CR-222, 1965, Washington, D. C., 82 p.
76. Lomen D. Digital analysis of liquid propellant sloshing in mobile tanks with rotational symmetry. NASA CR-230, 1965, Washington, D. C., 64 p.
77. McNeil W. A., Lamb J. P. Fundamental sloshing frequency for an inclined, fluid-filled right circular cylinder. — «Journal of Spacecraft and Rockets», 1970, vol. 7, N. 8, p. 1001—1002.
78. Miles J. W. Ring damping of free surface oscillations in a circular tank. — «Journal of Applied Mechanics», 1958, vol. 25, N. 6, p. 26—32.
79. Peele E. L., Leonard H. W., Leadbetter S. A. Lateral vibration characteristics of the 1/10 scale Apollo/Saturn V replica model. NASA TN D-5778, 1970, Washington, D. C., 86 p.
80. Penley C. D. Natural frequency of longitudinal modes of liquid propellant space launch vehicles. — «Journal of Spacecraft and Rockets», 1968, vol. 5, N. 12, p. 1425—1431.
81. Pinson L. D., Leonard H. W. Longitudinal vibration characteristics of 1/10 scale Apollo/Saturn V replica model. NASA TN D-5159, 1969, Washington, D. C., 95 p.

- ① Система управления ② Аэродинамические возмущения
③ Бортовая цифровая вычислительная машина ④ Тяжесть корпуса
⑤ Датчик угловых скоростей ⑥ Подвижность жидкости в баках и магистралях ⑦ Демпфер
⑧ Динамика двигательной установки ⑨ Гидроаккумулятор



ЧАСТЬ III

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ОБЪЕКТ — ДВИГАТЕЛЬНАЯ УСТАНОВКА — АВТОМАТ СТАБИЛИЗАЦИИ

Although the last not least...

William Shakespeare. The Tragedy
of King Lear.

Итак, часть III «последняя, но не наименее важная...», посвященная исследованию динамической устойчивости ракет-носителей космических аппаратов и в какой-то мере самих космических аппаратов.

Эти объекты представляют собой замкнутые системы автоматического регулирования. Всегда ли можно выбрать параметры регулятора так, чтобы обеспечить устойчивость движения замкнутой системы?

В принципе — всегда. Однако если информация, поступающая на вход регулятора, является неполной, как это обычно бывает в задачах ракетной техники, то в ряде случаев задача стабилизации оказывается практически неразрешимой. В результате возникает проблема борьбы с «нестабилизируемостью» объекта регулирования и обеспечения динамической устойчивости «нестабилизируемых» объектов. Обычно эту задачу удается решить путем изменения конструктивно-компоновочной схемы, применения демпферов колебаний жидкости в баках и гидроаккумуляторов, подключенных к топливным магистралям, использования датчиков угловых скоростей и, наконец, применения в контуре управления бортовой цифровой вычислительной машины. Соответствующий комплекс вопросов рассматривается ниже.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

8.1. Методологические аспекты проблемы

Предметом дальнейших исследований является динамическая устойчивость РН или точнее динамическая устойчивость замкнутой системы упругий корпус — жидкость в баках и магистралях — ДУ — АС.

Под динамической неустойчивостью мы будем понимать, как это принято в динамике сооружений, тенденцию к нарастанию амплитуды колебаний обобщенных координат, характеризующих возмущенное движение объекта. Здесь речь идет, таким образом, только об устойчивости «в малом», которая при более точной формулировке сводится к устойчивости по первому приближению по А. М. Ляпунову [17].

Следует подчеркнуть, что динамическая устойчивость в том смысле, в каком она трактуется ниже, в соответствии с традициями, нашедшими отражение в ряде исследований [5, 8, 25, 33, 39], не является ни необходимым, ни достаточным условием устойчивости РН на конечном интервале времени в рамках технической теории устойчивости, введенной Н. Д. Моисеевым [11].

Это связано как с нестационарным характером невозмущенного движения, т. е. переменностью коэффициентов уравнений возмущенного движения, так и с допустимостью в ряде случаев неустойчивости «в малом» при условии сохранения устойчивости РН «в большом», например при формировании в системе устойчивого предельного цикла с частотой и амплитудой, допустимыми по соображениям точности выведения, нормального функционирования бортовой аппаратуры, прочности корпуса, работоспособности экипажа (в случае выведения на орбиту пилотируемого аппарата) и т. д.

Тем не менее, динамическая устойчивость, трактуемая ниже в еще более узком — локальном смысле, т. е. в предположении, что параметры системы остаются постоянными на отрезке времени, много большем характерного периода колебаний (метод «замороженных коэффициентов»), является весьма желательным качеством РН. Наличие динамической устойчивости в сочетании с необходимыми для отработки возмущений запасами управляемости часто оказывается достаточным для устойчивости РН в техническом смысле. (Об учете влияния процесса изменения параметров см., например, работы [32, 20]).

Следует еще раз подчеркнуть, что в настоящей книге рассматриваются исследования на начальной стадии проектирования РН как объекта регулирования, когда о регуляторах, в ка-

честве которых выступают АС или ЖРД, имеется только самое общее представление (входные и выходные параметры, структура; максимум — предполагаемые амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики в некотором диапазоне частот и амплитуд входного сигнала).

Все это приближает постановку задач динамической устойчивости на этой стадии исследования к используемой в динамике сооружений (изгибо-крутильный флаттер крыла, «шимми» колес шасси самолета при разбеге или скоростного автомобиля, динамическая устойчивость квазистационарного движения самолета, некоторые виды ветровых колебаний висячих мостов и т. д.) [3, 5, 6, 8, 25, 33, 39].

Однако в постановке и методах решения задач динамической устойчивости РН имеется и своя специфика, определяемая наличием того или иного регулятора (что требует привлечения аппарата частотных методов, характерного для теории автоматического регулирования [1]), и своеобразными свойствами объекта регулирования, прежде всего большим числом «колебательных» степеней свободы и сравнительной малостью диссипативных сил (высокая добротность системы в окрестности соответствующих парциальных частот).

Фактически методологическая основа всех исследований динамической устойчивости, излагаемых ниже, такова [20]:

1. Разложение передаточной функции объекта регулирования, являющейся мероморфной функцией комплексного переменного с полюсами, которые совпадают с корнями характеристического уравнения разомкнутой системы $p_s^{\circ} = \alpha_s^{\circ} + i\sigma_s^{\circ}$ ($s=1, 2, \dots$), на простейшие дроби.

2. Использование того факта, что вещественные части этих корней α_s° намного меньше мнимых σ_s° , и что эти корни мало сдвигаются при замыкании системы регулятором (АС при попечевых и крутильных колебаниях корпуса, ЖРД при продольных), т. е. $|p_s| \sim |p_s^{\circ}|$, где p_s — корни замкнутой системы.

3. Замена передаточной функции регулятора в малой окрестности каждого из корней p_s° разомкнутой системы, в которой вследствие того, что $\alpha_s^{\circ} \ll \sigma_s^{\circ}$, частотная характеристика объекта регулирования описывает почти точную окружность, комплексным числом $A(\sigma_s^{\circ}) \exp \Phi(\sigma_s^{\circ})$, где $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ — амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики регулятора.

Для представления результатов используется выделение областей динамической устойчивости замкнутой системы или в некоторых случаях — эквивалентных им областей стабилизируемости объекта регулирования (см. работы [20, 21] и разд. 8.6) в пространстве безразмерных конструктивных параметров РН (см. разд. 8.7), выбираемых в традициях исследований динамической устойчивости самолета [6]. При этом используется сочетание частотных и алгебраических критериев [1, 7]. В этих же параметрах строятся линии состояния РН с запроектированными параметра-

ми — геометрическое место точек, соответствующих различным моментам времени при движении на активном участке полета. Все области устойчивости в примерах гл. 10 и 11 построены, как правило, на ЭВМ, с использованием программ, составленных на языке АЛГОЛ-60 в системе БЭСМ — АЛГОЛ. В основе соответствующих алгоритмов лежат редуцированные системы уравнений возмущенного движения, упрощенные применительно к каждому конкретному случаю. Руководящей идеей при этом является частотная дискриминация и выделение парциальных систем, включающих доминирующие гармоники с сильной связью, обусловленной сближением соответствующих частот [19].

Такой подход, отвечающий общей тенденции настоящей книги, позволяет получить результаты, которые обладают достаточной простотой и прозрачностью и образуют в то же время некий каркас для более полного численного анализа на ЭВМ с использованием уточненной динамической схемы.

Изложим в заключение последовательность дальнейших этапов проектных исследований устойчивости РН на активном участке траектории, какой она представляется в свете современных идей автоматизации проектирования.

1. Построение областей динамической устойчивости в пространстве всей совокупности характерных безразмерных параметров объекта регулирования и линий состояния системы с учетом возможных технологических и эксплуатационных разбросов параметров.

2. Построение корневых годографов или рельефов вещественных частей корней характеристического уравнения замкнутой системы над плоскостью любой пары наиболее представительных параметров с учетом соответствующих разбросов.

3. Диагонализация системы уравнений возмущенного движения в духе канонических преобразований А. И. Лурье [16], т. е. переход к главным координатам и дальнейшее исследование расщепленных систем. Это удобно на стадии, когда все основные параметры объекта и АС уже вчerне выбраны [20].

4. Использование оптимизационных алгоритмов для уточнения параметров объекта и АС, допускающих такую возможность, исходя из тех или иных динамических критериев качества системы объект — АС — ДУ.

5. Интегрирование системы уравнений возмущенного движения с учетом полного состава возмущений и использованием элементов реальной аппаратуры или их достаточно надежных математических эквивалентов на ЭВМ, электронных аналоговых устройствах или аналого-цифровых комплексах (АЦК).

На последнем этапе возможен многократный проигрыш полета с воспроизведением всех штатных и потенциально возможных аварийных ситуаций, окончательное уточнение параметров си-

стемы и построение априорного статистического портрета возможного движения.

Здесь особо следует подчеркнуть большие возможности, которые открывает на всех перечисленных этапах проектирования использование дисплеев, являющихся непременным элементом ЭВМ третьего и четвертого поколений.

В свете этой обширной программы роль предварительных исследований, излагаемых ниже, представляется довольно скромной, но обойтись без них нельзя, так как они образуют тот сюжетный стержень, который в американской литературе удачно именуется «Pilot program».

8.2. Механические аспекты проблемы

Основные типы динамической неустойчивости РН, связанные с их специфическими свойствами как деформируемых систем, можно свести к следующим:

1) неустойчивость в плоскостях стабилизации в системе жесткий корпус — жидкость в одном или нескольких топливных баках — АС;

2) неустойчивость в плоскостях стабилизации в системе упругий корпус — управляемые или маршевые двигатели — АС;

3) неустойчивость в системе упругий корпус — жидкость в одном или нескольких топливных баках — АС (в плоскостях стабилизации) или в системе упругий корпус — жидкость в одной или нескольких топливных магистралях — ЖРД (колебания в направлении продольной оси корпуса).

Рассмотрим вкратце некоторые механические аспекты динамической неустойчивости в ее различных проявлениях, перечисленных выше. Введем некоторые определения, которые неоднократно встречаются в дальнейшем.

Фазовая стабилизация — обеспечение динамической устойчивости замкнутой системы объект — регулятор при определенном знаке $\sin \varphi(\omega)$ в соответствующем диапазоне частот, где $\varphi(\omega)$ — фазо-частотная характеристика регулятора как разомкнутой системы (АС или ЖРД), независимо от значений $A(\omega)$ и $a_s^\circ \leqslant 0$, где $A(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика регулятора, $a_s^\circ (s=1, 2, \dots)$ — вещественные части корней характеристического уравнения разомкнутой системы $p_s^\circ = a_s^\circ + i\sigma_s^\circ$, мнимые части которых σ_s° лежат в рассматриваемом диапазоне частот.

Амплитудная стабилизация — то же самое при определенном уровне $A(\omega)$ и $a_s^\circ \geqslant 0$ или $a_s^\circ = 0 (s=1, 2, \dots)$, независимо от знака $\sin \varphi(\omega)$. Компромиссный вариант — наличие ограничений как на знак и величину $\sin \varphi(\omega)$ так и на $A(\omega)$ или $a_s^\circ (s=1, 2, \dots)$ называется амплитудно-фазовой стабилизацией.

Стабилизуемость объекта регулирования в данном диапазоне частот — знакопостоянство функции $\sin \varphi(\omega)$ при фазовой стабилизации системы в этом диапазоне частот регулятором определенной структуры.

Собственная динамическая устойчивость объекта регулирования — динамическая устойчивость разомкнутой системы объект без регулятора (корпус — жидкость в баках, корпус — жидкость в магистралях и т. д.).

Очевидно, что в рамках концепции «замороженных коэффициентов», используемой везде ниже, собственная динамическая устойчивость соответствует выполнению неравенств $\alpha_s < 0$ во всем изучаемом диапазоне частот, неустойчивости или границе устойчивости — выполнению неравенств $\alpha_\sigma \geq 0$, где σ — одно из чисел $s = 1, 2, \dots$.

Наиболее простым случаем динамической неустойчивости в плоскостях стабилизации является невыполнение условий фазовой и амплитудной стабилизации на частотах, близких к частотам собственных колебаний жидкости в баках или упругих поперечных (крутильных) колебаний корпуса. Неустойчивость этого типа связана со сравнительно большим динамическим коэффициентом усиления $A(\omega)$ автомата стабилизации и неблагоприятным фазовым сдвигом $\varphi(\omega)$ на этих частотах, что, в свою очередь, является следствием требований, накладываемых на АС условиями устойчивости РН как твердого жесткого тела (особенно в случае сильной статической аэродинамической неустойчивости). Здесь АС выступает, таким образом, как генератор колебаний в некотором диапазоне частот, в котором объект обладает собственной динамической устойчивостью без АС.

Более сложным и трудным для проектирования устойчивой системы является случай нестабилизируемости, который чаще всего наблюдается на верхних ступенях РН или КА с ЖРД в диапазоне частот собственных колебаний жидкости в баках, на РН сложных конструктивных схем при плотном спектре частот упругих поперечных (крутильных) колебаний корпуса, пересекающемся со спектром частот колебаний жидкости в баках, на конец, — почти на всех первых ступенях мощных РН при колебаниях в направлении продольной оси, чаще всего — при пересечении спектров частот продольных колебаний корпуса и жидкости в топливных магистралях (речь все время идет о доминирующих гармониках).

На этом вопросе следует остановиться подробнее, ибо именно здесь выясняется смысловая нагрузка, которую несет на себе понятие «нестабилизируемость», использованное в работах [20, 26]. (См. также статью [34] и близкую по постановке задачи работу [56]). Лишь недавно удалось установить (см. работу [4]), что условия, соответствующие попаданию объекта регулирования на границу стабилизируемости, совпадают с условиями «не-

наблюдаемости» или «неуправляемости» объекта по Калману [10].

Однако «нестабилизируемость» включает в себя нечто большее, так как для объектов «наблюдаемых» и «управляемых», но «нестабилизируемых», принципиально невозможна фазовая стабилизация, если нестабилизируемость наблюдается на сколь угодно близких частотах колебаний разомкнутой системы. Это связано с невозможностью технической реализации фазовой характеристики АС, удовлетворяющей противоречивым требованиям к знаку $\sin \phi(\omega)$ («+» и «—» практически на одной и той же частоте), если учесть разбросы параметров объекта и АС и их изменение по времени). В случаях, упомянутых выше, как раз наблюдается такая ситуация.

Следовательно, стабилизируемость до некоторой степени характеризует способность объекта регулирования поддаваться стабилизирующему воздействию АС заданной структуры.

Каков будет конечный результат — в сильной степени зависит еще от одного свойства объекта регулирования — его собственной динамической устойчивости (или неустойчивости). Следует различать два типа такой неустойчивости, которые иллюстрируются рис. 8.1, а и б (степень неустойчивости сильно утрирована).

Первый тип неустойчивости реализуется за счет отрицательной диссипации энергии (сили типа отрицательного вязкого трения, роль которых могут в некоторых случаях играть кориолисовы силы, возбуждающие аэродинамические силы, пропорциональные обобщенным скоростям и т. д.).

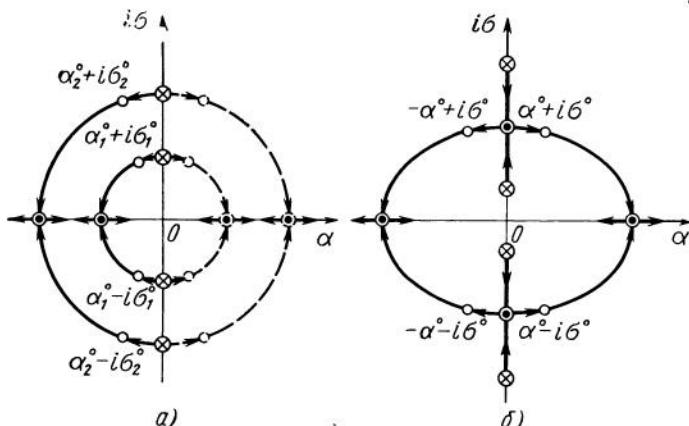


Рис. 8.1. Корневые годографы для системы, включающей два связанных осциллятора:
а — при увеличении положительного или отрицательного демпфирования; б — при увеличении позиционной неконсервативной силы

На рис. 8.1, а показаны корневые годографы для двух пар комплексных корней характеристического уравнения объекта при сильном увеличении положительного (левая полуплоскость) или отрицательного (правая полуплоскость) демпфирования, вплоть до критических значений, когда комплексные корни превращаются в вещественные (апериодическая, а не колебательная устойчивость или неустойчивость). Соответствующий тип динамической неустойчивости никак не связан с нестабилизируемостью объекта регулирования и характеризуется для реальных объектов ракетно-космической техники (РКТ) весьма малыми инкрементами колебаний, что делает его мало актуальным в задачах динамики РН (о корневых годографах см. книгу [37]).

Напротив, второй тип неустойчивости, возникающей под влиянием неконсервативных позиционных сил с несимметричной матрицей коэффициентов при обобщенных координатах (тяга ЖРД, аэродинамическая подъемная сила крылатой верхней ступени РН и т. д.) характеризуется обычно значительно большими инкрементами колебаний, представляющими реальную опасность для устойчивости РН.

Именно к этому типу неустойчивости относится флаттер, шимми и другие аналогичные явления, рассмотренные в работах [3, 5, 33, 39] и др. Этот тип собственной динамической неустойчивости сильно связан с нестабилизируемостью, которая, как выяснилось [42, 20], является для него необходимым условием.

На рис. 8.1, б показан корневой годограф для такой системы при увеличении значения некоторого параметра, характеризующего неконсервативную силу, вплоть до появления неустойчивости, которая в конце концов переходит в апериодическую. Здесь, как видно, динамическая неустойчивость возникает при слиянии двух частот, что является очень важным обстоятельством.

Наиболее классические формы собственной динамической неустойчивости РН — это неустойчивость их верхних ступеней или КА в диапазоне частот собственных колебаний жидкости в баках и неустойчивость первых ступеней РН при сближении частоты колебаний маршевых ЖРД, обусловленной упругостью кинематической цепи, которая связывает его с валом рулевой машины, и частоты одного из низших тонов поперечных колебаний корпуса.

Характерной особенностью этой формы динамической неустойчивости является то, что в отличие от рис. 8.1, а, введение в систему дополнительного линейного демпфирования по обеим обобщенным координатам очень слабо влияет на положение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости, причем введение различных коэффициентов демпфирования в члены, пропорциональные обобщенным скоростям, ухудшает, а не улучшает устойчивость системы, расширяя область неустойчивости в параметрах, так или иначе связанных с неконсервативной силой [5, 33, 64]. Это обстоятельство имеет особенно большое значение при выборе рациональной компоновки и центровки РН и КА и,

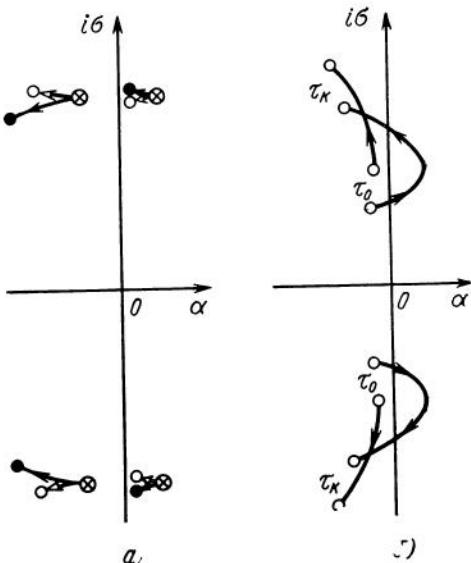


Рис. 8.2. Корневые годографы для системы, включающей два связанных осциллятора:

a — при слиянии частот вследствие наличия позиционной неконсервативной силы и увеличении диссиликативных сил, *b* — при различных частотах и изменениях параметров системы по времени (активный участок полста РН)

например, при проектировании демпферов колебаний жидкости в баках [45, 46].

На рис. 8.2 представлены корневые годографы для собственно динамически неустойчивого объекта (параметр — коэффициент демпфирования колебаний жидкости в баках, см. рис. 8.2, *a*) и для объекта, неустойчивость которого возникает только в замкнутой системе объект — АС (параметр — безразмерное время полета на активном участке, см. рис. 8.2, *b*).

Следует еще особо сказать о расширении возможных форм динамической неустойчивости замкнутой системы при использовании дискретных систем управления, включающих бортовую цифровую вычислительную машину (БЦВМ), вследствие самого факта дискретизации информации (квантование по времени), не говоря уже о более тонких эффектах ([2, 38, 41]).

8.3. Применение частотных методов

Рассмотрим простейшую функциональную схему системы объект регулирования — регулятор, представленную на рис. 8.3, *a*, где Q_0^+ и Q_0^- — входное и выходное значение карбонова изображения корректирующего параметра q ; $W_0(p)$ и $\mathcal{L}(p)$ — передаточные функции объекта и регулятора как разомкнутых систем. Разомкнутая система объект — регулятор характеризуется передаточной функцией $W(p) = W_0(p)\mathcal{L}(p)$, а соответствующая замкнутая система — передаточной функцией

$$G(p) = \frac{W(p)}{1 - W(p)} = \frac{W_0(p)\mathcal{L}(p)}{1 - W_0(p)\mathcal{L}(p)}.$$

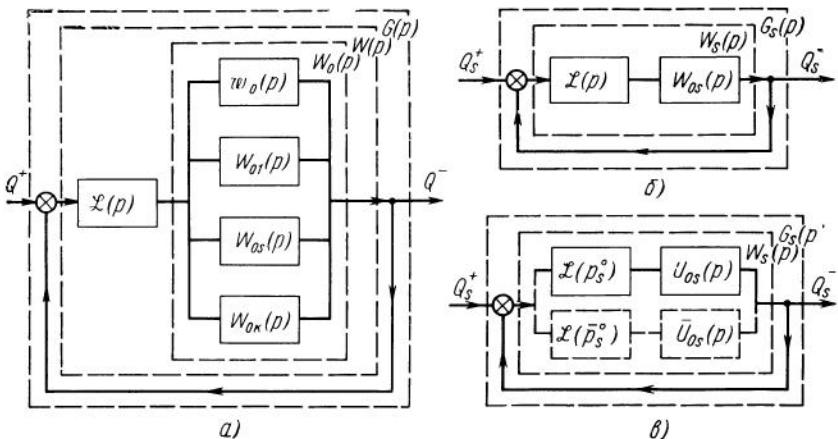


Рис. 8.3. Функциональная схема системы объект — регулятор:
а — исходная система, б — выделение одной ветви передаточной функции, в — разложение на простейшие дроби

Здесь и в дальнейшем принято, что замыкание системы осуществляется подачей на вход выходного сигнала без перемены знака, чем и объясняется появление в знаменателе знака «—», а не «+», как при правиле знаков, принимаемом обычно в теории автоматического регулирования [1].

Представим $W_0(p)$ в виде

$$W_0(p) = \frac{\Delta_1(p)}{\Delta_0(p)}, \quad (8.1)$$

где $\Delta_0(p)$ — характеристический определитель объекта регулирования, а $\Delta_1(p)$ — определитель, стоящий в числителе передаточной функции в соответствии со схемой рис. 8.3, а.

Характеристическое уравнение разомкнутой системы (объект регулирования) имеет вид

$$\Delta_0(p) = 0. \quad (8.2)$$

Соответственно для замкнутой системы

$$W_0(p) \mathcal{L}(p) = 1. \quad (8.3)$$

Рассмотрим структуру передаточной функции объекта регулирования $W_0(p)$ с учетом его специфических особенностей (наличие многих «колебательных» степеней свободы с очень низким собственным демпфированием).

Во всех рассматриваемых в настоящей книге задачах $W_0(p)$ представляет собой мероморфную функцию комплексного переменного. Примем, что все ее полюсы, совпадающие с нулями функции $\Delta_0(p)$, являются простыми, так что функцию можно разложить на простейшие дроби [14].

Представим это разложение в форме

$$\begin{aligned} W_0(p) &= w_0(p) + \sum_{s=1,2,\dots} W_{0s}(p); \\ W_{0s}(p) &= U_{0s} + \bar{U}_{0s}; \\ U_{0s} &= \frac{A_{0s}}{p - p_s^\circ}; \quad \bar{U}_{0s} = \frac{\bar{A}_{0s}}{p - \bar{p}_s^\circ}, \end{aligned} \quad (8.4)$$

где $p = p_s^\circ$ и $p = \bar{p}_s^\circ$ — корни разомкнутой системы с мнимыми частями, близкими к частотам собственных колебаний жидкости в баках или магистралях и упругих колебаний корпуса. Важной особенностью рассматриваемых систем является то, что всегда справедливы неравенства

$$a_s^\circ \ll \sigma_s^\circ. \quad (8.5)$$

Функция $w_0(p)$ включает члены разложения функции $W_0(p)$, соответствующие всем остальным ее особенностям; она близка к передаточной функции объекта как твердого жесткого тела.

A_{0s} и \bar{A}_{0s} — вычеты функции $W_0(p)$ в простых полюсах $p = p_s^\circ$ и $p = \bar{p}_s^\circ$, определяемые по формулам [14]

$$A_{0s} = \frac{\Delta_1(p_s^\circ)}{\Delta'_0(p_s^\circ)}; \quad \bar{A}_{0s} = \frac{\Delta_1(\bar{p}_s^\circ)}{\Delta'_0(\bar{p}_s^\circ)}. \quad (8.6)$$

В следующем разделе рассматривается более общий случай, когда полюсы функции $W_0(p)$ могут быть двукратными (собственная динамическая неустойчивость объекта регулирования, связанная со слиянием пары собственных частот).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$U(p) = A \frac{p + \bar{p}^\circ}{p - p^\circ} = A + A \frac{p^\circ + \bar{p}^\circ}{p - p^\circ}, \quad (8.7)$$

где A и p° — некоторые комплексные числа, причем $\operatorname{Re} p^\circ \neq 0$ и $\operatorname{Im} p^\circ \neq 0$. Эта функция, как известно [14], отображает полуплоскость p (правую или левую), которой принадлежит точка a , в область плоскости W , внешнюю по отношению к окружности N радиуса $|A|$ с центром в начале координат, а полуплоскость, которой принадлежит точка $-\bar{a}$, — в область, внутреннюю по отношению к той же окружности. Последняя представляет собой, таким образом, в плоскости W образ мнимой оси плоскости p (рис. 8.4).

При изменении p от $-i\infty$ до $+i\infty$ окружность N обходится по часовой стрелке при $\operatorname{Re} p^\circ < 0$ и против часовой стрелки при $\operatorname{Re} p^\circ > 0$.

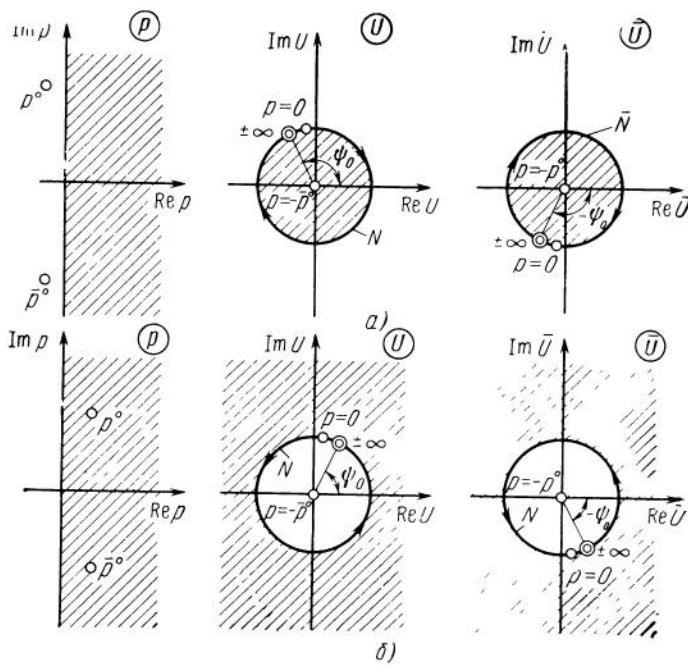


Рис. 8.4. Конформное отображение, осуществляющееся функциями $U(p)$ и $\bar{U}(p)$ при отрицательной (а) и положительной (б) вещественной части параметра p^o

Сопряженная с $U(p)$ функция $\bar{U}(p)$ имеет вид

$$\bar{U}(p) = \bar{A} \frac{p + p^o}{p - \bar{p}^o} = \bar{A} + \bar{A} \frac{p^o + \bar{p}^o}{p - \bar{p}^o}. \quad (8.8)$$

Эта функция осуществляет аналогичное отображение, только точки p^o и \bar{p}^o меняются ролями.

Полагая

$$p = i\omega; \quad p^o = \alpha^o + i\sigma^o; \quad \bar{p}^o = \alpha^o - i\sigma^o;$$

$$\alpha^o \ll \sigma^o, \quad A = \rho e^{i\psi_0}; \quad \bar{A} = \rho e^{-i\psi_0}; \quad (8.9)$$

$$U(i\omega) = R e^{i\psi}; \quad \bar{U}(i\omega) = R e^{i\tilde{\psi}},$$

получим

$$\psi = \psi_0 + \operatorname{Arctg} \left[-\frac{2\alpha^o(\omega - \sigma^o)}{(\omega - \sigma^o)^2 - \alpha^o{}^2} \right] \approx \psi_0 + \operatorname{Arctg} \left(\frac{2\alpha^o}{\sigma^o - \omega} \right);$$

$$\tilde{\psi} = -\psi_0 + \operatorname{Arctg} \left[-\frac{2\alpha^o(\omega + \sigma^o)}{(\omega + \sigma^o)^2 - \alpha^o{}^2} \right] \approx -\psi_0 - \operatorname{Arctg} \left(\frac{2\alpha^o}{\sigma^o + \omega} \right); \quad (8.10)$$

$$= \rho \left| \frac{p + \bar{p}^o}{p - p^o} \right| = \rho \frac{\sqrt{[\alpha^o{}^2 - (\omega - \sigma^o)^2]^2 + 4\alpha^o{}^2(\omega - \sigma^o)^2}}{\alpha^o{}^2 + (\omega - \sigma^o)^2} = \rho = |A|.$$

Последнее равенство доказывает, что кривая N является точной окружностью, как и кривая \bar{N} в случае функции $\bar{U}(p)$. Соответствие точек при отображениях (8.7) и (8.8) и направление обходов окружности N при $\operatorname{Re} p^\circ \geq 0$ представлено на рис. 8.4, где принято $\operatorname{Re} A > 0$, $\operatorname{Im} A > 0$.

Значения аргумента ψ в характерных точках приведены в табл. 8.1. Аналогичным образом ведет себя функция $\psi(\omega)$ только по отношению к отрицательным значениям аргумента.

Таблица 8.1

$\alpha^\circ > 0$		$\alpha^\circ < 0$	
ω	ψ	ω	ψ
$-\infty$	ψ_0	$-\infty$	ψ_0
0	$\psi_0 + \frac{2\alpha^\circ}{\sigma^\circ}$	0	$\psi_0 + \frac{2\alpha^\circ}{\sigma^\circ}$
$\ll \sigma^\circ$	$\psi_0 - \frac{2\alpha^\circ}{\omega - \sigma^\circ}$	$\ll \sigma^\circ$	$\psi_0 - \frac{2\alpha^\circ}{\omega - \sigma^\circ}$
$\sigma^\circ - \alpha^\circ$	$\psi_0 + \frac{\pi}{2}$	$\sigma^\circ + \alpha^\circ$	$\psi_0 - \frac{\pi}{2}$
σ°	$\psi_0 + \pi$	σ°	$\psi_0 - \pi$
$\sigma^\circ + \alpha^\circ$	$\psi_0 + \frac{3\pi}{2}$	$\sigma^\circ - \alpha^\circ$	$\psi_0 - \frac{3\pi}{2}$
$\gg \sigma^\circ$	$\psi_0 + 2\pi - \frac{2\sigma^\circ}{\omega - \sigma^\circ}$	$\gg \sigma^\circ$	$\psi_0 - 2\pi - \frac{2\alpha^\circ}{\omega - \sigma^\circ}$
∞	$\psi_0 + 2\pi$	∞	$\psi_0 - 2\pi$

Таким образом, для функции $U(p)$ абсолютная величина приращения аргумента при изменении ω от $-\infty$ до 0 составляет $2\alpha^\circ/\sigma^\circ$, т. е. при $\alpha^\circ \ll \sigma^\circ$ близка к нулю, а при изменении ω от 0 до ∞ — близка к 2π ; для функции $\bar{U}(p)$ имеет место обратная картина.

При этом, как видно из табл. 8.1, практически вся окружность N обходится при очень малом изменении аргумента ω в окрестности значения $\omega = \sigma^\circ$, при котором приращение функции ψ для окружности \bar{N} близко к нулю.

Рассмотрим теперь функции

$$U^*(p) = U(p) - A = A \frac{p^\circ + \bar{p}^\circ}{p - p^\circ}; \quad (8.11)$$

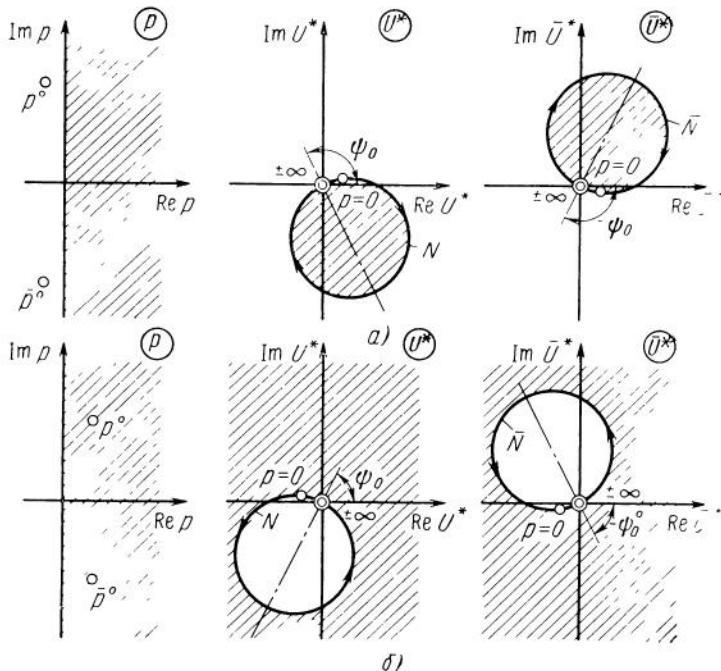


Рис. 8.5. Конформное отображение, осуществляющееся функциями $U^*(p)$ и $\bar{U}^*(p)$ при отрицательной (а) и положительной (б) вещественной части параметра p°

$$\bar{U}^*(p) = \bar{U}(p) - \bar{A} = \bar{A} \frac{p^\circ + \bar{p}^\circ}{p - \bar{p}^\circ}.$$

Отображение, которое они осуществляют при $\operatorname{Re} A > 0$ $\operatorname{Im} A > 0$ и $\operatorname{Re} p^\circ \geq 0$ представлено на рис. 8.5.
Положив

$$p^\circ = p_s^\circ; \quad \bar{p}^\circ = \bar{p}_s^\circ; \quad (8.12)$$

$$A = \frac{A_{0s}}{2\alpha_s^\circ} = \frac{\gamma_{0s} + i\nu_{0s}}{2\alpha_s^\circ}; \quad \bar{A} = \frac{\bar{A}_{0s}}{2\alpha_s^\circ} = \frac{\gamma_{0s} - i\nu_{0s}}{2\alpha_s^\circ},$$

получим

$$U_{0s}(p) = U^*(p); \quad \bar{U}_{0s}(p) = \bar{U}^*(p). \quad (8.13)$$

Можно показать, что при выполнении неравенств (8.5) аналогичная оценка имеет место в силу формул (8.6) для γ_{0s} и ν_{0s} [20], т. е.

$$\gamma_{0s} \ll \nu_{0s}. \quad (8.14)$$

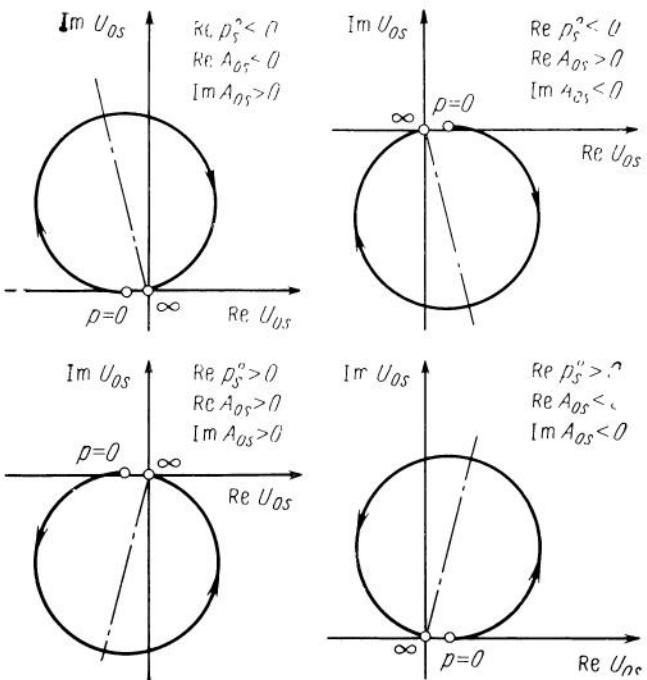


Рис. 8.6. Образ положительной части мнимой оси p в плоскости U_{0s}

На рис. 8.6 показаны схематически с учетом (8.5) и (8.14) окружности, представляющие в плоскости $W(p)$ образ мнимой оси p , при отображении, осуществляющем функцией $U_{0s}(p)$, при различных знаках α_s^o , γ_{0s} , ν_{0s} .

Учитывая полученные результаты и считая $\mathcal{L}(p)$ также мероморфной функцией, особенности которой лежат в области, не пересекающейся с областью плоскости p , где расположены полюсы $W_0(p)$, можно представить функцию $W(p)$ в форме, аналогичной (8.4):

$$W(p) = \chi(p) + \sum_{s=1,2,\dots} W_s(p);$$

$$W_s(p) = U_s(p) + \bar{U}_s(p); \quad (8.15)$$

$$U_s = \frac{A_s}{p - p_s^o}; \quad \bar{U}_s = \frac{\bar{A}_s}{p - \bar{p}_s^o}; \quad \chi(p) = \mathcal{L}(p) w_0(p);$$

$$A_s = A_{0s} \mathcal{L}(p_s^o) = \gamma_s + i\nu_s; \quad \bar{A}_s = \bar{A}_{0s} \mathcal{L}(\bar{p}_s^o) = \gamma_s - i\nu_s.$$

Заменяя функции $\mathcal{L}(p_s^o)$ и $\mathcal{L}(\bar{p}_s^o)$ частотными характеристиками $\mathcal{L}(i\sigma^o)$ и $\mathcal{L}(-i\sigma^o)$, что соответствует учету первых членов

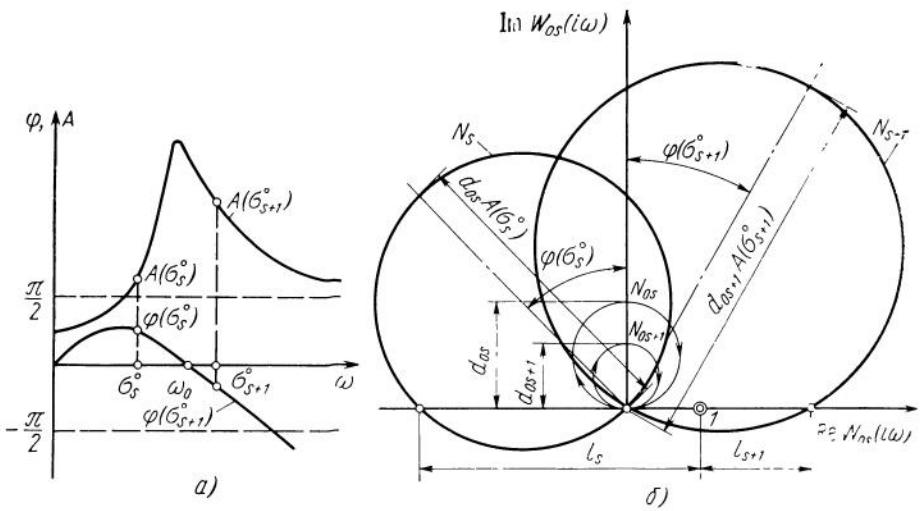


Рис. 8.7. Фазо-частотная и амплитудно-частотная характеристики корректирующего устройства (а) и их влияние на амплитудно-фазовую характеристику в окрестности частот σ_s и σ_{s+1} (б)

иу разложения в ряды Тэйлора в окрестности значений $p = i\sigma_s^\circ$ и $p = -i\sigma_s^\circ$, и принимая во внимание неравенства (8.14), получим

$$\begin{aligned}\gamma_s &= -v_{0s} A(\sigma_s) \sin \varphi(\sigma_s^\circ); \\ v_s &= v_{0s} A(\sigma_s) \cos \varphi(\sigma_s^\circ).\end{aligned}\quad (8.16)$$

В силу ограничений, наложенных на динамический коэффициент усиления регулятора, которые оговорены в разд. 1.2, следует считать, что динамический коэффициент усиления разомкнутой системы объект — регулятор на частотах σ_s° ($s = 1, 2, \dots$) мал в том смысле, что справедливы следующие оценки:

$$|\gamma_s| \ll \sigma_s^\circ; \quad |v_s| \ll \sigma_s^\circ. \quad (8.17)$$

Совокупность неравенств (8.5), (8.14) и (8.17) играет основную роль при выводе приближенных зависимостей, широко используемых ниже.

Прежде всего заметим, что если учесть свойства функций $U_{0s}(p)$ и $\bar{U}_{0s}(p)$, то можно в первом приближении заменить функцию (8.15) совокупностью независимых ее ветвей $W_s(p)$ (рис. 8.3, б). При $0 \leq \omega \leq \infty$ регулятор выступает как оператор, преобразующий аффинно каждую окружность N_{0s} в N_s , окружность N_{0s+1} в N_{s+1} и т. д., как показано на рис. 8.7. При этом преобразовании окружность N_{0s} поворачивается на угол $\varphi(\sigma_s^\circ)$ (при $\varphi(\sigma_s^\circ) > 0$ — регулятор с фазовым опережением, при $\varphi(\sigma_s^\circ) < 0$ —

с фазовым запаздыванием), а модуль радиуса вектора каждой ее точки умножается на масштабный множитель $A(\sigma_s^\circ)$.

Геометрические характеристики полученной таким образом окружности приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Диаметр	$d_s = -\frac{v_{0s}}{\alpha_s} A(\sigma_s^\circ)$
Комплексная координата центра	$\zeta_s = -\frac{1}{2\alpha_s} (\gamma_s + iv_s) \approx -\frac{iv_{0s}}{2\alpha_s} A(\sigma_s^\circ) e^{iz(\sigma_s)}$
Расстояние от точки $+1$ до точки пересечения с вещественной осью	$l_s = -\left(1 + \frac{\gamma_s}{\alpha_s}\right) = -1 + \frac{v_{0s}}{\alpha_s} A(\sigma_s^\circ) \sin \varphi(\sigma_s)$
Направление обхода	$\text{sign } \alpha_s^\circ$

Располагая этими характеристиками, можно исследовать устойчивость замкнутой системы с помощью критерия Найквиста [1], который в рассматриваемом случае формулируется так: замкнутая система устойчива, если точку $+1$ не охватывает ни одна из петель N_s , обходимых по часовой стрелке, и охватывают все петли N_s , обходимые против часовой стрелки ($0 \leq \omega \leq \infty$).

Однако можно пойти дальше и получить приближенные формулы для корней характеристического уравнения замкнутой системы, связывающие их вещественные и мнимые части с характеристиками объекта и регулятора. С этой целью подставим разложение (8.15) в характеристическое уравнение (8.3). В результате получим

$$\sum_{s=1, 2, \dots} \left(\frac{\gamma_s + iv_s}{p - p_s} + \frac{\gamma_s - iv_s}{p - \bar{p}_s} \right) + \chi(p) = 1. \quad (8.18)$$

Учитывая результаты, полученные выше, можно при $|p| \approx |p_s^\circ|$ пренебречь всеми членами в левой части уравнения (8.18), кроме одного, соответствующего индексу s , что позволяет получить формулы для корней p_s характеристического уравнения замкнутой системы, близких по модулю к p_s° .

На первом этапе мы сохраним два члена, соответствующие $U_s(p)$ и $\bar{U}_s(p)$.

Таким образом, задача сводится к решению независимых уравнений

$$\frac{\gamma_s + i\nu_s}{p - p_s} + \frac{\gamma_s - i\nu_s}{p - \bar{p}_s} = 1, \quad (8.19)$$

где

$$\gamma_s = -\nu_{0s} A(\sigma_s) \sin \varphi(\sigma_s); \quad \nu = \nu_{0s} A(\sigma_s) \cos \varphi(\sigma_s) \quad (8.20)$$

при различных значениях индекса s . Здесь предполагается, что при любом $s \geq 1$:

$$|\sigma_{s+1} - \sigma_s| > \frac{\epsilon}{2} (\sigma_{s+1} + \sigma_s); \quad |\sigma_s - \omega_0| > \epsilon \omega_0,$$

т. е. среди частот σ_s , нет близких друг к другу или к частоте среза регулятора ω_0 . Некоторые соображения о допустимой степени близости, характеризуемой малым параметром ϵ , приводятся в разд. 8.4.

Обозначив

$$p - a_s = \Omega; \quad p = \Omega + a_s,$$

получим из (8.19) квадратное уравнение

$$\Omega^2 - 2\gamma_s \Omega + \sigma_s^2 + 2\sigma_s \nu_s = 0, \quad (8.21)$$

из которого найдем, учитывая малость $|\gamma_s|$ и $|\nu_s|$, оговоренную выше,

$$\Omega_s = \gamma_s \pm \sqrt{\gamma_s^2 - \sigma_s^2 - 2\sigma_s \nu_s} \approx \gamma_s \pm i\sigma_s \left(1 + \frac{\nu_s}{\sigma_s} - \frac{\gamma_s^2}{2\sigma_s^2} \right).$$

Пренебрегая последним слагаемым, имеющим второй порядок малости, получим следующую основную формулу для корней характеристического уравнения замкнутой системы p_s , лежащих в верхней полуплоскости [20, 21, 26]:

$$\begin{aligned} p_s &= a_s + i\sigma_s; \\ a_s &= \sigma_s + \gamma_s = \sigma_s - \nu_{0s} A(\sigma_s) \sin \varphi(\sigma_s); \\ \sigma_s &= \sigma_s + \nu_s = \sigma_s + \nu_{0s} A(\sigma_s) \cos \varphi(\sigma_s). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Заметим, что эти формулы можно получить сразу же из уравнения (8.19), если сохранить в левой части только первое слагаемое:

$$p_s = \bar{p}_s + \gamma_s + i\nu_s,$$

или из геометрического построения, представленного на рис. 8.7, в основе которого лежит замена функции W_{0s} одной ветвью U_{0s} .

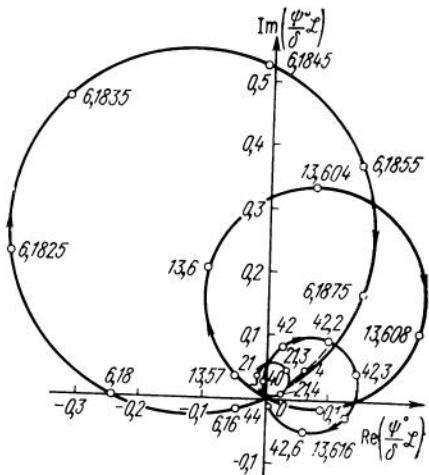
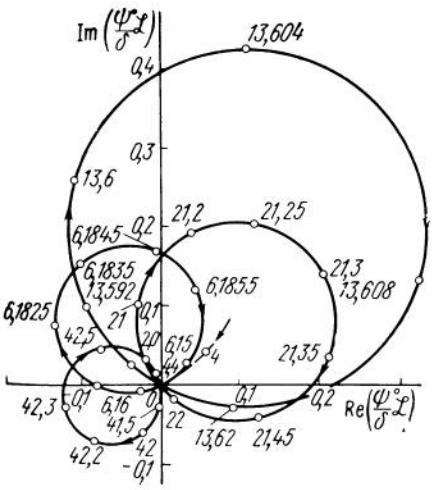
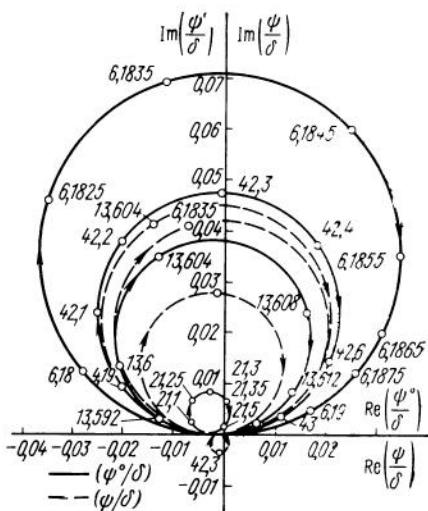
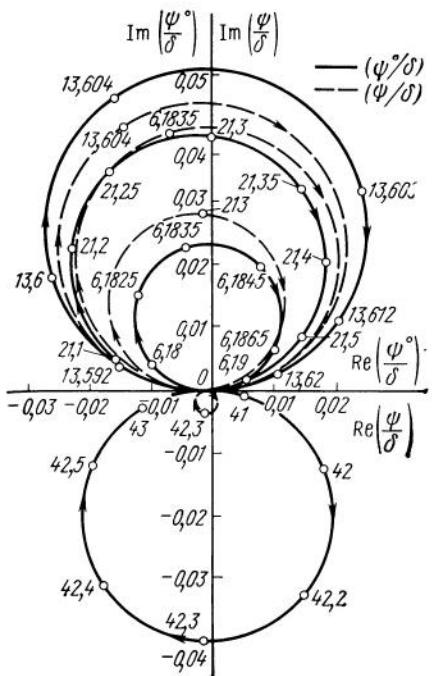


Рис. 8.8. Типичная амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы: упругий корпус — жидкость при переднем расположении гиродатчика

Рис. 8.9. То же при заднем расположении гиродатчика

Рис. 8.10. Типичная амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы упругий корпус — жидкость — автомат стабилизации при переднем расположении гиродатчика

Рис. 8.11. То же при заднем расположении гиродатчика

Последовательная замена передаточной функции разомкнутой системы сначала совокупностью s независимых ветвей W_s , а затем s функций U_s (для верхней полуплоскости p) показана на рис. 8.3, б, в. Такое расщепление передаточной функции представляет собой весьма заметный шаг вперед, открывая возможность получения приближенных формул (8.22) для корней характеристического уравнения замкнутой системы, используемых на протяжении всех последующих глав, а также обобщения формул (8.22) на системы с близкими и равными частотами собственных колебаний объекта регулирования и на дискретные системы.

На рис. 8.8—8.11 показаны для иллюстрации амплитудно-фазовые характеристики разомкнутой системы, соответствующей гипотетическому объекту (см. рис. 8.8, 8.9) и тому же объекту с АС (см. рис. 8.10 и 8.11) при различном положении датчика углового положения по длине корпуса, рассчитанные В. Д. Сычевым (плоскость рыскания; два тона упругих колебаний корпуса и два бака). Эти рисунки дают достаточно ясное представление о правомерности исходных концепций, лежащих в основе вывода основных зависимостей (8.22). Некоторые оценки точности формул (8.22) даны в работах [18, 20, 21].

Заметим в заключение этого раздела, что, как видно из формул (8.22), хорошие перспективы обеспечения динамической устойчивости замкнутой системы в случае невозможности по тем или иным причинам фазовой или амплитудно-фазовой стабилизации на одной из частот путем выбора параметров АС (без изменения его структуры) открывает резкое увеличение собственного демпфирования объекта регулирования на этой частоте. Такой путь широко применяется для обеспечения устойчивости РН на частотах колебаний жидкости в баках (применение специальных демпферов колебаний жидкости см. в гл. 11).

8.4. Случай близких собственных частот разомкнутой системы

Рассмотрим теперь случай, когда среди частот собственных колебаний разомкнутой системы (объекта регулирования) имеется хотя бы одна пара частот, которые при некоторых параметрах системы могут оказаться сколь угодно близкими друг к другу, например σ_1^o и σ_2^o . При этом не исключается и случай полного их совпадения, т. е. собственной динамической неустойчивости РН, обусловленной неконсервативными позиционными силами (см. разд. 8.2). В дальнейшем, говоря о собственной динамической неустойчивости, мы всегда будем предполагать именно этот тип неустойчивости, если не сделано специальной оговорки. Обозначим

$$\dot{p_1} = p^o - \Delta p^o; \quad \dot{p_2} = p^o + \Delta p^o;$$

$$\Delta p^o = \Delta a^o + i \Delta \sigma^o; \quad p^o = a^o + i \sigma^o;$$

$$a^\circ = \frac{1}{2} (a_1^\circ + a_2^\circ); \quad \sigma^\circ = \frac{1}{2} (\sigma_1^\circ + \sigma_2^\circ); \quad (8.23)$$

$$\Delta a^\circ = \frac{1}{2} (a_2^\circ - a_1^\circ); \quad \Delta \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_2^\circ - \sigma_1^\circ);$$

$$\Omega = p - p^\circ = p - (a^\circ + i\sigma^\circ).$$

Здесь, как всегда, предполагается, что

$$|a^\circ| \ll \sigma^\circ; \quad |\Delta a^\circ| \ll \sigma^\circ. \quad (8.24)$$

Учитывая результаты предыдущего раздела, можно свести задачу к решению следующего уравнения:

$$\frac{A_1}{\Omega - \Delta p^\circ} + \frac{A_2}{\Omega + \Delta p^\circ} = 1, \quad (8.25)$$

где $A_s = \gamma_s + i\nu_s = A_{0s} A(\sigma_s^\circ) e^{i\varphi(\sigma_s^\circ)}$;

$$A_{01} = \gamma_{01} + i\nu_{01} = \frac{\Delta_1 (p^\circ + \Delta p^\circ)}{\Delta'_0 (p^\circ + \Delta p^\circ)}; \quad (8.26)$$

$$A_{02} = \gamma_{02} + i\nu_{02} = \frac{\Delta_1 (p^\circ - \Delta p^\circ)}{\Delta'_0 (p^\circ - \Delta p^\circ)}.$$

Из (8.25) получим квадратное уравнение

$$\Omega^2 - (A_1 + A_2)\Omega - (A_1 - A_2 + \Delta p^\circ)\Delta p^\circ = 0, \quad (8.27)$$

решение которого имеет вид

$$\Omega = \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (A_1 + A_2)^2 + (\Delta p^\circ)^2 + (A_1 - A_2)\Delta p^\circ}. \quad (8.28)$$

Не близкие корни разомкнутой системы

Предположим сначала, что частоты σ_1° и σ_2° не являются близкими, так что $|\Delta p^\circ|$ не является малой величиной, и справедлива оценка

$$\frac{|A_1 + A_2|}{2|\Delta p^\circ|} \ll 1. \quad (8.29)$$

Соответствующая ситуация представлена схематически на рис. 8.12, а. Радиус заштрихованного круга следует считать намного большим $(A_1 + A_2)/2$.

Используя оценку (8.29), найдем из (8.28)

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \pm \Delta p^\circ \sqrt{1 + \frac{A_1 + A_2}{4(\Delta p^\circ)^2} + \frac{A_1 - A_2}{\Delta p^\circ}} \approx \\ &\approx \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \pm \Delta p^\circ \left(1 + \frac{A_1 - A_2}{2\Delta p^\circ} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\Omega_1 = A_1 - \Delta p^\circ; \quad \Omega_2 = A_2 + \Delta p^\circ$$

и далее

$$\begin{aligned} p_1 &= \Omega_1 + a^\circ + i\sigma^\circ = \gamma_1 + a_1^\circ + i(\sigma_1^\circ + \nu_1); \\ p_2 &= \Omega_2 + a^\circ + i\sigma^\circ = \gamma_2 + a_2^\circ + i(\sigma_2^\circ + \nu_2). \end{aligned} \quad (8.30)$$

Мы получили выражения, совпадающие с (8.22), если в последнем положить $s=1$ и $s=2$.

Учитывая неравенства (8.24), можно заменить оценку (8.29) следующими двумя:

$$\frac{A(\sigma_s^\circ)|v_{0s}|}{|\Delta\sigma^\circ|} \ll 1 \quad (s=1, 2). \quad (8.31)$$

Теперь можно уточнить, что значит термин «не близкие» между собой частоты σ_s° , при которых справедливы формулы (8.22). Оценки (8.31) можно истолковать так: абсолютная величина разности между любой парой частот σ_{s+1}° и σ_s° существенно больше максимального по модулю сдвига любой из этих частот, создаваемого регулятором при замыкании системы.

Можно сразу же уточнить и вопрос о допустимой близости частот σ_s° к частоте среза регулятора ω_0 .

Очевидно, что частоты σ_s° и ω_0 не являются «близкими», если абсолютная величина разности между ними существенно больше максимального по модулю сдвига частоты σ_s° , создаваемого АС при замыкании системы.

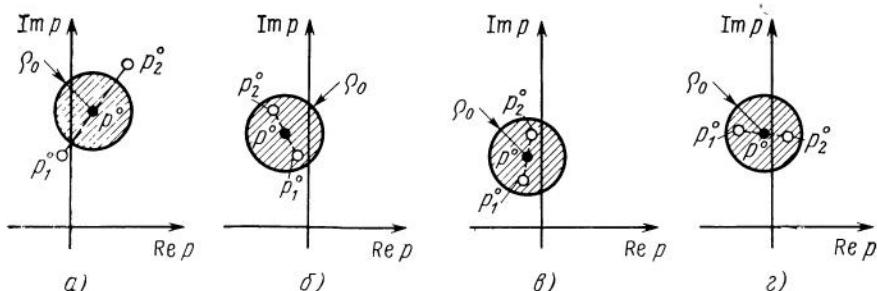


Рис. 8.12. Схема расположения корней характеристического уравнения объекта регулирования на комплексной плоскости:

a — далекие корни; *б* — близкие корни; *в* — близкие корни с исчезающими малым отличием в вещественных частях; *г* — близкие корни с исчезающими малым отличием в мнимых частях

Близкие корни разомкнутой системы

Рассмотрим альтернативную ситуацию, когда оценка (8.29) или (8.31) не имеет места, а напротив,

$$\frac{2|\Delta p^\circ|}{|A_1 + A_2|} \ll 1; \quad \frac{|\Delta \sigma^\circ|}{A(\sigma_s^\circ)|\gamma_{0s}|} \ll 1 (s=1,2), \quad (8.32)$$

что и является основным предметом исследования в настоящем разделе.

Пусть имеются близкие частоты σ_1° и σ_2° (в частности, равные), но соответствующие корни p_1° и p_2° не совпадают. Этот случай схематически представлен на рис. 8.12, б и описывается формулой (8.28), которую теперь можно упростить, учитывая сценки (8.32), посредством замены выражений для вычетов (8.6) первыми членами их разложения в ряд Тейлора в окрестности значения $p=p^\circ$. При этом следует принять во внимание медленное изменение частотных характеристик АС и быстрое изменение аналогичных характеристик объекта, а также то, что $\Delta_0(p^\circ) \approx 0$; $\Delta_0'(p^\circ) \approx 0$ вследствие близости $|p_1^\circ|$ и $|p_2^\circ|$:

$$A(\sigma_1^\circ) e^{i\varphi(\sigma_2^\circ)} \approx A(\sigma_2^\circ) e^{i\varphi(\sigma_2^\circ)} \approx A(\sigma^\circ) e^{i\varphi(\sigma^\circ)} = A e^{i\varphi},$$

$$A_{01} \approx \frac{\Delta_1(p^\circ) + \Delta'_1(p^\circ) \Delta p^\circ}{\Delta''_0(p^\circ) \Delta p^\circ} = \frac{\gamma_0}{\Delta p^\circ} + \gamma'_0; \quad (8.33)$$

$$A_{02} \approx \frac{-\Delta_1(p^\circ) + \Delta'_1(p^\circ) \Delta p^\circ}{\Delta''_0(p^\circ) \Delta p^\circ} = -\frac{\gamma_0}{\Delta p^\circ} + \gamma'_0.$$

Формула (8.28) приобретает теперь следующий вид:

$$\Omega = A\gamma'_0 e^{i\varphi} \pm \sqrt{A^2 \gamma_0'^2 e^{2i\varphi} + 2\gamma_0 A e^{i\varphi} + \Delta p^\circ}. \quad (8.34)$$

Кратные корни разомкнутой системы

Уравнение (8.25), а следовательно, и формулы (8.28) и (8.34) утрачивают смысл в случае появления пары кратных корней, т. е. при $\Delta p^\circ \equiv 0$, $\Delta \alpha^\circ \equiv 0$, $\Delta \sigma^\circ \equiv 0$. Эта ситуация отвечает вполне реальному случаю границы собственной динамической устойчивости объекта регулирования (если еще добавочно принять $\alpha^\circ \equiv 0$).

Уравнение (8.25) теперь надо заменить следующим:

$$\frac{2A''}{\Omega^2} + \frac{2A'}{\Omega} = 1, \quad (8.35)$$

где

$$\Omega = p - p^\circ; \quad p^\circ = i\sigma^\circ;$$

$$A'' = \gamma_0 A e^{i\varphi}; \quad A' = \gamma'_0 A e^{i\varphi}; \quad (8.36)$$

$$\gamma_0 \approx \frac{\Delta_1(p^o)}{\Delta_0''(p^o)}; \quad \gamma'_0 \approx \frac{\Delta_1'(p^o)}{\Delta_0''(p^o)} = i\gamma_0$$

(с учетом того, что $\Delta_0'''(p^o) \approx 0$).

Из (8.35) получим уравнение

$$\Omega^2 - 2A'\Omega - 2A'' = 0, \quad (8.37)$$

решение которого совпадает с выражением (8.34), если в последнем принять $\Delta p^o = 0$. Конечно, формальная операция такого рода была бы незаконной.

Для дальнейшего анализа наибольший интерес представляют следующие три случая.

$$1. \Delta\alpha^o = 0, \Delta\sigma^o \neq 0, \alpha^o \rightarrow 0;$$

γ_0 — вещественное число; $\gamma'_0 = i\gamma_0$ (исследование стабилизируемости при сближении частот σ_1^o и σ_2^o , см. рис. 8.12, в).

$$2. \Delta\sigma^o = 0, \Delta\alpha^o \neq 0, \alpha^o \rightarrow 0;$$

γ_0 — вещественное число; $\gamma'_0 = i\gamma_0$ (исследование собственной динамической неустойчивости при совпадении частот σ_1^o и σ_2^o , см. рис. 8.12, г).

$$3. \Delta\alpha^o \neq 0, \Delta\sigma^o = 0, \alpha^o \rightarrow 0$$

(граница собственной динамической устойчивости).

Поскольку во всех этих случаях γ_0 — вещественное число, а $\gamma'_0 = i\gamma_0$, их можно описать одной формулой, вытекающей из (8.34):

$$\Omega = iA\gamma_0 e^{i\varphi} \pm \sqrt{-A^2\gamma_0^2 e^{2i\varphi} + 2A\gamma_0 e^{i\varphi} + \beta^2}, \quad (8.38)$$

где

$$\beta^2 = \begin{cases} -\Delta\sigma^o{}^2 & \text{при } \Delta\alpha^o = 0 \\ 0 & \text{при } \Delta\alpha^o = \Delta\sigma^o = 0 \\ \Delta\alpha^o{}^2 & \text{при } \Delta\sigma^o = 0. \end{cases} \quad (8.39)$$

Случаи $\Delta\sigma^o \neq 0$ и $\Delta\alpha^o \neq 0$ отличаются, таким образом, только знаком при последнем слагаемом в подкоренном выражении (8.38), но, как будет видно ниже, это отличие влечет за собой далеко идущие последствия.

Выведем с помощью (8.38) основные формулы для корней характеристического уравнения замкнутой системы, исчерпывающие три основных случая, упомянутых выше:

$$a) \gamma_0 \neq 0$$

Введем новые малые параметры $\tilde{\beta} \ll 1$, $\tilde{\gamma} \ll 1$:

$$\tilde{\beta}^2 = \left(\frac{\Delta p^\circ}{Av_0} \right)^2 = \begin{cases} -\left(\frac{\Delta \sigma^\circ}{Av_0} \right)^2 & \text{при } \Delta \alpha^\circ = 0 \\ 0 & \text{при } \Delta \alpha^\circ = \Delta \sigma^\circ = 0 \\ \left(\frac{\Delta \alpha^\circ}{Av_0} \right)^2 & \text{при } \Delta \sigma^\circ = 0. \end{cases} \quad (8.40)$$

$$\tilde{\gamma} = \left(\frac{v_0}{v_0} \right) \frac{1}{Av_0} \sim \tilde{\beta}.$$

Представим выражение для p (8.23) с помощью (8.38) в виде

$$p = \alpha^\circ + i\sigma^\circ + \Omega = \alpha^\circ + i(\sigma^\circ + \tilde{\gamma}) + Av_0\Omega^*, \quad (8.41)$$

тогда

$$\begin{aligned} \Omega^* &= z \pm \sqrt{z^2 + a^2}; \quad z^2 + a^2 = -e^{2i\varphi} + 2\tilde{\gamma}e^{i\varphi} + \tilde{\beta}^2; \\ z &= i(e^{i\varphi} - \tilde{\gamma}); \quad a^2 = \tilde{\gamma}^2 + \tilde{\beta}^2; \quad |a^2| \ll 1. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Под a будем понимать то из значений $\sqrt{a^2}$, которое соответствует верхней полуплоскости.

1. $a^2 < 0$; $a = ib$.

Это означает следующее:

$$-\tilde{\beta}^2 = \frac{\Delta \sigma^\circ 2}{Av_0^2} > \tilde{\gamma}^2; \quad \Delta \sigma^\circ 2 \neq 0 \quad (\tilde{\gamma} \geq 0 \text{ или } \tilde{\gamma} = 0).$$

Положим

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta; \quad z = ib \operatorname{sh} \zeta = b(-\operatorname{ch} \xi \sin \eta + i \operatorname{sh} \xi \cos \eta); \\ \sqrt{z^2 + a^2} &= ib \operatorname{ch} \zeta = b(-\operatorname{sh} \xi \sin \eta + i \operatorname{ch} \xi \cos \eta). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Тогда

$$\Omega^* = ib(\operatorname{sh} \zeta \pm \operatorname{ch} \zeta). \quad (8.44)$$

В силу выражений (8.42) и (8.43) имеем

$$\sin \varphi = b \operatorname{ch} \xi \sin \eta; \quad \cos \varphi - \tilde{\gamma} = b \operatorname{sh} \xi \cos \eta, \quad (8.43a)$$

и из выражений (8.43) и (8.44)

$$\Omega^* = -\sin \varphi(1 \pm \operatorname{th} \xi) + i(\cos \varphi - \tilde{\gamma})(1 \pm \operatorname{cth} \xi). \quad (8.45)$$

Выражение для $\operatorname{th} \xi$ получается следующим образом. Поделим левую и правую части равенств (8.43a) на $b \operatorname{ch} \xi$ и $b \operatorname{sh} \xi$ соответственно, возведем их в квадрат и сложим.

Это дает

$$\frac{(\cos \varphi - \tilde{\gamma})^2}{\sin^2 \xi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\cosh^2 \xi} = b^2. \quad (8.46)$$

Если ввести в качестве новой неизвестной $u = \operatorname{cth} \xi$, то из (8.46) получается биквадратное уравнение относительно u , решение которого, дающее вещественное u , имеет вид

$$u^2 = \frac{-(\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma} \cos \varphi - \cos 2\varphi) + \sqrt{(\tilde{\beta}^2 + \tilde{\gamma} \cos \varphi - \cos 2\varphi)^2 + 4(\cos \varphi - \tilde{\gamma})^2 \sin^2 \varphi}}{2(\cos \varphi - \tilde{\gamma})^2}. \quad (8.47)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что величина $|\Delta p^\circ|$ достаточно мала, так что решения для u имеют смысл, т. е. $u \geq 1$, если $u = \operatorname{cth} \xi$ и $u \leq 1$, если $u = \operatorname{th} \xi$ (8.51).

2. $a^2 > 0$.

Это соответствует одной из следующих возможностей:

$$\tilde{\beta}^2 = \frac{\Delta a^2}{A^2 v_0^2} \neq 0 \quad (\tilde{\gamma} \geq 0 \text{ или } \tilde{\gamma} = 0);$$

$$-\tilde{\beta}^2 = \frac{\Delta \sigma^2}{A^2 v_0} < \tilde{\gamma}^2, \text{ в частности, } \tilde{\beta}^2 = 0 \quad (\tilde{\gamma} \geq 0).$$

Положим

$$\zeta = \xi + i\eta; z = a \operatorname{sh} \zeta = a(\operatorname{sh} \xi \cos \eta + i \operatorname{ch} \xi \sin \eta); \quad (8.48)$$

$$\sqrt{z^2 + a^2} = a \operatorname{ch} \zeta = a(\operatorname{ch} \xi \cos \eta + i \operatorname{sh} \xi \sin \eta).$$

Из выражения (8.42) получим

$$\Omega^* = a(\operatorname{sh} \zeta \pm \operatorname{ch} \zeta) \quad (8.49)$$

и далее из (8.42) и (8.43)

$$-\sin \varphi = a \operatorname{sh} \xi \cos \eta; \cos \varphi - \tilde{\gamma} = a \operatorname{ch} \xi \sin \eta. \quad (8.48a)$$

Учитывая (8.48) и (8.49), найдем

$$\Omega^* = -\sin \varphi(1 \pm \operatorname{cth} \xi) + i(\cos \varphi - \tilde{\gamma})(1 \pm \operatorname{th} \xi). \quad (8.50)$$

Выражение для $u = \operatorname{th} \xi$ получается, как и в случае 1, из уравнения, аналогичного (8.46),

$$\frac{(\cos \varphi - \tilde{\gamma})^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\operatorname{sh}^2 \xi} = a^2 \quad (8.51)$$

и совпадает с выражением (8.47), если под u понимать $\operatorname{th} \xi$, а не $\operatorname{cth} \xi$.

3. $a^2=0$.
Это означает

$$\frac{\Delta\alpha^{\circ 2}}{A^2\gamma_0^2} = \tilde{\gamma}^2, \text{ в частности, } \tilde{\gamma}^2=0; \tilde{\beta}^2=0.$$

Из формулы (8.42) получим

$$\Omega^* = z(1 \pm 1) = i(e^{i\varphi} - \tilde{\gamma})(1 \pm 1). \quad (8.52)$$

Одно из значений Ω^* здесь тождественно равно нулю. Формулы (8.41), (8.45), (8.50), (8.52) и (8.47) в совокупности дают два значения корня характеристического уравнения замкнутой системы — p_1 и p_2 или в общем случае — p_s и p_{s+1} .

Не представляет труда рассмотреть и особые случаи — $\sin\varphi = 0$ и $\cos\varphi - \tilde{\gamma} = 0$, на одном из которых мы остановимся ниже.

$$6) \gamma_0 = 0; \gamma_0 \neq 0.$$

Введем новый параметр a , определяемый так:

$$a^2 = \frac{\Delta p^{\circ 2}}{2A\gamma_0} = \begin{cases} -\frac{\Delta\alpha^{\circ 2}}{2A\gamma_0} & \text{при } \Delta\alpha^{\circ} \neq 0 \\ 0 & \text{и } \Delta\alpha^{\circ} = \Delta\sigma^{\circ} = 0 \\ \frac{\Delta\alpha^{\circ 2}}{2A\gamma_0} & \text{при } \Delta\sigma^{\circ} = 0. \end{cases} \quad (8.53)$$

Знак a^2 зависит, таким образом, не только от знака $\Delta p^{\circ 2}$, но и от знака γ_0 .

При $a^2 < 0$ будем полагать $a = ib$; $a^2 = -b^2$. Представим p в виде

$$p = \alpha^{\circ} + i\sigma^{\circ} + \sqrt{2A|\gamma_0|} \Omega^*, \quad (8.54)$$

$$\text{где } \Omega^* = \pm \sqrt{\frac{\gamma_0}{|\gamma_0|}} \sqrt{z^2 + a^2}; z = e^{i\frac{\varphi}{2}}. \quad (8.55)$$

$$1. a^2 < 0; a = ib.$$

Это соответствует одной из следующих возможностей:

$$a^2 = -\frac{\Delta\alpha^{\circ 2}}{2A\gamma_0}, \quad \gamma_0 > 0; \quad a^2 = \frac{\Delta\alpha^{\circ 2}}{2A\gamma_0}, \quad \gamma_0 < 0.$$

Используя выражения (8.42), (8.43), по аналогии с (8.50) получим

$$\Omega^* = \pm \left(\sin \frac{\varphi}{2} \operatorname{cth} \xi - i \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \xi \right) \sqrt{\frac{\gamma_0}{|\gamma_0|}}, \quad (8.56)$$

а обозначив $u = \tanh \xi$, получим выражение, аналогичное (8.47):

$$u^2 = \frac{a^2 + \cos \varphi + \sqrt{a^4 + 2A^2 \cos \varphi + 1}}{1 + \cos \varphi}. \quad (8.57)$$

2. $a^2 > 0$.

Здесь возможны такие варианты:

$$a^2 = \frac{\Delta \alpha^2}{2A\gamma_0}, \quad \gamma_0 > 0; \quad a^2 = -\frac{\Delta \sigma^2}{2A\gamma_0}, \quad \gamma_0 < 0.$$

В результате получим

$$\Omega^* = \pm \left(\cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{cth} \xi + i \sin \frac{\varphi}{2} \operatorname{th} \xi \right) \sqrt{\frac{\gamma_0}{|\gamma_0|}}. \quad (8.58)$$

При этом формула (8.57) остается в силе, если положить $u = \operatorname{cth} \xi$.

3. $a^2 = 0$ ($\Delta \alpha^\circ = \Delta \sigma^\circ = 0$).

$$\Omega^* = z(1 \pm 1) \sqrt{\frac{\gamma_0}{|\gamma_0|}} = e^{i \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{\gamma_0}{|\gamma_0|}} (1 \pm 1). \quad (8.59)$$

Одно из значений Ω^* тождественно равно нулю, как и в случае $\gamma_0 \neq 0$.

$$\text{б) } \gamma_0 = 0; \quad \gamma_0 = 0$$

Из выражения (8.38) получим

$$\Omega = \pm \sqrt{\beta^2} = \begin{cases} \pm i \Delta \sigma^\circ & \text{при } \Delta \alpha^\circ = 0 \\ 0 & \text{при } \Delta \alpha^\circ = \Delta \sigma^\circ = 0 \\ \pm \Delta \alpha^\circ & \text{при } \Delta \sigma^\circ = 0. \end{cases} \quad (8.60)$$

Выражения для p_1, p_2 следуют из формул (8.56), (8.58), (8.59) и (8.54) или (8.60) и (8.41).

Полученные формулы используются в разд. 8.6 наряду с формулами (8.22) для исследования стабилизируемости и собственной динамической устойчивости системы.

В этом разделе мы ограничимся только рассмотрением частотных характеристик разомкнутой системы, соответствующей собственно динамически неустойчивому объекту (при слиянии частот σ_1° и σ_2°).

На рис. 8.13 представлены два варианта амплитудно-фазовых характеристик, соответствующих

$$\Delta \sigma^\circ = 0, \quad \alpha^\circ = 0, \quad \Delta \alpha^\circ \neq 0; \quad 0 \leq \omega \leq \infty,$$

когда в силу формул (8.33)

$$A_{01} = -\frac{\gamma_0}{\Delta \alpha^\circ} + i \gamma_0; \quad A_{02} = -\frac{\gamma_0}{\Delta \alpha^\circ} + i \gamma_0. \quad (8.61)$$

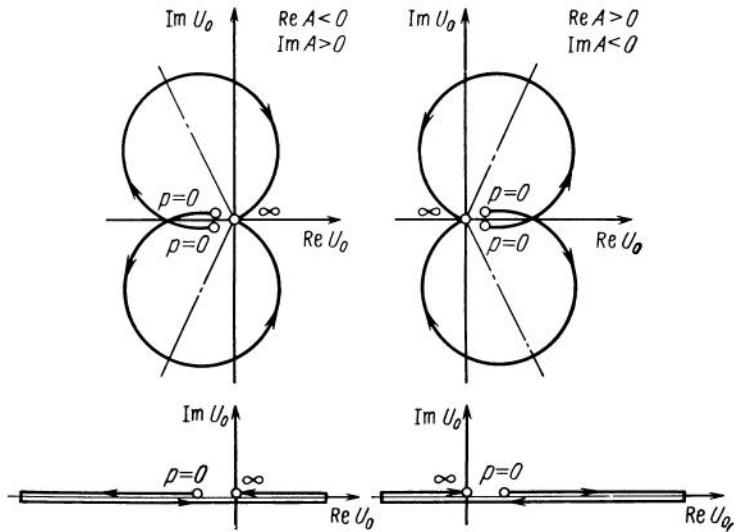


Рис. 8.13. Амплитудно-фазовые характеристики объекта регулирования при слиянии двух его собственных частот (вследствие воздействия на систему неконсервативной позиционной силы)

Верхняя и нижняя окружности обходятся при увеличении ω симметрично, но в противоположных направлениях, так что результирующая характеристика приобретает вид проходимого дъажды (за вычетом малой окрестности начала координат) отрезка вещественной оси.

Используя критерий Найквиста, легко установить, что замкнутая система будет во всех случаях неустойчива, кроме случая $\varphi=0$ или $\varphi=\pi$ (так как это единственная возможность охватить точку $+1$, без чего невозможна устойчивость при наличии в верхней полуплоскости одного корня с $\operatorname{Re} p^0 = \Delta\alpha^{\circ} > 0$). При этом величина $|A|$ должна превышать критическое значение

$$|A| = \frac{\pm \gamma_0 + \sqrt{\gamma_0^2 + \Delta\alpha^{\circ 2}}}{\gamma_0^2}, \quad (8.62)$$

соответствующее равенству нулю дискриминанта (8.42). Знак перед γ_0 должен быть «+» при $\gamma_0 > 0$ ($\varphi=0$) и «-» при $\gamma_0 < 0$ ($\varphi=\pi$).

Общая схема преобразования амплитудно-фазовой характеристики объекта регулирования в окрестности его собственных частот оператором управления, создающим фазовое опережение, запаздывание или нулевой фазовый сдвиг, который соответствует границе устойчивости при условии (8.62), показана на рис. 8.14.

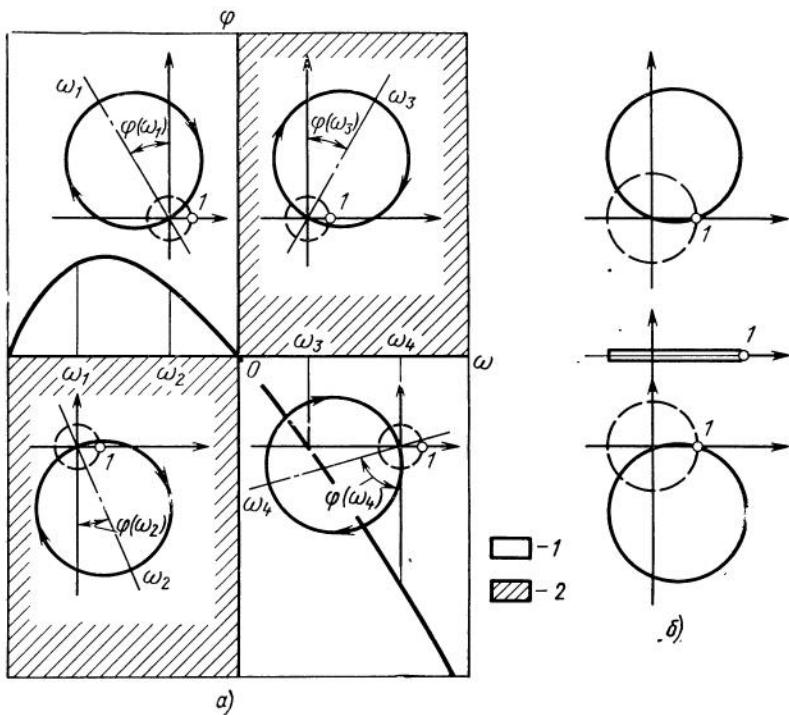


Рис. 8.14. Поворот петли амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы в случае регулятора, создающего фазовое опережение или запаздывание:

a — 1 — устойчивость; 2 — неустойчивость; *б* — граница устойчивости

Возвращаясь к этому последнему случаю, заметим, что, как видно из формулы (8.38), дальнейшее увеличение динамического коэффициента усиления регулятора сверх граничного значения (8.62) приводит только к расщеплению частот, как на рис. 8.1, б, если двигаться в направлении, противоположном показанному стрелками.

Сдвинуть корни с мнимой оси в левую полуплоскость, т. е. сделать систему асимптотически устойчивой, невозможно. Здесь мы имеем пример нестабилизируемого объекта, для которого невозможна не только фазовая стабилизация, но и амплитудная (если не менять в принципе структуру АС и собственное демпфирование объекта регулирования).

Учитывая специфический характер влияния парциального демпфирования каждого из связанных осцилляторов при собственной динамической неустойчивости (см. работу [45] и разд. 8.2), можно ожидать, что последний метод стабилизации также мало перспективен, что подтверждается соответствующими исследованиями [46], на которых мы не можем здесь останавливаться.

Наиболее реальный путь обеспечения динамической устойчивости замкнутой системы в этой ситуации — это изменение структурных свойств объекта, как минимум, для ликвидации собственной динамической неустойчивости (см. гл. 11).

8.5. Учет влияния квантования по времени при применении дискретных систем стабилизации с БЦВМ

Рассмотрим типовую функциональную схему объекта регулирования с аналоговым сервоприводом и датчиком углового положения (ДУП) или угловой скорости (ДУС) и дискретной системой стабилизации, включающей БЦВМ (рис. 8.15, а).

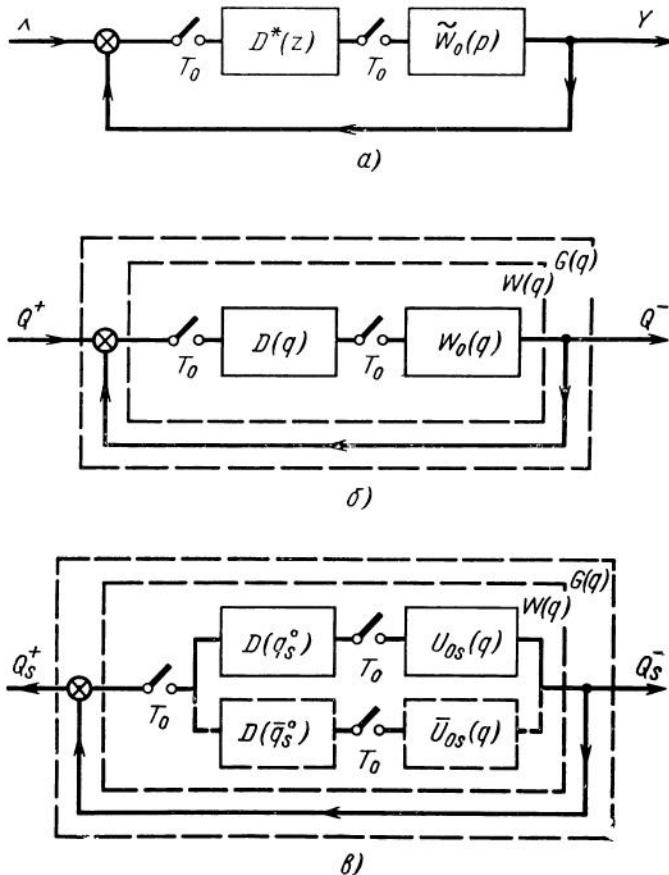


Рис. 8.15. Функциональная схема системы объект — дискретное корректирующее устройство:

а — исходная система; б — переход к плоскости q ; в — выделение одной ветви передаточной функции в плоскости q и разложение на простейшие дроби

На рис. 8.15, а $D^*(z)$ означает дискретную передаточную функцию алгоритма управления (стабилизации); $\tilde{W}_0(p)$ — передаточную функцию непрерывной части системы (объект — сервопривод); X , Y — входной и выходной сигналы.

На входе и выходе БЦВМ имеются прерыватели с запоминанием информации на период квантования по времени T_0 .

Попытаемся осуществить ту же операцию построения передаточной функции объекта управления и расщепления ее на независимые ветви, каждая из которых отвечает окрестности частот его собственных колебаний, что и в предыдущем разделе, в целях получения простых формул для корней характеристического уравнения замкнутой дискретно-непрерывной системы регулятор — объект.

Руководящей идеей здесь является явная формализация новых динамических свойств объекта регулирования, связанных с квантованием сигнала по времени: объект оказывается дискретизированным не только в пространстве (переход методом Галеркина от континуальной системы с бесконечным числом степеней свободы к системе с конечным числом степеней свободы), но и во времени.

Частота квантования по времени

$$\sigma_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (8.63)$$

является при этом новым важным параметром объекта регулирования. Что касается алгоритма управления, то его индивидуальность при такой точке зрения определяется в первую очередь его структурой, а не фактом квантования по времени. (Мы, как и выше, ограничиваемся линейным аспектом задачи, не затрагивая таких специфических нелинейных эффектов, как квантование сигнала по уровню и др.).

Построение передаточной функции разомкнутой дискретной системы с запоминанием на период квантования T_0 сводится, как известно, к отысканию переходной функции непрерывной части (объект — сервопривод), осуществлению ее z -преобразования и умножению результата на $\frac{z-1}{z}$.

Передаточная функция системы объект — регулятор получается в рассматриваемом случае в результате умножения на передаточную функцию алгоритма управления [2, 38]. Символически это записывается так:

$$W_0^*(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{1}{p} \tilde{W}_0(p) \right]; \quad W^*(z) = W_0^*(z) D^*(z). \quad (8.64)$$

Передаточные функции здесь являются дискретными; аргументом их служит дискретная переменная $z = e^{p T_0}$, которая при построении частотных характеристик переходит в $e^{j\omega T_0}$. В теории дискретных систем наряду с z -преобразованием часто ис-

пользуется w -преобразование, где w — новая комплексная переменная:

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (8.65)$$

В свете задач, рассматриваемых ниже, оказывается более удобным преобразование к переменной, отличающейся от w постоянным множителем, которое мы назовем q -преобразованием:

$$q = \frac{\sigma_0}{\pi} w; \quad z = \frac{1 + \frac{\pi}{\sigma_0} q}{1 - \frac{\pi}{\sigma_0} q}; \quad p = \frac{\sigma_0}{2\pi} \ln z. \quad (8.66)$$

Переменная q удобна тем, что при $z = e^{i\omega T_0}$ она оказывается связанный с псевдочастотой λ [2] той же зависимостью, что переменная p с ω :

$$q = i\lambda; \quad \lambda = \frac{2}{T_0} \operatorname{tg} \frac{\omega T_0}{2} = \frac{\sigma_0}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\omega\pi}{\sigma_0}. \quad (8.67)$$

Введем обозначения (см. рис. 8.15, б)

$$W_0(q) = W_0^*[z(q)]; \quad D(q) = D^*[z(q)]; \quad W(q) = W_0(q)D(q).$$

Тогда передаточную функцию (с аргументом q) замкнутой системы объект — регулятор можно записать в обычном виде [1]:

$$G(q) = \frac{W(q)}{1 - W(q)},$$

откуда получим характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$W(q) = D(q)W_0(q) = 1. \quad (8.68)$$

Задача теперь заключается в разложении функции комплексного переменного q в левой части уравнения (8.68) на простейшие дроби и последовательном рассмотрении отдельных ветвей этой функции, соответствующих полюсам с мнимыми частями, близкими к образам в q — плоскости собственных частот объекта регулирования σ_s (см. рис. 8.15, б).

Будем предполагать, что области особенностей функций $W_0(q)$ и $D(q)$ в плоскости q не пересекаются и среди значений $|\lambda_s|$, соответствующих σ_s ($s = 1, 2, \dots$), нет близких в смысле определения разд. (8.4).

Из формул (8.66) получим основную формулу преобразования:

$$q = \frac{\sigma_0}{\pi} \operatorname{th} \left(\frac{\pi p}{\sigma_0} \right). \quad (8.69)$$

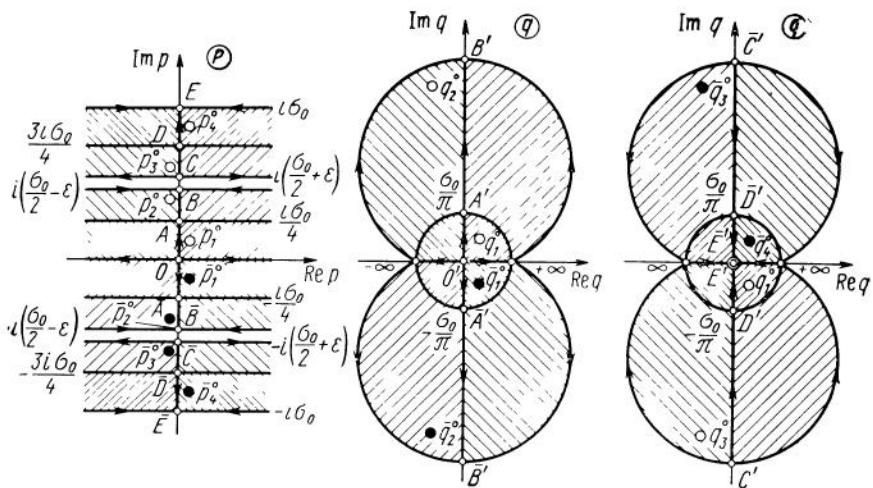


Рис. 8.16. Часть плоскости комплексного переменного p и ее отображение на два листа римановой поверхности комплексного переменного q

Отображение, которое осуществляется эта функция, представлено на рис. 8.16. Рассмотрение этого рисунка позволяет понять всю специфику квантования по времени с запоминанием на период квантования на основе изучения свойств некоторого нового объекта регулирования, который только в пределе при $T_0 \rightarrow 0$ переходит в свой обычный непрерывный прототип.

Как видно из рис. 8.16, вся плоскость $p = a + i\sigma$ должна рассматриваться как состоящая из горизонтальных полос, уходящих $\pm\infty$, которые отображаются на плоскость $q = \delta + i\lambda$ следующим образом.

Полосы $0 \leq \sigma \leq \frac{\sigma_0}{4}$ и $-\frac{\sigma_0}{4} \leq \sigma \leq 0$ отображаются на области, внутренние по отношению к полуокружности радиуса $\frac{\sigma_0}{\pi}$ в верхней и нижней полуплоскостях q соответственно, причем вся вещественная ось переходит в отрезок $-\frac{\sigma_0}{\pi} \leq \sigma \leq \frac{\sigma_0}{\pi}$.

Полосы $\frac{\sigma_0}{4} \leq \sigma \leq \frac{\sigma_0}{2} - \varepsilon$ и $-\frac{\sigma_0}{4} \leq \sigma \leq -\frac{\sigma_0}{2} + \varepsilon$ отображаются при $\varepsilon \rightarrow 0$ на верхнюю и нижнюю полуплоскости q соответственно, с исключенным кругом радиуса $\frac{\sigma_0}{\pi}$ с центром в начале координат, а полосы

$$\frac{\sigma_0}{2} + \varepsilon \leq \sigma \leq \frac{3\sigma_0}{4} \text{ и } -\frac{\sigma_0}{2} - \varepsilon \leq \sigma \leq -\frac{3\sigma_0}{4}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, наоборот, — на нижнюю и верхнюю полуплоскости q с той же исключенной областью.

Полосы $\frac{3\sigma_0}{4} \leq \sigma \leq \sigma_0$ и $-\frac{3\sigma_0}{4} \leq \sigma \leq -\sigma_0$ отображаются на области, внутренние по отношению к полуокружности радиуса $\frac{\sigma_0}{\pi}$, в нижней и верхней полуплоскостях q соответственно; в отрезок $-\frac{\sigma_0}{\pi} \leq \sigma \leq \frac{\sigma_0}{\pi}$ переходят при этом прямые $\sigma = \pm \sigma_0$.

При дальнейшем увеличении σ картина повторяется, так что получается бесконечно-листная риманова поверхность переменной q . Соответствие областей и точек при рассматриваемом отображении видно из рис. 8.16.

Следует отметить несколько существенных особенностей этого отображения.

1. Мнимая ось плоскости p преобразуется тождественным образом в мнимую ось плоскости q . Поэтому границы областей устойчивости в переменных p и q совпадают.

2. Корни характеристического уравнения объекта регулирования (в частности, его собственные частоты) определены на всей плоскости p , причем они отображаются на плоскости q в области более низких или более высоких по модулю значений в зависимости от того, в какой из полос плоскости p они находятся.

При отображении на нечетные листы римановой поверхности q знаки мнимых частей сохраняются, а при отображении на четные листы — меняются на противоположные (на рис. 8.16 показаны первый и второй листы).

3. Дискретные частотные характеристики являются периодическими функциями частоты с периодом σ_0 . Следовательно, корни характеристического уравнения замкнутой системы, как и все частоты в замкнутой системе, определены в полосе $-\frac{\sigma_0}{2} \leq \sigma \leq \frac{\sigma_0}{2}$, поэтому при обратном преобразовании все листы бесконечно-листной римановой поверхности отображаются на эту полосу плоскости p . При этом высокочастотная помеха может превратиться в более опасную низкочастотную.

4. Значения $\sigma = \frac{\sigma_0}{2} (2n - 1)$; $n = 1, 2, 3, \dots$ являются особыми, и соответствующие окрестности переменной p требуют специального исследования при замыкании системы.

Положим

$$p = a + i\sigma; q = \delta + i\lambda. \quad (8.70)$$

После подстановки в выражение (8.69) и выполнения элементарных выкладок можно получить формулы, устанавливающие зависимости $\delta = \delta(a, \sigma)$; $\lambda = \lambda(a, \sigma)$ (прямое преобразование) и $a = a(\delta, \lambda)$; $\sigma = \sigma(\delta, \lambda)$ (обратное преобразование):

$$\delta = \frac{\frac{\sigma_0}{\pi} \operatorname{sh} \left(\frac{2\pi\alpha}{\sigma_0} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{2\pi\alpha}{\sigma_0} \right) + \cos \left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0} \right)} ; \quad \lambda = \frac{\frac{\sigma_0}{\pi} \sin \left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{2\pi\alpha}{\sigma_0} \right) + \cos \left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0} \right)} . \quad (8.71)$$

$$\operatorname{th} \left(\frac{2\pi\alpha}{\sigma_0} \right) = \frac{\frac{2\pi\delta}{\sigma_0}}{1 + \frac{\pi^2}{\sigma_0^2} (\lambda^2 + \delta^2)} ; \quad \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi\sigma}{\sigma_0} \right) = \frac{\frac{2\pi\lambda}{\sigma_0}}{1 - \frac{\pi^2}{\sigma_0^2} (\lambda^2 + \delta^2)} . \quad (8.72)$$

Формулы (8.71) и (8.72) устанавливают формальное соответствие α , σ и δ , λ без учета той частотной дискриминации при обратном преобразовании, присущей дискретной системе, о которой говорилось выше.

Применим формулы (8.71) для прямого преобразования корней характеристического уравнения разомкнутой системы p_s° в q_s° , а формулы (8.72) с учетом этой дискриминации для обратного преобразования корней характеристического уравнения замкнутой системы q_s в p_s . Положим, что

$$a_s^\circ \ll \sigma_s^\circ ; \quad a_s^\circ \ll \frac{\sigma_0}{2\pi} ; \quad a_s \ll \frac{\sigma_0}{2\pi} . \quad (8.73)$$

В результате получим из (8.71) и (8.72), пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости,

$$\begin{aligned} \lambda_s^\circ &= \frac{\sigma_0}{\pi} \operatorname{tg} \zeta_s^\circ ; \quad \delta_s^\circ = \frac{a_s^\circ}{\cos^2 \zeta_s^\circ} ; \quad \zeta_s^\circ = \frac{\pi \sigma_s^\circ}{\sigma_0} ; \\ \sigma_s &= \frac{\sigma_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi \lambda_s}{\sigma_0} \right) ; \quad a_s = \delta_s \cos^2 \zeta_s ; \quad \zeta_s = \frac{\pi \sigma_s}{\sigma_0} . \end{aligned} \quad (8.74)$$

Формулы (8.74) требуют некоторых комментариев. Во-первых, в силу теоремы Котельникова параметр ζ_s° для всей полосы частот σ_s° , относящейся к «полезному сигналу», пропускаемому дискретной системой без заметных искажений, должен удовлетворять условию [2]

$$\zeta_s^\circ < 1 . \quad (8.75)$$

Для соответствующих частот формулы (8.74) близки к тождественному преобразованию

$$\begin{aligned} \lambda_s^\circ &\approx \sigma_s^\circ ; \quad \delta_s^\circ \approx a_s^\circ (1 + \zeta_s^\circ)^2 ; \\ \sigma_s &\approx \lambda_s ; \quad a_s \approx \delta_s (1 - \zeta_s^2) , \end{aligned} \quad (8.76)$$

причем здесь справедлива концепция малого сдвига собственных частот объекта при воздействии АС, так что $\frac{a_s}{\delta_s} \approx \frac{\dot{\alpha}_s}{\dot{\delta}_s}$, а

при $\sigma_0 \rightarrow \infty$, $\zeta_s^{\circ} \rightarrow 0$, $\dot{\delta}_s^{\circ} \rightarrow \dot{\alpha}_s^{\circ}$; $a_s \rightarrow \delta_s$.

Иначе обстоит дело для паразитных частот σ_s° , для которых $\zeta_s^{\circ} \gg 1$, т. е. для сигнала «помехи».

Формулы (8.74) отражают тот факт, являющийся специфической особенностью дискретной системы, что любые реальные частоты разомкнутой системы σ_s° , трансформируясь в плоскости q в псевдочастоты λ_s° , либо более низкие, либо более высокие, чем σ_s° , в зависимости от значения ζ_s° (причем как в положительные, так и в отрицательные λ_s° , см. рис. 8.16), при замыкании системы через БЦВМ снова превращаются в новые реальные частоты σ_s , лежащие в полосе

$$-\frac{\sigma_0}{2} \leq \sigma_s \leq \frac{\sigma_0}{2}. \quad (8.77)$$

Именно поэтому в формуле для σ_s фигурирует arctg , а не Arctg , что и создает необходимую несимметрию обратного и прямого преобразования, отвечающую специфике замкнутой дискретной системы объект — АС. При этом соответствующим образом трансформируется и собственное демпфирование.

Наконец, при значениях ζ_s° , удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} \zeta_s^{\circ} &= \frac{\pi}{2} (2n - 1); \quad n = 1, 2, 3, \dots; \\ \frac{\dot{\alpha}_s^{\circ}}{\sigma_0} &= \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \dots, \end{aligned} \quad (8.78)$$

или значениях, близких к ним, формулы (8.74) теряют смысл, так как $\cos \zeta_s^{\circ} \rightarrow 0$. Это, конечно, не относится к общим формулам преобразования (8.71) и (8.72).

Рассмотрим теперь задачу в той же постановке, что и в разд. 8.3. Программа ее решения очевидна. Надо выделить две ветви передаточной функции системы объект — сервопривод, соответствующие в плоскости p полюсам p_s° и \bar{p}_s° , и осуществить переход к дискретной передаточной функции, как было описано выше. Затем необходимо получить решение характеристического уравнения замкнутой системы в плоскости q отдельно для каждой ветви, как и в разд. 8.3 и, наконец, осуществить обратное преобразование полученного корня q_s в плоскость p , выбрав ту ветвь, которой соответствует корень p_s в верхней полуплоскости p .

Обозначим, как и выше, вычеты передаточной функции объекта без сервопривода в полюсах p_s° и \bar{p}_s° через A_{0s} и \bar{A}_{0s} , а значения передаточной функции сервопривода $F(p)$, которую мы за-

меним соответствующей частотной характеристикой, $F(i\sigma_s^\circ)$ и $F(-i\sigma_s^\circ)$.

Тогда

$$W_{0s}^*(z) = U_{0s}^*(z) + \bar{U}_{0s}^*(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{B_{0s}}{p(p - p_s^\circ)} + \frac{\bar{B}_{0s}}{p(p - \bar{p}_s^\circ)} \right\} = \\ = W_{0s}^*[z(q)] = W_{0s}(q); \quad (8.79)$$

$$B_{0s} = A_{0s} F(i\sigma_s^\circ); \quad \bar{B}_{0s} = \bar{A}_{0s} F(-i\sigma_s^\circ).$$

Используя таблицу z -преобразования [2] и формулу (8.69), после несложных выкладок получим

$$W_{0s}(q) = \frac{B_0}{p_s^\circ} \left(-1 + \frac{z-1}{z - e^{\frac{T_0 p_s^\circ}{\sigma_0}}} \right) + \frac{\bar{B}_{0s}}{\bar{p}_s^\circ} \left(-1 + \frac{z-1}{z - e^{\frac{T_0 \bar{p}_s^\circ}{\sigma_0}}} \right) = \\ = \frac{B_{0s} q_s^\circ}{p_s^\circ} \left(\frac{1 - \frac{\pi}{\sigma_0} q_s^\circ}{q - q_s^\circ} - \frac{\pi}{\sigma_0} \right) + \frac{\bar{B}_{0s} \bar{q}_s^\circ}{\bar{p}_s^\circ} \left(\frac{1 - \frac{\pi}{\sigma_0} \bar{q}_s^\circ}{q - \bar{q}_s^\circ} - \frac{\pi}{\sigma_0} \right). \quad (8.80)$$

Пренебрегая вторым слагаемым (существенно меньшим, чем первое) в каждом из выражений, заключенных в скобки, и учитывая неравенства (8.73) и формулы (8.74), получим

$$U_{0s}(q) \approx \frac{B_{0s} q_s^\circ}{p_s^\circ} \frac{\left(1 - \frac{\pi}{\sigma_0} q_s^\circ\right)}{(q - |q_s^\circ|)} \approx \frac{B_{0s} e^{-i\zeta_s^\circ} \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ \cos^2 \zeta_s^\circ (q - q_s^\circ)}; \\ \bar{U}_{0s}(q) \approx \frac{\bar{B}_{0s} \bar{q}_s^\circ}{\bar{p}_s^\circ} \frac{\left(1 - \frac{\pi}{\sigma_0} \bar{q}_s^\circ\right)}{(q - \bar{q}_s^\circ)} \approx \frac{\bar{B}_{0s} e^{i\zeta_s^\circ} \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ \cos^2 \zeta_s^\circ (q - \bar{q}_s^\circ)}. \quad (8.81)$$

Подставляя эти выражения поочередно в характеристическое уравнение (8.68) вместо $W_0(q)$ и заменяя дискретную передаточную функцию алгоритма стабилизации частотной характеристики при соответствующем значении $\lambda = \lambda_s^\circ$ (см. рис. 8.15, в), получим приближенные формулы для корней характеристического уравнения замкнутой системы в плоскости q :

$$q_s = q_s^\circ + \frac{B_{0s} D(i\lambda_s^\circ) e^{-i\zeta_s^\circ} \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ \cos^2 \zeta_s^\circ}; \quad (8.82)$$

$$\bar{q}_s = \bar{q}_s^\circ + \frac{\bar{B}_{0s} D(-i\lambda_s^\circ) e^{i\zeta_s^\circ} \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ \cos^2 \zeta_s^\circ}.$$

Введем следующие новые обозначения:

$$\mathcal{L}(p) = D[q(p)]F(p); \quad (8.83)$$

$$\mathcal{L}(i\sigma_s^\circ) = D[i\lambda_s^\circ(\sigma_s^\circ)]F(i\sigma_s^\circ) = A(\sigma_s^\circ)e^{i\varphi(\sigma_s^\circ)} = Ae^{i\varphi}.$$

Очевидно, что $\mathcal{L}(p)$ является дискретно-непрерывным аналогом обычной передаточной функции АС, т. е. разомкнутой системы алгоритм управления — сервопривод.

Подчеркнем еще раз, что псевдочастоты λ_s° и λ_s могут быть как положительными, так и отрицательными (это видно из формулы (8.74) для λ_s° и из рис. 8.16).

В дальнейшем условимся обозначать через λ_s только положительные псевдочастоты замкнутой системы, переходящие в положительные σ_s в плоскости p . Чтобы получать каждый раз соответствующие значения δ_s , надо использовать первую из формул (8.82) при $\lambda_s^\circ > 0$ и вторую при $\lambda_s^\circ < 0$. (Напомним, что значения ζ_s° , близкие к $\frac{\pi}{2}(2n-1)$; $n=1, 2, \dots$, при которых $\operatorname{tg} \zeta_s^\circ \rightarrow \pm\infty$, следует исключить из рассмотрения).

Учитывая высказанные соображения, из формул (8.82), (8.83) и (8.79) получим

$$\delta_s = \delta_s^\circ + \frac{A \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ \cos^2 \zeta_s^\circ} \cdot \begin{cases} \operatorname{Re}[A_{0s} e^{i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ > 0 \\ \operatorname{Re}[\bar{A}_{0s} e^{-i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ < 0; \end{cases} \quad (8.84)$$

$$\lambda_s = |\lambda_s^\circ| + \frac{A \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ \cos^2 \zeta_s^\circ} \cdot \begin{cases} \operatorname{Im}[A_{0s} e^{i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ > 0 \\ \operatorname{Im}[\bar{A}_{0s} e^{-i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ < 0. \end{cases}$$

Теперь остается только воспользоваться формулами (8.74), чтобы перейти от δ_s и λ_s к α_s и σ_s , выразив одновременно λ_s° и δ_s° через исходные значения ζ_s° и α_s° :

$$\alpha_s = \left(\frac{\cos \zeta_s}{\cos \zeta_s^\circ} \right)^2 \left(\alpha_s^\circ + \frac{A \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ} \begin{cases} \operatorname{Re}[A_{0s} e^{i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ > 0 \\ \operatorname{Re}[\bar{A}_{0s} e^{-i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ < 0 \end{cases} \right); \quad (8.85)$$

$$\sigma_s = \frac{\alpha_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(|\operatorname{tg} \zeta_s^\circ| + \frac{A \sin \zeta_s^\circ}{\zeta_s^\circ \cos^2 \zeta_s^\circ} \begin{cases} \operatorname{Im}[A_{0s} e^{i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ > 0 \\ \operatorname{Im}[\bar{A}_{0s} e^{-i(\varphi - \zeta_s^\circ)}] & \text{при } \lambda_s^\circ < 0 \end{cases} \right).$$

Рассмотрим два варианта объекта регулирования.

1. Объект с непрерывным датчиком углового положения (выходной сигнал АС — угловое положение, см. разд. 8.3 и 8.4):

$$\begin{aligned} \gamma_{0s} &\approx 0; A_{0s} \approx i\gamma_{0s}; \bar{A}_{0s} \approx -i\gamma_{0s}. \\ a_s = \left(\frac{\cos \zeta_s}{\cos \zeta_s^*} \right)^2 &\left[a_s^* - \frac{Av_{0s} \sin \zeta_s^*}{\zeta_s^*} \sin(\varphi - \zeta_s^*) \right] \text{ при } \lambda_s^* \geq 0; \\ \sigma_s = \frac{\sigma_0}{\pi} \arctg &\left\{ \left| \operatorname{tg} \zeta_s^* \right| \left[1 + \frac{Av_{0s}}{a_s^* \cos \zeta_s^*} \cos(\varphi - \zeta_s^*) \right] \right\} \text{ при } \lambda_s^* \geq 0. \end{aligned} \quad (8.86)$$

2. Объект с непрерывным датчиком угловой скорости (входной сигнал АС — угловая скорость):

$$\begin{aligned} v_{0s} &\approx 0; A_{0s} \approx \gamma_{0s} \approx -v_{0s} \sigma_s^*; \bar{A}_{0s} \approx \gamma_{0s} \approx -v_{0s} \sigma_s^*. \\ a_s = \left(\frac{\cos \zeta_s}{\cos \zeta_s^*} \right)^2 &\left[a_s^* + \frac{A\gamma_{0s} \sin \zeta_s^*}{\zeta_s^*} \cos(\varphi - \zeta_s^*) \right] \text{ при } \lambda_s^* \geq 0; \\ \sigma_s = \frac{\sigma_0}{\pi} \arctg &\left\{ \left| \operatorname{tg} \zeta_s^* \right| \left[1 + \frac{A\gamma_{0s}}{a_s^* \cos \zeta_s^*} \sin(\varphi - \zeta_s^*) \right] \right\} \text{ при } \lambda_s^* \geq 0. \end{aligned} \quad (8.87)$$

Формулы (8.86) и (8.87) содержат информацию о всех наиболее интересных особенностях объекта регулирования, квантованного по времени вследствие применения дискретной системы стабилизации с БЦВМ: фазовое запаздывание на угол ζ_s^* , изменение динамического коэффициента усиления объекта в отношении $\frac{\sin \zeta_s^*}{\zeta_s^*} \left(\frac{\cos \zeta_s}{\cos \zeta_s^*} \right)^2$ и собственного демпфирования в отношении $\left(\frac{\cos \zeta_s}{\cos \zeta_s^*} \right)^2$, трансформирование высокочастотной части спектра собственных частот в низкочастотную.

В некотором смысле формулы (8.86) и (8.87) более информативны, чем используемые обычно в теории дискретных систем [2, 38], так как дают выражение частот колебаний и декрементов (инкрементов) замкнутой системы, отнесенные к реальному времени*.

Заметим, что неограниченное возрастание демпфирования, упоминание о котором встречается в литературе, цитированной выше, относится только к «псевдодекрементам» δ_s , а для истинных декрементов колебаний, отнесенных к реальному времени, оно отсутствует. Следует подчеркнуть, что истинные декременты

* Окончательные выражения (8.86), (8.87) были получены автором совместно с В. В. Мишиным.

(инкременты) α_s совпадают с «псевдодекрементами» («псевдоинкрементами») δ_s только тогда, когда они равны нулю, т. е. границы областей устойчивости соответствуют $\delta_s = \alpha_s = 0$.

С другой стороны, сфера применения формул (8.86) и (8.87) ограничена введенными ограничениями на коэффициент усиления и запрещенными значениями параметра ζ_s° (8.78).

В пределе при $T_0 \rightarrow 0$, $\sigma_0 \rightarrow \infty$, $\zeta_s \rightarrow 0$ из формул (8.86) получим

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha_s^\circ - A\gamma_{0s} \sin \varphi; \\ \sigma_s &= \sigma_s^\circ + A\gamma_{0s} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Эти формулы совпадают, как и требовалось, с формулами (8.22), выведенными для непрерывных систем.

Аналогичным образом получим из формул (8.87)

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \alpha_s^\circ + A\gamma_{0s} \cos \varphi; \\ \sigma_s &= \sigma_s^\circ + A\gamma_{0s} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (8.89)$$

Рассмотрим фазовый сдвиг по отношению к входному сигналу, создаваемый алгоритмом стабилизации совместно с сервоприводом, близкий к πn ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Для объекта 1 получим из формул (8.86)

$$\begin{aligned} \alpha_s &\approx \alpha_s^\circ \left(\frac{\cos \zeta_s}{\cos \zeta_s^\circ} \right)^2 + \frac{A\gamma_{0s}}{\zeta_s^\circ} \cos^2 \zeta_s \operatorname{tg}^2 \zeta_s^\circ \cos \varphi; \\ \sigma_s &\approx \frac{\sigma_0}{\pi} \arctg \left\{ \left| \operatorname{tg} \zeta_s^\circ \right| \left(1 + \frac{A\gamma_{0s}}{\sigma_s^\circ} \cos \varphi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Соответственно, для объекта 2 из формул (8.87)

$$\begin{aligned} \alpha_s &\approx \alpha_s^\circ \left(\frac{\cos \zeta_s}{\cos \zeta_s^\circ} \right)^2 + \frac{A\gamma_{0s}}{\zeta_s^\circ} \cos^2 \zeta_s \operatorname{tg} \zeta_s^\circ \cos \varphi; \\ \sigma_s &\approx \frac{\sigma_0}{\pi} \arctg \left\{ \left| \operatorname{tg} \zeta_s^\circ \right| \left(1 - \frac{A\gamma_{0s}}{\sigma_s^\circ} \operatorname{tg} \zeta_s^\circ \cos \varphi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Важным следствием формул (8.90) и (8.91) является то, что в первом случае результат не зависит от знака $\operatorname{tg} \zeta_s^\circ$, т. е. λ_s° , а во втором — поправки, вносимые АС, меняют знак одновременно с $\operatorname{tg} \zeta_s^\circ$, т. е. λ_s° .

При отключении АС эти поправки обращаются в нуль, так что из формул (8.90) и (8.91) следует

$$\sigma_s = \sigma_s^\circ, \quad \alpha_s = \alpha_s^\circ.$$

В заключение обратим внимание на одно обстоятельство. При рассмотрении характеристического уравнения замкнутой систе-

мы (8.68) на основе разложения передаточной функции разомкнутой системы на простейшие дроби и последовательного перебора этих ветвей следует считаться с появлением дополнительных полюсов, соответствующих особым точкам (8.78) преобразования (8.69), которые могут оказаться близкими к особенностям функции $D(q)$.

При более полном анализе надлежит отдельно исследовать ветви передаточной функции, соответствующие этим полюсам, и найти отвечающие им корни характеристического уравнения замкнутой системы, на чем мы не останавливаемся.

8.6. Нестабилизируемость и собственная динамическая неустойчивость РН

Напомним, что по смыслу терминов, введенных в разд. 8.2, соответствующие явления можно изучать при исчезающем малом собственном демпфировании.

Рассмотрим сначала случай, когда среди собственных частот σ_s^* объекта регулирования нет близких, т. е. справедливы формулы (8.22).

Из формулы (8.22) для a_s сразу получаем следующее условие стабилизируемости:

$$\operatorname{sign} v_{0,s+1} = \operatorname{sign} v_{0s} (s=1,2,\dots) \quad (8.92)$$

для всего рассматриваемого диапазона частот.

Расшифровывая выражения для v_{0s} при исчезающем малом собственном демпфировании с учетом формул (8.6), можно записать условия (8.92) так:

$$\operatorname{sign} \frac{\Delta_1(i\sigma_{s+1}^*)}{i\Delta'_0(i\sigma_{s+1}^*)} = \operatorname{sign} \frac{\Delta_1(i\sigma_s^*)}{i\Delta'_0(i\sigma_s^*)} (s=1,2,\dots). \quad (8.93)$$

Легко понять, что условия (8.93) означают чередование нулей $\Delta_1(i\omega)$ и $\Delta_0(i\omega)$, т. е. нулей и полюсов частотной характеристики объекта регулирования как соответствующим образом разомкнутой системы.

Совпадение какого-либо из нулей $\Delta_1(i\omega)$ с одним из нулей $\Delta_0(i\omega)$ означает, что объект находится на границе стабилизируемости («ненаблюдаемость» или «неуправляемость» по Калману).

Если какие-либо две частоты σ_s^* и σ_{s+1}^* достаточно близки, чтобы трудно было обеспечить с помощью АС фазовое опережение на одной частоте и фазовое запаздывание на другой, то нестабилизируемость объекта регулирования означает невозможность фазовой стабилизации, что при сложности значительного уменьшения динамического коэффициента усиления АС или ЖРД (при продольных колебаниях) на этих частотах часто влечет за собой невозможность и амплитудной стабилизации (необходимость конструктивной доработки объекта регулирования).

Сказанное иллюстрируется рис. 8.17 и 8.18, на которых изображены амплитудно-фазовые характеристики стабилизируемого (см. рис. 8.17) и нестабилизируемого (см. рис. 8.18) объектов в окрестности двух близких в техническом смысле (но не в смысле определения близости разд. 8.4) частот σ_1 и σ_2 .

Эти рисунки соответствуют наличию в системе очень малого отрицательного или положительного демпфирования. В последнем случае имеет место слабая собственная динамическая неустойчивость, вызванная силами типа отрицательного трения, не влияющая, как видно из рис. 8.17 и 8.18, на стабилизируемость.

В самом деле, для обеспечения фазовой стабилизации необходимо в силу критерия устойчивости Найквиста, чтобы не было охвата точки $+1$ петлей амплитудно-фазовой характеристики, обходимой по часовой стрелке (собственная устойчивость) и был один охват петлей, обходимой против часовой стрелки (собственная неустойчивость).

В случаях, представленных на рис. 8.17, такая возможность существует при знакопостоянстве $\sin \varphi(\omega)$, когда $\omega = \sigma_1^\circ$ и $\omega = \sigma_2^\circ$, причем выбор знака $\sin \varphi(\omega)$ (фазовое опережение или запаздывание) зависит от знака v_{0s} , т. е. от того, где находится соответствующая петля, в верхней или нижней полуплоскости (см. рис. 8.6 и 8.14). Напротив, в случаях, которым соответствует рис. 8.18, знаки $\sin \varphi(\sigma_1^\circ)$ и $\sin \varphi(\sigma_2^\circ)$ должны быть, исходя из критерия Найквиста, противоположны, что может оказаться неосуществимым. Таким образом, по смыслу задачи наибольшую опасность представляет сближение какой-либо пары частот σ_s° и σ_{s+1}° вплоть до их совпадения.

Этот случай не описывается упрощенными формулами (8.22), так что утрачивается логическая основа условий (8.92) и (8.93). Тем не менее, эти условия остаются справедливыми по крайней мере при неограниченном сближении частот, что может быть доказано, если исходить из формул (8.41), (8.44), (8.45), (8.50), (8.52), (8.54), (8.56), (8.58), (8.59) и (8.60), точность которых не уменьшается, а увеличивается при сближении частот σ_s° и σ_{s+1}° .

Если принять $s=1$, $\alpha^\circ \rightarrow 0$ и рассмотреть, учитывая, что $\operatorname{th} \xi > 1$, $\operatorname{cth} \xi < 1$ при $\alpha \neq 0$, все характерные случаи разд. 8.4:

$\Delta\varphi^\circ \neq 0$; $\Delta\alpha^\circ = 0$ (случай близких частот);

$\Delta\varphi^\circ \equiv 0$; $\Delta\alpha^\circ \neq 0$ (собственная динамическая неустойчивость при слиянии частот);

$\Delta\varphi^\circ \equiv 0$; $\Delta\alpha^\circ \equiv 0$ (граница собственной динамической неустойчивости),

то результаты можно резюмировать следующим образом.

1. Объект регулирования, обладающий собственной динамической неустойчивостью, связанной со слиянием пары его собственных частот, всегда нестабилизируем.

2. Объект, находящийся на границе собственной динамической неустойчивости, нестабилизируем во всех случаях, кроме $\gamma_0 = 0$,

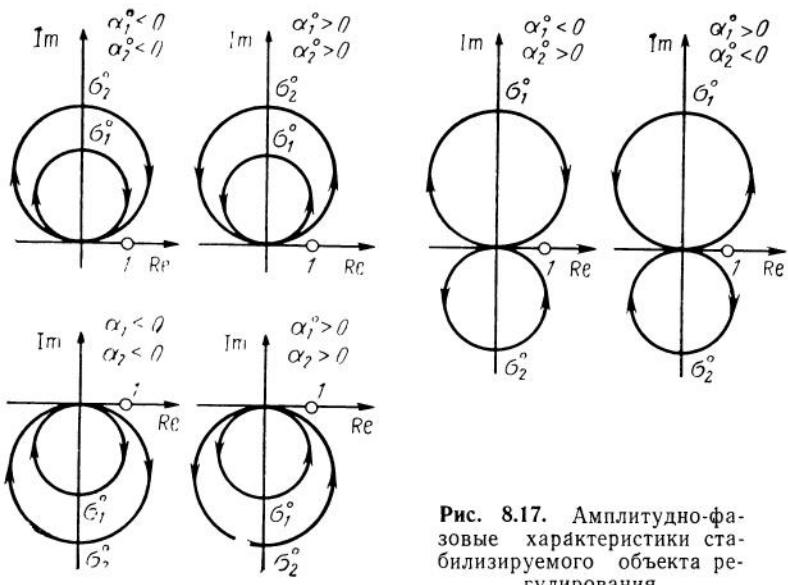


Рис. 8.17. Амплитудно-фазовые характеристики стабилизируемого объекта регулирования

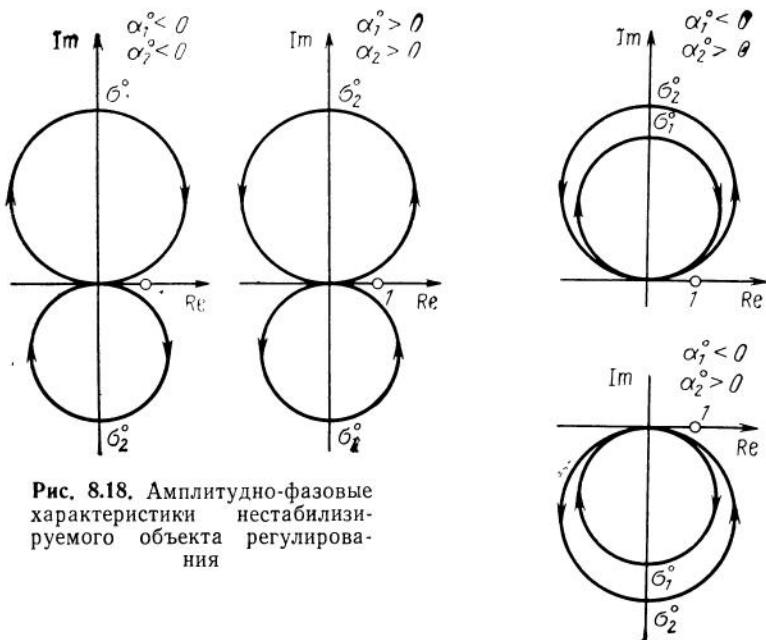


Рис. 8.18. Амплитудно-фазовые характеристики нестабилизируемого объекта регулирования

когда он находится одновременно и на границе стабилизируемости (при этом обе границы имеют по крайней мере одну общую точку).

3. Объект стабилизируем, если он собственно динамически устойчив и выполняется условие $a^2 < 0$, т. е. при

$$\left| \frac{\gamma_0}{v_0} \right| < |\Delta\sigma^\circ| = \frac{|\sigma_2^\circ - \sigma_1^\circ|}{2} \neq 0, \quad (8.94)$$

и нестабилизируем при изменении смысла неравенства в условии (8.94) на противоположный.

4. Собственно динамически устойчивый объект находится на границе стабилизируемости при условии $a^2 = 0$, т. е. при

$$\left| \frac{\gamma_0}{v_0} \right| = |\Delta\sigma^\circ|. \quad (8.95)$$

Основные случаи иллюстрируются схематически на рис. 8.19 и 8.20, где показаны амплитудно-фазовые характеристики в окрестности частоты σ° для собственно динамически неустойчивого объекта с $a^\circ = 0$, $\Delta\sigma^\circ = 0$, $\Delta\alpha^\circ \neq 0$ при $v_0 = 0$ (см. рис. 8.19, а) или $v_0 = 0$ (см. рис. 8.19, б) и для собственно динамически устойчивого объекта с малым, но отличным от нуля собственным демпфированием с $a^\circ \neq 0$, $\Delta\sigma^\circ = 0$, $\Delta\alpha^\circ \neq 0$ при $\gamma_0 = 0$ (см. рис. 8.20, а) или $v_0 = 0$ (см. рис. 8.20, б).

На рис. 8.21 и рис. 8.22 представлены для тех же случаев (при $a^\circ = 0$) значения $\operatorname{Re} \Omega^{*(j)}$, $\operatorname{Im} \Omega^{*(j)}$, где

$$\Omega^{*(j)} = \Delta\alpha \pm i\Delta\sigma \quad (j=1,2), \quad (8.96)$$

рассчитанные для различных значений φ , $\Delta\alpha^\circ$ и $\Delta\sigma^\circ$ при $v_0 = 0$, $2\gamma_0 A = 1$ или $\gamma_0 = 0$; $v_0 A = 1$ соответственно по формулам

$$\begin{aligned} \Omega^{*(j)} &= \pm q_j e^{i\theta_j}; \\ q_1 &= \sqrt[4]{1 - 2\Delta\sigma^{*2} \cos \varphi + \Delta\sigma^{*4}}; \quad \operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - \Delta\sigma^{*2}}; \\ q_2 &= \sqrt[4]{1 + 2\Delta\alpha^{*2} \cos \varphi + \Delta\alpha^{*4}}; \quad \operatorname{tg} 2\theta_2 = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \Delta\alpha^{*2}}; \end{aligned} \quad (8.97)$$

$$\begin{aligned} \Omega^{*(j)} &= i(e^{i\varphi} \pm q_j e^{i\theta_j}); \\ q_1 &= \sqrt[4]{1 + 2\Delta\sigma^{*2} \cos 2\varphi + \Delta\sigma^{*4}}; \quad \operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi + \Delta\sigma^{*2}}; \\ q_2 &= \sqrt[4]{1 - 2\Delta\alpha^{*2} \cos 2\varphi + \Delta\alpha^{*4}}; \quad \operatorname{tg} 2\theta_2 = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi - \Delta\alpha^{*2}}. \end{aligned} \quad (8.98)$$

которые получаются после некоторых преобразований из формул (8.56), (8.58) и (8.45), (8.50).

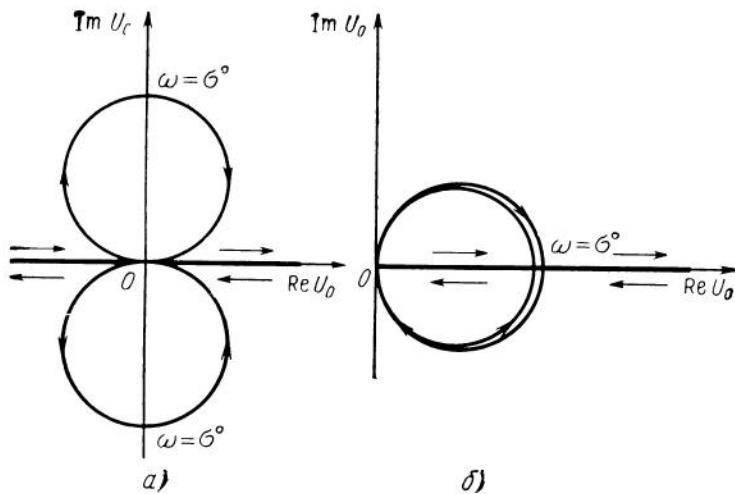


Рис. 8.19. Амплитудно-фазовые характеристики динамически неустойчивого объекта регулирования со слившимися собственными частотами при $\Delta\sigma^o=0$,
 $\Delta\alpha^o \neq 0$:
 $a - \gamma_0=0$; $b - \nu_0=0$

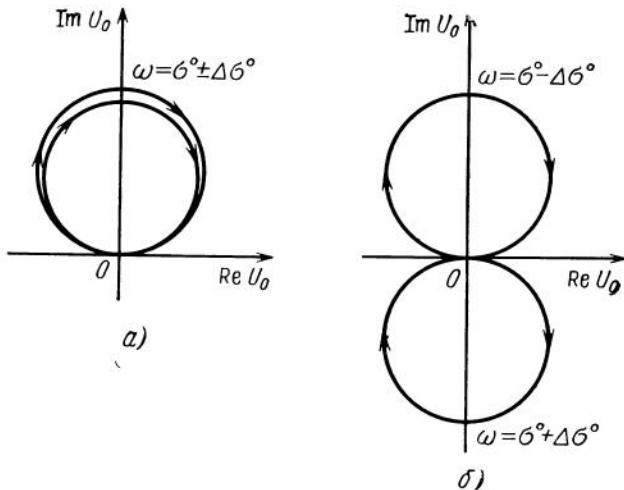


Рис. 8.20. Амплитудно-фазовые характеристики динамически устойчивого объекта регулирования с близкими собственными частотами при $\Delta\alpha^o=0$,
 $\Delta\sigma^o \neq 0$:
 $a - \gamma_0=0$; $b - \nu_0=0$

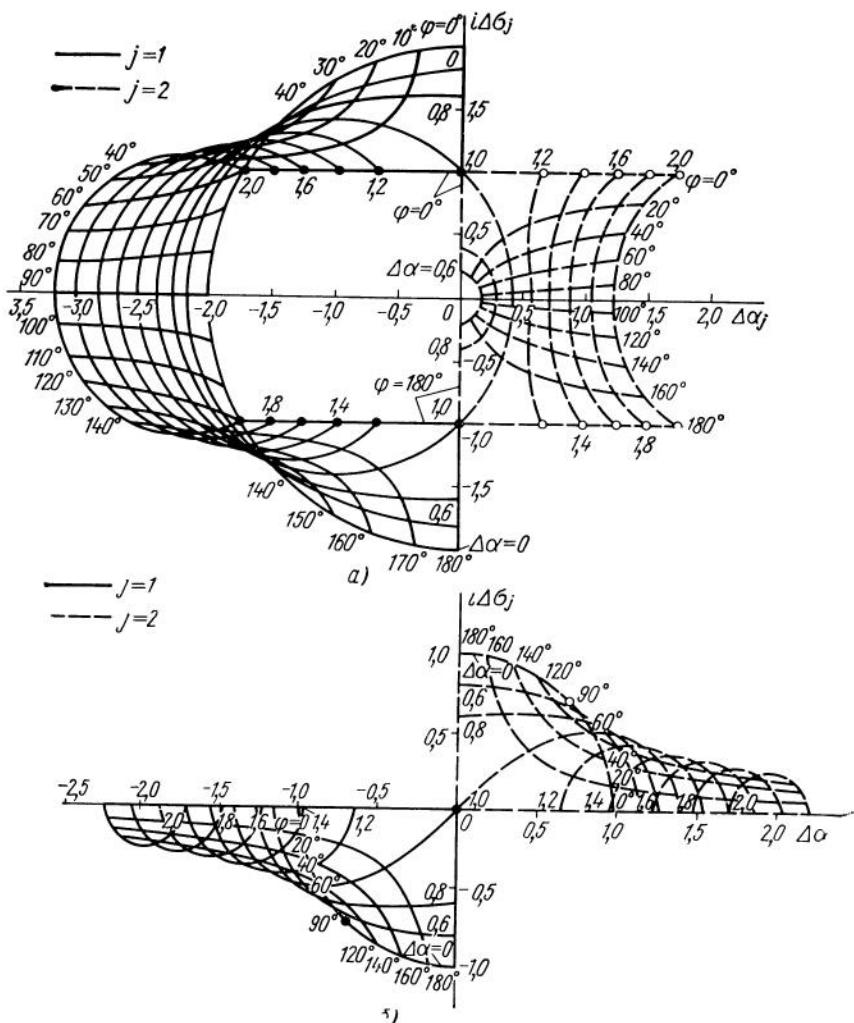


Рис. 8.21. Корневые годографы для замкнутой системы с динамически неустойчивым объектом регулирования при изменении фазового сдвига, создаваемого регулятором:

a — $\gamma_0=0$; б — $v_0=0$

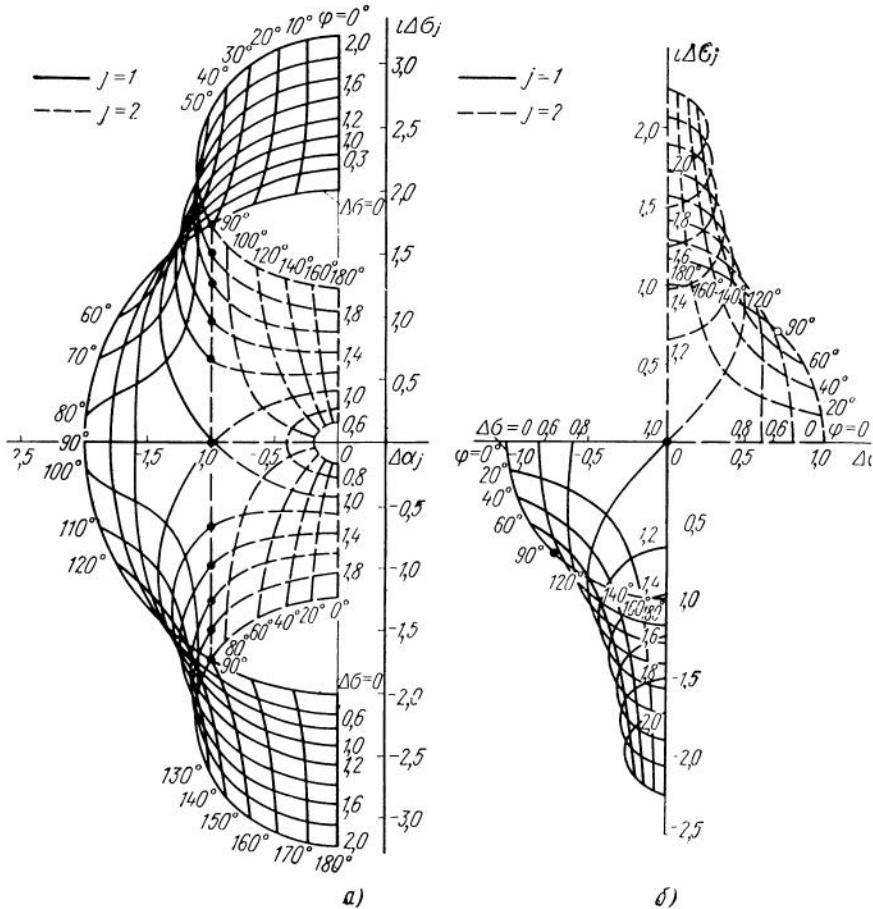


Рис. 8.22. Корневые годографы для замкнутой системы с динамически устойчивым объектом регулирования при изменении фазового сдвига, создаваемого регулятором:
а — $\gamma_0=0$, б — $\nu_0=0$

Как видно рис. 8.19—8.22, стабилизируемость имеет место только в варианте $\Delta\alpha^\circ=0, \gamma_0=0$.

Следовательно, условие стабилизируемости объекта регулирования при неограниченном сближении любой пары его собственных частот сводится к условию (8.92). Не трудно дать ему простое истолкование, используя формулы (8.33). Из последних получим при $\Delta p^\circ=i\Delta\sigma^\circ$

$$A_{01} \approx i\nu_{01}; \quad A_{02} \approx i\nu_{02};$$

$$\nu_{01} = \frac{\nu_0}{\Delta\sigma^\circ} \left(\Delta\sigma^\circ - \frac{\gamma_0}{\nu_0} \right); \quad \nu_{02} = \frac{\nu}{\Delta\sigma^\circ} \left(\Delta\sigma^\circ + \frac{\gamma_0}{\nu_0} \right).$$

Очевидно, что при выполнении неравенства (8.94) v_{01} и v_{02} имеют различные знаки, что совпадает с условием (8.92).

При $\left| \frac{y_0}{v_0} \right| = |\Delta\sigma|$ одно из значений v_{01} и v_{02} обращается в нуль, что означает границу стабилизируемости на соответствующей частоте.

Таким образом, условие (8.92) является условием стабилизируемости как в случае «не близких», так и в случае сколь угодно близких частот σ_s° и σ_{s+1}° , если $\sigma_{s+1}^\circ \neq \sigma_s^\circ$.

Мы пришли к следующему утверждению. Объект стабилизируем, если: а) при исчезающем малом собственном демпфировании он собственно динамически устойчив, т. е. не имеет кратных собственных частот, и б) знаки вычетов передаточной функции в полюсах с мнимыми частями, совпадающими с его собственными частотами, чередуются, что эквивалентно чередованию нулей и полюсов передаточной функции.

Рис. 8.23 иллюстрирует последний вариант критерия стабилизируемости на примере стабилизации по крену объекта пакетной схемы с жестким корпусом и k баками, описываемого уравнением (3.121), если принять за аргумент $p^2 = -\omega^2$ [20].

Рассмотрим теперь как обстоит дело со стабилизируемостью объекта регулирования при наличии в контуре управления БЦВМ и прерывателей с запоминанием на период квантования по времени.

Приписав свойства дискретности объекту регулирования (см. разд. 8.5), можно ответить на этот вопрос. Ограничившись случаем «не близких» (в смысле разд. 8.4) частот собственных колебаний исходного (недискретизированного) объекта регулирования, мы можем воспользоваться формулами (8.86) и (8.87) для вещественных частей s -го корня характеристического уравнения замкнутой системы. Из формул (8.86), (8.87), (8.90) и (8.91) яс-

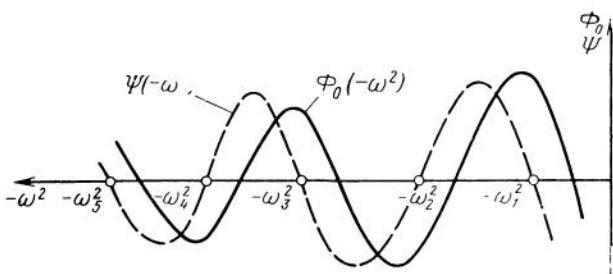


Рис. 8.23. Чередование нулей и полюсов передаточной функции стабилизируемого объекта регулирования

и с, что стабилизуемость нового (дискретизированного) объекта регулирования зависит теперь от фазового сдвига φ , создаваемого алгоритмом стабилизации совместно с сервоприводом. В частности, если угол φ близок к нулю или к πn ($n=1, 2, \dots$), то, как видно из формул (8.90) и (8.91), дискретность не скажется на стабилизуемости объекта 1 и сильно повлияет на стабилизуемость объекта 2. Действительно, в первом случае параметр $\zeta_s^{\circ} = \frac{\pi \alpha_s}{\sigma_0}$, характеризующий дискретность системы, не влияет на знак вещественной части α_s корня характеристического уравнения замкнутой системы при сколь угодно малом собственном демпфировании ($\alpha_s^{\circ} \rightarrow 0$). В то же время во втором случае при тех же условиях этот знак будет противоположен знаку α_s для непрерывного аналога объекта регулирования, если $\operatorname{tg} \zeta_s^{\circ} < 0$, т. е. когда ζ_s° лежит во второй или четвертой четверти.

Объект 2 при значениях φ , близких к πn ($n=0, 1, 2, \dots$), аналогичен объекту 1 при углах φ , близких к $\frac{\pi n}{2}$ ($n=1, 3, 5, \dots$). Поэтому для каждого из объектов, по крайней мере, в определенном диапазоне значений φ , смысл критерия стабилизуемости (8.92) (или аналогичного ему, в котором роль v_{0s} играют параметры ψ_{0s}) будет меняться на противоположный при $\operatorname{sign} \operatorname{tg} \zeta_{s+1}^{\circ} = -\operatorname{sign} \operatorname{tg} \zeta_s^{\circ}$. Это означает, что при фиксированных ζ_s° и ζ_{s+1}° объект регулирования может оказаться нестабилизуемым, когда его непрерывный аналог стабилизируем, и наоборот, в зависимости от значения частоты квантования σ_0 . Следствием является возникновение принципиально новых форм динамической неустойчивости замкнутой системы, специфических для объектов, имеющих БЦВМ в контуре управления. С другой стороны, открываются некоторые новые возможности борьбы с нестабилизуемостью исходного объекта регулирования.

8.7. Исследование динамической устойчивости РН в пространстве безразмерных конструктивных параметров

На начальной стадии проектирования желательно иметь критерии динамической устойчивости, записанные через безразмерные конструктивные параметры объекта, которые можно менять в тех или иных пределах, улучшая тем самым динамические свойства объекта регулирования. Прежде всего это касается критериев стабилизуемости и собственной динамической устойчивости.

Первым этапом этой задачи является выражение этих критериев непосредственно через коэффициенты уравнений возмущенного движения, вторым — получение явных зависимостей от тех или иных безразмерных конструктивных параметров. Необходи-

мой предпосылкой для этого служит получение чисто алгебраических критериев стабилизируемости и собственной динамической устойчивости объекта регулирования.

Условимся с самого начала пренебречь в уравнениях возмущенного движения всеми диссипативными силами, пропорциональными обобщенным скоростям, как с положительной, так и с отрицательной диссипацией. Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы можно записать в некоторой стандартной форме, независимо от конкретной задачи (движение в плоскостях стабилизации и в направлении продольной оси при различных вариантах динамической схемы):

$$\Phi_0(p^2) + \mathcal{L}(p)\Psi_0(p^2) = 0, \quad (8.100)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(p^2) &= \sum_{j=0}^{k_1} a_j p^{2j}; \\ \Psi_0(p^2) &= \sum_{j=0}^{k_2} b_j p^{2j}; \quad k_2 \leq k_1. \end{aligned} \quad (8.101)$$

Очевидно, что $\Psi_0(p^2)$ есть числитель, а $\Phi_0(p^2)$ — знаменатель передаточной функции объекта регулирования, так что характеристическое уравнение объекта регулирования имеет вид

$$\Phi_0(p^2) = 0 \quad (8.102)$$

(аналог уравнения $\Delta_0(p) = 0$ предыдущих разделов).

Стабилизируемость объекта регулирования имеет место, как мы установили выше, при чередовании нулей и полюсов передаточной функции объекта регулирования, то есть нулей функций $\Phi_0(-\omega^2)$ и $\Psi_0(-\omega^2)$ или $\Phi_0(-\omega^2)$ и $-\Psi_0(-\omega^2)$. Необходимо, следовательно, найти критерий чередования этих нулей.

Решение этой задачи дается следующей теоремой [7]: для я чередования нулей полиномов $\Phi_0(\lambda)$ и $\Psi_0(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы полином

$$F(\lambda) = \Phi_0(\lambda) + \varepsilon \lambda \Psi_0(\lambda) \quad (8.103)$$

был гурвицевым при $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$.

Следовательно, критерием стабилизируемости объекта, допускающего представление характеристического уравнения замкнутой системы в форме (8.100), является положительность всех определителей Гурвица для $F(\lambda)$ (8.103) ($\lambda = -\omega^2$):

$$d_1 = a_0 > 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ \varepsilon b_0 & \varepsilon b_1 \end{vmatrix} > 0, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ \varepsilon b_0 & \varepsilon b_1 & \varepsilon b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$d_{2n-1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \varepsilon b_0 & \varepsilon b_1 & \varepsilon b_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} > 0, \quad (8.104)$$

где d_{2n-1} — последний из этих определителей.

Рассмотрим более подробно наиболее интересный случай, чаще всего встречающийся в гл. 10 и 11,

$$\begin{aligned} \Phi_0(p^2) &= a_0 p^4 + a_1 p^2 + a_2; \\ \Psi_0(p^2) &= b_0 p^4 + b_1 p^2 + b_2, \end{aligned} \quad (8.105)$$

где $a_j > 0$ ($j = 0, 1, 2$).

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{a_1}{a_0}; \quad \bar{a}_2 = \frac{a_2}{a_0}; \quad \bar{d}_2 = \frac{1}{a_0} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}; \\ \bar{d}_3 &= \frac{1}{a_0^2} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}; \quad \bar{d}_4 = \frac{1}{a_0^2} \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (8.106)$$

Критерий стабилизуемости (8.104) с учетом того, что параметр ε равен либо $+1$, либо -1 , $\bar{a}_1 > 0$, $\bar{a}_2 > 0$ сводится к следующему:

$$\bar{d}_4 > 0; \quad \bar{d}_2 \bar{d}_3 > 0. \quad (8.107)$$

Из выражения (8.106) вытекает следующее тождество:

$$\bar{d}_4 = b_2 \bar{d}_3 - \bar{a}_2 b_1 \bar{d}_2 + \bar{a}_2 b_0 (\bar{a}_1 \bar{d}_2 - d_3) = -\bar{a}_2 \bar{d}_2^2 - \bar{d}_3^2 + \bar{a}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3,$$

откуда

$$\bar{a}_1 \bar{d}_2 \bar{d}_3 = \bar{d}_3^2 + \bar{a}_2 \bar{d}_2^2 + \bar{d}_4. \quad (8.108)$$

Из тождества (8.108) ясно, что второе неравенство (8.107) является следствием первого, так что критерий стабилизуемости в случае (8.105) сводится к единственному неравенству:

$$\Psi = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0. \quad (8.109)$$

Изменение знака $>$ в неравенстве (8.109) на $<$ дает критерий нестабилизуемости объекта регулирования; знак $=$ соответствует границе стабилизуемости.

В развернутой форме условие (8.109) имеет вид

$$\Psi = -(b_0 a_2 - a_0 b_2)^2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2)(b_0 a_1 - a_0 b_1) > 0. \quad (8.110)$$

Рассмотрим теперь критерий собственной динамической устойчивости, который означает положительность дискриминанта биквадратного уравнения (8.102) $\Phi_0(-\omega^2) = 0$, т. е.

$$D = a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0. \quad (8.111)$$

Выше мы установили, что собственная динамическая неустойчивость объекта означает и его нестабилизируемость (достаточное условие). Покажем это непосредственно применительно к рассматриваемому случаю.

Положим, что

$$a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0 \quad (8.112)$$

(объект на границе собственной динамической устойчивости) и введем в рассмотрение функцию

$$\Delta = -\frac{\Psi}{a_0^2 b_0^2} = (\bar{b}_0 \bar{a}_2 - 1)^2 - (\bar{b}_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_1)(\bar{b}_0 \bar{a}_1 - \bar{b}_1), \quad (8.113)$$

где

$$\bar{a}_j = \frac{a_j}{a_0}; \quad \bar{b}_j = \frac{b_j}{b_2}.$$

Подставив в равенство (8.113) $\bar{a}_2 = \frac{a_2}{a_0}$ из (8.112), после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{\bar{b}_0 \bar{a}^2}{4} - 1 \right)^2 - \bar{a}_1 \left(\frac{\bar{b}_1 \bar{a}_1}{4} - 1 \right) (\bar{b}_0 \bar{a}_1 - \bar{b}_1) = \\ &= \frac{\bar{a}_1^2 \bar{b}_0}{2} + \frac{1}{4} (2 - \bar{a}_1 \bar{b}_1)^2 - \frac{\bar{b}_0 \bar{b}_1 \bar{a}_1^3}{4} + \frac{\bar{a}_1^4 \bar{b}_0^2}{16} = \\ &= \left(1 - \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1}{2} + \frac{\bar{b}_0 \bar{a}_1^2}{4} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, Δ представляет собой квадрат некоторого выражения, т. е. всегда

$$\Delta \geq 0, \quad (8.114)$$

что соответствует либо нестабилизируемости, либо возможной границе стабилизируемости. Последняя достигается в двух точках с координатами

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\bar{b}} (\bar{b}_1 \pm \sqrt{\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0}). \quad (8.115)$$

(эти точки могут быть и мнимыми). Это свойство сохраняется и в пространстве безразмерных параметров, которое получается из

пространства коэффициентов $\bar{a}_1, \bar{b}_0, \bar{b}_1$ неособенным линейным преобразованием.

Предположим теперь, что удалось выразить коэффициенты a_j и b_j через некоторую систему безразмерных конструктивных параметров z_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$), характеризующих объект регулирования. Тогда можно в $n+1$ -мерном пространстве этих параметров выделить поверхности, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned}\Psi(z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) &= 0; \\ D(z_0, z_1, z_2, \dots, z_m) &= 0 \quad (n < m).\end{aligned}\quad (8.116)$$

Эти поверхности представляют собой границы областей стабилизируемости и собственной динамической устойчивости, внутри которых

$$\Psi > 0; \quad D > 0. \quad (8.117)$$

Области собственной динамической неустойчивости, как было показано выше, всегда лежат внутри областей нестабилизируемости, быть может имея с ними некоторые общие точки, являющиеся точками касания, коль скоро поверхности $\Psi=0$ и $D=0$ достаточно гладкие. Примеры решения конкретных задач, иллюстрирующих сказанное, приводятся в гл. 10.

Пусть теперь имеется объект с известными в каждый момент времени значениями параметров $z_i(\tau)$, где

$$\tau = \frac{t}{t_k}; \quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_k. \quad (8.118)$$

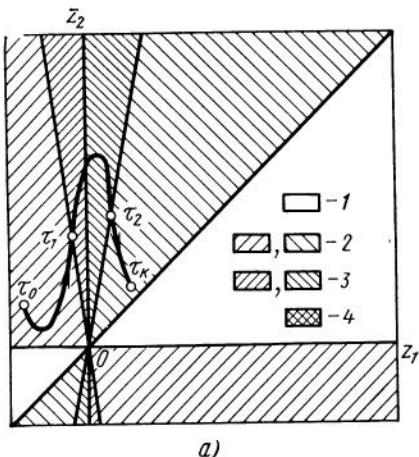
Если принять за t_k — продолжительность активного участка, то $\tau_0=0, \tau_k=1$.

Фиксируя параметр τ , можно построить граничные поверхности $\Psi=0, D=0$, в уравнениях которых (8.116) появится дополнительный параметр τ , и линию состояния системы, параметрические уравнения которой имеют вид

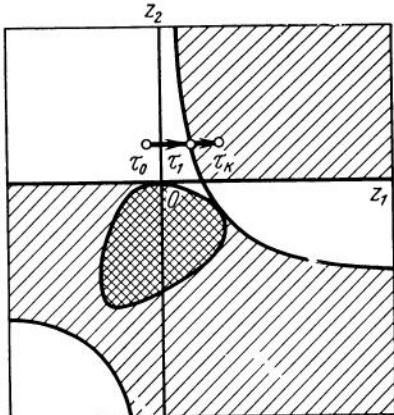
$$z_i^o = z_i^o(\tau) \quad (i=0, 1, 2, \dots, n). \quad (8.119)$$

Положение этой линии относительно деформирующихся границ стабилизируемости и собственной динамической устойчивости системы дает наглядное представление о влиянии параметров объекта на его динамические характеристики и подсказывает направления целенаправленного изменения этих параметров.

Практически целесообразно вести исследование в пространстве двух-трех основных параметров, наиболее поддающихся воздействию в процессе проектирования. Обозначим их z_0, z_1, z_2 для функции Ψ и z_1, z_2 для функции D , полагая $m=n=1$. Обычно можно выбрать остальные параметры так, чтобы они в меньшей степени, чем основные, зависели от τ .



a)



б)

Рис. 8.24. Представление областей устойчивости (*а*) и стабилизируемости (*б*) в плоскости характерных безразмерных параметров объекта регулирования: 1 — стабилизируемость; 2 — нестабилизируемость; 3 — неустойчивость; 4 — собственная динамическая неустойчивость

Разобьем отрезок $0 \leq \tau \leq 1$ на части, соответствующие монотонному изменению z_0 . Тогда можно принять на каждой из частей z_0 за независимую переменную и записать уравнения (8.12) в виде

$$\tilde{\Psi}(z_0, z_1, z_2) = 0; \quad \tilde{D}(z_0, z_1, z_2) = 0. \quad (8.120)$$

$$z_i^\circ = \tilde{z}_i(z_0). \quad (8.121)$$

Взаимное расположение линий (8.121) и поверхностей (8.120) полностью характеризует динамические свойства проектируемой РН как объекта регулирования в смысле стабилизируемости и собственной динамической устойчивости.

Если зависимость функций $\tilde{\Psi}$ и \tilde{D} (8.120) от z_0 достаточно слабая, то поверхности (8.120) близки к цилиндрическим и исследование можно вести в плоскости z_1, z_2 , считая, что

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(z_1, z_2, \tau); \quad D = D(z_1, z_2, \tau); \\ z_1^\circ &= z_1^\circ(\tau); \quad z_2^\circ = z_2^\circ(\tau). \end{aligned} \quad (8.122)$$

При построении областей, соответствующих движению объекта в плоскостях стабилизации, в дальнейшем всегда используются следующие обозначения:

одинарная штриховка — область нестабилизируемости;

двойная штриховка — область собственной динамической неустойчивости;

отсутствие штриховки — область стабилизируемости (рис. 8.24, *а*).

. Очевидно, что аналогичный метод можно применить и для построения областей фазовой и амплитудной стабилизаций системы в пространстве тех же параметров.

При построении областей фазовой стабилизации приходится различать области стабилизуемости, в которых устойчивость замкнутой системы достигается при фазовом опережении АС и фазовом запаздывании. Наконец, при построении областей амплитудной стабилизации, т. е. фактически областей динамической устойчивости замкнутой системы объекта регулирования — АС (движение в плоскостях стабилизации) или объекта регулирования — ЖРД (движение в направлении продольной оси), появляются дополнительные параметры — амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики АС или ЖРД и коэффициенты демпфирования.

Ниже такая постановка задачи иллюстрируется на примере областей динамической устойчивости продольных колебаний РН, для которых она является наиболее актуальной, так как обычно при проектировании РН приходится считать частотные характеристики ЖРД заданными (см. гл. 11). При этом используются следующие правила штриховки:

одинарная штриховка под углом $+45^\circ$ — невыполнение условий фазовой стабилизации на одной из собственных частот объекта;

одинарная штриховка под углом -45° — невыполнение условий фазовой стабилизации на второй частоте (имеется в виду пара потенциально близких частот);

двойная штриховка — невыполнение условий фазовой стабилизации на обеих частотах;

аналогичная штриховка двойной густоты — то же, что и выше, только применительно к амплитудно-фазовой стабилизации при заданных коэффициентах демпфирования объекта и частотных характеристиках ЖРД;

отсутствие штриховки — выполнение условий фазовой стабилизации на обеих частотах (см. рис. 8.24, б).

В гл. 11 параметры z_1 , z_2 на рисунках, аналогичных рис. 8.24, обозначены z , β .

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ БЛИЗКИХ ПАРЦИАЛЬНЫХ ЧАСТОТ

9.1. Корпус как твердое тело с системами УС и БС

В настоящей главе рассматриваются случаи, когда учитывающие в рамках принятой динамической схемы элементы спектра парциальных частот колебаний корпуса как жесткого твердого тела с АС, жидкости в баках и магистралях, упругих колебаний корпуса (поперечных и продольных) и, наконец, колебаний двигателя относительно корпуса не пересекаются. Поперечные и продольные колебания при этом считаются полностью независимыми.

Типичное распределение парциальных частот соответствует спектру, представленному на рис. 7.11, *a*, так что самыми низкими считаются парциальные частоты корпуса с системами угловой стабилизации и стабилизации движения центра масс.

Все рассматриваемые ниже варианты соответствуют некоторым предельным случаям, когда частоты одной группы можно считать пренебрежимо малыми по сравнению с частотами другой группы.

Основное направление исследований настоящей главы — получение и анализ приближенных формул для корней характеристического уравнения замкнутой системы с мнимыми частями, близкими к соответствующим парциальным частотам по методу, изложенному в гл. 8. Задача, рассматриваемая в первом разделе, которой посвящена обширная литература (см., в частности, работу [12]), носит в этом смысле вводный характер. Будем исходить из уравнений (4.74), в которых положим $\sigma^0 \ll \omega_{s_n}$; $\sigma^0 \ll \omega_{q_i}$, где σ^0 — наибольшая из характерных частот колебаний замкнутой системы объект как твердое жесткое тело — АС. В результате получим

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\zeta\nu}\dot{\nu} + a_{\zeta\psi}\psi + a_{\zeta\delta}\delta &= \bar{P}_z; \\ \ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\nu}\dot{\nu} + a_{\psi\psi}\psi + a_{\psi\delta}\delta &= \bar{M}_{Gy}; \\ \ddot{\delta} - \mathcal{L}'_1(\ddot{\nu}) - \mathcal{L}'_2(\ddot{\zeta}) &= 0; \\ \zeta^0 = \zeta - (x^0 - x_G)\psi. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Примем, что $(x^0 - x_G) \psi \ll \zeta$ и пренебрежем диссипативными членами и правыми частями в первых двух уравнениях.

Кроме того, опустим знак' у операторов \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 . Это приводит к следующей простейшей системе уравнений, соответствую-

щей движению вне атмосферы, при отсутствии возмущений:

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\delta}\delta &= 0; \\ \ddot{\psi} + a_{\psi\delta}\dot{\psi} + a_{\psi\delta}\delta &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}_1(\dot{\psi}) - \mathcal{L}_2(\zeta),\end{aligned}\quad (9.2)$$

где

$$\mathcal{L}_1(i\omega) = A_1(\omega) e^{i\varphi_1(\omega)}; \quad \mathcal{L}_2(i\omega) = A_2(\omega) e^{i\varphi_2(\omega)}. \quad (9.3)$$

Ограничиваюсь линейными относительно \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 членами, получим из (9.2) следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}p^4 + p^2 [a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta}\mathcal{L}_1(p) - a_{\zeta\delta}\mathcal{L}_2(p)] + \\ + \mathcal{L}_2(p)(a_{\psi\delta}a_{\zeta\psi} - a_{\zeta\delta}a_{\psi\psi}) &= 0.\end{aligned}\quad (9.4)$$

Положим $p = \alpha \pm i\sigma$, где $\alpha \ll \sigma$. Тогда уравнение (9.4) при учете формулы (9.3) и пренебрежении членами второго и более высокого порядка малости расщепляется на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned}\sigma^4 - \sigma^2(a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta}A_1(\sigma) \cos \varphi_1(\sigma) - a_{\zeta\delta}A_2(\sigma) \cos \varphi_2(\sigma)) + \\ + (a_{\psi\delta}a_{\zeta\psi} - a_{\zeta\delta}a_{\psi\psi})A_2(\sigma) \cos \varphi_2(\sigma) &= 0.\end{aligned}\quad (9.5)$$

$$\begin{aligned}2\alpha\sigma [-2\sigma^2 + a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta}A_1(\sigma) \cos \varphi_1(\sigma) - a_{\zeta\delta}A_2(\sigma) \cos \varphi_2(\sigma)] - \\ - a_{\psi\delta}\sigma^2 A_1(\sigma) \sin \varphi_1(\sigma) + A_2(\sigma) \sin \varphi_2(\sigma) [\sigma^2 a_{\zeta\delta} + \\ + a_{\psi\delta}a_{\zeta\psi} - a_{\zeta\delta}a_{\psi\psi}] &= 0.\end{aligned}\quad (9.6)$$

Первое является частотным уравнением, а второе определяет вещественные части корней характеристического уравнения. При обычных параметрах систем УС и БС уравнение (9.5) имеет два корня — σ_1^2 и σ_2^2 , удовлетворяющих условию $\sigma_1^2 \ll \sigma_2^2$. Учитывая это обстоятельство, можно найти эти корни из следующих приближенных уравнений:

$$\sigma_1^2 \approx \sigma_1^{\circ 2}(\sigma_1); \quad \sigma_2^2 \approx \sigma_2^{\circ 2}(\sigma_2), \quad (9.7)$$

где

$$\sigma_1^{\circ 2}(\sigma) = \frac{1}{\sigma_2^{\circ 2}(\sigma)}(a_{\psi\delta}a_{\zeta\psi} - a_{\zeta\delta}a_{\psi\psi})A_2(\sigma) \cos \varphi_2(\sigma); \quad (9.8)$$

$$\sigma_2^{\circ 2}(\sigma) = a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta}A_1(\sigma) \cos \varphi_1(\sigma) - a_{\zeta\delta}A_2(\sigma) \cos \varphi_2(\sigma).$$

Соответственно из уравнений (9.6) получим,

$$a_1 = a(\sigma_1); \quad a_2 = a(\sigma_2); \quad (9.9)$$

где

$$a(\sigma) = -\frac{1}{2\sigma \left[2 - \frac{\sigma_2^{\circ_2}(\sigma)}{\sigma^2} \right]} \left\{ a_{\psi\delta} A_1(\sigma) \sin \varphi_1(\sigma) - A_2(\sigma) \sin \varphi_2(\sigma) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{a_{\zeta\psi}}{\sigma^2} + a_{\zeta\delta} \left(1 - \frac{a_{\psi\delta}}{\sigma^2} \right) \right] \right\}. \quad (9.10)$$

Чтобы $\mathcal{L}_2 = 0$ (система БС отсутствует). Характеристическое уравнение (9.4) имеет двукратный нулевой корень, так что объект неустойчив (именно из-за этого обычно нужна система БС и аналогичная ей в плоскости тангенса). Однако имеется еще пара корней, которым могут соответствовать либо устойчивые, либо неустойчивые решения. Им отвечают значения

$$\sigma^2 = a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta} A_1(\sigma) \cos \varphi_1(\sigma); \\ a = -\frac{a_{\cdot\delta} A_1(\sigma)}{2\sigma} \sin \varphi_1(\sigma). \quad (9.11)$$

Если $\sigma^2 > 0$, имеются два комплексно-сопряженных корня, если $\sigma^2 < 0$ — два вещественных корня.

Условия устойчивости сводятся к следующим:

$$\sigma^2 = a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta} A(\sigma) \cos \varphi(\sigma) > 0; \\ \sin \varphi(\sigma) > 0. \quad (9.12)$$

При $a_{\psi\psi} > 0$ (статистически устойчивая РН) первое условие (9.12) удовлетворяется автоматически; при $a_{\psi\psi} < 0$ (статистически неустойчивая РН) оно накладывает ограничение на знак $\cos \varphi(\sigma)$ и минимально допустимый статистический коэффициент усиления АС. Практически оказывается, что угол $\varphi(\sigma)$ должен лежать в первой четверти. Второе условие (9.12) означает, что на частоте σ АС должен обеспечивать опережение по фазе, причем запас устойчивости увеличивается по мере увеличения этого опережения и коэффициента усиления АС. Эти требования иногда вступают в противоречия с условиями устойчивости при более высоких частотах, характерных для колебаний жидкости в баках и упругих колебаний корпуса, что вносит дополнительные осложнения в задачу обеспечения динамической устойчивости РН. При $\mathcal{L}_2 \neq 0$ условия устойчивости на частоте σ_2 будут жестче, чем условия (9.12):

$$\sigma_2^2 = a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta} A_1(\sigma) \cos \varphi_1(\sigma) \left[1 - \frac{a_{\zeta\delta} A_2 \cos \varphi_2}{a_{\psi\delta} A_1 \cos \varphi_1} \right] \Big|_{\sigma=\sigma_2} > 0; \\ (9.13)$$

$$a_{\psi\delta} A_1(\sigma_2) \sin \varphi_1(\sigma_2) \left\{ 1 - \frac{A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \sin \varphi_1} \left[\frac{a_{\zeta\psi}}{\sigma_2^2} + \frac{a_{\zeta\delta}}{a_{\cdot\delta}} \left(1 - \frac{a_{\psi\delta}}{\sigma_2^2} \right) \right] \right\} \Big|_{\sigma=\sigma_2} > 0,$$

так как угол $\varphi_2(\sigma_2)$ обычно также должен быть в первой четверти в силу ограничений на $\varphi_2(\sigma_1)$, вытекающих из условий устойчивости на частоте σ_1 :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = & \frac{1}{\sigma_2^{0^2}(\sigma_1)} (a_{\psi\delta} a_{\zeta\psi} - a_{\zeta\delta} a_{\psi\delta}) A_2(\sigma_1) \cos \varphi_2(\sigma_1) > 0; \\ \frac{a_{\psi\delta} \sigma_1^2 A_1(\sigma_1) \sin \varphi_1(\sigma_1)}{2\sigma_1^2 - \sigma_2^{0^2}(\sigma_1)} \left\{ 1 - \frac{A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \sin \varphi_1} \left[\frac{a_{\zeta\psi}}{\sigma_1^2} + \frac{a_{\zeta\delta}}{a_{\psi\delta}} \left(1 - \frac{a_{\psi\psi}}{\sigma_1^2} \right) \right] \right\}_{\sigma=\sigma_1} > 0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Пусть углы φ_1 и φ_2 лежат в первой четверти
При $\frac{A_2}{A_1} \rightarrow 0$

$$\sigma_1^2 \rightarrow 0; \quad a_1 \rightarrow \frac{\sigma_1 a_{\psi\delta} A_1(\sigma_1) \sin \varphi_1(\sigma_1)}{2\sigma_2^{0^2}(\sigma_1)} > 0. \quad (9.15)$$

При $\frac{A_2}{A_1} \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 \rightarrow & a_{\psi\psi} - a_{\zeta\delta} A_2(\sigma_2) \cos \varphi_2(\sigma_2) < 0; \\ a_2 \rightarrow & \frac{A_2(\sigma_2) \sin \varphi_2(\sigma_2)}{2\sigma_2} \left[\frac{a_{\zeta\psi}}{\sigma_2^2} + a_{\zeta\delta} \left(1 - \frac{a_{\psi\psi}}{\sigma_2^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Следовательно, как при уменьшении, так и при увеличении коэффициента усиления системы БС при неизменном коэффициенте усиления СУС наступает неустойчивость. Каждая из этих систем, таким образом, обеспечивает устойчивость на «своей» парциальной частоте, уменьшая устойчивость на «чужой» парциальной частоте, т. е. мешая другой системе.

В целом, однако, при правильном выборе частотных характеристик обеспечивается устойчивость во всем низкочастотном диапазоне, начиная с частоты, равной нулю.

При этом, основное влияние системы БС на процессы стабилизации проявляется только на частоте, близкой к σ_1 , при отработке медленно меняющихся внешних возмущений; на частоте $\sigma_2 \rightarrow \sigma$ это влияние незначительно, так что $a_2 \rightarrow a$. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении динамической устойчивости в диапазоне частот ω_{s_n} и ω_{q_j} системой БС будем пренебрегать.

9.2. Система жесткий корпус — жидкость в баках — СУС

Рассмотрим уравнения, следующие из (4.74), если пренебречь упругостью корпуса и работой системы БС:

$$\ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a'_{\zeta\delta}\dot{\delta} + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + a_{\zeta\delta}\delta = \bar{P}_z;$$

$$\ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\psi}\psi + \sum_{n=1}^k (a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a'_{\psi s_n} \dot{s}_n) + a_{\psi\delta}\delta = \bar{M}_{Gy}; \quad (9.17)$$

$$\ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n} \ddot{\zeta} + a_{s_n} \ddot{\psi} + a'_{s_n} \dot{\psi} = 0;$$

$$\delta = \mathcal{L}(\psi) \quad (n=1,2,\dots,k).$$

Исследуем некоторые важные предельные случаи. Здесь и в дальнейшем под частотами колебаний будем подразумевать собственные частоты (парциальные).

Высокие частоты колебаний жидкости в баках

Выполняется условие $\omega_{s_n} \gg \sigma^0$, где $\sigma^0 = \sigma$ — характерная частота системы корпус — система УС.

Полагая $s_n \rightarrow 0$ ($n=1, 2, \dots, k$), получим из уравнений (9.17)

$$\ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\psi}\psi + a_{\zeta\delta}\delta = \bar{P}_z;$$

$$\ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\psi}\psi + a_{\psi\delta}\delta = \bar{M}_{Gy}; \quad (9.18)$$

$$\delta = \mathcal{L}(\psi).$$

Эта система отличается от системы (9.1) только отсутствием БС. Важно подчеркнуть, что, хотя формально уравнения (9.18), как и (9.1), совпадают с уравнениями возмущенного движения РН как жесткого твердого тела (см. уравнение 2.19), однако имеется некоторое отличие. А именно здесь мы имеем дело с некоторым «статически эквивалентным твердым телом» [20] с массой $m^0 + m$, совпадающей с массой РН с затвердевшей жидкостью, и моментом инерции $J^0 + J$, равным сумме момента инерции корпуса и присоединенного момента инерции жидкости, соответствующего плоским свободным поверхностям жидкости во всех баках, которые ортогональны вектору \mathbf{j} (см. гл. 2); центр масс этого эквивалентного тела совпадает с метацентром G системы корпус — жидкость, а не с центром масс G_0 РН с затвердевшей жидкостью, как в уравнениях (2.18), (2.19). Тем самым в уравнениях (9.19) и аналогичных им (9.1) учитывается квазистатический эффект подвижности жидкости при малых отклонениях корпуса от программного положения.

Стабилизация в диапазоне частот колебаний жидкости ω_{s_n}

Здесь остается в силе система (9.17), причем можно положить $a_{\psi\psi} \rightarrow 0$. В частности, при пренебрежении аэродинамическими силами (движение в пустоте) и малыми кориолисовыми силами получим

$$\begin{aligned}
& \ddot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + \sum_{n=0}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + a_{\zeta\delta} \delta = \bar{P}_z; \\
& \ddot{\psi} + \sum_{n=1}^k (a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a'_{\psi s_n} \dot{s}_n) + a_{\psi\delta} \delta = \bar{M}_{Gy}; \\
& \ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n\zeta} \ddot{\zeta} + a_{s_n\psi} \ddot{\psi} + a'_{s_n\psi} \dot{\psi} = 0; \\
& \delta = \mathcal{L}(\psi) \quad (n=1,2,\dots,k)
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Низкие частоты колебаний жидкости в баках

Выполняется условие $\omega_{s_n} \ll \sigma^0$

Стабилизация в диапазоне частот колебаний корпуса σ^0

Здесь предельный переход осуществляется несколько иначе, а именно надо подставить s_n из третьего уравнения (9.17) в первые два уравнения, после чего положить $\omega_{s_n} \rightarrow 0$ ($n=1, 2, \dots, k$). Учитывая, что при принятой динамической схеме $\beta_{s_n} \rightarrow 0$; $a'_{\psi s_n} \rightarrow 0$, $a_{s_n\psi} \rightarrow 0$ при $\omega_{s_n} \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} a_{s_n\zeta}\right) \ddot{\zeta} - \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} a_{s_n\psi} \ddot{\psi} + a'_{\zeta\zeta} \dot{\zeta} + a'_{\zeta\psi} \dot{\psi} + a_{\zeta\psi} \psi + a_{\zeta\delta} \delta = \bar{P}_z; \\
& \left(1 - \sum_{n=1}^k a_{\psi s_n} a_{s_n\psi}\right) \ddot{\psi} - \sum_{n=1}^k a_{\psi s_n} a_{s_n\zeta} \ddot{\zeta} + a'_{\psi\zeta} \dot{\zeta} + a'_{\psi\psi} \dot{\psi} + a_{\psi\psi} \psi + a_{\psi\delta} \delta = \bar{M}_{Gy}; \\
& \delta = \mathcal{L}(\psi).
\end{aligned} \tag{9.20}$$

Введем в рассмотрение «динамически эквивалентное твердое тело» со следующими значениями массы, момента инерции и координаты центра масс [20]:

$$\begin{aligned}
m_0 &= (m^\circ + m) \left(1 - \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} a_{s_n\zeta}\right) = m^\circ + m - \sum_{n=1}^k \frac{\lambda_n^2}{\mu_n}; \\
J_0 &= (J^\circ + J) \left(1 - \sum_{n=1}^k a_{\psi s_n} a_{s_n\psi}\right) = J^\circ + J - \sum_{n=1}^k \frac{\lambda_{0n}^2}{\mu_n}; \\
x_{\tilde{G}} &= x_G + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} a_{s_n\psi} = x_G + \sum_{n=1}^k \frac{\lambda_n \lambda_{0n}}{\mu_n (m^\circ + m)} = \frac{m_0 x_0}{m^\circ + m}.
\end{aligned} \tag{9.21}$$

Выражения m_0 , J_0 , $x_{\tilde{G}}$ совпадают с массой, моментом инерции и координатой центра масс механического аналога (3.112).

Если перенести центр приведения системы внешних сил из метацентра G в обобщенный метацентр \tilde{G} (центр масс динамически эквивалентного твердого тела), преобразовать к новому центру приведения все коэффициенты второго из уравнений (9.20), а затем поделить левые и правые части уравнений (9.20) на коэффициенты при старших производных, то уравнения (9.20) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + \tilde{a}_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + \tilde{a}_{\zeta\psi}\dot{\psi} + \tilde{a}_{\zeta\varphi}\dot{\varphi} + \tilde{a}_{\zeta\delta}\delta &= \tilde{P}_z; \\ \ddot{\psi} + \tilde{a}_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + \tilde{a}_{\psi\psi}\dot{\psi} + \tilde{a}_{\psi\varphi}\dot{\varphi} + \tilde{a}_{\psi\delta}\delta &= \tilde{M}_{\tilde{G}_y}; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi).\end{aligned}\quad (9.22)$$

Знак \sim означает, что коэффициенты пересчитаны, как было сказано выше. Заметим, что коэффициент $\tilde{a}_{\psi\psi}$ приобретает при этом дополнительное слагаемое $j(x_{\tilde{G}} - x_G) \frac{m^o + m}{J_0}$ [20].

Стабилизация в диапазоне частот колебаний жидкости ω_{s_n}

Если частоты колебаний жидкости настолько низки, что сближаются с характерной частотой σ_1 системы БС, то необходимо вернуться к системе, аналогичной (9.17), но с учетом системы БС как в (9.1). Рассмотрим наиболее интересный для практики упрощенный вариант уравнений (9.19), который соответствует достаточно реалистичной постановке задачи динамической устойчивости на частотах, близких к ω_{s_n} :

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta s_n}\ddot{s}_n &= -a_{\zeta\delta}\delta; \\ \ddot{\psi} + a_{\psi s_n}\ddot{s}_n &= -a_{\psi\delta}\delta; \\ \ddot{s}_n + \beta_{s_n}\dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n}\ddot{\zeta} + a_{s_n}\psi\ddot{\psi} &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi) \quad (n = 1, 2, \dots, k).\end{aligned}\quad (9.23)$$

Здесь предполагается, что движение происходит в пустоте и в силу отличия частот ω_{s_n} и сравнительной слабости инерционных связей между движением корпуса и волновыми движениями жидкости можно рассматривать последние независимо для каждого бака. Кроме того, не учитываются дополнительные диссипативные члены $a'_{\psi s_n} \dot{s}_n$ и симметричный ему $a'_{s_n\psi} \dot{\psi}$.

Представим передаточную функцию объекта регулирования [15]

$$W_0(p) = \frac{\Psi(p)}{Q(p)};$$

$$\Psi(t) \leftarrow \Psi(p); \quad \delta(t) \leftarrow Q(p)$$

в окрестности частоты ω_{s_n} в виде

$$W_{0n}(p) = \frac{\Delta_{1n}(p)}{\Delta_{0n}(p)} \approx \frac{A_{0n}}{p - p_n} + \frac{\bar{A}_{0n}}{p - \bar{p}_n}, \quad (9.24)$$

где

$$\begin{aligned} A_{0n}(p) &= p^2 \left| \begin{array}{cc} 1 & a_{\psi s_n} \\ a_{s_n \psi} p^2 - a_{s_n \zeta} a_{\zeta \psi} & (1 - a_{s_n \zeta} a_{\zeta s_n}) p^2 + \beta_{s_n} p + \omega_{s_n}^2 \end{array} \right| = \\ &= p^2 [(1 - a_{s_n \zeta} a_{\zeta s_n} - a_{s_n \psi} a_{\psi s_n}) p^2 + \beta_{s_n} p + \omega_{s_n}^2 + a_{\psi s_n} a_{s_n \zeta} a_{\zeta \psi}]; \quad (9.25) \\ \Delta_{1n}(p) &= \left| \begin{array}{cc} -a_{\psi \delta} & a_{\psi s_n} p^2 \\ a_{s_n \zeta} a_{\zeta \delta} & (1 - a_{\zeta s_n} a_{s_n \zeta}) p^2 + \beta_{s_n} p + \omega_{s_n}^2 \end{array} \right| = \\ &= -a_{\psi \delta} [(1 - a_{\zeta s_n} a_{s_n \zeta}) p^2 + \beta_{s_n} p + \omega_{s_n}^2] - a_{\zeta \delta} a_{\psi s_n} a_{s_n \zeta} p^2. \end{aligned}$$

Полюсы функции $W_{0n}(p)$ и вычеты в этих полюсах определяются формулами

$$p_n^\circ = a_n^\circ + i\sigma_n^\circ; \quad \bar{p}_n^\circ = a_n^\circ - i\bar{\sigma}_n^\circ;$$

$$A_{0n} = \frac{\Delta_1(p_n^\circ)}{\Delta_0'(p_n^\circ)}; \quad \bar{A}_{0n} = \frac{\Delta_1(\bar{p}_n^\circ)}{\Delta_0'(p_n^\circ)}, \quad (9.26)$$

где в силу малости $|a_n^\circ| \ll \sigma_n^\circ$

$$\sigma_n^\circ \approx \frac{\omega_{s_n}^2 \left(1 + a_{\psi s_n} a_{s_n \zeta} \frac{a_{\zeta \psi}}{\omega_{s_n}^2} \right)}{1 - (a_{s_n \zeta} a_{\zeta s_n} + a_{s_n \psi} a_{\psi s_n})}; \quad a_n^\circ \approx -\frac{\beta_{s_n}}{2};$$

$$A_{0n} \approx i v_{0n}; \quad \bar{A}_{0n} \approx -i \bar{v}_{0n}; \quad (9.27)$$

$$v_{0n} = \frac{a_{\psi \delta} a_{\psi s_n} a_{s_n \zeta}}{\sigma_n^\circ [1 - (a_{s_n \zeta} a_{\zeta s_n} + a_{s_n \psi} a_{\psi s_n})]} \left[\frac{a_{\zeta \delta}}{a_{\psi \delta}} \left(1 + a_{s_n \zeta} a_{\psi s_n} \frac{a_{\zeta \psi}}{\omega_{s_n}^2} \right) + \frac{a_{s_n \psi}}{a_{s_n \zeta}} + (1 - a_{s_n \zeta} a_{\zeta s_n}) \frac{a_{\zeta \psi}}{\omega_{s_n}^2} \right].$$

Введем следующие безразмерные параметры:

$$z_n = \frac{1}{l} (l_n \bar{c}_n - x_{0n}); \quad z_0 = \frac{1}{c} = -\frac{x_0}{l};$$

$$\zeta_n = \frac{j}{l \omega_{s_n}^2}; \quad \gamma_n = \frac{\bar{m}_n \Omega_n l_n^3}{m^\circ + m}, \quad (9.28)$$

где $l = \sqrt{\frac{l^\circ + J}{m^\circ + m}}$ — радиус инерции относительно метацентра;

ϱ_n , l_n — массовая плотность жидкости в рассматриваемом n -м баке и характерный размер;
 $\bar{m}_n = \frac{\tilde{\lambda}_n^2}{\mu_n}$; $\bar{c}_n = -\frac{\bar{\lambda}_{nn}}{\bar{\lambda}_n}$ — безразмерные гидродинамические коэффициенты.

Все координаты отсчитываются от метацентра G .

Используя выражения (9.27), (9.28), (4.63)–(4.65), можно определить по формулам (8.22) вещественную и минимую части корней характеристического уравнения замкнутой системы

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sigma_n^o}{2} [-\bar{\beta}_{s_n} + e_n A(\sigma_n^o) \sin \varphi(\sigma_n^o)]; \\ \sigma_n &= \sigma_n^o \left[1 - \frac{1}{2} e_n A(\sigma_n^o) \cos \varphi(\sigma_n^o) \right] \quad (9.29) \\ &\quad (n=1,2,\dots,k), \end{aligned}$$

где

$$\sigma_n^o = \omega_{s_n}^2 \frac{1 + \gamma_n \zeta_n z_n}{1 - \gamma_n (1 + z_n^2)}; \quad \bar{\beta}_{s_n} = \frac{\bar{\beta}_{s_n}}{\sigma_n^o}; \quad e_n = \bar{e}_n k_n; \quad (9.30)$$

$$k_n = \frac{\gamma_n z_n \left[\frac{1}{z_0} (1 + \gamma_n \zeta_n z_n) + z_n + (1 - \gamma_n) \zeta_n \right]}{[1 - \gamma_n (1 + z_n^2)] (1 + \gamma_n \zeta_n z_n)};$$

$$e_n^o = \begin{cases} \frac{\bar{P}_\delta z_0}{l \sigma_n^o} & (z_0 \neq \infty, \text{ поворот двигателей}) \\ \frac{\bar{M}_\delta}{\sigma_n^o} & (z_0 = \infty, \text{ рассогласование тяг}). \end{cases}$$

При использовании в качестве исполнительного элемента системы управления двух маршевых двигателей

$$\begin{aligned} \bar{P}_\delta &= \frac{P_\delta}{m^\circ + m} = \frac{2P^*}{m^\circ + m} (z_0 \neq \infty); \\ \bar{M}_\delta &= \frac{M_\delta}{l^2(m^\circ + m)} = \frac{2P^* r_Q}{l^2(m^\circ + m)} (z_0 = \infty). \quad (9.31) \end{aligned}$$

В силу формул (9.29) и (9.30) получим следующие критерии устойчивости на частотах $\sigma_n \approx \sigma_n^o$:

Фазовая стабилизация

$$\begin{aligned} \sin \varphi(\sigma_n^o) &> 0 \text{ при } \Psi(z_0, z_n) > 0; \\ \sin \varphi(\sigma_n^o) &< 0 \text{ при } \Psi(z_0, z_n) < 0. \quad (9.32) \end{aligned}$$

Амплитудная стабилизация

$$A(\sigma_n^\circ) |e_n| < \bar{\beta}_{s_n}, \quad (9.33)$$

где

$$\Psi(z_0, z_n) = \begin{cases} z_n [z_0 [z_n + (1 - \gamma_n) \zeta_n] + \gamma_n \zeta_n z_n + 1] & (z_0 \neq \infty) \\ z_n [z_n + (1 - \gamma_n) \zeta_n] & (z_0 = \infty). \end{cases} \quad (9.34)$$

Уравнение $\Psi(z_0, z_n) = 0$ определяет в плоскости z_0, z_1 гиперболу с вертикальной и горизонтальной асимптотами, пересекающими-ся в точке (центр гиперболы) с координатами

$$z_1^\circ = -\zeta_n(1 - \gamma_n); \quad z_0^\circ = -\zeta_n \gamma_n. \quad (9.35)$$

Исследование выражений (9.34) показывает, что для первых ступеней РН с tandemной компоновкой с $z_0 > 0$ для нижних баков ($z_n > 0$) обычно $\Psi > 0$, а для верхних ($z_n < 0$) это условие выполняется только при $|z_n| > z_n^* \approx 1$ (при $\gamma_n \ll 1, \zeta_n \ll 1$). Это значит, что наиболее типичным для таких объектов является при отсутствии близких частот ω_{s_n} требование, чтобы АС обеспечивал фазовое опережение на всех этих частотах. К сожалению, это требование накладывает слишком жесткие ограничения на АС и иногда оказывается невыполнимым, что влечет за собой необходимость амплитудной стабилизации на частотах, близких ω_{s_n} (см. гл. 11).

9.3. Система упругий корпус — жидкость в баках — СУС

Учтем теперь упругость корпуса, но пренебрежем, как и в разд. (9.2), работой системы БС.

Уравнения (4.74) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\psi}\psi + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + a_{\zeta\delta}\delta &= \bar{P}_z; \\ \ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\psi}\psi + \sum_{n=1}^k (a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a'_{\psi s_n} \dot{s}_n) + a_{\psi\delta}\delta &= \bar{M}_{Gy}; \\ \ddot{q}_j + \beta_{q_j}\dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + \sum_{n=1}^k (a_{q_j s_n} \ddot{s}_n + a'_{q_j s_n} \dot{s}_n) + a_{q_j\delta}\delta &= \bar{Q}_j; \quad (9.36) \\ \ddot{s}_n + \beta_{s_n}\dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n\zeta}\ddot{\zeta} + a_{s_n\psi}\ddot{\psi} + a'_{s_n\psi}\dot{\psi} + \sum_{j=1}^m (a_{s_n q_j} \ddot{q}_j + a'_{s_n q_j} \dot{q}_j) &= 0; \\ \delta = \mathcal{L}(\cdot^\circ); \quad \psi^\circ = \psi - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x^\circ) q_j & \\ (n = 1, 2, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Обратимся снова к предельным случаям.

**Высокие частоты колебаний жидкости в баках
(низкие частоты упругих колебаний корпуса)**

Выполняется условие $\omega_{s_n} \gg \omega_{q_j}$

Стабилизация в диапазоне частот упругих колебаний корпуса ω_{q_j}

Полагая $s_n \rightarrow 0$ ($n = 1, 2, \dots, k$), получим из уравнений (9.36)

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a'_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a'_{\zeta\delta}\delta &= \bar{P}_z; \\ \ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a'_{\psi\delta}\delta &= \bar{M}_{Gy}; \\ \ddot{q}_j + \beta_q \dot{q}_j + \omega_q^2 q_j + a_{q_j}\delta &= \bar{Q}_j; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi^\circ); \\ \psi^\circ &= \psi - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x^\circ) q_j \\ (j &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (9.37)$$

Система уравнений (9.37) является обобщением (9.18) по линии учета упругости корпуса.

*Стабилизация в диапазоне частот колебаний
жидкости ω_{s_n}*

Здесь приходится вновь вернуться к уравнениям (9.36), в которых в принципе возможен предельный переход $a_{\psi\nu} \rightarrow 0$, $\omega_{q_j} \rightarrow 0$.

Практически более реален, особенно для вторых и третьих ступеней современных РН, противоположный предельный случай, рассматриваемый ниже.

**Низкие частоты колебаний жидкости в баках
(высокие частоты упругих колебаний корпуса)**

Выполняется условие $\omega_{s_n} \ll \omega_{q_j}$.

На рис. (9.1) представлена схематически амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики АС в виде пространственной кривой, намотанной на поверхность вращения. Каждая из частот ω_{s_n} и ω_{q_j} занимает некоторую кольцевую область на этой

поверхности, так как меняется при изменении параметра $\tau = \frac{t}{t_k}$ (t_k — продолжительность активного участка полета). Пере-сечению частотной характеристикой какой-либо области частот выше плоскости $\phi = 0$ соответствует фазовое опережение АС на этих частотах, ниже плоскости $\phi = 0$ — запаздывание.

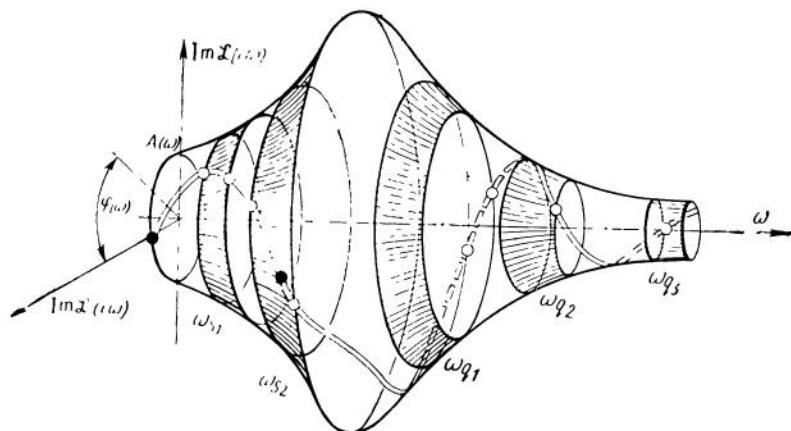


Рис. 9.1. Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики корректирующего устройства и собственные частоты объекта регулирования

Стабилизация в диапазоне частот колебаний жидкости ω_{s_n}

Полагая $q_j \rightarrow 0$, придем к системе (9.17) или при некоторых дополнительных упрощениях — к (9.19).

Стабилизация в диапазоне частот упругих колебаний корпуса ω_q

Здесь ситуация аналогична рассмотренной при выводе уравнений (9.20). А именно надо осуществить подстановку s_n из четвертого уравнения (9.36) в первые три, после чего положить $\omega_{s_n} \rightarrow 0$. В результате мы придем к системе уравнений, похожей на (9.20), только с добавочными уравнениями для обобщенных координат q_j . Чтобы привести ее к форме, аналогичной (9.22), необходимо при вычислении форм упругих колебаний заменить массы жидкости во всех баках на динамически эквивалентные, вычисляемые по формулам, аналогичным (9.21), а затем в окончательных уравнениях перейти к обобщенному метацентру G и положить $\omega_{s_n} \rightarrow 0$. Тогда уравнения возмущенного движения совпадут с (9.37) с точностью до коэффициентов и правых частей, которые будут соответствовать замене корпуса динамически эквивалентным упругим телом.

Выпишем упрощенный вариант этих уравнений, пренебрегая аэродинамическими и кориолисовыми силами:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\zeta} + \tilde{a}_{\zeta\psi} \dot{\psi} + \tilde{a}_{\zeta\delta} \delta &= \tilde{P}_z; \\
 \ddot{\psi} + \tilde{a}_{\psi\delta} \delta &= \tilde{M}_{\tilde{G}_y}; \\
 \ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \tilde{\omega}_{q_j}^2 q_j + \tilde{a}_{q_j\delta} \delta &= \tilde{Q}_j; \tag{9.38}
 \end{aligned}$$

$$\delta = \mathcal{L}(\psi^\circ);$$

$$\psi^\circ = \psi - \sum_{j=1}^m \tilde{\eta}'_j(x^\circ) q_j$$

$$(j = 1, 2, \dots, m).$$

Система (9.38) является наиболее подходящей для приближенного анализа динамической устойчивости в диапазоне частот ω_{q_j} , к которому мы и переходим, полагая $P_z = 0$, $Q_z = 0$. Опустим предварительно для упрощения записи знак \sim .

Заметим, что первое уравнение в (9.38) является независимым и может не рассматриваться при решении задачи устойчивости по отношению к невозмущенным значениям координат ψ° и q_j . Перейдем в уравнениях (9.38) к новой переменной, подставив вместо ψ соответствующее выражение из последнего кинематического соотношения. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}^\circ + \sum_{j=1}^m a_{q_j} \ddot{q}_j &= -a_{\psi\delta} \delta; \\ \ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j &= -a_{q_j\delta} \delta; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi^\circ) \\ (j &= 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (9.39)$$

где

$$\begin{aligned} a_{q_j\delta} &= \begin{cases} \frac{1}{a_j} \eta_j(x_Q) P^\delta & (\text{управление силой } P^\delta \delta) \\ -\frac{1}{a_j} \eta'_j(x_P) M^\delta & (\text{управление парой сил } M^\delta \delta); \end{cases} \\ a_{\psi\delta} &= \eta'_j(x^\circ); \quad P^\delta = 2P^*; \quad M^\delta = 2P^*r_Q. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Здесь предполагается, что ферма, связывающая ДУ с корпусом, является абсолютно жесткой. (В формулах, приведенных в работе [21], следует считать $M^\delta = -2P^*r_Q$, отсюда различие в знаках в выражениях $a_{q_j\delta}$). Используя малость диссипативных коэффициентов, представим, как и в разд. 9.2, передаточную функцию объекта регулирования

$$W_0(p) = \frac{\Psi(p)}{Q(p)};$$

$$\psi^\circ(t) \leftarrow \Psi(p); \quad \delta(t) \leftarrow Q(p),$$

теперь уже в окрестности частот ω_{q_j} , в виде

$$W_0(p) = \sum_{j=1}^m W_{0j}(p), \quad (9.41)$$

где

$$\begin{aligned} W_{0j}(p) &= i v_{0j} \left(\frac{1}{p - p_j^\circ} \frac{1}{p - \bar{p}_j^\circ} \right); \\ p_j^\circ &= a_j^\circ + i \sigma_j^\circ; \quad \bar{p}_j^\circ = a_j^\circ - i \sigma_j^\circ; \\ a_j^\circ &= -\frac{\beta_{q_j}}{2}; \quad \sigma_j^\circ = \omega_{q_j}; \quad v_{0j} = -\frac{a_{q_j} \delta a_{q_j}}{2 \omega_{q_j}}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Воспользуемся далее приближенными формулами (8.22) для корней характеристического уравнения замкнутой системы

$$p_j = a_j + i \sigma_j.$$

В рассматриваемом случае эти формулы приобретают вид, аналогичный (9.29):

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\omega_{q_j}}{2} [-\beta_{q_j} + e_j A(\omega_{q_j}) \sin \varphi(\omega_{q_j})]; \\ \sigma_j &= \omega_{q_j} \left[1 - \frac{1}{2} e_j A(\omega_{q_j}) \cos \varphi(\omega_{q_j}) \right] \\ (j &= 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (9.43)$$

где

$$e_j = \frac{a_{q_j} \delta a_{q_j}}{\omega_{q_j}^2}; \quad \beta_{q_j} = \frac{\beta_{q_j}}{\omega_{q_j}}. \quad (9.44)$$

Как видно из выражений (9.43), в рассматриваемом случае собственная динамическая неустойчивость исключена. Поэтому условия фазовой стабилизации в силу (9.43) имеют вид

$$\begin{aligned} \sin \varphi(\omega_{q_j}) &< 0 \text{ при } e_j > 0; \\ \sin \varphi(\omega_{q_j}) &> 0 \text{ при } e_j < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (9.45)$$

Для тех гармоник, для которых выполнить условия (9.45) не представляется возможным, должна быть обеспечена амплитудно-фазовая стабилизация, что соответствует выполнению неравенства

$$A(\omega_{q_j}) |e_j \sin \varphi(\omega_{q_j})| < \bar{\beta}_{q_j}, \quad (9.46)$$

или, еще лучше — амплитудная стабилизация, достаточное условие которой имеет вид

$$A(\omega_{q_j})|e_j| < \bar{\beta}_{q_j}. \quad (9.47)$$

Рассмотрим более подробно условия фазовой стабилизации (9.45), используя формулы (9.40) и (9.44), в двух случаях:

а) управление с помощью силы $P^\delta\delta$

$$e_j = e_j^o k_j; \quad k_j = -\frac{l \eta'_j(x^\circ)}{\eta_j(x_Q)}; \quad e_j^o = \frac{\bar{P}^\delta}{\bar{a}_j \omega_{q_j}^2 l}; \quad (9.48)$$

$$\bar{P}^\delta = \frac{P^\delta}{m^\circ + m}, \quad \bar{a}_j = \frac{a_j}{(m^\circ + m) \eta_j^2(x_Q)};$$

б) управление с помощью пары сил $M^\delta\delta(x_Q = \infty)$

$$e_j = e_j^o k_j; \quad k_j = -\frac{l^2 \eta'_j(x^\circ) \eta'_j(x_F)}{\eta_j^2(x_Q)}; \quad e_j^o = \frac{\bar{M}^\delta}{\bar{a}_j \omega_{q_j}^2};$$

$$\bar{M}^\delta = \frac{M^\delta}{(m^\circ + m) l^2}; \quad \bar{a}_j = \frac{a_j}{(m^\circ + m) \eta_j^2(x_F)}, \quad (9.49)$$

где l — характерная длина (полная длина корпуса).

Для обычных компоновок (см. рис. 1.1) знаки выражений $\eta_j(x_Q)$ и $\eta'_j(x_P)$ для всех гармоник, представляющих практический интерес, совпадают со знаками $\eta_j(0)$ и $\eta'_j(0)$, т. е. при принятой нормировке

$$\eta_j(x_Q) > 0; \quad \eta'_j(x_Q) < 0. \quad (9.50)$$

Таким образом, знак параметра k_j зависит от знака производной $\eta'_j(x^\circ)$ j -й формы собственных упругих колебаний корпуса в сечении $x = x^\circ$, в котором расположен датчик углового положения. Условиям фазовой стабилизации (9.45) можно придать форму

$$\begin{aligned} \sin \varphi(\omega_{q_j}) &< 0 \text{ при } k_j > 0; \\ \sin \varphi(\omega_{q_j}) &> 0 \text{ при } k_j < 0 \quad (j=1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (9.51)$$

или иначе как в случае (9.48), так и в случае (9.49)

$$\begin{aligned} \sin \varphi(\omega_{q_j}) &< 0 \text{ при } \eta'_j(x^\circ) > 0; \\ \sin \varphi(\omega_{q_j}) &> 0 \text{ при } \eta'_j(x^\circ) < 0 \quad (j=1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (9.52)$$

При обычном для современных РН переднем расположении приборного отсека $\eta_1'(x^\circ) > 0$, а иногда и $\eta_2'(x^\circ) > 0$, так что наи-

более типичным требованием к АС на частоте ω_{q_1} , а иногда и на частоте ω_{q_2} является создание фазового запаздывания.

Отметим в заключение, что условия (9.32) и (9.52) можно представить в наглядной графической форме на поверхности тела вращения (см. рис. 9.1), продольная ось которой является осью частот, угол φ цилиндрической системы координат равен углу φ (ω), соответствующему фазо-частотной характеристике автомата стабилизации, а длина радиуса-вектора совпадает с амплитудно-частотной характеристикой A (ω).

Светлыми кружками на рис. 9.1 показаны точки пересечения частотной характеристики АС с границами кольцевых областей частот ω_{s_n} и ω_{q_j} , темными — первые две частоты нуль фазы АС.

9.4. Система упругий корпус — жидкость в магистралях — ЖРД (продольные колебания)

Рассмотрим случай колебаний корпуса в направлении продольной оси. Пренебрежем в уравнениях (4.75) второстепенными диссипативными членами, а именно $a_{\xi\xi\xi}$ в первом и $a_{s_n} \omega_{s_n}^2 \beta_{s_n} s_n$ в последнем и примем, как обычно, что частоты ω_{s_n} ($n=1, 2$) не являются близкими друг к другу, так что каждую магистраль можно рассматривать как независимую. Система уравнений возмущенного движения в направлении продольной оси расщепится на две независимые системы:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + a_{\xi s_n} \ddot{s}_n - a_{\xi \delta} \delta &= \bar{P}_x; \\ \ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + a_{q_j s_n} \ddot{s}_n - a_{q_j \delta} \delta &= \bar{Q}_j; \\ \ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n \xi} \xi + \sum_{j=1}^m a_{s_n q_j} \ddot{q}_j &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}_n(s_n^\circ); \\ s_n^\circ &= -a_{s_n} \omega_{s_n}^2 s_n \\ (j &= 1, 2, \dots, m; n = 1, 2). \end{aligned} \quad (9.53)$$

Напомним, что обобщенные координаты q_j и s_n соответствуют теперь продольным колебаниям корпуса j -й формы и столба жидкости в n -й магистрали.

Во всем диапазоне частот ω_{s_n} , исследуемом в этом разделе, коэффициент $\tilde{\beta}_{s_n} = \frac{\beta_{s_n}}{\omega_{s_n}}$ будем считать положительно определенной функцией ω_{s_n} , монотонно стремящейся к константе при $\omega_{s_n} \rightarrow 0$.

Для исследования динамической устойчивости положим $\bar{P}_x \equiv 0$, $\bar{Q}_j \equiv 0$. Кроме того, примем во внимание, что коэффициенты инерционных связей между колебаниями корпуса и жидкости в уравнениях (9.53) существенно более слабые, чем в уравнениях (9.36), из-за малости массы m_n жидкости в магистралях по сравнению с полной массой $m^o + m$ [21].

Высокие частоты колебаний жидкости в магистралях

Рассмотрим случай, когда частота собственных колебаний жидкости в магистралях окислителя или горючего существенно выше учитываемых частот собственных упругих колебаний корпуса, т. е. выполняется условие $(\omega_{s_n} \gg \omega_{q_j})$ (короткие магистрали). В этом случае можно, как и при низких частотах, в первом приближении принять $\omega_{s_n} = \omega_{s_n}^o$.

Стабилизация в диапазоне частот собственных колебаний жидкости в магистралях ω_{s_n}

Полагая $\omega_{q_j} \rightarrow 0$ преобразуем уравнения (9.53) к виду

$$\begin{aligned} \ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n &= - \left(a_{s_n \xi} a_{\xi \delta} + \sum_{j=1}^m a_{s_n q_j} a_{q_j \delta} \right) \delta; \\ s_n^o + a_{s_n} \omega_{s_n}^2 s_n &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}_n(s_n^o) \quad (n=1, 2). \end{aligned} \quad (9.54)$$

Полагая $\mathcal{L}_n(i\omega) = A_n(\omega) e^{i\varphi_n(\omega)}$ и действуя тем же методом, что и в разд. 9.3, нетрудно получить следующие приближенные формулы для вещественной и мнимой частей корней соответствующего характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega_{s_n}}{2} \left[-\bar{\beta}_{s_n} + a_{s_n}^o \left(a_{s_n \xi} a_{\xi \delta} + \sum_{j=1}^m a_{s_n q_j} a_{q_j \delta} \right) A_n(\omega_{s_n}) \sin \varphi(\omega_{s_n}) \right]; \\ \sigma_n &= \omega_{s_n} \left[1 - \frac{a_{s_n}^o}{2} \left(a_{s_n \xi} a_{\xi \delta} + \sum_{j=1}^m a_{s_n q_j} a_{q_j \delta} \right) A_n(\omega_{s_n}) \cos \varphi(\omega_{s_n}) \right]. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Формулы (9.55) аналогичны по структуре формулам (9.43), но более грубые, поскольку при выводе исходных уравнений (9.54) наряду с членами вида $a_{s_n q_j} a_{q_j s_n}$ опущены также члены вида $a_{s_n \xi} a_{\xi s_n}$, имеющие тот же порядок малости по сравнению с единицей.

Представим выражение a_n в виде

$$a_n = \frac{\omega_{s_n}}{2} [-\bar{\beta}_{s_n} + e_n A_n(\omega_{s_n}) \sin \varphi(\omega_{s_n})], \quad (9.56)$$

где

$$e_n = e_n^\circ (\zeta_n^\circ + \zeta_n); \quad e_n^\circ = \frac{\Omega_n l_n \bar{P}}{p_n^*};$$

$$\zeta_n^\circ = 1 + \frac{h_n}{l_n} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\bar{a}_j}; \quad \zeta_n = \frac{h_n}{l_n} \sum_{j=1}^m \frac{g_{nj}}{\bar{a}_j \eta_j(x_p)}; \quad (9.57)$$

$$\bar{a}_j = \frac{a_j}{(m^\circ + m) \eta_j^2(x_p)}; \quad \bar{P} = \frac{P}{m^\circ + m}; \quad P = NP^*.$$

(Здесь принято, что тяга всех N ЖРД передается на корпус через абсолютно жесткую ферму и что магистрали, идущие к n -му баку, имеют одинаковую длину и параллельны продольной оси корпуса).

Теперь можно выписать все условия устойчивости на частотах $\sigma_n \approx \omega_{s_n}$ ($n = 1, 2$).

Фазовая стабилизация

$$\zeta_n^\circ + \zeta_n > 0 \text{ при } \sin \varphi_n(\omega_{s_n}) < 0; \quad (9.58)$$

$$\zeta_n^\circ + \zeta_n < 0 \text{ при } \sin \varphi_n(\omega_{s_n}) > 0 \quad (n = 1, 2).$$

Амплитудная стабилизация

$$e_n^\circ |\zeta_n^\circ + \zeta_n| A_n(\omega_{s_n}) < \bar{\beta}_{s_n}. \quad (9.59)$$

В конце активного участка $\zeta_n \rightarrow 0$, так как $h_n \rightarrow 0$, поэтому условие фазовой стабилизации выполняется только для ЖРД, создающих запаздывание на частотах ω_{s_n} , как например ЖРД разомкнутой схемы.

Однако если обратиться к условиям амплитудной стабилизации (9.59), то становится ясно, что существуют достаточно большие значения ω_{s_n} , при которых эти условия заведомо будут выполнены, поскольку в левой части стоит монотонно убывающая, а в правой — монотонно возрастающая функция ω_{s_n} . Отсюда следует, что при высоких частотах собственных колебаний жидкости в магистралях ω_{s_n} ($n = 1, 2$) обеспечивается динамическая устойчивость замкнутой системы по схеме амплитудной стабилизации, являющейся следствием динамических свойств рассматриваемых ЖРД.

*Стабилизация в диапазоне частот
собственных колебаний корпуса ω_{q_j}*

Подставляя в последнее уравнение (9.53) $\omega_{s_n}^2 s_n$ из третьего и осуществляя затем предельный переход $s_n \rightarrow 0$, получим после некоторых преобразований следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} s_n + \sum_{j=1}^m a_{s_n q_j} \ddot{q}_j &= a_{s_n \delta} \delta; \\ \ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_i &= a_{q_j \delta} \delta; \\ \delta = \mathcal{L}_n(s_n^\circ) \quad (j=1, 2, \dots, m; n=1, 2), \end{aligned} \quad (9.60)$$

где

$$a_{s_n q_j}^\circ = a_{s_n}^\circ a_{s_n q_j}; \quad a_{s_n \delta} = -a_{s_n}^\circ a_{s_n \delta} a_{\xi \delta} \quad (9.61)$$

В данном случае справедливы формулы для вещественной и мнимой частей корней характеристического уравнения замкнутой системы, аналогичные (9.43):

$$\begin{aligned} a_{jn} &= -\frac{\omega_{q_j}}{2} [\bar{\beta}_{q_j} + e_{jn} A_n(\omega_{q_j}) \sin \varphi_n(\omega_{q_j})]; \\ \sigma_{jn} &= \omega_{q_j} \left[1 + \frac{1}{2} e_{jn} A_n(\omega_{q_j}) \cos \varphi_n(\omega_{q_j}) \right], \end{aligned} \quad (9.62)$$

где

$$\begin{aligned} e_{jn} &= -a_{q_j \delta} a_{s_n q_j}^\circ = e_{jn}^\circ (1 + \zeta_{jn}); \\ \zeta_{jn} &= \frac{h_n}{l_n} \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_P)}; \quad e_{jn}^\circ = \frac{\Omega_n l_n \bar{P}}{p_n^* \bar{a}_j}. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Условия устойчивости на частотах $\sigma_{jn} \approx \omega_{q_j}$ имеют следующий вид.

Фазовая стабилизация

$$\begin{aligned} \zeta_{jn} + 1 &< 0 \quad \text{при} \quad \sin \varphi_n(\omega_{q_j}) < 0; \\ \zeta_{jn} + 1 &> 0 \quad \text{при} \quad \sin \varphi_n(\omega_{q_j}) > 0 \\ (j &= 1, 2, \dots, m; n = 1, 2). \end{aligned} \quad (9.64)$$

Амплитудная стабилизация

$$\begin{aligned} e_{jn}^\circ |\zeta_{jn} + 1| |A_n(\omega_{q_j})| &< \frac{\delta_{q_j}}{\pi} \\ (j &= 1, 2, \dots, m; n = 1, 2). \end{aligned} \quad (9.65)$$

Условия (9.64) в некотором смысле противоположны условиям (9.58). Действительно, в конце активного участка при $\zeta_{jn} \rightarrow 0$ фазовая стабилизация на частотах, близких к ω_{q_j} , возможна

в силу неравенств (9.64) только для ЖРД, создающих на этих частотах фазовое опережение.

Однако при обычных для современных ЖРД значениях коэффициента усиления на этих частотах и $\delta_{q_j} \sim 0,05 - 0,10$ автоматически достигается амплитудная или амплитудно-фазовая стабилизация.

Низкие частоты колебаний жидкости в магистралях

Этот случай, когда выполняются условия $\omega_{s_n} \ll \omega_{q_j}$, особенно важен потому, что имеются реальные технические возможности понизить, если это необходимо, частоты собственных колебаний компонентов топлива даже в сравнительно коротких магистралях применением специальных гидроаккумуляторов (см. гл. 11).

Стабилизация в диапазоне частот колебаний жидкости ω_{s_n}

Полагая в уравнениях (9.53) $\bar{P}_x \equiv 0$, $\bar{Q}_j \equiv 0$, $q_j \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + a_{\xi s_n} \ddot{s}_n &= a_{\xi \delta} \delta; \\ \ddot{s}_n + \beta_{s_n} \dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n} \ddot{\xi} &= 0; \\ s_n^\circ + a_{s_n} \omega_{s_n}^2 s_n &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}_n(s_n^\circ) \quad (n=1, 2). \end{aligned} \quad (9.66)$$

Формулы для вещественной и мнимой частей корней характеристического уравнения, близких по модулю к ω_{s_n} , получаются аналогично формулам (9.29) и имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_n^\circ}{2} \left[-\bar{\beta}_{s_n} + e_n A_n(\sigma_n^\circ) \sin \varphi_n(\sigma_n^\circ) \right]; \\ \sigma_n &= \sigma_n^\circ \left[1 - \frac{1}{2} e_n A_n(\sigma_n^\circ) \cos \varphi_n(\sigma_n^\circ) \right], \end{aligned} \quad (9.67)$$

где

$$\begin{aligned} e_n &= a_{\xi \delta} a_{s_n} a_{s_n}^\circ = \bar{P} \left(1 + \frac{h_n}{l_n} \right) \frac{\rho_n l_n}{p_n}; \\ \bar{\beta}_{s_n} &= \frac{\beta_{s_n}}{\sigma_n^\circ}; \quad \sigma_n^{\circ 2} = \frac{\omega_{s_n}^2}{1 - a_{s_n} a_{\xi s_n}}. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Поскольку всегда выполняется неравенство $l_n > 0$, в рассматриваемом предельном случае условия устойчивости имеют вид.

Фазовая стабилизация

$$\sin \varphi_n (\sigma_n^\circ) < 0 \quad (n=1, 2). \quad (9.69)$$

Амплитудно-фазовая стабилизация

$$e_n A_n (\sigma_n^\circ | \sin \varphi_n (\sigma_n^\circ) < \bar{\beta}_{s_n} \quad (n=1,2). \quad (9.70)$$

(Здесь имеет смысл рассматривать именно этот вид стабилизации).

Следовательно, для ЖРД, создающих на низких частотах фазовое запаздывание (например, двигатель разомкнутой схемы), снижение частот ω_{s_n} до уровня, при котором $\omega_{s_n} \ll \omega_{q_j}$, гарантирует фазовую стабилизацию на этих частотах. Однако если учесть, что обычно $\varphi_n(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow 0$ для любого ЖРД, включая ЖРД замкнутой схемы, а статический коэффициент усиления сравнительно низок, оказывается, что при достаточном снижении ω_{s_n} обычно может быть достигнута амплитудная или, по крайней мере, амплитудно-фазовая стабилизация.

Стабилизация в диапазоне частот упругих колебаний корпуса ω_q ,

Дифференцируя дважды последнее уравнение (9.53), подставляя s_n в третье уравнение, а затем полагая $\bar{P}_x = 0$, $Q_j = 0$; $\omega_{s_n} \rightarrow 0$, $\beta_{s_n} \rightarrow 0$, после исключения ξ получим

$$\ddot{s}_n^\circ + \sum_{j=1}^m a_{s_n q_j} \ddot{q}_j = a_{s_n \delta} \delta; \quad (9.71)$$

$$\ddot{q}_j + \beta_{q_j} \dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j = a_{q_j \delta} \delta;$$

$$\delta = \mathcal{L}_n (s_n^\circ) \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

где

$$\begin{aligned} a_{s_n q_j}^\circ &= -a_{s_n}^\circ a_{s_n q_j} \omega_{s_n}^2; \\ a_{s_n \delta} &= -a_{s_n}^\circ a_{s_n \xi} a_{\xi \delta} \omega_{s_n}^2. \end{aligned} \quad (9.72)$$

Легко видеть, что система уравнений (9.71) с точностью до обозначений совпадает с системой уравнений (9.39), использованной для исследования устойчивости при поперечных колебаниях, с частотами, намного большими частот колебаний жидкости в баках. Поэтому без существенных изменений можно использовать все основные результаты, полученные в разд. 9.3. В частности, формулы для вещественной и мнимой частей характеристического уравнения замкнутой системы аналогичны формулам (9.43):

$$\begin{aligned} a_{jn} &= \frac{\omega_{qj}}{2} [-\bar{\beta}_{qj} + e_{jn} A_n(\omega_{qj}) \sin \varphi_n(\omega_{qj})]; \\ \sigma_{jn} &= \omega_{qj} \left[1 - \frac{1}{2} e_{jn} A_n(\omega_{qj}) \cos \varphi_n(\omega_{qj}) \right]. \end{aligned} \quad (9.73)$$

Безразмерные коэффициенты e_{jn} имеют следующие значения;

$$\begin{aligned} e_{jn} &= -\frac{a_{qj} \alpha_{s_n \eta_j}}{\omega_{qj}^2} = e_{jn}^\circ (1 + \zeta_{jn}); \quad e_{jn}^\circ = \frac{\Omega_n l_n \bar{P} \omega_n^2}{p_n^* \bar{a}_j \omega_{qj}^2}; \\ \bar{a}_j &= \frac{a_j}{(m^\circ + m) \eta_j^2(x_p)}; \quad \zeta_{jn} = \frac{h_n}{l_n} \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_p)}; \quad \bar{\beta}_{qj} = \frac{\beta_{qj}}{\omega_{qj}} = \frac{\delta_{qj}}{\pi}. \end{aligned} \quad (9.74)$$

Условия устойчивости имеют следующий вид.

Фазовая стабилизация

$$\zeta_{jn} + 1 > 0 \text{ при } \sin \varphi_n(\omega_{qj}) < 0; \quad \zeta_{jn} + 1 < 0 \text{ при } \sin \varphi_n(\omega_{qj}) > 0 \quad (9.75)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m; \quad n = 1, 2).$$

Амплитудная стабилизация

$$e_{jn}^\circ |\zeta_{jn} + 1| A_n(\omega_{qj}) < \frac{\delta_{qj}}{\pi} \quad (j = 1, 2, \dots, m; \quad n = 1, 2). \quad (9.76)$$

Условие (9.76) совпадает с (9.65), а условие (9.75) противоположно (9.64), в то время как параметры ζ_{jn} те же. Скорее оно похоже на условие (9.58).

Поэтому при $h_n \rightarrow 0$, $\zeta_{jn} \rightarrow 0$ фазовая стабилизация в рассматриваемом случае достигается для ЖРД, создающих на высоких частотах ω_{qj} запаздывание, что является достаточно реальным. Однако наиболее замечательным обстоятельством является то, что в выражении e_{jn}° (9.74) теперь, в отличие от (9.63), присутствует множитель $\frac{\omega_{s_n}^2}{\omega_{qj}^2}$, стремящийся к нулю, при $\omega_{s_n} \rightarrow 0$, что гарантирует амплитудную стабилизацию на частотах, близких к ω_{qj} , при снижении частот ω_{s_n} . Проведенный анализ позволяет сформировать важный общий вывод.

Снижение частот собственных колебаний жидкости в магистралях окислителя и горючего позволяет обеспечить динамическую устойчивость замкнутой системы на всем активном участке в соответствующем диапазоне частот, а также в диапазоне частот упругих колебаний корпуса.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ НЕСТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ И СОБСТВЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ СБЛИЖЕНИИ ПАРЦИАЛЬНЫХ ЧАСТОТ

10.1. Система упругий корпус — жидкость в магистрали (продольные колебания)

На протяжении всей этой главы рассматриваются с позиций оценки стабилизируемости и собственной динамической устойчивости парциальные системы, характеризующие различные аспекты динамических свойств РН как объектов регулирования при сближении частот собственных колебаний каких-либо двух из этих парциальных систем.

Такая постановка задачи предопределяет две особенности: рассмотрение парциальных систем с максимум двумя степенями свободы с отличными от нуля частотами собственных колебаний и пренебрежение демпфированием, которое не влияет на изучаемые структурные свойства системы. Эти свойства, характеризующие не столько устойчивость РН, сколько потенциальную приспособленность ее как объекта регулирования к созданию динамически устойчивой замкнутой системы методами фазовой стабилизации, изучаются в пространстве безразмерных конструктивных параметров РН. Построение соответствующих областей стабилизируемости и собственной динамической устойчивости объекта регулирования в плоскости наиболее характерных параметров при сближении некоторых парциальных частот вплоть до совпадения составляет основное содержание главы. Заметим, что сам факт сближения парциальных частот способствует селекции тех форм колебаний системы, которым соответствует внутренний резонанс.

В качестве простейшего примера в настоящем разделе рассматривается задача о стабилизируемости системы корпус — жидкость в магистрали при продольных колебаниях [27, 21]. Поскольку в отличие от АС деформировать фазо-частотную характеристику имеющегося ЖРД довольно затруднительно, большее практическое значение имеет рассмотрение амплитудной, а не фазовой стабилизации системы, что и делается в разд. 11.1 [24, 30, 68]. Задача в постановке настоящего раздела носит в этом смысле в основном методический характер. Воспользуемся уравнениями (4.75), в которых удержим члены, соответствующие одному j -му тону продольных колебаний корпуса и одной n -й (более длинной) магистрали, и пренебрежем упругостью подвески двигателей. Значения j и n выбираются исходя из близости

частот ω_s и ω_q . Опустив индексы j и n , придадим упрощенным уравнениям возмущенного движения (4.75) форму

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + a'_{\xi\xi} \dot{\xi} &= a_{\xi\delta} \delta; \\ \ddot{q} + \beta_q \dot{q} + \omega_q^2 q + a_{qs} \ddot{s} &= a_{q\delta} \delta; \\ \ddot{s} + \beta_s \dot{s} + \omega_s^2 s + a_{s\xi} \ddot{\xi} + a_{sq} \ddot{q} &= 0; \\ s^\circ - a_{s^\circ} (\beta_s \dot{s} + \omega_s^2 s) &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\zeta^\circ).\end{aligned}\tag{10.1}$$

При исследовании стабилизируемости можно опустить дисципативные члены. Кроме того, при помощи первого из уравнений удобно исключить переменную ξ , что приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{s}(1 - a_{s\xi} a_{\xi s}) + \omega_s^2 s + a_{sq} \ddot{q} &= -a_{s\xi} a_{\xi\delta} \delta; \\ \ddot{q} + \omega_q^2 q + a_{qs} \ddot{s} &= a_{q\delta} \delta; \\ s^\circ + a_{s^\circ} \omega_s^2 s &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(s^\circ).\end{aligned}\tag{10.2}$$

Будем решать задачу стабилизируемости объекта регулирования на частотах ω_s и ω_q в той постановке, которая описана в гл. 8. Характеристическое уравнение замкнутой системы в данном случае имеет вид

$$\Phi_0(p^2) + \mathcal{L}(p) \Psi_0(p^2) = 0,\tag{10.3}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_0(p^2) &= a_0 p^4 + a_1 p^2 + a_2, \\ \Psi_0(p^2) &= b_1 p^2 + b_2.\end{aligned}\tag{10.4}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 - a_{s\xi} a_{\xi s} - a_{sq} a_{qs}; \\ a_1 &= (1 - a_{s\xi} a_{\xi s}) \omega_q^2 + \omega_s^2; \\ a_2 &= \omega_q^2 \omega_s^2; \\ b_1 &= -a_{s^\circ} (a_{s\xi} a_{\xi\delta} + a_{sq} a_{q\delta}) \omega_s^2; \\ b_2 &= -a_{s^\circ} a_{s\xi} a_{\xi\delta} \omega_s^2 \omega_q^2.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Квадраты частот собственных колебаний разомкнутой системы определяются из уравнения

$$\Phi_0(-\omega^2) = a_0\omega^4 - a_1\omega^2 + a_2 = 0 \quad (10.6)$$

и имеют вид

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{(1 - a_{s\xi}a_{\xi s})\omega_q^2 + \omega_s^2 \mp \sqrt{[(1 - a_{s\xi}a_{\xi s})\omega_q^2 - \omega_s^2]^2 + 4a_{sq}a_{qs}\omega_q^2\omega_s^2}}{2[1 - (a_{s\xi}a_{\xi s} + a_{sq}a_{qs})]} \quad (10.7)$$

Индекс «1» здесь и в дальнейшем соответствует меньшей частоте, «2» — большей. Поэтому $\sigma_1^2 \approx \omega_s$; $\sigma_2^2 \approx \omega_q$ при $\omega_s < \omega_q$; $\sigma_1^2 \approx \omega_q$; $\sigma_2^2 \approx \omega_s$ при $\omega_s > \omega_q$. В частности, при $\omega_s = \omega_q = \omega_0$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &\approx \frac{\omega_0^2}{1 + \sqrt{a_{sq}a_{qs}}} ; \\ \sigma_2^2 &\approx \frac{\omega_0^2}{1 - \sqrt{a_{sq}a_{qs}}} . \end{aligned} \quad (10.8)$$

Критерий стабилизируемости, являющийся частным случаем критерия (8.109), имеет вид

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = b_1(a_1b_2 - b_1a_2) - a_0b_2^2 > 0 \quad (10.9)$$

или

$$a_{sq} \left[\left(1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_q^2} \right) a_{s\xi}a_{\xi s}a_{q\xi} - a_{s\xi}^2a_{\xi s}(a_{q\xi}a_{\xi s} - a_{\xi s}a_{qs}) - a_{sq}a_{q\xi}^2 \frac{\omega_s^2}{\omega_q^2} \right] > 0. \quad (10.10)$$

В силу (4.72) и (4.73) получим, считая, как и в разд. 9.4, подвеску всех маршевых двигателей абсолютно жесткой, длины магистралей, идущих к n -му баку, одинаковыми и равными проекции на ось Ox ($l_n' \equiv l_n$),

$$a_{\xi s} = \frac{Nm_n}{m^\circ + m} \left(1 + \frac{h_n}{l_n} \right); \quad a_{qs} = \frac{Nm_n}{a_j} \left[\eta_j(x_p) + \frac{g_{nj}h_n}{l_n} \right]; \quad (10.11)$$

$$a_{s\xi} = 1 + \frac{h_n}{l_n}; \quad a_{sq} = \eta_i(x_p) + \frac{g_{nj}h_n}{l_n};$$

$$a_{\xi\xi} = \frac{P}{m^\circ + m}; \quad a_{q\xi} = \frac{P\eta_j(x_p)}{a_j},$$

где $m^\circ + m$ — суммарная масса корпуса и жидкости в баках;
 $P = NP^*$ — суммарная тяга двигательной установки;

- N – число маршевых двигателей (в конкретных примерах $N=5$, как и выше);
 a_j – обобщенная масса, соответствующая рассматриваемой форме колебаний корпуса;
 $\eta_j(x)$ – форма продольных колебаний;
 q_{nj} – абсолютное перемещение присоединенной массы жидкости в n -м баке, соответствующее форме $\eta_j(x)$;
 m_n – масса жидкости в одной магистрали;
 h_n – глубина жидкости в баке;
 l_n – длина магистрали.

Введем безразмерные параметры, характеризующие систему корпус – жидкость как объект регулирования:

$$z_1 = \left(1 + \frac{h_n}{l_n}\right)^2; \quad z_2 = \frac{1 + \frac{g_{nj} h_n}{\eta_j(x_p) l_n}}{1 + \frac{h_n}{l_n}}; \quad (10.12)$$

$$\bar{a} = \frac{a_j}{(m^\circ + m) \eta_j^2(x_p)}; \quad \varkappa = 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_q^2}; \quad \gamma = \frac{Nm_n}{m^\circ + m}.$$

В новых переменных критерию стабилизируемости (10.9) можно придать вид

$$\Psi = -z_2 [(-\varkappa + \gamma z_1) \bar{a} + z_2 (1 - \varkappa - \bar{\gamma} a z_1)] > 0. \quad (10.13)$$

Пределы изменения параметров (10.10) и порядок их величин характеризуются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{a} &\sim 1 \div 10^2; \quad \gamma < 10^{-3}; \\ z &\geqslant 1; \quad z_2 \geqslant 0; \\ z_1 &\rightarrow 1, \quad z_2 \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \frac{h_n}{l_n} \rightarrow 0; \\ z_1 &\rightarrow \left(\frac{h_n}{l_n}\right)^2; \quad z_2 \rightarrow \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_p)} \quad \text{при} \quad \frac{h_n}{l_n} \gg 1; \\ &1 \leqslant \varkappa \leqslant -\infty; \\ \varkappa &\rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \frac{\omega_s^2}{\omega_q^2} \rightarrow 0; \\ \varkappa &\rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad \frac{\omega_s^2}{\omega_q^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Заменив в неравенстве (10.13) знак $>$ на знак $=$, получим следующие уравнения границ областей стабилизируемости:

$$z_2 = 0; \quad z_2 = 1 + \frac{1 - \alpha(1 + \bar{\alpha})}{\gamma a z_1 - (1 - \alpha)}. \quad (10.15)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи:

1. $\alpha \rightarrow 1$;

$$z_2 \rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma z_1} \ll -1;$$

$$\Psi \rightarrow z_2 \bar{\alpha} [1 - \gamma z_1 (1 - z_2)] \approx \bar{\alpha} z_2.$$

Граница области стабилизируемости совпадает с полученной в разд. 9.4 при $\omega_s \rightarrow 0$:

$$1 + \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_p)} \frac{h_n}{l_n} = 0. \quad (10.16)$$

2. $\alpha \rightarrow -\infty$;

$$z_2 \rightarrow -\bar{\alpha};$$

$$\Psi \rightarrow -z_2 |\alpha| (\bar{\alpha} + z_2).$$

Границы области стабилизируемости совпадают с полученными в разд. 9.4 при $\omega_s \rightarrow \infty$:

$$1 + \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_p)} \frac{h_n}{l_n} = 0; \\ 1 + \frac{h_n}{l_n} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \left[1 + \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_p)} \frac{h_n}{l_n} \right] = 0. \quad (10.17)$$

Отсутствие влияния на области стабилизируемости малого параметра γ при $z_1 \ll \frac{1}{\gamma}$ позволяет дать еще одну наглядную интерпретацию этих областей. Введем вместо α и z_2 новые параметры — β и z :

$$\beta = \frac{\omega_d^2}{\omega_s^2} - 1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (-1 \leq \beta \leq \infty); \\ z = \frac{z_2}{\bar{\alpha}} = \frac{\left[1 + \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_p)} \frac{h_n}{l_n} \right] (m^\circ + m) \eta_j^2(x_p)}{\left(1 + \frac{h_n}{l_n} \right) a_j}. \quad (10.18)$$

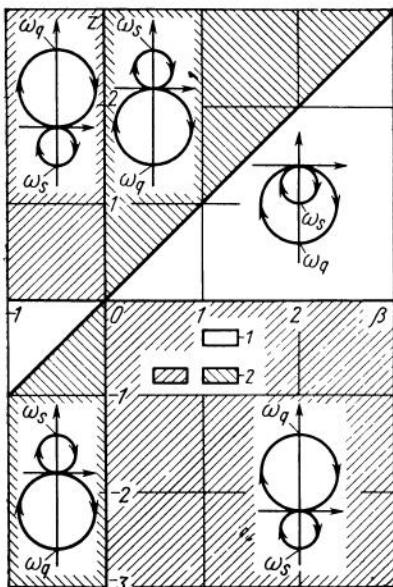


Рис. 10.1. Области стабилизируемости 1 и нестабилизируемости 2 системы упругий корпус — жидкость в магистрали

Приближенное выражение критерия стабилизируемости в переменных z, β при $z_1 \ll \frac{1}{\gamma}$ имеет вид

$$\Psi = -\frac{\bar{a}^2 z}{1+\beta} (z-\beta) = \frac{\bar{a}^2 \beta^2}{1+\beta} \left(\frac{z}{\beta} \right) \left(1 - \frac{z}{\beta} \right) > 0. \quad (10.19)$$

Границами стабилизируемости на плоскости z, β являются прямые

$$z=0, z=\beta. \quad (10.20)$$

Области стабилизируемости представлены на рис. 10.1. Противоположное направление штриховки соответствует различным знакам второго и третьего сомножителей в левой части неравенства (10.19), т. е. z или $z-\beta$; штриховка под углом 45° означает неустойчивость замкнутой системы на частоте ω_q , штриховка под углом -45° — неустойчивость на частоте ω_s , отсутствие штриховки — стабилизируемость (в данном случае устойчивость замкнутой системы корпус — магистраль — ДУ достигается при обеспечении ДУ фазового запаздывания).

Увеличение параметра β (например, вследствие уменьшения частоты ω_s при неизменной частоте ω_q) приводит к последовательному нарушению условий фазовой стабилизации (нестабилизируемости объекта регулирования) при $z<0$, сначала на частоте, близкой к ω_s , а затем на частоте, близкой к ω_q , а при

$\omega_s < 0$ — наоборот, что иллюстрируется на рис. 10.1 амплитудно-фазовыми характеристиками разомкнутой системы (10.1) в окрестности характерных частот.

Линия $\beta = 0$ ($\omega_s = \omega_q$) является особой в том смысле, что картины изменения знака функции Ψ являются противоположными. Из рис. 10.1 ясен эффективный путь достижения стабилизируемости объекта регулирования при $z > 0$: снижение частоты собственных колебаний жидкости в магистрали ω_s , что делает потенциально возможной фазовую стабилизацию системы (см. гл. 11).

10.2. Система жесткий корпус — жидкость в баке (поперечные колебания КА при движении в атмосфере планеты)

В качестве второго методического примера, представляющего известный самостоятельный интерес, рассмотрим пассивное, но стабилизированное движение КА с баками с жидкостью в атмосфере планеты.

Предположим, что среди частот собственных колебаний жидкости нет «близких», однако существует частота в одном из баков ω_{s_n} , близкая при $a_{\psi\psi} > 0$ к $\sqrt{a_{\psi\psi}}$. Это позволяет рассматривать вместо системы уравнений (4.74) упрощенную систему, в которой учитывается только один бак с частотой $\omega_s = \omega_{s_n}$, близкой к $\omega_\psi = \sqrt{a_{\psi\psi}}$.

Пренебрегая в (4.74) всеми диссиликативными силами, а также возмущения, входящими в правые части, и полагая $P \approx 0$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta s}\ddot{s} &= -a_{\zeta\delta}\delta; \\ \ddot{\psi} + a_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi s}\ddot{s} &= -a_{\psi\delta}\delta; \\ \ddot{s} + \omega_s^2 s + a_{s\zeta}\ddot{\zeta} + a_{s\psi}\ddot{\psi} &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi). \end{aligned} \quad (10.21)$$

Выражениям для коэффициентов можно в силу формул (4.63), (4.64) и (4.65) придать вид

$$\begin{aligned} a_{\zeta\psi} &= \frac{c_z^\beta q S}{m^\circ + m}; & a_{\psi\psi} &= \frac{c_n^\beta q S (x_G - x_C)}{J_\delta^\circ + J}; \\ a_{\zeta\delta} &= \frac{P^\delta}{m^\circ + m}; & a_{\psi\delta} &= \frac{M_G^\delta}{J^\circ + J}; \\ a_{\zeta s} &= \frac{\Omega_n}{m^\circ + m}; & a_{s\zeta} &= \frac{\bar{m}_n \Omega_n R_n^3}{\Omega_n}; \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$a_{\psi s} = - \frac{\bar{c}_n R_n \Omega_n}{J^\circ + J}; \quad a_{s\psi} = - \frac{\bar{c}_n \bar{m}_n \Omega_n R_n^4}{\Omega_n};$$

$$\omega_s^2 = \frac{c_x q S_{\omega_s n}^{-2}}{R_n (m^\circ + m)}; \quad q = \frac{\rho v^2}{2},$$

тогда ρ — массовая плотность атмосферы на данной высоте;

v — скорость полета;

S — площадь миделя;

x_G, x_C — координаты метацентра и центра давления (отсчет от плоскости стыковки с РН);

$\bar{c}_n, \bar{m}_n, \bar{\omega}_{s_n}^2$ — безразмерные гидродинамические коэффициенты n -го бака;

Ω_n — произведение массовой плотности жидкости ρ_n на экваториальный момент инерции площади ее свободной поверхности;

P^δ, M_G^δ — градиенты управляющей силы и момента по углу отклонения управляющих органов.

Остальные обозначения обычные. Предполагается использование специальных управляющих двигателей. При этом в случае управления парой сил $P^\delta \equiv 0$; в случае управления двумя двигателями, поворачивающимися вокруг оси с координатой x_Q , $M_G^\delta = 2(x_G - x_Q)P^*$, где P^* — тяга одного управляющего двигателя, которую мы считаем намного меньшей лобового сопротивления $c_x q S$.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{x_G - x_Q}{l}; \quad z = -\frac{\bar{c}_n R_n}{l}; \quad \gamma = \frac{R_n^3 \bar{m}_n}{m^\circ + m}; \\ \zeta &= \frac{R_n}{\bar{\omega}_{s_n}^2 l} \left(\frac{c_z^\beta}{c_x} \right); \quad \bar{\omega}_s^2 = \frac{\bar{\omega}_{s_n}^2}{1 - \gamma}; \quad v = \frac{\gamma}{1 - \gamma}; \quad (10.23) \\ \beta &= z - 1; \quad z = \frac{x_G - x_C}{l} \left(1 + \frac{c_x}{c_z^\beta} \right) = \frac{a_{\psi\psi}(1 - \gamma)}{\bar{\omega}_{s_n}^2}; \quad c = \frac{1}{z_0}. \end{aligned}$$

Здесь

$$l = \sqrt{\frac{J^\circ + J}{m^\circ + m}}. \quad (10.24)$$

Характеристическое уравнение для системы (10.21) можно представить в форме

$$\Phi_0(p^2) + \mathcal{L}(p)\Psi_0(p^2) = 0, \quad (10.25)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_0 &= a_0 p^4 + a_1 p^2 + a_2; \\
 \Psi_0 &= b_1 p^2 + b_2; \\
 a_0 &= 1 - (a_{s\psi} a_{\psi s} + a_{s\zeta} a_{\zeta s}) \\
 a_1 &= \omega_s^2 + a_{\psi\psi} (1 - a_{s\zeta} a_{\zeta s}) + a_{\zeta\psi} a_{\psi s} a_{s\zeta}; \\
 a_2 &= \omega_s^2 a_{\psi\psi}; \\
 b_1 &= a_{\psi\delta} [(1 - a_{s\zeta} a_{\zeta s}) a_{\psi\delta} + a_{\zeta\delta} a_{s\zeta} a_{\psi s}]; \\
 b_2 &= a_{\psi\delta}^2 \omega_s^2.
 \end{aligned} \tag{10.26}$$

Условия собственной динамической устойчивости и стабилизируемости имеют вид (8.111), (8.110) (при $b_0=0$):

$$\begin{aligned}
 D &= a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0; \\
 \Psi &= b_1 (a_1 b_2 - b_1 a_2) - b_2^2 a_0 > 0.
 \end{aligned} \tag{10.27}$$

Подстановка выражений (10.26) и (10.23) в (10.27) приводит после некоторых преобразований и опускания знакопостоянных множителей, всегда больших нуля, к следующим выражениям:

$$D = \beta^2 + 2v\zeta(\beta + 2)z + v[\zeta^2 v + 4(\beta + 1)]z^2. \tag{10.28}$$

$$\Psi = z[\zeta + z + c(v\zeta z - \beta) - c^2 v(1 + \beta)z]. \tag{10.29}$$

Положим в выражении (10.29) $a_{\psi\psi}=0$, т. е. $\beta=-1$ и умножим на z_0^2 . В результате получим

$$\tilde{\Psi} = z_0^2 \Psi = z_0 z [z_0(\zeta + z) + zv\zeta + 1]. \tag{10.30}$$

Рассмотрим аналогичное выражение (10.98) из работы [20], которое можно переписать так:

$$\tilde{\Psi} = z(zz_0 + v\zeta z + 1 + z_0\zeta), \tag{10.31}$$

где

$$\zeta = \frac{(1-\gamma)j}{I\omega_{s_n}^2}.$$

Выражение (10.31) совпадает с точностью до обозначений с выражением (9.34) при $z_0 \neq \infty$.

Полагая в рассматриваемом случае

$$j = \frac{c_z^\beta q S}{m^\circ + m}; \quad \omega_{s_n}^2 = \frac{c_x q S \omega_{s_n}^{-2}}{R_n(m^\circ + m)},$$

получим

$$\zeta = \frac{(1-\gamma) R_n c_z^\beta}{\bar{\omega}_{s_n}^2 I c_x},$$

что совпадает со значением ζ (10.23).

Сопоставление выражений (10.30) и (10.31) показывает, что они отличаются множителем z_0 , который имеется в правой части (10.30) и отсутствует в правой части (10.31).

Это связано с некоторым различием в обычном определении стабилизируемости, которое было использовано выше при получении выражения (10.30) (непротиворечивость требований к фазовой характеристике автомата стабилизации на двух смежных частотах, в частности, 0 и ω_s), и определении [20] для специального случая $a_{\psi\psi}=0$, которое приводит к выражению (10.31). В последнее заложено требование опережения по фазе, которое должен создавать автомат стабилизации на частоте ω_s для обеспечения устойчивости, что отождествляется со стабилизируемостью системы.

Это отличие определений и приводит к появлению или исчезновению дополнительного множителя z_0 . Это особенно наглядно проявляется в случае управления парой сил, когда $c \rightarrow 0$, $z_0 \rightarrow \infty$.

В силу выражений (10.30)

$$\Psi = z(z + \zeta),$$

т. е. не зависит от знака управляющего момента, а в силу выражений (10.31)

$$\Psi = \frac{\tilde{\Psi}}{z_0^2} = \frac{z}{z_0}(z + \zeta) = cz(z + \zeta),$$

т. е. зависит от этого знака.

Условие стабилизируемости, вытекающее из (10.31), таким образом, жестче, как и следовало ожидать, и соответствует первому из вариантов фазовой стабилизации (9.32) в комбинации с (9.34).

Из неравенств (10.27) и выражений (10.28) и (10.29) следуют критерии стабилизируемости и собственной динамической устойчивости системы

$$z[\zeta + z + c(v\zeta z - \beta) - c^2v(1 + \beta)z] \geq 0. \quad (10.32)$$

$$\beta^2 + 2v\zeta(\beta + z)z + v[\zeta^2v + 4(\beta + 1)]z^2 \geq 0. \quad (10.33)$$

Знак = соответствует границе устойчивости.

При управлении парой сил следует положить в левой части неравенства (10.32) $c=0$, что приводит к более простому критерию:

$$z(\zeta + z) \geq 0. \quad (10.34)$$

Из условий (10.32) и (10.33) ясно, что в принципе существуют такие комбинации безразмерных конструктивных параметров, которые могут приводить к нестабилизируемости, а иногда и к собственной динамической неустойчивости.

Соответствующая форма динамической неустойчивости отличается от изучавшихся ранее при исследовании вопросов динамики носителей (поскольку обычно $|a_{\psi\psi}| \ll \omega_s^2$) и требует более детального исследования.

Уравнения границ областей устойчивости, получаемые из условий (10.32) и (10.33) при знаке $=$ можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$z = \frac{-v\zeta(\beta + 2) \pm 2\sqrt{v(\beta + 1)(\beta_1 - \beta)(\beta - \beta_2)}}{v[\zeta^2 v + 4(\beta + 1)]}. \quad (10.35)$$

$$z=0, z=z^\circ - \frac{z^\circ \left(1 + \frac{z^\circ}{c}\right)}{\beta - \beta^\circ}, \quad (10.36)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\zeta\sqrt{v}; \quad \beta_2 = \zeta\sqrt{v}; \\ \beta^\circ &= -1 + \frac{1 + cv\zeta}{cv}; \quad z^\circ = -\frac{1}{cv}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Можно показать, что условия положительности коэффициентов a_0 и a_1 (10.26) сводятся к неравенствам

$$\begin{aligned} 1 - \gamma(z^2 + 1) &> 0; \\ 2 + \beta + v\zeta z &> 0. \end{aligned} \quad (10.38)$$

Первое из условий (10.38) в корректно поставленной механической задаче выполняется всегда (в противном случае утрачивается положительная определенность кинетической энергии). Следовательно,

$$z_{\max}^2 < \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{1 - \gamma}{\gamma} = \frac{1}{v}$$

и условие $a_1 > 0$ сводится к

$$\zeta < \frac{2 + \beta}{v|z|}_{\max} = \frac{1}{v|z|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{v}}. \quad (10.39)$$

В дальнейшем будем полагать последнее выполненным, что исключает апериодическую неустойчивость типа дивергенции при $a_{\psi\psi} \geq 0$.

В случае выполнения условия (10.39) граница (10.35) представляет собой неправильный овал; координаты его точек касания с описанным прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, следующие:

$$\beta = 0, z = 0; \quad \beta = \zeta\sqrt{v}, z = -\frac{\zeta}{2 + \zeta\sqrt{v}};$$

$$\beta = -v\zeta^2, z = -\zeta; \beta = -\zeta V^- v, z = -\frac{\zeta}{2 - \zeta V^- v}. \quad (10.40)$$

В силу условия (10.39) и формул (10.40) имеем $\beta > -1, \kappa > 0$. Следовательно, собственная динамическая неустойчивость статически неустойчивого объекта невозможна.

Граница (10.36) состоит из прямой $z=0$ и гиперболы. Рассмотрим некоторые характерные значения параметра $c = \frac{1}{z_0}$.

$$1. c = 0.$$

$$2. c = -z^c = \frac{1}{cv}; \quad c^2 = \frac{1}{v}; \quad c = \pm \frac{1}{V^- v}.$$

$$3. c = \frac{\zeta}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{v\zeta^2}} \right); \quad \beta^o = 0.$$

В зависимости от значения c границы областей стабилизируемости имеют различную конфигурацию, причем одной из границ является всегда прямая $z=0$, касающаяся в начале координат границы собственной динамической неустойчивости.

При $c=0$ дополнительная граница представляет собой прямую, параллельную оси β , также касающуюся границы области собственной динамической неустойчивости. При $c = \pm \frac{1}{V^- v}$ дополнительные границы представляют собой прямые, параллельные осям β и z , причем новая точка касания соответствует линиям $\beta = \text{const}$.

В остальных случаях границы образованы гиперболами, касающимися в одной точке границы $D=0$, центр которых занимает различное положение относительно начала координат.

На рис. 10.2 представлены все основные характерные случаи взаимного расположения областей нестабилизируемости и собственной динамической неустойчивости:

$$\begin{aligned} c < -\frac{1}{V^- v}; \quad c = -\frac{1}{V^- v}; \quad -\frac{1}{V^- v} < c < \frac{\zeta}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{v\zeta^2}} \right); \\ c = 0; \quad 0 < c < \frac{1}{V^- v}; \quad \frac{1}{V^- v} < c < \frac{\zeta}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{v\zeta^2}} \right); \quad (10.41) \\ c = \frac{\zeta}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{v\zeta^2}} \right); \quad c > \frac{\zeta}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{v\zeta^2}} \right). \end{aligned}$$

Отрицательным значениям c соответствует переднее расположение поворотных управляющих двигателей (схема «утка»), положительным — обычное (заднее). Значению $c=0$ отвечают управления с помощью пары сил.

На рис. 10.3 представлено изменение некоторых границ устойчивости при изменении параметра ζ .

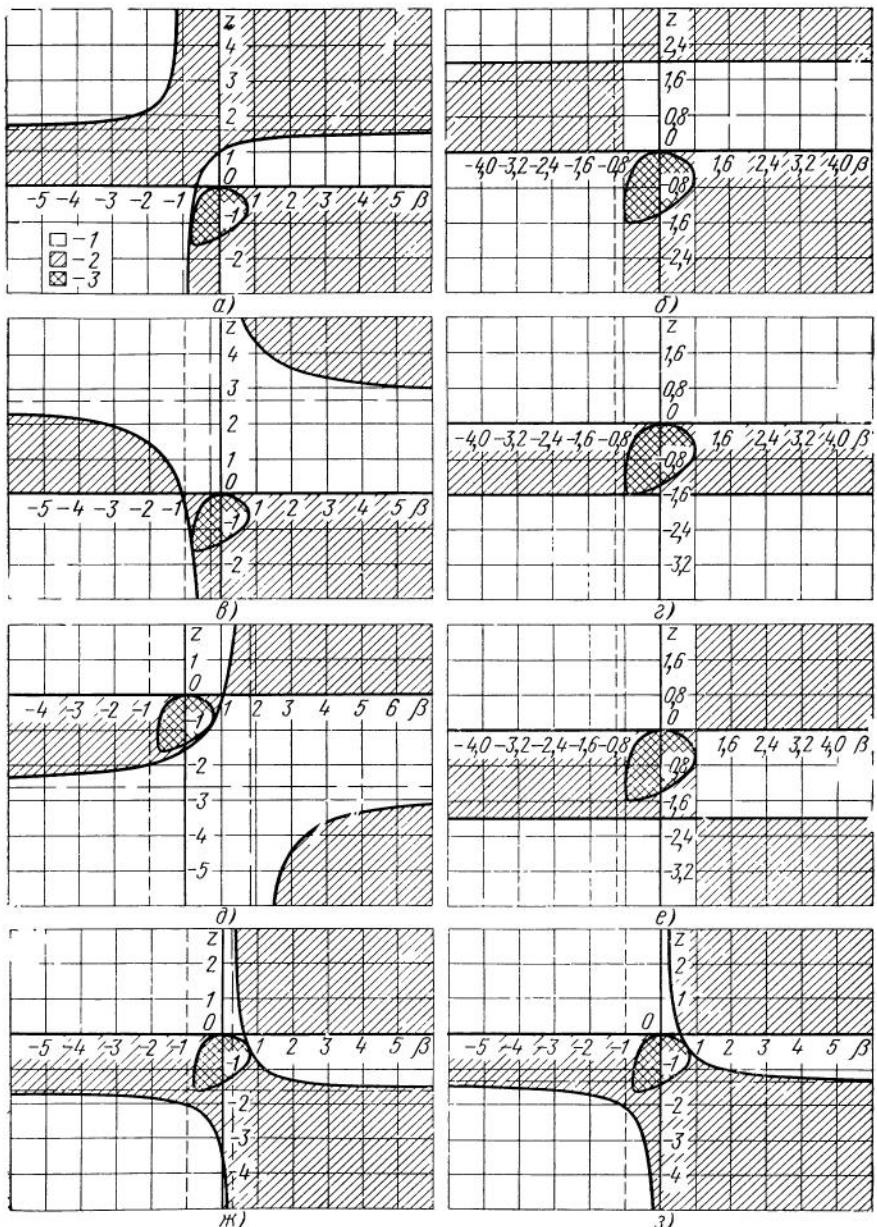


Рис. 10.2. Области стабилизируемости 1, нестабилизируемости 2 и собственной динамической неустойчивости 3 системы жесткий корпус — жидкость в баке при движении КА в атмосфере планеты при $v=0,25$; $\zeta=1,60$:
 $a - c = -2,50$, $b - c = -2,0$, $v - c = -1,50$; $z - c = 0$; $\partial - c = 1,50$, $e - c = 2,0$; $\chi - c = 2,50$;
 $s - c = 2,954$

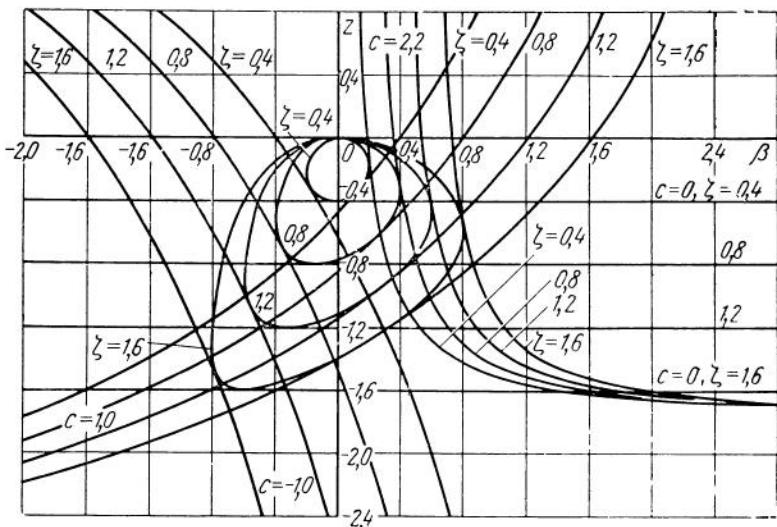


Рис. 10.3. Влияние относительного удлинения корпуса на границы областей стабилизируемости и собственной динамической устойчивости (см. рис. 10.2)

Из рис. 10.2 — 10.3 видно, что рассматриваемые формы неустойчивости наиболее реальны в случае передних баков ($z < 0$) и близости частоты собственных колебаний аэродинамически устойчивого объекта как твердого тела к частоте колебаний в одном из баков ($\beta \approx 0$). Следует подчеркнуть, что, поскольку $\omega_s^2 \sim q$ и $\omega_\phi^2 = a_{\phi\phi} \sim q$, близость частот может сохраняться длительное время независимо от резкого изменения скоростного напора q .

Интересно отметить, что в рассматриваемой задаче не существует критического значения параметра $\zeta \neq 0$, при котором исчезала бы область собственной динамической неустойчивости, причем сам этот параметр не зависит от скоростного напора. Если $\zeta \rightarrow 0$, вследствие уменьшения $c_z \beta$, то область неустойчивости на плоскости z, β стягивается к началу координат.

Таким образом, упрощенное исследование, проведенное выше, позволяет выявить две потенциально возможные для статически устойчивого КА формы динамической неустойчивости при движении его в атмосфере планеты:

1. Собственная динамическая неустойчивость, не связанная с каким-либо управлением.

2. Динамическая неустойчивость, порождаемая автоматом стабилизации при невозможности выполнить противоречивые фазовые условия на частоте колебаний объекта как твердого тела и близкой к ней частоте колебаний жидкости в одном из баков.

Есть все основания считать, что эти виды неустойчивости в принципе возможны и в рамках более полной динамической схемы объекта, учитывающей наличие нескольких баков различной

формы и диссипативных членов, связанных с аэродинамическим демпфированием и вязкостью жидкости.

Результаты, приведенные в настоящем разделе, позволяют наметить некоторые пути исключения наиболее неприятной собственной неустойчивости: изменение центровки объекта и положения баков (что влияет на параметр z), а также их конфигурации (на предмет изменения частоты колебаний жидкости). Последнее мероприятие в сочетании с изменением запаса устойчивости может повлиять на параметр β .

Потенциальную опасность, как было установлено выше, представляют передние баки (т. е. находящиеся со стороны головного обтекателя по отношению к метацентру), характеризующиеся частотами собственных колебаний жидкости, близкими к $\omega_\psi = \sqrt{\alpha_{\psi\psi}}$. Это и подсказывает направление конструктивных мероприятий, перечисленных выше.

Если вопрос о собственной динамической устойчивости удается решить положительно, то остается еще задача стабилизируемости, без решения которой невозможна фазовая стабилизация. Из рис. 10.2 — 10.3 видно, что при переднем расположении управляющих органов (см. рис. 10.2, *a*, *b*, *v*) для статически устойчивого объекта ($\beta > -1$) также неблагоприятны передние баки (при реальных, т. е. умеренных значениях $z > 0$). При заднем расположении управляющих органов (см. рис. 10.2, *d*, *e*, *ж*, *з*) получается противоположная картина, т. е. нестабилизируемость при всех $z > 0$. Здесь при умеренных значениях $|z|$ отрицательные z благоприятны (передние баки).

Наконец, при управлении парой сил (см. рис. 10.2, *г*) неблагоприятны только передние баки, близкие к метацентру ($z < 0$). Увеличение $|z|$ выше некоторого критического значения дает положительный эффект.

Полученные результаты применимы и к РН с разнесеными частотами колебаний жидкости в баках, только несколько меняется смысл некоторых из безразмерных параметров и наиболее актуальным становится случай $|\alpha_{\psi\psi}| \ll \omega_s$.

10.3. Объект с жестким корпусом и двумя баками

Будем рассматривать проблему динамической устойчивости РН в диапазоне частот собственных колебаний жидкости с точки зрения возможности сбесечь фазовую стабилизацию объекта, предполагая, что низшая частота упругих поперечных колебаний корпуса превышает учитываемые частоты колебаний жидкости во всех баках. Примем также, что среди этих последних имеются два с близкими или даже равными частотами колебаний жидкости (речь все время идет о первой частоте, учитываемой в рамках принятой динамической схемы).

Исходя из концепции этой главы, мы снова сводим задачу к исследованию стабилизируемости и собственной динамической

устойчивости объекта регулирования, но на этот раз с двумя баками и неупругим корпусом.

Решению этой задачи посвящен ряд исследований. Основные результаты опубликованы в работах [26, 34, 35, 42, 43, 28, 20, 21].

В основу анализа можно положить упрощенную систему уравнений, следующую из системы (4.74):

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a_{\zeta}\dot{\psi} + \sum_{n=1}^2 a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n &= -a_{\zeta \delta} \delta; \\ \ddot{\psi} + \sum_{n=1}^2 a_{\psi s_n} \ddot{s}_n &= -a_{\psi \delta} \delta; \\ \ddot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n} \ddot{\zeta} + a_{s_n} \ddot{\psi} &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi) \quad (n=1,2). \end{aligned} \quad (10.42)$$

Характеристическое уравнение приводится к стандартной форме

$$p^2 \Phi_0(p^2) + \mathcal{L}(p) \Psi_0(p^2) = 0, \quad (10.43)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(p^2) &= a_0 p^4 + a_1 p^2 + a_2; \\ \Psi_0(p^2) &= b_0 p^4 + b_1 p^2 + b_2. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Критерии стабилизуемости и собственной динамической устойчивости объекта регулирования, приведенные в гл. 8, имеют вид (8.110), (8.111):

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0. \quad (10.45)$$

$$a_1^2 - 4a_0a_2 > 0. \quad (10.46)$$

Коэффициенты a_i и b_i ($i=1, 2, 3$) выражаются через коэффициенты уравнений (10.42), которые, в свою очередь, могут быть выражены через некоторые характерные безразмерные параметры объекта регулирования. В качестве таковых удобно выбрать следующие:

$$\begin{aligned} z_n &= -\frac{1}{l} (R_n \bar{c}_n + x_{O'_n}); \quad z_0 = \frac{1}{c} = -\frac{x_O}{l}; \\ \zeta &= \frac{R_1}{l \bar{\omega}_{s_1}^2}; \quad \gamma = \frac{\Omega_1 \bar{\omega}_{s_1}^2}{R_1 (m^o + m)}; \end{aligned} \quad (10.47)$$

$$k = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}; \quad \kappa = \left(1 - \frac{\bar{\omega}_{s_1}^2 R_2}{\bar{\omega}_{s_2}^2 R_1} \right) \frac{1}{k\gamma}$$

($n=1,2$).

Здесь

$$l = \sqrt{\frac{J^\circ + J}{m^\circ + m}}; \quad \Omega_1 = \frac{\pi Q_1}{4}; \quad \Omega_2 = \frac{\pi Q_2}{4}; \quad (10.48)$$

l — характерный размер (в данном случае — радиус инерции);

R_n — характерный размер n -го бака;

$x_Q, x_{O'_n}$ — отсчитываемые от метацентра G в направлении оси

Gx координаты оси подвески управляющих (или маршевых) двигателей и характерных точек баков O'_n , к которым приведены безразмерные коэффициенты \bar{c}_n ;

$\bar{\omega}_{s_n}$ — безразмерная частота собственных колебаний жидкости в n -м баке.

Безразмерные присоединенные массы $\bar{m}_n = \frac{\bar{\lambda}_n^2}{\bar{\mu}_n}$ заменены в формулах (10.47) их приближенными выражениями (6.76) $m_n \approx \bar{\omega}_{s_n}^2 \bar{\zeta}_n$.

Заметим, что параметры (10.47) имеют достаточно ясный физический смысл:

z_1 и z_2 — это безразмерные координаты точек эквивалентных маятников (см. разд. 3.4), отсчитываемые от метацентра в сторону, противоположную оси Gx , так что у нижнего бака $z_n > 0$; ($n=1$), а у верхнего — $z_n < 0$ ($n=2$). В случае цилиндрических баков и глубокой жидкости z_1 и z_2 близки к безразмерным расстояниям от метацентра до свободной поверхности жидкости, в случае сферических баков z_n — расстояния до их центров;

z_0 — безразмерное расстояние от метацентра до точки приложения управляющих сил (при обычном заднем расположении управляющих органов $z_0 > 0$);

ζ — характеризует вытянутость корпуса; у первых ступеней РН этот параметр мал, а у последних ступеней и КА может приближаться к единице;

γ — присоединенная масса жидкости в первом баке, отнесенная к массе всей системы корпус — жидкость;

k — отношение присоединенных масс жидкости во втором и первом баках;

κ — степень близости квадратов частот колебаний жидкости во втором и первом баках.

Для современных объектов ракетно-космической техники более характерна компоновка с задним расположением управляемых двигателей (особенно если роль последних играют маршевые двигатели). Однако в принципе возможно и переднее расположение управляемых двигателей. Поэтому следует считать $z_0 \geq 0$. При управлении парой сил $z_0 = \pm \infty$; $c = 0$. С другой стороны, значения параметров z_n и γ ограничены неравенствами, вытекающими из условия положительной определенности квадратичной формы, соответствующей кинетической энергии системы. Наконец, по определению параметр ζ всегда положителен.

В результате приходим к следующим условиям, определяющим область изменения введенных безразмерных параметров:

$$\begin{aligned} \zeta &> 0; \quad -\infty \leq z_0 \leq \infty; \\ 0 < \gamma < 1; \quad 0 < \frac{\bar{\omega}_{s_1}^2 R_1}{\bar{\omega}_{s_2}^2 R_2} k < \frac{1-\gamma}{\gamma}; \\ |z_1| < \frac{1}{V\gamma}; \quad |z_2| < \frac{1}{\sqrt{k\gamma}} \sqrt{\frac{\bar{\omega}_{s_1}}{\bar{\omega}_{s_2}}} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Рассмотрим сначала случай равных парциальных частот

$$\omega_{s_1}^2 = \omega_{s_2}^2; \quad \kappa = 0.$$

Для коэффициентов a_i, b_i получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - v_1 - v_2; \quad b_0 = -a_{\psi\delta}(-1 + v_4); \\ a_1 &= \omega_{s_1}^2 (2 - v_1 + v_3); \quad b_1 = -\omega_{s_1}^2 a_{\psi\delta}(-2 + v_4); \end{aligned} \quad (10.50)$$

$$a_2 = \omega_{s_1}^4 (1 + v_3); \quad b_2 = \omega_{s_1}^4 a_{\psi\delta},$$

где $v_1 = \sum_{n=1}^2 (a_{s_n\psi} a_{\psi s_n} + a_{s_n\zeta} a_{\zeta s_n})$;

$$v_2 = \sum_{n=1}^2 (a_{s_n\psi} a_{s_n\zeta} - a_{s_n\psi} a_{s_n\zeta}) (a_{\psi s_n} a_{\zeta s_n} - a_{\psi s_n} a_{\zeta s_n}); \quad (10.51)$$

$$v_3 = \frac{a_{\zeta\psi}}{\omega_{s_1}^2} \sum_{n=1}^2 a_{\psi s_n} a_{s_n\zeta};$$

$$v_4 = \sum_{n=1}^2 \left(a_{s_n\zeta} a_{\zeta s_n} - \frac{a_{\zeta\delta}}{a_{\psi\delta}} a_{s_n\zeta} a_{\psi s_n} \right).$$

Критерии (10.45) и (10.46) приобретают форму

$$\Psi = v_4 [v_1 + v_3 - v_4(1 + v_3)] - v_2 > 0. \quad (10.52)$$

$$D = (v_1 + v_3)^2 - 4v_2(1 + v_3) > 0. \quad (10.53)$$

В общем случае целесообразно исследовать области стабилизируемости и собственной динамической устойчивости в пространстве трех основных параметров z_0 , z_1 , z_2 . Параметры k , ζ , γ и κ играют при этом вспомогательную роль, поскольку в меньшей степени поддаются воздействию в процессе проектирования, чем z_n ($n=0, 1, 2$). Границы областей стабилизируемости и собственной динамической устойчивости в трехмерном пространстве z_0 , z_1 , z_2 представляют собой некоторые поверхности, удовлетворяющие уравнениям

$$\Psi(z_0, z_1, z_2, k, \zeta, \gamma, \kappa) = 0. \quad (10.54)$$

$$D(z_1, z_2, k, \zeta, \gamma, \kappa) = 0. \quad (10.55)$$

Области собственной динамической неустойчивости, как показано в гл. 8 (см. также работу [20]) всегда лежат внутри области нестабилизируемости.

Обращаясь к случаю $\kappa=0$, получим следующий результат [21, 28]:

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{\gamma^2}{z_0}(z_1 - z_2)^2(z_1 + kz_2) \left\{ \left(z_1 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} + \frac{\zeta}{2} \right)^2 + \right. \\ & + k \left(z_2 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} + \frac{\zeta}{2} \right)^2 - (1+k) \left(\frac{1 + z_0^2}{2z_0} + \frac{\zeta}{2} \right)^2 + \\ & \left. + \frac{\gamma\zeta}{z_0} [z_1 + kz_2 - z_0(1+k)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Уравнение (10.54) после подстановки выражения Ψ из (10.56) распадается на уравнение плоскости

$$z_1 + kz_2 = 0 \quad (10.57)$$

и уравнение поверхности двоякой кривизны, близкой при небольшом изменении z_0 к эллиптическому цилиндру (см. рис. 11.6, а)

$$\begin{aligned} & \left(z_1 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} + \frac{\zeta}{2} \right)^2 + k \left(z_2 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} + \frac{\zeta}{2} \right)^2 - \\ & - (1+k) \left(\frac{1 + z_0^2}{2z_0} + \frac{\zeta}{2} \right)^2 + \frac{\gamma\zeta}{z_0} [z_1 + kz_2 - z_0(1+k)]^2 = 0. \end{aligned} \quad (10.58)$$

В плоскости $z_0=\text{const}$ границы представляют собой прямую с угловым коэффициентом $\left(-\frac{1}{k}\right)$, проходящую через начало координат, и эллипс (см. рис. 11.6, б) с центром в точке

$$z_1^\circ = z_2^\circ = -\frac{\frac{c^2 - 1}{2c} + \frac{\zeta}{2} - \gamma\zeta(1+k)}{1 + \zeta\gamma c(1+k)}. \quad (10.59)$$

Главные оси эллипса (10.58) повернуты относительно осей Oz_1 и Oz_2 на угол

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\gamma c}{(1-k)[1+\zeta\gamma c(1+k)]}. \quad (10.60)$$

При $\zeta \rightarrow 0$ получим $\vartheta \rightarrow 0$ и уравнение (10.58) переходит в следующее:

$$\left(z_1 + \frac{c^2 - 1}{2c}\right)^2 + k \left(z_2 + \frac{c^2 - 1}{2c}\right)^2 - (1+k) \left(\frac{c^2 + 1}{2c}\right)^2 = 0, \quad (10.61)$$

или в канонической форме

$$\frac{\left(z_1 + \frac{c^2 - 1}{2c}\right)^2}{(1+k)\left(\frac{c^2 + 1}{2c}\right)^2} + \frac{\left(z_2 + \frac{c^2 - 1}{2c}\right)}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(\frac{c^2 + 1}{2c}\right)^2} = 1. \quad (10.62)$$

Полуоси эллипса (10.62) и координаты центра определяются формулами

$$a = \frac{c^2 + 1}{2|c|} \sqrt{1+k}; \quad b = \frac{c^2 + 1}{2|c|} \sqrt{1 + \frac{1}{k}}; \quad (10.63)$$

$$z_1^\circ = z_2^\circ = -\frac{c^2 - 1}{2c}.$$

Координаты точек пересечения с прямой (10.57)

$$z_{11} = -\sqrt{k}; \quad z_{21} = \frac{1}{\sqrt{k}}; \quad (10.64)$$

$$z_{12} = \sqrt{k}; \quad z_{22} = -\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (10.55), которое при $\kappa=0$ приводится к виду

$$D = \gamma^2 [z_1^2 + kz_2^2 + \zeta(z_1 + kz_2) + 1 + k]^2 - 4k\gamma^2(z_2 - z_1)^2 [1 + \gamma\zeta(z_1 + kz_2)]. \quad (10.65)$$

Введем новые параметры

$$\bar{\gamma} = \gamma(1+k); \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{2} \quad (10.66)$$

и воспользуемся тем, что во всех практических актуальных случаях

$$\bar{\zeta}\gamma(z_1 + kz_2) \ll 1,$$

так что

$$1 + 2\bar{\zeta}\gamma(z_1 + kz_2) \approx [1 + \bar{\zeta}\gamma(z_1 + kz_2)]^2. \quad (10.67)$$

Уравнение (10.55) распадается, если учесть формулы (10.65) и (10.67), на два уравнения

$$(1+2\bar{\zeta}\gamma\sqrt{k})z_1^2+2\bar{\zeta}\gamma\sqrt{k}(k-1)z_1z_2+k(1-2\sqrt{k}\bar{\zeta}\gamma)z_2^2+ \\ +2(\sqrt{k}+\bar{\zeta})z_1+2)(-\sqrt{k}+\bar{\zeta}k)z_2+1+k=0; \quad (10.68)$$

$$(1-2\bar{\zeta}\gamma\sqrt{k})z_1^2+2\bar{\zeta}\gamma\sqrt{k}(-k+1)z_1z_2+k(1+2\sqrt{k}\bar{\zeta}\gamma)z_2^2+ \\ +2(-\sqrt{k}+\bar{\zeta})z_1+2(\sqrt{k}+\bar{\zeta}k)z_2+1+k=0,$$

каждое из которых при $\bar{\zeta}<1$ определяет в плоскости z_1, z_2 эллипс, смещенный и повернутый относительно системы координат Oz_1z_2 . Координаты (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) центров этих эллипсов

$$\xi_{1,2}=\frac{\bar{\zeta}(\bar{\gamma}-1)\pm\sqrt{k}(\bar{\gamma}\bar{\zeta}^2-1)}{1-(\bar{\gamma}\bar{\zeta})^2}; \quad (10.69)$$

$$\eta_{1,2}=\frac{\bar{\zeta}(\bar{\gamma}-1)\mp\frac{1}{\sqrt{k}}(\bar{\gamma}\bar{\zeta}^2-1)}{1-(\bar{\gamma}\bar{\zeta})^2}.$$

Углы ϑ_1, ϑ_2 поворота главных осей

$$\vartheta_{1,2}=\frac{1}{2}\arctg\frac{\frac{k-1}{k+1}\bar{\gamma}\bar{\zeta}}{\bar{\gamma}\bar{\zeta}\mp\frac{k-1}{2\sqrt{k}}}. \quad (10.70)$$

Эллипсы (10.68) касаются прямой (10.57) в точках с координатами (10.64), причем лежат по одну сторону этой прямой, т. е. в области

$$z_1+kz_2<0.$$

Кроме того, эллипсы (10.68) касаются эллипса (10.58) будучи таким образом, вложены в область нестабилизируемости $\Psi<0$.

Поверхность, определяемая уравнением (10.55), представляет собой (если учесть выражения (10.65) и (10.67)) совокупность двух эллиптических параболоидов; расстояние от их вершин до плоскости $D=0$ одинаково и определяется формулой

$$\Delta D=\frac{(1+k)(1-\bar{\gamma})^2\bar{\zeta}^2}{1-\bar{\gamma}^2\bar{\zeta}^2}. \quad (10.71)$$

При $0<\bar{\gamma}<1, 0<\bar{\zeta}<1$ и любом значении k величина ΔD положительна, т. е. имеется конечная область собственной динамической неустойчивости. При $\bar{\zeta}=0$ эта область вырождается в две точки с координатами (10.64). В трехмерном пространстве z_0, z_1, z_2 (10.68) суть эллиптические цилиндры.

При управлении парой сил $c=0$. В этом случае получим из выражения (10.56) после соответствующего предельного перехода

$$\Psi = \gamma^2(z_1 - z_2)^2(z_1 + kz_2)\{z_1 + kz_2 + \zeta(1+k)[1 - \gamma(1+k)]\}. \quad (10.72)$$

Границы области стабилизируемости образованы здесь прямой (10.57) и параллельной ей прямой

$$z_1 + kz_2 + \zeta(1+k)[1 - \gamma(1+k)] = 0. \quad (10.73)$$

Эти прямые касаются эллипсов (10.68). Можно попытаться исключить явную зависимость от z_0 или c в уравнении границы (10.58), т. е. приблизиться к случаю вырожденного уравнения с $c=0$, при котором количество параметров снижается на единицу. При этом рассмотрение областей стабилизируемости в двухмерном пространстве параметров, аналогичных z_1 , z_2 , приобретает большую естественность. Одна из возможностей реализуется путем введения следующей новой системы параметров:

$$\begin{aligned} \zeta_n &= \frac{(z_n - z_0)\zeta_0}{z_0}; \quad \zeta_0 = \frac{2z_0^2}{1 + z_0^2}; \\ \zeta^\circ &= \frac{\zeta\zeta_0}{2z_0}; \quad \gamma^\circ = \frac{\gamma}{\zeta_0}; \\ \kappa^\circ &= \zeta_0\kappa; \quad k = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \quad (n = 1, 2). \end{aligned} \quad (10.74)$$

Уравнения (10.57), (10.58) в новых переменных преобразуются в следующие:

$$\zeta_1 + k\zeta_2 + (1+k)\zeta_0 = 0. \quad (10.75)$$

$$(\zeta_1 + \zeta^\circ + 1)^2 + k(\zeta_2 + \zeta^\circ + 1)^2 - (1+k)(1+\zeta^\circ)^2 + 2\gamma^\circ\zeta^\circ(\zeta_1 + k\zeta_2)^2 = 0. \quad (10.76)$$

Граничные поверхности в пространстве ζ_0 , ζ_1 , ζ_2 представляют собой наклонную плоскость, проходящую через начало координат и поверхность, стремящуюся при $\zeta^\circ \rightarrow 0$ к эллиптическому цилиндру, проходящему через ось $O\zeta_0$. Эти поверхности и их проекции на плоскость $\zeta_0 = \text{const}$ представлены в гл. 11 на рис. 11.8. В более общем случае $\kappa \neq 0$ основные результаты, описанные выше, сохраняются, но граничные поверхности становятся несколько более сложными. Приведем упрощенное выражение для функции Ψ , соответствующее $\zeta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{k\gamma^2}{z_0}(z_2 - \eta_1 z_1)(z_2 - \eta_2 z_1) \left\{ (z_1 - z_2) \left[\left(z_1 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k \left(z_2 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} \right)^2 - (1+k) \left(\frac{1 + z_0^2}{2z_0} \right)^2 \right] - k\kappa z_0 \left(z_1 + \frac{1}{z_0} \right) \left(z_2 + \frac{1}{z_0} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10.77)$$

Границы областей стабилизируемости в координатах z_0, z_1, z_2 представляют собой линейчатые поверхности с уравнениями

$$z_2 - \eta_1 z_1 = 0; \quad (10.78)$$

$$z_2 - \eta_2 z_1 = 0 \quad (10.79)$$

и поверхность двоякой кривизны

$$(z_1 - z_2) \left[\left(z_1 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} \right)^2 + k \left(z_2 + \frac{1 - z_0^2}{2z_0} \right)^2 - (1+k) \left(\frac{1+z_0^2}{2z_0} \right)^2 \right] - kz_0 \times \left(z_1 + \frac{1}{z_0} \right) \left(z_2 + \frac{1}{z_0} \right) = 0. \quad (10.80)$$

Эти поверхности и их проекции на плоскость $z_0 = \text{const}$ представлены на рис. 11.8, а, б. В этой плоскости уравнение (10.80) определяет кривую третьего порядка, имеющую одну асимптоту, — так называемую дефективную гиперболу.

Параметры η_1 и η_2 определяются формулами

$$\eta_{1,2} = \frac{1}{2} (1 + x - k) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(1+x-k)^2 + 4\tilde{k}}, \quad (10.81)$$

в которых $\tilde{k} = \frac{1}{k}$.

При управлении парой сил

$$\begin{aligned} \Psi = -\gamma^2 k (z_2 - \eta_1 z_1)(z_2 - \eta_2 z_1)(z_2 - \eta_1 z_1 + \\ + b_1)(z_2 - \eta_2 z_1 + b_2), \end{aligned} \quad (10.82)$$

где

$$\begin{aligned} b_{1,2} \approx \frac{\zeta}{(1+x-\tilde{k})^2 + 4\tilde{k}} \{ -[\tilde{k}^2 + 2(\tilde{k}-x) + \\ + (1+x)^2] + \eta_{1,2} [1 + 2(\tilde{k}+x) + (k-x)^2] \}. \end{aligned} \quad (10.83)$$

В данном случае границы области стабилизируемости в плоскости z_1, z_2 образованы двумя парами параллельных прямых (10.78) и (10.79)

$$z_2 - \eta_1 z_1 + b_1 = 0; \quad (10.84)$$

$$z_2 - \eta_2 z_1 + b_2 = 0. \quad (10.85)$$

В переменных $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ уравнения (10.78) — (10.80) имеют вид

$$\zeta_2 - b_1 \zeta_1 + (1 - b_1) \zeta_0 = 0; \quad (10.86)$$

$$\zeta_2 - b_2 \zeta_2 + (1 - b_2) \zeta_0 = 0; \quad (10.87)$$

$$\begin{aligned} (\zeta_1 - \zeta_2) [(\zeta_1 + 1)^2 + k(\zeta_2 + 1)^2 - \\ - (1+k) - x^2 k (\zeta_1 + 2)(\zeta_2 + 2)] = 0. \end{aligned} \quad (10.88)$$

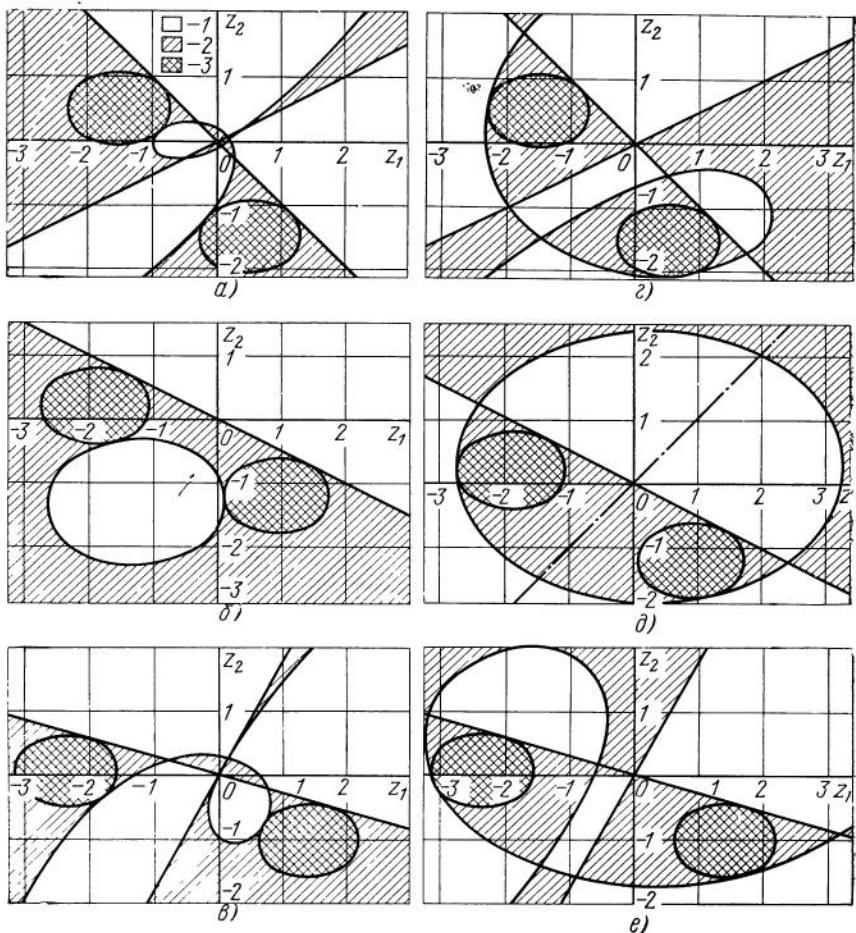


Рис. 10.4. Области стабилизируемости 1, нестабилизируемости 2 и собственной динамической неустойчивости 3 системы жесткий корпус — жидкость в двух баках при $\gamma=0,1$; $k=2,0$:

$a - z_0 = -1,0; x = -1,0;$ $b - z_0 = -2,0; \kappa = 0;$ $c - z_0 = -1,0; \kappa = 1,0;$ $d - z_0 = 2,0; x = -1,0;$ $e - z_0 = 2,0; \kappa = 1,0$

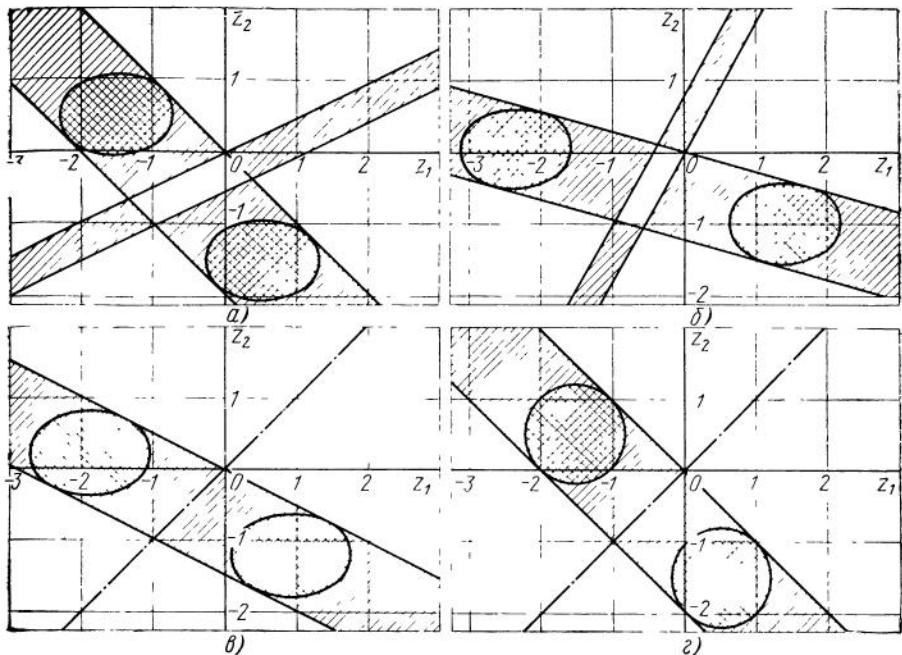


Рис. 10.5. Области, аналогичные приведенным на рис. 10.4, при управлении с помощью рассогласования тяг Маршевых двигателей ($z_0 = \infty$, $c = 0$, $\gamma = 0,01$):
 а — $k = 2$; $\xi = -1$; б — $k = 2$; $\xi = 1,0$; в — $\xi = 0$, $k = 2,0$; г — $\xi = 0$, $k = 1,0$

В уравнении (10.88), как в (10.76), исключается явная зависимость левой части уравнения от какой-либо координаты, кроме ξ_1 и ξ_2 .

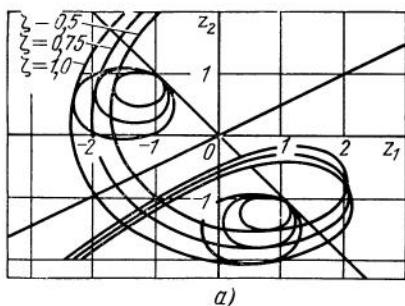
Границы областей собственной динамической неустойчивости при $\xi \neq 0$ определяются уравнениями, аналогичными (10.68) [20, 42]. Соответствующие границы по-прежнему близки к эллипсам (при $k = 1$ — к окружностям), касающимся границ области стабилизируемости, так что области собственной динамической неустойчивости вложены в последнюю.

На рис. 10.4 представлены области нестабилизируемости (одинарная штриховка) и собственной динамической неустойчивости (двойная штриховка).

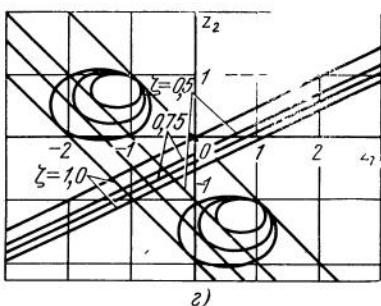
На рис. 10.5 показаны аналогичные области для особого управления $c = 0$.

Рис. 10.6 и 10.7 иллюстрируют влияние параметра ξ , а рис. 10.8 — влияние параметра κ . Прямолинейные границы на последнем рисунке не показаны, чтобы не загромождать чертеж.

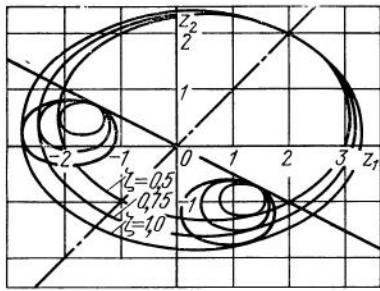
Полученные результаты открывают возможности целенаправленного изменения параметров объекта для улучшения его свойств как объекта регулирования. Одним из наиболее эффективных средств, не требующих кардинального изменения компо-



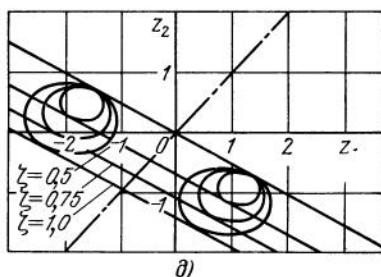
a)



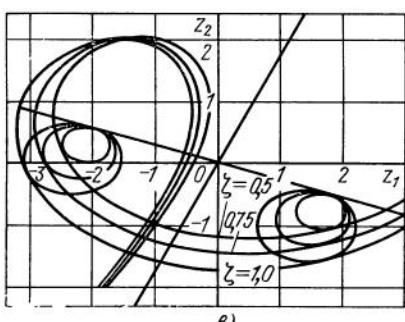
e)



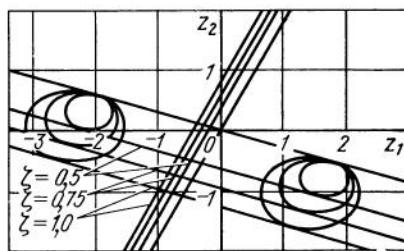
b)



d)



c)



f)

Рис. 10.6. Влияние относительного удлинения корпуса на границы стабилизируемости и собственной динамической устойчивости при $\gamma=0,01$; $k=2,0$:
a — $z_0=2,0$; $\kappa=-1,0$; *b* — $z_0=2,0$; $\kappa=0$; *c* — $z_0=2,0$; $\kappa=1,0$, $\varepsilon=z_0=\infty$; $\kappa=-1,0$; *d* — $z_0=\infty$; $\kappa=0$; *e* — $z_0=\infty$; $\kappa=1,0$

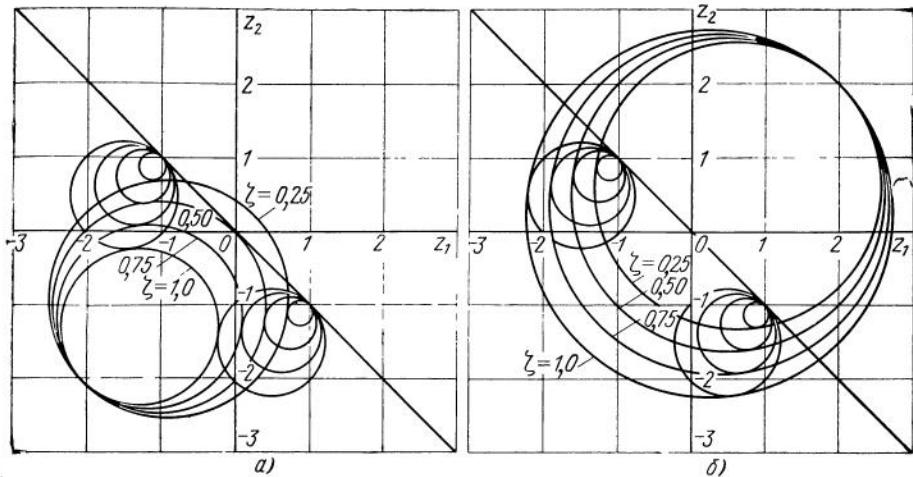


Рис. 10.7. Влияние относительного удлинения корпуса на границы стабилизируемости и собственной динамической устойчивости при $\gamma=0,01$; $k=1,0$; $\kappa=0$:
а — $z_0=-2,0$; б — $z_0=2,0$

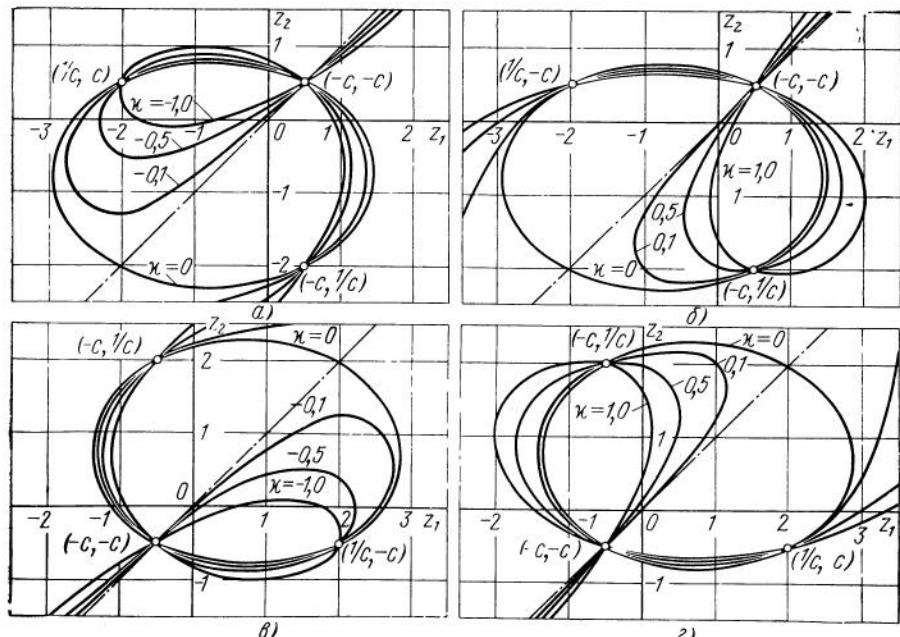


Рис. 10.8. Влияние отличия частот собственных колебаний жидкости в баках на границы областей стабилизируемости при $\gamma=0,1$; $k=2,0$; $\zeta=0$:
а — $z_0=-2,0$; $\kappa<0$; б — $z_0=-2,0$, $\kappa>0$, в — $z_0=2,0$, $\kappa<0$; г — $z_0=2,0$, $\kappa>0$

новки объекта, является изменение центровки, положения баков относительно метацентра системы и их формы, особенно площади свободной поверхности жидкости (для изменения частоты колебаний). Эти методы рассматриваются в гл. 11.

В заключение рассмотрим предельный случай, соответствующий уменьшению присоединенной массы жидкости во втором баке при отсутствии строгого равенства частот собственных колебаний жидкости в баках, т. е. $\omega \rightarrow \infty$.

Полагая в выражении (10.77) $\omega \rightarrow \infty$, найдем

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow k^2 \gamma^2 z_1 z_2 \left(z_1 + \frac{1}{z_0} \right) \left(z_2 + \frac{1}{z_0} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{\omega_{s_1}^2}{\omega_{s_2}^2} \right)^2 \left[z_1 \left(z_1 + \frac{1}{z_0} \right) \right] \left[z_2 \left(z_2 + \frac{1}{z_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.89)$$

Отсюда получим следующий приближенный критерий стабилизируемости:

$$\operatorname{sign} \left[z_1 \left(z_1 + \frac{1}{z_0} \right) \right] = \operatorname{sign} \left[z_2 \left(z_2 + \frac{1}{z_0} \right) \right], \quad (10.90)$$

т. е. z_n и $z_n + \frac{1}{z_0}$ должны быть одновременно либо положительными при $n=1$ и $n=2$, либо отрицательными. Критерий (10.90) можно получить из (9.32) с помощью выражения (9.34), если в последнем выражении положить $\zeta_n = 0$, $\gamma_n = 0$.

10.4. Система упругий корпус — жидкость в баке

При сближении частоты собственных колебаний жидкости в одном из баков с какой-либо из частот собственных упругих колебаний корпуса резко усложняется задача обеспечения динамической устойчивости замкнутой системы, включающей автомат стабилизации. В частности, это обусловлено противоречивостью требований к фазо-частотной характеристике АС на двух близких частотах, т. е. возможной нестабилизируемостью объекта регулирования при применении аналогового АС обычной структуры. Дело осложняется резким изменением требований к фазовой характеристике АС при достаточно сильных инерционных связях между корпусом и жидкостью по сравнению со случаем, когда задача о колебаниях системы рассматривается независимо для колебаний жидкости и упругих колебаний корпуса (см. гл. 9).

Задача о структурной устойчивости подобной системы рассматривалась при ряде упрощающих предположений в работе [44], воспроизведенной в книге [21]. Ниже излагается более общее решение, свободное от одного из наиболее сильных допущений, — о строгом совпадении двух рассматриваемых парциальных частот. Вместо этого вводится предположение о близости этих частот

в том смысле, что разность их квадратов, отнесенная к квадрату одной из частот, мала по модулю.

В качестве исходной принимается система уравнений возмущенного движения в пустоте в плоскости рыскания (4.74). Будем полагать, что среди частот ω_{q_j} ($j=1, 2, \dots, m$) и ω_{s_n} ($n=1, 2, \dots, k$), существует только одна пара близких в смысле, указанном выше, причем элементы этой пары принадлежат к различным спектрам и могут быть обозначены $\omega_{q_j} = \omega_q$ и $\omega_{s_n} = \omega_s$.

Выделив из (4.74) подсистему, включающую помимо ζ и ψ только две обобщенные координаты, соответствующие этим частотам, и опустив, как и в предыдущем разделе, диссипативные члены и другие, не имеющие отношения к исследованию стабилизируемости, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta s}\ddot{s} &= -a_{\zeta\delta}\delta; \\ \ddot{\psi} + a_{\psi s}\ddot{s} &= -a_{\psi\delta}\delta; \\ \ddot{q} + \omega_q^2 q + a_{qs}\ddot{s} &= -a_{q\delta}\delta; \\ \ddot{s} + \omega_s^2 s + a_{s\zeta}\ddot{\zeta} + a_{s\psi}\ddot{\psi} + a_{sq}\ddot{q} &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi^\circ); \\ \psi^\circ &= \psi - \eta'(x^\circ)q.\end{aligned}\tag{10.91}$$

Примем, что для управления используется отклонение маршевых двигателей.

В дальнейшем будем пренебречь позиционным членом в первом из уравнений, связанным со следящей силой тяги ЖРД, поскольку он играет в рассматриваемой задаче второстепенную роль. (Можно показать, что собственная динамическая неустойчивость системы, описываемой уравнениями (10.91), невозможна, независимо от того, считать ли $a_{\zeta\psi} = 0$ или $a_{\zeta\psi} \neq 0$).

После введения новой переменной ψ° система (10.91) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\ddot{\zeta} + a_{\zeta s}\ddot{s} &= -a_{\zeta\delta}\delta; \\ \ddot{\psi} + a_{\psi q}\dot{q} + a_{\psi s}s &= -a_{\psi\delta}\delta; \\ \ddot{q} + \omega_q^2 q + a_{qs}\ddot{s} &= -a_{q\delta}\delta; \\ \ddot{s} + \omega_s^2 s + a_{s\zeta}\ddot{\zeta} + a_{s\psi}\ddot{\psi}^\circ + a'_{sq}\ddot{q} &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi^\circ),\end{aligned}\tag{10.92}$$

где

$$a_{\psi q} = \eta'(x^\circ); \quad a'_{sq} = a_{sq} + a_{s\psi} a_{\psi q},\tag{10.93}$$

причем, хотя в общем случае $\omega_s^2 \neq \omega_q^2$, предполагается, что

$$\frac{|\omega_s^2 - \omega_q^2|}{\omega_q^2} \ll 1.$$

Характеристическое уравнение системы (10.92) имеет вид

$$\Phi_0(p^2) + \mathcal{L}(p)\Psi_0(p^2), \quad (10.94)$$

где

$$\Phi_0(p^2) = p^2(a_0 p^4 + a_1 p^2 + a_2); \quad (10.95)$$

$$\Psi_0(p^2) = b_0 p^4 + b_1 p^2 + b_2.$$

Введем следующие безразмерные параметры (отсчет x от плоскости опорных пят):

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega_q^2}; \quad \bar{a} = \frac{a_j}{(m^\circ + m) \eta_j^2(x_Q)}; \\ \gamma' &= \frac{\varrho_n \bar{a} R_n^3 m_n}{m^\circ + m} = \bar{a} \gamma; \quad k_0 = \frac{l \eta'_j(x^\circ) z_0}{\eta_j(x_Q)} = z_0 k; \end{aligned} \quad (10.96)$$

$$\varepsilon = \frac{k_0}{\bar{a} z_0^2} = \frac{k}{\bar{a} z_0}; \quad z_0 = \frac{x_G - x_Q}{l};$$

$$\zeta_0 = -\frac{z_0}{l} (R_n \bar{c}_n + x_{O_n'} - x_G) = z_0 z_n;$$

$$\zeta_2 = \begin{cases} \frac{z_0^2}{(z_0^2 + \zeta_0^2) \eta_j(x_Q)} [(\bar{c}_n R_n - h_n) \eta'_j(x_{H_n}) + \eta_j(x_{H_n})] & \text{(несущий бак)} \\ \frac{z_0^2}{(z_0^2 + \zeta_0^2) \eta_j(x_Q)} [(\bar{c}_n R_n - h_{0n}) \eta'_j(x_{O_n}) + g_{nj}] & \text{(подвесной бак).} \end{cases}$$

Здесь $l = \sqrt{\frac{J^\circ + J}{m^\circ + m}}$ — характерный размер корпуса; R_n — характерный размер бака; ρ_n — массовая плотность жидкости; $\bar{m}_n = \frac{\bar{\lambda}_n^2}{\mu_n} \approx \bar{\Omega}_n \omega_s^2$ — безразмерная присоединенная масса жидкости в рассматриваемом n -м баке (для которого $\omega_{s_n} = \omega_s \approx \omega_q$).

Обозначим коэффициенты полиномов (10.95), соответствующие $\kappa = 0$, через $a_0^*, \omega_q^2 a_1^*, \omega_q^4 a_2^*, a_{\psi\delta} b_0^*, a_{\psi\delta} \omega_q^2 b_1^*, a_{\psi\delta} \omega_q^4 b_2^*$.

Коэффициенты a_i , b_i и a_i^* , b_i^* выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0^*; \quad b_0 = a_{\psi\delta} b_0^*; \\
a_1 &= \omega_q^2 (a_1^* - \kappa); \quad b_1 = a_{\psi\delta} \omega_q^2 [b_1^* - \kappa(1 - \varepsilon)]; \\
a_2 &= \omega_q^4 a_2^* (1 - \kappa); \quad b_2 = a_{\psi\delta} \omega_q^4 b_2^* (1 - \kappa); \\
a_0^* &= 1 - v_1; \quad a_1^* = 2 - v_2; \quad a_2^* = 1; \\
b_0^* &= 1 - v_3 - v_4; \quad b_1^* = 2 - v_4; \quad b_2^* = 1,
\end{aligned} \tag{10.97}$$

где

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{\zeta s} a_{s\zeta} + a_{\psi s} a_{s\psi} + a_{qs} a_{sq}; \\
v_2 &= a_{s\zeta} a_{\zeta s} + a_{s\psi} a_{\psi s} = v_1 - a_{qs} a_{sq}; \\
v_3 &= a_{qs} a_{sq} + a_{qs} a_{s\psi} a_{\psi q} - \frac{a_{q\delta}}{a_{\pm\delta}} [a_{\pm q} (a_{\zeta s} a_{s\zeta} + a_{\psi s} a_{s\psi}) + a_{\psi s} a_{sq}] + \\
&\quad + \frac{a_{s\zeta} a_{\zeta\delta}}{a_{\psi\delta}} a_{\psi q} a_{qs}; \\
v_4 &= a_{s\zeta} a_{\zeta s} - a_{\psi s} a_{s\zeta} - \frac{a_{\zeta\delta}}{a_{\psi\delta}} + \frac{a_{\psi q} a_{q\delta}}{a_{\pm\delta}}.
\end{aligned} \tag{10.98}$$

Введем в качестве новой характерной частоты ω_0 , квадрат которой равен среднему значению ω_q^2 и ω_s^2 ,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} (\omega_q^2 + \omega_s^2) = \omega_q^2 \left(1 - \frac{\kappa}{2}\right). \tag{10.99}$$

По смыслу задачи κ — малый параметр. Отсюда

$$\omega_0^4 \approx \omega_q^4 (1 - \kappa).$$

Структура выражений a_1^* и b_1^* такова, что имеется главный член порядка 1 и слагаемые типа $a_{\zeta s} a_{s\zeta}$, $a_{s\psi} a_{\psi s}$ и т. д., носящие характер малых поправок порядка κ . Исключение представляет только коэффициент b_1^* , в котором имеется член порядка ε . В наиболее актуальных для практики случаях ε также можно считать малым параметром порядка κ . Ограничиваясь именно этими случаями, можно представить параметры a_i , b_i ($i=0, 1, 2$) с точностью до членов порядка κ и ε в виде

$$\begin{aligned}
a_1 &= \omega_0^2 a_1^*; \quad b_1 = a_{\psi\delta} \omega_0^2 b_1^*, \\
a_2 &= \omega_0^4 a_2^*; \quad b_2 = a_{\psi\delta} \omega_0^4 b_2^*.
\end{aligned} \tag{10.100}$$

Таким образом, выражения (10.100), в которых κ мало, но $\kappa \neq 0$, отличаются от выражений (10.97), если в последних положить $\kappa=0$, только заменой ω_q^2 на ω_0^2 . Но параметр $\omega_q^2=\omega_0^2$ при $\kappa=0$ не входит в выражения границ областей стабилизируемости,

полученные в работе [44]. Этот результат, не имеющий аналога в задаче о продольных колебаниях (см. разд. 10.1 и работу [27]), можно рассматривать как автомодельность областей структурной устойчивости при $\kappa \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ по отношению к параметру κ .

Воспользуемся выражением для критерия стабилизируемости (8.110), (10.45), из которого получим

$$a_{\psi}^2 \Psi = (v_4 - v_2) [v_1 v_4 - v_2 (v_3 + v_4)] - (-v_1 + v_2 + v_3)^2 > 0. \quad (10.101)$$

В параметрах (10.96) критерий (10.101) приводится к виду

$$\Psi = \left[\left((\zeta_1 + 1)^2 - \frac{1}{\gamma'} \right) \zeta_2 - (\zeta_1 + 1) \right] \left[\left(\zeta_1^2 - \frac{k_0^2}{\gamma'} \right) \zeta_2 + k_0 \zeta_1 \right] > 0, \quad (10.102)$$

если в выражении Ψ опустить знакопостоянный (положительный) множитель. Отсюда получим, что стабилизируемость соответствует совпадению знаков обоих сомножителей в левой части неравенства (10.102). Уравнения границ стабилизируемости в плоскости ζ_1 , ζ_2 , соответствующие замене в условии (10.102) знака $>$ на знак $=$, имеют вид

$$\zeta_2^{(1)} = \frac{\zeta_1 + 1}{(\zeta_1 + 1)^2 - \frac{1}{\gamma'}} ; \quad (10.103)$$

$$\zeta_2^{(2)} = - \frac{k_0 \zeta_1}{\zeta_1^2 - \frac{k_0^2}{\gamma'}},$$

где $\gamma' > 0$; $k_0 \geqslant 0$.

Кривые (10.103) пересекают ось абсцисс в единственной точке $\zeta_1 = -1$ или $\zeta_1 = 0$ соответственно. Обе кривые имеют горизонтальные асимптоты $\zeta_2 = 0$, причем при $\zeta_1 \rightarrow \infty$, $\zeta_2^{(1)} > 0$, а $\zeta_2^{(2)} \geqslant 0$ при $k_0 \geqslant 0$, и вертикальные асимптоты

$$\zeta_1 = -1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} \quad (\text{кривая } \zeta_2^{(1)}),$$

$$\zeta_1 = \pm \frac{k_0}{\sqrt{\gamma'}} \quad (\text{кривая } \zeta_2^{(2)}).$$

Отсюда ясно, что имеются три критических значения модуля $|k_0|$, при которых совпадают либо левые, либо правые асимптоты кривых $\zeta_2^{(1)}$ и $\zeta_2^{(2)}$ или левая асимптота кривой $\zeta_2^{(2)}$ проходит через точку $\zeta_2^{(1)} = 0$:

$$|k_0| = \sqrt{\gamma'}; |k_0| = 1 - \sqrt{\gamma'}; |k_0| = 1 + \sqrt{\gamma'}. \quad (10.104)$$

Соответственно имеется шесть характерных случаев взаимного расположения областей структурной устойчивости и неустойчи-

вости в плоскости z_1, z_2 при различных возрастающих значениях параметра $|k_0|$ и фиксированном значении $\gamma' < \frac{1}{4}$:

$$|k_0| \rightarrow 0; \quad |k_0| < \sqrt{\gamma'}; \quad |k_0| = \sqrt{\gamma'}; \quad |k_0| = 1 - \sqrt{\gamma'}; \\ |k_0| = 1 + \sqrt{\gamma'}; \quad |k_0| > 1 + \sqrt{\gamma'}.$$

При $\gamma' = \frac{1}{4}$ имеем

$$\sqrt{\gamma'} = \frac{1}{2}; \quad 1 - \sqrt{\gamma'} = \sqrt{\gamma'}.$$

Поэтому при $\gamma' > \frac{1}{4}$ 3-й и 4-й случаи меняются ролями, а 2-му соответствует $|k_0| < 1 - \sqrt{\gamma'}$. Кроме модуля параметра k_0 при $k_0 \neq 0$ вид областей устойчивости существенно зависит от знака k_0 .

Рассмотрим наряду с критерием (10.102) упрощенный критерий, соответствующий предельному случаю $\zeta_2 \rightarrow 0$ в (10.102), т. е. пренебрежению инерционными связями между упругим корпусом и жидкостью:

$$\Psi^* = -k_0 \zeta_1 (\zeta_1 + 1) > 0. \quad (10.105)$$

Если обозначить, как и в разд. 9.3 и 9.2,

$$k = k_j = \frac{l \eta'_j(x^\circ)}{\eta_j(x_Q)}; \quad z_n = -\frac{1}{l} (R_n c_n + x_{o_n} - x_G),$$

то критерий (10.105) сводится к выполнению любой из двух групп неравенств

$$z_n(z_0 z_n + 1) > 0; \quad k_j < 0 \quad (10.106a)$$

или

$$z_n(z_0 z_n + 1) < 0; \quad k_j > 0. \quad (10.106b)$$

Первое неравенство (4.106a) совпадает с условием фазовой стабилизации объекта с одним баком на частоте собственных колебаний жидкости в случае, когда АС обеспечивает фазовое опережение (9.32), второе — с условием фазовой стабилизации на частоте упругих колебаний корпуса в аналогичной ситуации (9.51). Неравенства второй группы (10.106b) соответствуют условиям фазовой стабилизации (9.32) и (9.51) при фазовом запаздывании, создаваемом АС на соответствующих частотах.

Все основные случаи представлены на рис. 10.9 ($\gamma' = 0,16$). Штриховка соответствует областям структурной неустойчивости ($\Psi < 0$), отсутствие штриховки — устойчивости ($\Psi > 0$).

Пунктиром показана граница стабилизируемости, соответст-

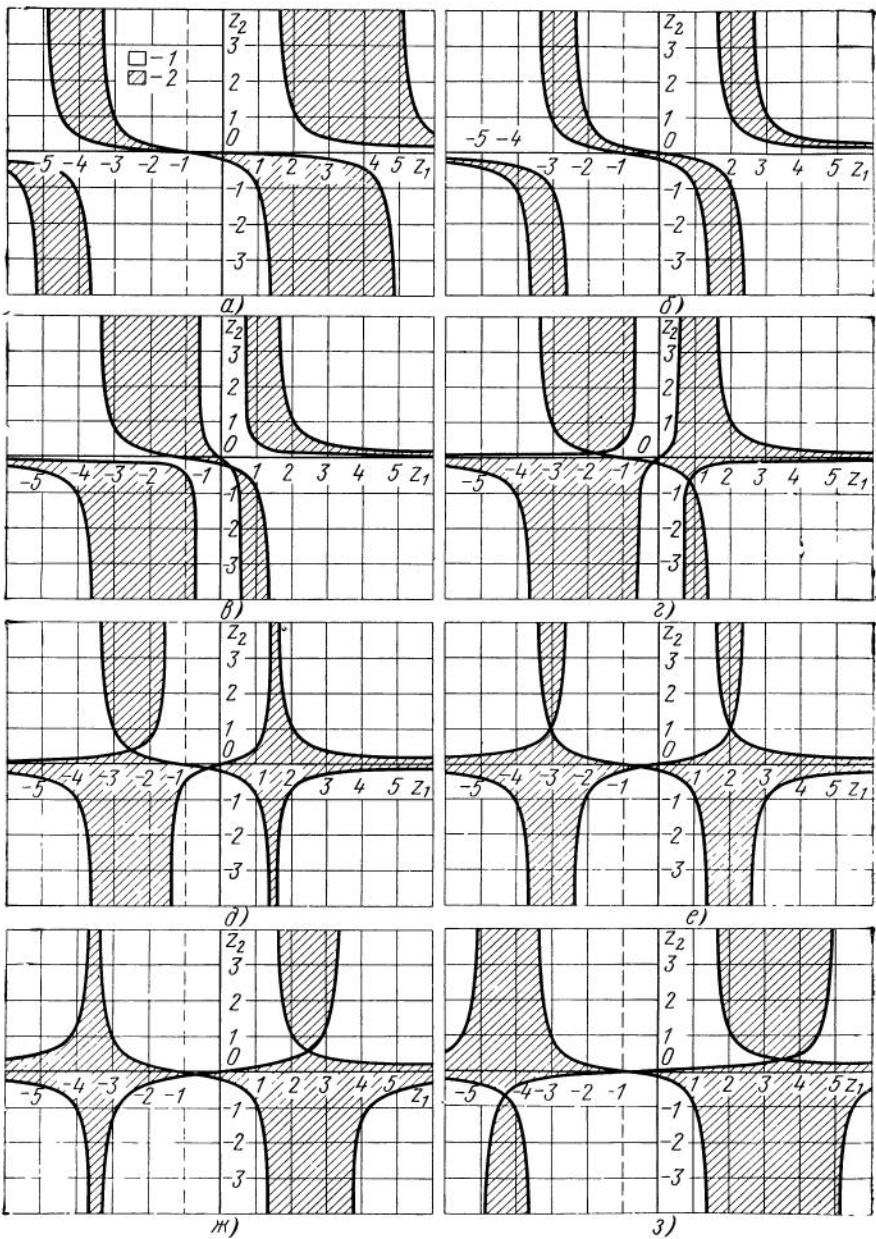


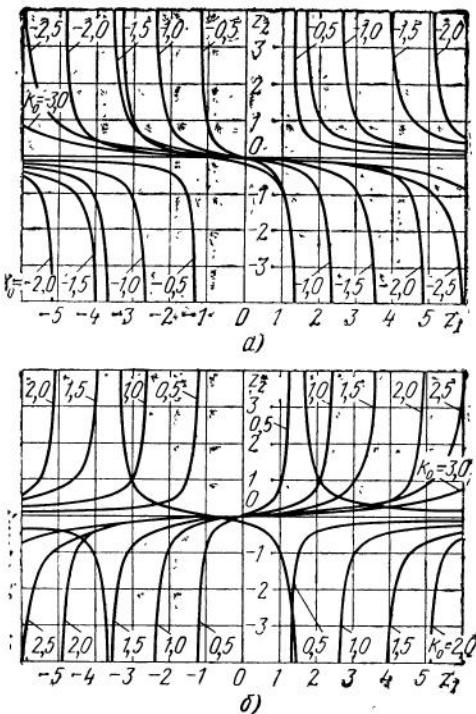
Рис. 10.9. Области стабилизуемости 1 и нестабилизуемости 2 системы упругий корпус — жидкость в баке при $\gamma=0,16$:
 а — $k_0 = -2,0$; б — $k_0 = -1,0$; в — $k_0 = -0,25$; г — $k_0 = 0,6$, е — $k_0 = 1,0$, ж — $k_0 = 1,4$, з — $k_0 = 2,0$.

Рис. 10.10. Влияние положения гиродатчика АС на границы стабилизируемости, приведенные на рис 10.9:
 $a - k_0 < 0$, $b - k_0 > 0$

вующая приближенному критерию (10.105); второй границей служит ординат. Как видно из рис. 10.9, при $|\zeta_2| \rightarrow 0$ области устойчивости, соответствующие критериям (10.105) и (10.102), совпадают, однако при $\zeta_2 \neq 0$ области (10.102) деформируются тем больше, чем больше $|\zeta_2|$, причем по-разному, в зависимости от знака ζ_2 . Интересно, что при $|k_0| \rightarrow 0$ области структурной устойчивости (10.105) отнюдь не переходят в области (10.102), хотя и перестают зависеть от знака

k_0 . Одной из границ в этом вырожденном случае становится ось абсцисс $\zeta_2 = 0$. Характер устойчивости зависит от величины и знака ζ_2 . Здесь, таким образом, в чистом виде проявляется эффект взаимного влияния упругих деформаций корпуса и подвижности жидкости при близости соответствующих парциальных частот.

На рис. 10.10 показана сетка границ стабилизируемости при различных значениях параметра $k_0 \geq 0$. Аналогичным образом решается задача для системы упругий корпус — двигатель на упругой подвеске [31].



НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ БЛИЗКИХ ПАРЦИАЛЬНЫХ ЧАСТОТ

11.1. Общие соображения об обеспечении динамической устойчивости РН

Как уже неоднократно подчеркивалось выше, проблема обеспечения динамической устойчивости РН с учетом упругости их корпуса и подвижности компонентов жидкого топлива в баках и магистролях является одной из центральных при проектировании систем управления для современных сложных ракетно-космических комплексов (см. [47, 48, 49]).

По мере увеличения массы и размеров РН, уменьшения относительной жесткости корпуса и его элементов, усложнения конструктивно-компоновочной схемы, в частности при переходе к пакетным схемам, а также к транспортным системам с крылатыми ступенями, спектр частот колебаний корпуса и жидкости становится все более плотным и смещается в низкочастотную область. Это все большее усложняет задачу обеспечения динамической устойчивости, особенно при применении аналоговых АС или дискретных, но реализующих алгоритмы стабилизации, характерные для аналоговых систем [2]. Поэтому акцент все больше смещается в сторону пассивных методов, улучшающих динамические свойства объекта регулирования, без чего решение задачи стабилизации при современном уровне техники часто становится невозможным.

Следует особо сказать о более сложных алгоритмах стабилизации, реализуемых на БЦВМ. Последняя выступает в этом случае как мощный вычислитель, перерабатывающий и хранящий в памяти большие массивы информации, что недоступно аналоговым устройствам. Ряд таких алгоритмов был предложен в отечественной и иностранной литературе [9, 36]. Их реализация на БЦВМ позволяет в принципе решить задачу стабилизации наиболее сложных динамических систем с плотным спектром частот, с учетом наличия неконтролируемого разброса параметров системы и ограниченной информации о внешних возмущениях. Можно утверждать, что именно этому направлению в сочетании с научно обоснованным проектированием объекта регулирования принадлежит будущее.

В настоящей главе в соответствии с характером книги обсуждаются только пассивные мероприятия, облагораживающие в динамическом смысле объект регулирования, так что создаются

предпосылки для сравнительно простого решения задачи устойчивости.

Одним из существенных моментов здесь является уменьшение отрицательного влияния сближения каких-либо парциальных частот, что достигается либо искусственным разнесением этих частот (изменение геометрии баков, применение промежуточных днищ, изменение жесткости связей и т. д., а для магистралей — применение специальных гидроаккумуляторов) либо путем проведения мероприятий, компенсирующих отрицательный эффект близости частот (изменение компоновки, центровки, размещения датчиков углового положения и угловой скорости, применение специальных демпферов колебаний и т. д.).

Принципиальные стороны мероприятий такого рода обсуждаются ниже на примере трех наиболее классических форм динамической неустойчивости РН. При этом ставится задача указать направление изменения сравнительно легко поддающихся воздействию параметров объекта, которое дает нужный динамический эффект.

Подбор количественных характеристик демпферов колебаний жидкости, гидроаккумуляторов и других аналогичных устройств соответствует следующему этапу исследования, выходящему за рамки настоящей книги.

11.2. Устойчивость в диапазоне частот продольных колебаний корпуса и компонентов топлива в магистралях

Проблема обеспечения динамической устойчивости при продольных колебаниях является весьма острой для современных РН.

При возникновении динамической неустойчивости колебания корпуса усиливают колебания давления на входе в насосы окислителя и горючего, что приводит к колебаниям давления в камере сгорания ЖРД, т. е. к колебаниям тяги, которые, в свою очередь, усиливают продольные колебания корпуса. Неустойчивость такого типа может наблюдаться на объектах как тандемной, так и пакетной схем. Было замечено, что частота неустойчивых продольных колебаний чаще всего близка к частоте либо первого тона собственных продольных колебаний корпуса, либо жидкости в той из топливоподающих магистралей, в которой соответствующая частота ближе к частоте собственных колебаний корпуса (обычно это более низкая частота).

Возникновению неустойчивости способствует, как обычно, увеличение динамического коэффициента усиления разомкнутой системы корпус-магистраль, рассматриваемой как объект регулирования (в роли регулятора здесь выступает ЖРД). В соответствии с этим неустойчивость наблюдается обычно либо на второй

половине активного участка полета, когда в баках еще сравнительно много топлива и в то же время тяговооруженность заметно больше, чем при старте, либо в той области активного участка полета, которая характеризуется сближением частоты одной из основных гармоник корпуса (обычно $j=1$ или $j=2$) и частоты основного тона колебаний столба жидкости в одной из магистралей. В конце активного участка снова наблюдается устойчивое движение.

С одним из особенно серьезных случаев продольной динамической неустойчивости столкнулись в США в 1962 г. при летно-конструкторских испытаниях межконтинентальной баллистической ракеты «Титан-2». На этом объекте были зафиксированы неустойчивые продольные колебания на частоте от 9—10 до 13—15 Гц [55, 63, 68].

Неустойчивость подобного типа «в малом», несмотря на ограниченность амплитуд колебаний, т. е. устойчивость «в большом», делала невозможным использование РН на базе баллистической ракеты «Титан-2» для вывода на околоземную орбиту пилотируемых космических кораблей «Джемини». Поэтому потребовалась серьезная работа по изысканию путей ликвидации неустойчивости с минимальными конструктивными доработками носителя. В результате к первому запуску «Джемини» в 1964 г. удалось практически ликвидировать неустойчивость, снизив амплитуды колебаний продольной перегрузки отсека экипажа до 0,2g [55].

По данным, опубликованным в США, стоимость работ, связанных с ликвидацией продольной неустойчивости этого объекта, составила около 1 млн. долларов.

В 1968 г. продольная динамическая неустойчивость, хотя и не в столь резкой форме, как на ракете «Титан-2», была снова зафиксирована, на этот раз при летно-конструкторских испытаниях РН «Сатурн-5», AS-502. При первом пуске ракеты AS-501 это явление не наблюдалось [54, 66, 67, 69, 73].

Остановимся на этом случае несколько подробнее, следуя в основном работам [54, 67].

Неустойчивость наблюдалась с 100-й по 135-ю секунду полета первой ступени, а затем исчезла. Максимальные амплитуды колебаний перегрузки, давления компонентов топлива на входе в насосы и давления в камерах сгорания двигателей были зафиксированы на 125-й секунде полета (см. рис. 0.6).

Частота колебаний составляла 5,3 Гц, т. е. была близка к частоте первого тона собственных колебаний жидкости в магистрали окислителя O_2 и к первой частоте собственных продольных колебаний корпуса. В то же время форма колебаний корпуса, по данным телеметрии, практически совпадала с первой формой его собственных продольных колебаний, полученной расчетным путем и на конструктивно-подобных моделях [см. гл. 7].

Здесь интересны несколько обстоятельств: негрубость дина-

мической системы (малые конструктивные изменения привели к переходу через границу области динамической устойчивости), возбуждение первой формы собственных колебаний корпуса на частоте, близкой как к соответствующей собственной частоте, так и к частоте собственных колебаний жидкости в магистрали O_2 , ограниченность амплитуд колебаний, несмотря на их неустойчивый характер «в малом».

Динамическая неустойчивость, наблюдавшаяся на объекте AS-502, была признана недопустимой, и перед пуском объекта AS-503 был проведен комплекс исследований, связанных с ликвидацией этого явления с минимальными конструктивными доработками, о чем более подробно говорится ниже. Однако с неустойчивостью продольных колебаний РН «Сатурн-5» пришлось столкнуться снова уже на второй ступени.

11 апреля 1970 г. при запуске космического корабля «Аполлон-13» центральный двигатель второй ступени РН «Сатурн-5» выключился на 132 с раньше расчетного времени. Анализ показал, что причиной этого было возникновение в магистрали жидкого кислорода этого двигателя продольных колебаний (14—16 Гц), которые были сильно коррелированы с колебаниями подмоторной рамы (20 Гц). В результате давление жидкого кислорода на входе в насос упало ниже критического уровня, в насосе возникла кавитация, тяга двигателя упала, и два датчика, регистрирующие величину тяги, подали сигнал на аварийное выключение двигателя [74]. Если бы описанная ситуация возникла несколько раньше, корабль «Аполлон-13» не вышел бы на околоземную орбиту. (Фактически этот запуск все же оказался аварийным из-за взрыва в служебном отсеке корабля «Аполлон-13» уже на пути к Луне).

Ликвидация неустойчивости второй ступени РН «Сатурн-5» была достигнута тем же методом, что и на первой, путем снижения частоты собственных колебаний жидкости в магистрали окислителя [70, 71].

При решении задачи устойчивости объекта в плоскостях стабилизации можно изменять коэффициент собственного демпфирования колебаний компонентов топлива в баках, положение гиродатчиков автомата стабилизации и, наконец, в известных пределах фазо-частотную и амплитудно-частотную характеристики автомата стабилизации.

При решении аналогичной задачи применительно к колебаниям в направлении продольной оси корпуса возможностей значительно меньше. В частности, изменение частотных характеристик двигателя в рассматриваемом диапазоне частот практически почти нереально. Поэтому наиболее целесообразно задачу устойчивости продольных колебаний решать методами амплитудной стабилизации с использованием D — разбиения в пространстве параметров, зависящих от $\omega_{s_n}^2$, $\omega_{q_j}^2$, β_{s_n} , β_{q_j} .

Ниже излагается один из приближенных способов такого разбиения в плоскости тех же параметров, в которых строились области стабилизируемости по критериям (10.13), (10.19). Этот способ основан на сохранении в общих уравнениях (4.75) членов, соответствующих двум связанным осцилляторам с близкими частотами. Воспользуемся уравнениями (10.1), которые для удобства выпишем здесь снова:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + a_{\xi s} \ddot{s} &= a_{\xi \delta} \delta; \\ \dot{q} + \beta_q q + \omega_q^2 q + a_{qs} \ddot{s} &= a_{q \delta} \delta; \\ s + \beta_s \dot{s} + \omega_s^2 s + a_{s \xi} \ddot{\xi} + a_{sq} \ddot{q} &= 0; \\ s^o + a_{s^o} (\beta_s \dot{s} + \omega_s^2 s) &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(s^o). \end{aligned} \quad (11.1)$$

В качестве q и s здесь выбираются те обобщенные координаты q , и s_n , которым соответствуют потенциально близкие (в частности, совпадающие частоты ω_{qj} и ω_{sn} , обозначенные теперь ω_q и ω_s).

В формулах для коэффициентов уравнений (11.1) не будем в отличие от разд. 10.1 пренебречь отличием между длиной магистрали l_n и длиной l_n' ее проекции на ось Gx .

Характеристическое уравнение системы (11.1) имеет вид

$$\Phi_0(p^2) + p\Phi_1(p^2) + \mathcal{L}(p)[\Psi_0(p^2) + p\Psi_1(p^2)] = 0, \quad (11.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(p^2) &= a_0 p^4 + a_1 p^2 + a_2; \quad \Psi_0(p^2) = b_1 p^2 + b_2; \\ \Phi_1(p^2) &= c_1 p^2 + c_2; \quad \Psi_1(p^2) = d_1 p^2 + d_2. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Коэффициенты этих полиномов выражаются формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - (a_{s\xi} a_{\xi s} + a_{sq} a_{qs}); \quad b_1 = -a_{s^o} \omega_s^2 (a_{s\xi} a_{\xi \delta} + a_{sq} a_{q \delta}); \\ a_1 &= (1 - a_{s\xi} a_{\xi s}) \omega_q^2 + \omega_s^2; \quad b_2 = -a_{s^o} a_{s\xi} a_{\xi \delta} \omega_s^2 \omega_q^2. \\ a_2 &= \omega_q^2 \omega_s^2. \end{aligned} \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \beta_q (1 - a_{s\xi} a_{\xi s}) + \beta_s; \quad d_1 = -a_{s^o} \beta_s (a_{s\xi} a_{\xi \delta} + a_{sq} a_{q \delta}); \\ c_2 &= \beta_s \omega_q^2 + \beta_q \omega_s^2; \quad d_2 = -a_{s^o} a_{s\xi} a_{\xi \delta} (\beta_s \omega_q^2 + \beta_q \omega_s^2). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Полагая $p = i\sigma_r$ ($r = s, q$) и разделяя действительную и мнимую части в (11.2), получим следующие уравнения границ областей динамической устойчивости:

$$\begin{aligned} \Phi_0(-\sigma_r^2) + \Psi_0(-\sigma_r^2) A(\omega_r) \cos \varphi(\omega_r) - \Psi_1(-\sigma_r^2) \omega_s A(\omega_r) \sin \varphi(\omega_r) &= 0; \\ \Phi_1(-\sigma_r^2) + \frac{1}{\omega_r} \Psi_0(-\sigma_r^2) A(\omega_r) \sin \varphi(\omega_r) + \\ + \Psi_1(-\sigma_r^2) A(\omega_r) \cos \varphi(\omega_r) &= 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Введем следующие безразмерные параметры, аналогичные (10.12) и (10.18):

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(1 + \frac{h_n}{l'_n}\right) \frac{l'_n}{l_n}; \quad z = \frac{1 - \frac{g_{nj}}{\eta_j(x_p)}}{\left(1 + \frac{h_n}{l'_n}\right) \bar{a}} = \frac{h_n}{a_s a_{q\delta}}; \\ \bar{a} &= \frac{a_j}{(m^\circ + m) \eta_j^2(x_p)}; \quad \gamma = \frac{Nm_n}{m^\circ + m}; \quad \beta = \frac{\omega_q^2}{\omega_s^2} - 1; \\ \tilde{P} &= \frac{P}{p_n^* S_n} = \frac{NP^*}{p_n^* S_n}; \quad a = \bar{a} \gamma z_1^2; \\ \Omega_r &= \tilde{P} \gamma z_1 A(\omega_r) \sin \varphi(\omega_r) \quad (r=s, q), \end{aligned} \quad (11.7)$$

где использованы обозначения разд. 10.1 и 4.6 (N — число маршевых двигателей; $P=NP^*$ — их суммарная тяга), а индексы j и n соответствуют тому тону упругих колебаний и той магистрали, которым соответствуют близкие частоты $\omega_{qj}=\omega_q$ и $\omega_{sn}=\omega_s$. Кроме того, принято, что частоты собственных колебаний замкнутой системы σ_r мало отличаются от соответствующих парциальных частот ω_r :

$$\sigma_r^2 = \omega_r^2 (1 + \varepsilon_r), \quad (11.8)$$

где $\varepsilon_r \ll 1$.

Используя второе из уравнений (11.6) и пренебрегая некоторыми второстепенными членами, можно получить следующие выражения для σ_s^2 и σ_q^2 :

$$\begin{aligned} \sigma_s^2 &= \omega_s^2 G_r(\beta, \varepsilon_0); \quad \sigma_q^2 = \frac{\omega_q^2}{1 + \beta} G_r(\beta, \varepsilon_0); \\ G_r(\beta, \varepsilon_0) &= \frac{2 + \beta + b_r}{2(1 - \varepsilon_0)}; \quad \varepsilon_0 = az^2; \\ b_r &= \pm \sqrt{\beta^2 + 4\varepsilon_0(1 + \beta)}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Знак b_r определяется табл. 11.1.

Таблица 11.1

r	b_r	
	>0	<0
q	+	-
s	-	+

Принимая ϵ_0 за малый параметр, можно из уравнений (11.6) получить уравнения границ областей динамической устойчивости в плоскости параметров (z, β) с точностью до членов порядка ϵ_0 :

$$\begin{aligned} z_r &= d_r + \frac{1}{(1+d_r)\omega_r\Omega_r} [\beta_q(\beta - d_r) - \beta_s d_r(1+\beta)]; \\ d_r &= \frac{2(1-\epsilon_0)}{1 + \frac{1+b_r}{1+\beta}} - 1. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Условия динамической устойчивости имеют следующий вид:
при $\sin \varphi(\omega_r) > 0 \quad (r=s, q)$

$$\left(\frac{z}{\beta}\right)_s \leq \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\circ} \leq \left(\frac{z}{\beta}\right)_q; \quad (11.11)$$

при $\sin \varphi(\omega_r) < 0 \quad (r=s, q)$

$$\left(\frac{z}{\beta}\right)_s \geq \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\circ} \geq \left(\frac{z}{\beta}\right)_q, \quad (11.12)$$

где индекс \circ отвечает полетным, а индексы s и q — граничным значениям соответствующего параметра. В первом случае ЖРД создает фазовое опережение на частотах ω_r , а во втором — запаздывание.

Если в выражениях (11.10) пренебречь членами порядка ϵ_0 , то условия (11.11) и (11.12) переходят в следующие:

при $\sin \varphi(\omega_r) > 0 \quad (r=s, q)$

$$1 - \frac{\bar{\beta}_s}{\Omega_s} \leq \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\circ} \leq \frac{\bar{\beta}_q}{\Omega_q}; \quad (11.13)$$

при $\sin \varphi(\omega_r) < 0 \quad (r=s, q);$

$$1 - \frac{\bar{\beta}_s}{\Omega_s} \geq \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\circ} \geq \frac{\bar{\beta}_q}{\Omega_q}, \quad (11.14)$$

где

$$\bar{\beta}_s = \frac{\delta_s}{\pi}; \quad \bar{\beta}_q = \frac{\delta_q}{\pi}. \quad (11.15)$$

Границы (11.13) и (11.14) представляют собой прямые, проходящие через начало координат (рис. 11.1, а, б). Таким образом,

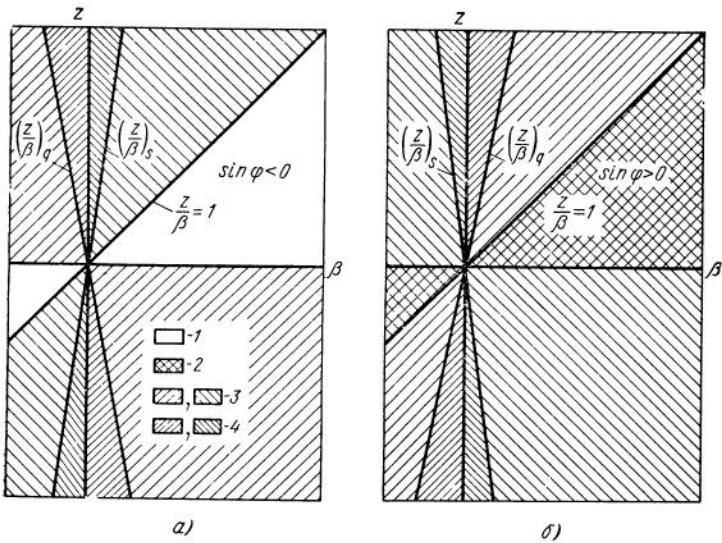


Рис. 11.1 Области стабилизируемости системы корпус — жидкость в магистрали и фазовой стабилизации 1, нестабилизируемости и фазовой дестабилизации 2, амплитудной стабилизации при наличии нестабилизируемости 3, неустойчивости 4:

а — двигатель с фазовым запаздыванием; *б* — двигатель с фазовым опережением

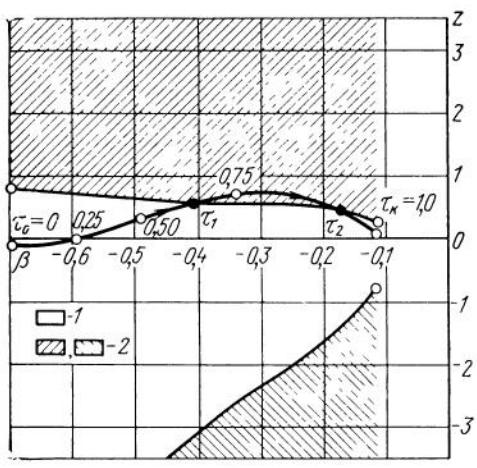
амплитудная стабилизация достигается, если линия состояния системы, соответствующая полетным значениям, лежит внутри угла, образованного граничными прямыми.

При $\beta_s \rightarrow 0$, $\beta_q \rightarrow 0$ условия (11.14) переходят в условия стабилизируемости (10.19):

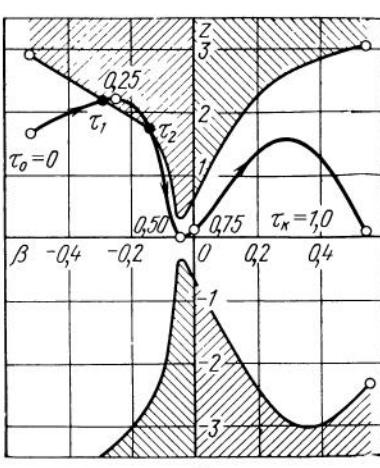
$$0 \leq \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\circ} \leq 1. \quad (11.16)$$

В этом случае достигается фазовая стабилизация системы, в то время как выполнение условий (11.16) при фазовом опережении, создаваемом ЖРД, приводит к возникновению динамической неустойчивости на обеих частотах — σ_s и σ_q . Строго говоря, точка $\beta=0$ на рис. 11.1, 11.2 должна быть выделена как особая, так как упрощенные критерии (11.13) и (11.14) теряют силу при $\beta \rightarrow 0$. Более полное исследование, проведенное с использованием выражений (11.10), показывает, что при $\beta \rightarrow 0$ имеется при конечных значениях β_s и β_q небольшая область устойчивости.

При увеличении $|\beta|$ границы, определяемые неравенствами (11.11), (11.12), асимптотически стремятся к границам (11.13), (11.14).



а)



б)

Рис. 11.2. Области устойчивости 1 и неустойчивости 2, объекта, близкого к первой ступени РН «Сатурн-5» с первоначальным вариантом магистрали окислителя:

а — первая форма продольных колебаний корпуса; б — вторая форма

В предельных случаях, когда $\beta \rightarrow -1$ и $\beta \rightarrow \infty$, можно использовать результаты, приведенные в разд. 9.4 для сильно разнесенных частот ω_{s_n} и ω_{q_j} .

На рис. 11.2 представлены области устойчивости и линии состояния системы в параметрах z , β для гипотетического объекта с параметрами, близкими к первой ступени РН «Сатурн-5» в варианте AS-501 и AS-502. При этом использованы две первые частоты и формы продольных колебаний из работы [65], пересчитанные на натуральную (см. разд. 7.1 и 7.3), и соответствующие логарифмические декременты колебаний; использованная частотная характеристика двигателя построена по данным обзора [49].

На рис. 11.2 отчетливо видна неустойчивость, наступающая вблизи начала ($\tau \ll 1$) или конца активного участка ($\tau \rightarrow 1$) при сближении частоты второго или первого тона продольных колебаний корпуса и частоты колебаний жидкости в магистрали окислителя. Фактически при полете объекта AS-501 не проявилась ни одна область неустойчивости, а при полете AS-502 — только вторая. (Это можно объяснить разбросами параметров корпуса, магистрали и частотных характеристик ЖРД).

Специфические особенности замкнутой системы, рассмотренной выше, позволяют наметить определенную стратегию предотвращения или ликвидации динамической неустойчивости конструктивным путем. Изменение динамических характеристик отработанного ЖРД как разомкнутой системы практически нереально, а изменение коэффициента конструкционного демпфирования корпуса хотя в принципе и возможно, но затруднительно, а, кроме того, в ряде важных случаев неэффективно (при развитии

неустойчивости на частоте собственных колебаний столба жидкости в магистрали, не совпадающей с одной из частот собственных колебаний корпуса).

Резкое повышение коэффициента демпфирования собственных колебаний жидкости конструктивным путем с минимальным увеличением гидравлического сопротивления в принципе возможно, но в некоторых случаях также неэффективно (при развитии динамической неустойчивости на одной из частот собственных колебаний корпуса, не совпадающей с частотой собственных колебаний столба жидкости в магистрали).

С другой стороны, исследование, проведенное выше, показывает, что сильнее всего на устойчивость замкнутой системы влияет параметр β , причем, как правило, наилучшие результаты дает его увеличение, что легко достигается уменьшением ω_{s_n} .

Таким образом, снижение частоты собственных колебаний столба жидкости в магистрали, определяющей динамическую неустойчивость замкнутой системы,— наиболее надежный конструктивный путь ликвидации этой неустойчивости. Однако реализация этого мероприятия должна быть такой, чтобы не сместить вниз вместе с первой частотой весь спектр частот колебаний столба жидкости.⁴ В этом случае может утратить силу основная концепция, заложенная в динамическую схему гл. 4, в которой учитывается только первая форма колебаний столба жидкости как жесткого тела на упругой связи, имитирующей кавитационные каверны на входе в насос. Иными словами, должна уменьшаться жесткость эквивалентной упругой связи в нижнем сечении магистрали, т. е. увеличиваться объем сосредоточенной емкости, как если бы увеличивался суммарный объем кавитационных каверн. Это достигается подключением к магистрали в сечении, близком к входу в насос, устройств, аналогичных гидравлическим аккумуляторам. Напротив, уменьшение погонной жесткости упругого стержня, эквивалентного столбу жидкости, с помощью введения в жидкость на верхнем конце магистрали инертного газа (снижение скорости звука в столбе жидкости) или применения для стенок магистрали материала с малым модулем Юнга (снижение скорости распространения волны деформации в стенках) значительно менее выгодно, так как приводит к снижению собственных частот высших гармоник колебаний жидкости в магистрали и увеличению соответствующих коэффициентов связи с колебаниями корпуса (см. гл. 4).

На рис. 11.3, а, б представлены два типа устройств, называемых иногда не совсем точно демпферами колебаний жидкости, примененных на ракете «Титан-2» для исключения продольной динамической неустойчивости [55]. Один из этих «демпферов» подключен к магистрали окислителя, другой — к магистрали горючего. В первом случае используется упругость паров окислителя O_2 , заполняющих свободный объем, во втором — упругость специального набора пружин.

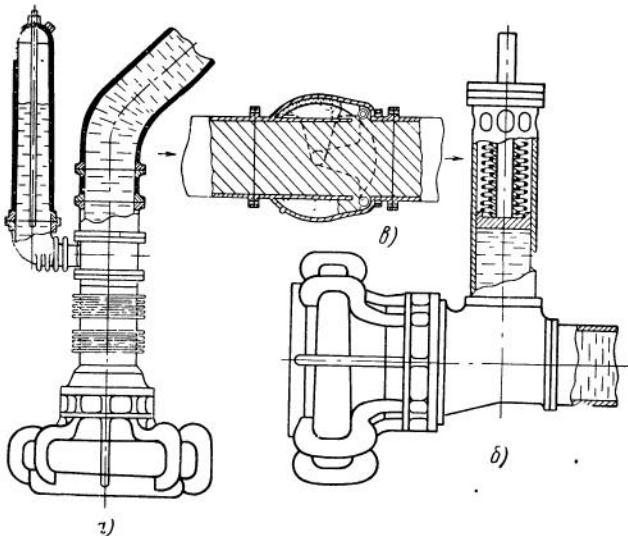


Рис. 11.3. Конструкция гидроаккумуляторов, уменьшающих частоту колебаний столба жидкости в магистралях окислителя (а) и горючего (б) РН «Титан-2» и окислителя (в) РН «Сатурн-5»

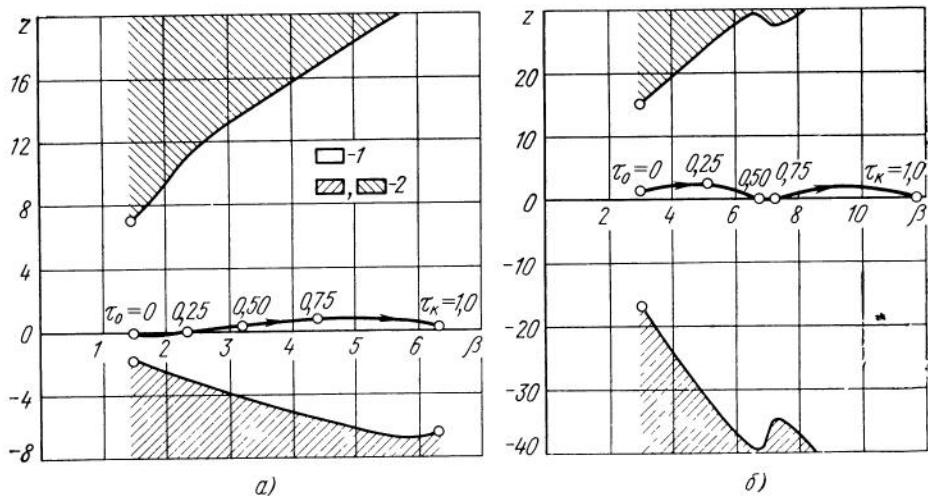


Рис. 11.4. Области устойчивости 1 и неустойчивости 2 объекта, близкого к первой ступени РН «Сатурн-5», с гидроаккумулятором (см. рис. 11.3) в магистрали окислителя:

a — первая форма продольных колебаний корпуса; *b* — вторая форма

В работе [55] указывается, что применение этих устройств позволило резко снизить первую частоту колебаний жидкости в обеих магистралях и соответствующий динамический коэффициент усиления. В результате неустойчивость продольных колебаний в конце активного участка ракеты «Титан-2», использованной в качестве носителя пилотируемых кораблей «Джемини», была ликвидирована и амплитуда колебаний продольных перегрузок корпуса в районе кабины космонавтов снижена с 2,5 до $0,2\text{ g}$.

Ликвидация аналогичных явлений на первой ступени РН «Сатурн-5», зафиксированных при втором запуске («Сатурн-5» AS-502), потребовала обширного комплекса теоретических и экспериментальных исследований, подробно описанных в работе [67]. В частности, были рассмотрены как наиболее перспективные две схемы снижения частоты собственных колебаний жидкости в магистрали окислителя O_2 — введение газообразного гелия в верхнем сечении магистрали и использование «демпфера» в нижнем. В результате теоретических и экспериментальных исследований были получены выводы, аналогичные сформулированным выше, вследствие чего первый вариант был забракован и принят второй. Схема его конструктивного оформления ясна из рис. 11.3, в [66, 67]. Перекрывной клапан магистрали окислителя, открытый в течение всего полета первой ступени, был использован для создания емкости, заполняемой перед стартом газообразным гелием и сообщающейся с магистралью. Таким образом, в принципе это устройство аналогично использованному в магистрали окислителя ракеты «Титан-2».

В результате низшая частота собственных колебаний столба жидкости была снижена с 5 до 2 Гц (см. рис. 7.11, б), что, как показали расчеты и моделирование с использованием достаточно полной математической модели, составленной с учетом материалов стендовых испытаний магистрали и корпуса, должно было полностью исключить продольную неустойчивость.

Запуск РН «Сатурн-5» AS-503, которая вывела на орбиту полета к Луне пилотируемый корабль «Аполлон-8», полностью подтвердил эти выводы. Амплитуды колебаний продольной перегрузки в районе отсека экипажа снизились с $0,6\text{ g}$ приблизительно до $0,1\text{ g}$, причем колебания приобрели стохастический характер.

На рис. 11.4 представлены те же области, что и на рис. 11.2, построенные с учетом доработок магистрали окислителя, упомянутых выше, которые привели к снижению частоты колебаний жидкости до 2 Гц. Из этого рисунка отчетливо виден положительный эффект проведенных мероприятий, обеспечивших большие запасы устойчивости на частотах первого и второго тонов продольных колебаний корпуса.

На рис. 11.5, а показаны схематически амплитудно-фазовые характеристики (s^o/δ) нестабилизируемого объекта; рис. 11.5, б

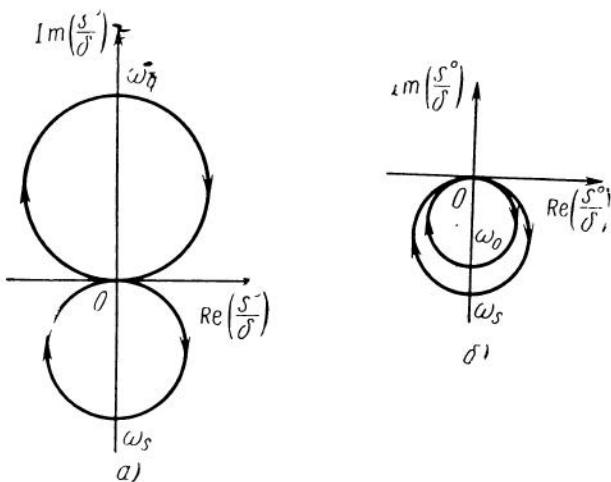


Рис. 11.5. Качественная картина амплитудно-фазовых характеристик разомкнутой системы корпуса первой ступени РН «Сатурн-5» — жидкость в магистрали в окрестности частоты первого тона продольных колебаний корпуса:
 а — первоначальный вариант магистрали окислителя; б — магистраль с гидроаккумулятором

илюстрирует эффект, создаваемый гидроаккумулятором, снижающим ω_s (возможность фазовой стабилизации при запаздывании и амплитудно-фазовой стабилизации при фазовом опережении, создаваемом ДУ).

11.3. Устойчивость в диапазоне частот колебаний компонентов топлива в баках

С влиянием подвижности жидкости на динамическую устойчивость столкнулись уже при создании первых жидкостных ракет (в частности, американских баллистических ракет первого поколения «Редстоун», «Юпитер», «Тор», «Атлас»); еще сильнее этот фактор проявился при разработке тяжелых РН «Сатурн-1», «Сатурн-1В», «Сатурн-5» и некоторых КА, имеющих на борту сравнительно большой запас жидкого топлива для разгона, коррекции орбиты и торможения при подлете к планете. На ракетах «Титан-2», «Сатурн-1», «Сатурн-1В» и, наконец, «Сатурн-5» в полной мере проявился и второй фактор — упругость корпуса.

Зависимость характерных частот колебаний первой ступени РН «Сатурн-5» от безразмерного времени полета $\tau = t/t_k$, приведенная на рис. 7.11, а, свидетельствует о том, что динамические свойства объекта в диапазоне частот, пропускаемом АС, в первую очередь определяются подвижностью жидкости в баках и упругостью корпуса. Это предопределяет возможность появления динамической неустойчивости на частотах, близких к частотам ко-

лебаний компонентов топлива в баках и упругих колебаний корпуса.

Следует подчеркнуть, что характер динамической устойчивости на активном участке полета может претерпевать довольно резкие изменения из-за переменности параметров объекта так что устойчивость может сменяться неустойчивостью «в малом», не успевающей привести к потере устойчивости объекта и переходящей снова в устойчивость в последующие моменты времени. Типичным примером такого рода явлений может служить неустойчивость РН «Сатурн-1» в канале крена на частоте колебаний жидкости в баках окислителя первой ступени, наблюдавшаяся в полете в диапазоне приблизительно с 100-й по 106-ю секунду. Одна из телеметрических записей двух параметров этого процесса, заимствованная из книги [50], была представлена на рис. 0.7.

Рассмотрим более детально типы неустойчивости, актуальные для объектов ракетно-космической техники. Наиболее характерна для верхних ступеней РН и для КА нестабилизируемость, связанная с противоречивостью требований к фазовой характеристики АС на двух близких частотах колебаний окислителя и горючего, а в некоторых случаях — еще и собственная динамическая неустойчивость, обусловленная наличием следящей силы (тяга ЖРД).

Для первых ступеней РН более характерна неустойчивость на частотах собственных колебаний жидкости в баках из-за невыполнения условий фазовой стабилизации на соответствующих частотах. В случае невозможности фазовой стабилизации задача обеспечения устойчивости в принципе может быть решена методами амплитудной стабилизации на основе исследования системы уравнений (4.74):

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a_{\zeta\zeta}\dot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\delta}\dot{\delta} + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + a_{\zeta\delta}\delta &= 0; \\ \ddot{\psi} + a'_{\psi\zeta}\dot{\zeta} + a'_{\psi\psi}\dot{\psi} + a_{\psi\psi}\psi + \sum_{n=1}^k (a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a'_{\psi s_n} \dot{s}_n) + a_{\psi\delta}\delta &= 0; \\ \ddot{s}_n + \beta_{s_n}\dot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n\zeta} \ddot{\zeta} + a_{s_n\psi} \ddot{\psi} + a'_{s_n\psi} \dot{\psi} &= 0; \\ \delta = \mathcal{L}(\psi) \quad (n=1, 2, \dots, k), \end{aligned} \quad (11.17)$$

где k — число баков.

При анализе стабилизируемости можно, как обычно, исходить из упрощенных уравнений

$$\begin{aligned}
& \ddot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + \sum_{n=1}^k a_{\zeta s_n} \ddot{s}_n + a_{\zeta\delta}\delta = 0; \\
& \ddot{\psi} + \sum_{n=1}^k a_{\psi s_n} \ddot{s}_n + a_{\psi\delta}\delta = 0; \\
& \ddot{s}_n + \omega_{s_n}^2 s_n + a_{s_n\zeta} \ddot{\zeta} + a_{s_n\psi} \ddot{\psi} = 0; \\
& \delta = \mathcal{L}(\psi) \quad (n=1, 2, \dots, k).
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Воспользуемся результатами, приведенными в разд. 10.3, для выделения в пространстве безразмерных конструктивных параметров объекта регулирования областей нестабилизируемости и собственной динамической неустойчивости.

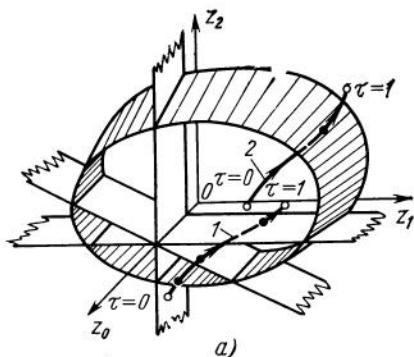
Примеры подобных областей для $k=2$ в параметрах z_0, z_1, z_2 и $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ (см. разд. 10.3) и линий состояния системы (см. разд. 8.7) приведены на рис. 11.6, 11.7 и 11.8. Параметром здесь служит безразмерное время $\tau = t/t_k$ (t_k — продолжительность активного участка полета). На тех же рисунках показаны двухмерные эквиваленты соответствующих областей устойчивости и линий состояния в плоскости z_1, z_2 или ζ_1, ζ_2 . В некоторых случаях имеет смысл рассматривать попарно баки первой и второй ступеней (при применении некриогенного горючего на второй ступени и попарного сближения частот).

Стабилизируемость и собственная динамическая устойчивость могут быть в этом случае исследованы методами, описанными в гл. 8 и разд. 10.3. Наконец, возможна ситуация, когда частоты во всех баках РН различны, а присоединенные массы малы в том смысле, что применима концепция раздельного рассмотрения всех баков разд. 9.2.

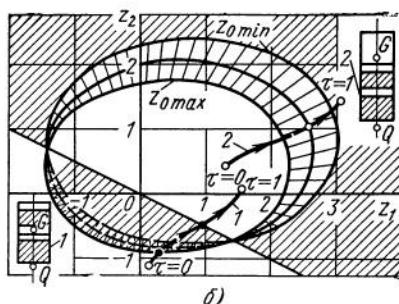
Оценим влияние некоторых факторов, прежде всего центровки, на возможность фазовой стабилизации типичных первых ступеней РН, полагая $n=1, 2$ и $n=3, 4$.

Используя формулы (10.47), получим следующее параметрическое уравнение линии состояния в координатах z_n для случая двух баков произвольной конфигурации ($n=0, 1, 2$):

$$\begin{aligned}
z_0^\circ &= -\frac{1}{l} (x_Q - x_G); \\
z_1^\circ &= -\frac{1}{l} (R_1 \bar{c}_1 + x_{o'_1} - x_G); \\
z_2^\circ &= -\frac{1}{l} (R_2 \bar{c}_2 + x_{o'_2} - x_G); \\
l &= \sqrt{\frac{J^\circ + J}{m^\circ + m}}; \quad x_G = x_{G_0} + \frac{\sum_{n=1}^2 \Omega_n}{m^\circ + m},
\end{aligned} \tag{11.19}$$

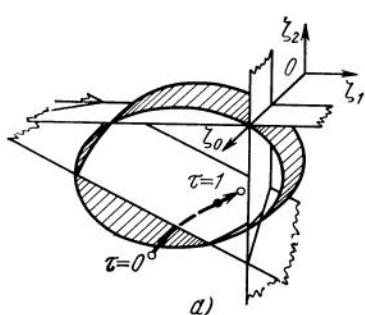


a)

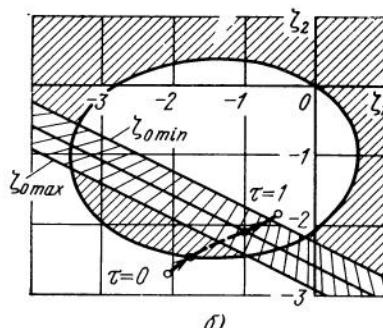


б)

Рис. 11.6. Трехмерное (*а*) и двухмерное (*б*) представления областей стабилизируемости и линий состояния системы жесткий корпус — жидкость в двух баках в параметрах z_0 , z_1 , z_2 (случай совпадающих парциальных частот)

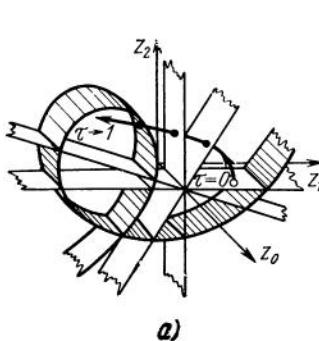


а)

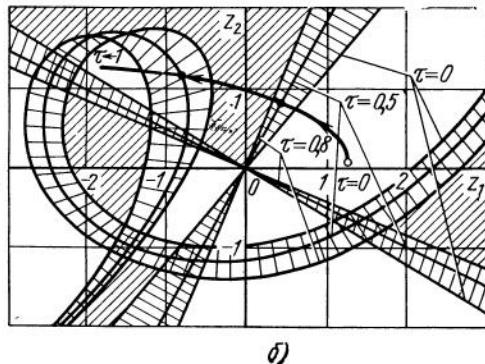


б)

Рис. 11.7. Трехмерное (*а*) и двухмерное (*б*) представления областей стабилизируемости и линий состояния системы (см. рис. 11.6) в параметрах ξ_0 , ξ_1 , ξ_2



а)



б)

Рис. 11.8. Трехмерное (*а*) и двухмерное (*б*) представления областей стабилизируемости и линий состояния системы жесткий корпус — жидкость в двух баках в параметрах z_0 , z_1 , z_2 (случай различных парциальных частот)

где в отличие от параметров, определяемых формулами (10.47), $x_{O_n'}$, x_Q , x_G и x_{G_0} — координаты характерных точек баков, мидицентра системы и центра масс, отсчитываемые от плоскости опорных пят (координаты $x_{O_n'}$ и x_Q не зависят от τ , а остальные зависят). Исключив x_G , получим

$$z_0^\circ = z_1^\circ - \frac{1}{l} (x_Q - x_{O_1'} - R_1 \bar{c}_1); \quad (11.20)$$

$$z_2^\circ = z_1^\circ - \frac{1}{l} (R_2 \bar{c}_2 - R_1 \bar{c}_1 + x_{O_2'} - x_{O_1'}).$$

При постоянном уровне жидкости в баках

$$\frac{dz_2^\circ}{dz_1^\circ} = 1 + \frac{\left(R_2 \bar{c}_2 - R_1 \bar{c}_1 + x_{O_2'} - x_{O_1'} \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \tau} \Big|_{x_G=\text{const}} + \frac{\partial l}{\partial x_G} \frac{dx_G}{d\tau} \right)}{l^2 \left(\frac{dz_1^\circ}{d\tau} \right)}. \quad (11.21)$$

При $l = \text{const}$ имеем $\frac{dz_2^\circ}{dz_1^\circ} \approx 1$, т. е. линия, определяемая уравнениями (11.19), — прямая, проекции которой на плоскости z_0 , z_1 и z_2 , z_3 — суть прямые, наклоненные под углом 45° к оси Oz_1 .

На рис. 11.9, *a* иллюстрируется один из вариантов анализа стабилизируемости. Здесь совмещены две плоскости (z_1 , z_2 и z_3 , z_4) и принято условно, что границы областей стабилизируемости в этих плоскостях совпадают. Как видно из этого рисунка, рассматриваемый гипотетический объект является стабилизируемым

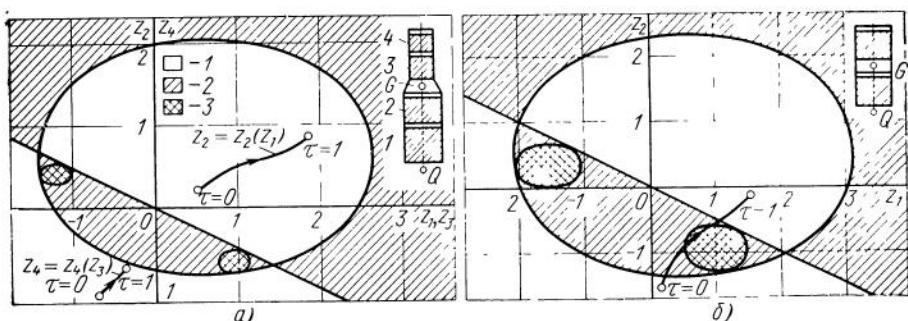


Рис. 11.9. Области стабилизируемости 1, нестабилизируемости 2, собственной динамической неустойчивости 3 и линии состояния системы жесткий корпус — жидкость в двух баках:

а — первая ступень двухступенчатой РН (попарное группирование баков с одинаковыми парциальными частотами колебаний жидкости); *б* — вторая ступень той же РН

на протяжении всего активного участка полета первой ступени. Более детальный анализ позволяет сформулировать в качестве требования к фазовой характеристики АС опережение по фазе на всех частотах системы σ_n^c , близких к ω_{s_n} ($n=1, 2, 3, 4$). Такая ситуация достаточно типична, и те же результаты получаются при более полном анализе с учетом того, что граница стабилизируемости на рис. 11.9, *a*, представленная эллипсом, может несколько отличаться в плоскостях z_1, z_2 и z_3, z_4 и, кроме того, деформируется при изменении параметра τ .

Следует подчеркнуть, что при малых значениях ζ ($\zeta \ll 1$), характерных для первых ступеней РН, области собственной динамической неустойчивости практически вырождаются в точки, так что неустойчивость этого типа для подобных объектов не актуальна.

На рис. 11.9, *a* хорошо видна еще одна особенность РН — критическими в смысле стабилизируемости обычно оказываются верхние баки, расположенные выше метацентра (если исключить некоторые особые случаи). На активном участке первой ступени при смещении метацентра системы вперед по мере выработки топлива из нижних баков изображающая точка смещается в координатах z_3, z_4 вдоль прямой, наклоненной под углом 45° к оси абсцисс (если пренебречь изменением радиуса инерции l при выгорании топлива), что приводит к уменьшению запасов стабилизируемости к концу активного участка первой ступени. Учет изменения радиуса инерции не изменяет этот вывод.

Если расстояние от метацентра до уровня жидкости в ближайшем к нему баке второй ступени ($n=3$) достаточно велико, как это обычно бывает, то стабилизируемость сохраняется до конца активного участка первой ступени, причем остается неизменным и требование к фазовой характеристике АС (опережение по фазе на соответствующих частотах). Однако если частота нулевой фазы АС остается неизменной, то условия для фазовой стабилизации и в этом случае становятся менее благоприятными по мере выработки топлива, так как квадрат частоты собственных колебаний жидкости во всех баках возрастает приблизительно пропорционально $j \approx \frac{P}{m^\circ + m}$ и, следовательно, фазовое опе-

режение, создаваемое АС на этих частотах, монотонно убывает. Отсюда следует, что, хотя наиболее критичным в смысле стабилизируемости объектов типа первых ступеней РН является ближайший к метацентру бак второй степени ($n=3$), критичным в смысле возможности фазовой стабилизации является тот бак, в котором частота собственных колебаний жидкости наибольшая (например, с $n=4$). Однако в конечном счете для динамической устойчивости современных РН с tandemной компоновкой, представленной на рис. 1.1, доминирующую роль часто играют два нижних бака первой ступени, для которых характерны близкие на большой части активного участка частоты собственных коле-

баний жидкости и сильные инерционные связи этих колебаний с колебаниями корпуса вследствие сравнительно больших присоединенных масс (см. рис. 6.21). Это позволяет положить при приближенном анализе динамической устойчивости в диапазоне частот колебаний жидкости в уравнениях (11.7) и (11.8) $k=2$. В частности, в случае РН типа «Сатурн-5» это оправдано тем, что баки окислителя второй и третьей ступеней имеют более сложную конфигурацию, чем первой, что приводит к более высоким частотам колебаний жидкости и меньшим присоединенным массам. То же относится и к бакам горючего верхних ступеней, причем отличие присоединенных масс усугубляется тем, что массовая плотность горючего (водород), применяемого на второй и третьей ступенях, на порядок меньше плотности углеводородного горючего первой ступени (уже одно это приводит к меньшим на порядок присоединенным массам).

Однако для верхних ступеней, имеющих два бака для компонентов основного топлива (вторая ступень для объекта с $k=4$, третья — для объекта с $k=6$ и т. д.), картина резко меняется. Здесь при решении задачи динамической устойчивости на передний план выступает стабилизируемость объекта регулирования, что хорошо видно на рис. 11.9, б, где представлена типичная картина взаимного расположения областей стабилизируемости и линий состояний системы для объекта с двумя цилиндрическими баками с равными парциальными частотами колебаний жидкости.

Как видно из рис. 11.9, б, линия состояний пересекает область нестабилизируемости, что характерно для объектов с промежуточным начальным положением метацентра (между свободными поверхностями жидкости в баках, на сравнительно малом расстоянии от одной из этих поверхностей). Возможность попадания линии состояний в область собственной динамической неустойчивости также не исключена, поскольку параметр ζ для верхних ступеней относительно больше, чем для нижних. Однако наиболее актуальна эта проблема для объектов типа космических аппаратов с ЖРД, имеющих малое удлинение корпуса, а следовательно, сравнительно большие области собственной динамической неустойчивости в параметрах z_1, z_2 .

Попадание параметров объекта в такую область осложняет решение задачи стабилизации, поскольку не только становится невозможной фазовая стабилизация, но резко затрудняется амплитудная стабилизация (см. разд. 8.4, 8.6). Большую роль играет в этом смысле геометрическая конфигурация баков. Этот вопрос подробно исследован в работе [43].

На рис. 11.10 в параметрах z_1, z_2 представлены области стабилизируемости и собственной динамической устойчивости для нескольких гипотетических объектов типа последних ступеней РН с различными компоновочными схемами, заимствованные из этой работы. Области нестабилизируемости заштрихованы, собственная динамическая неустойчивость имеет двойную штриховку.

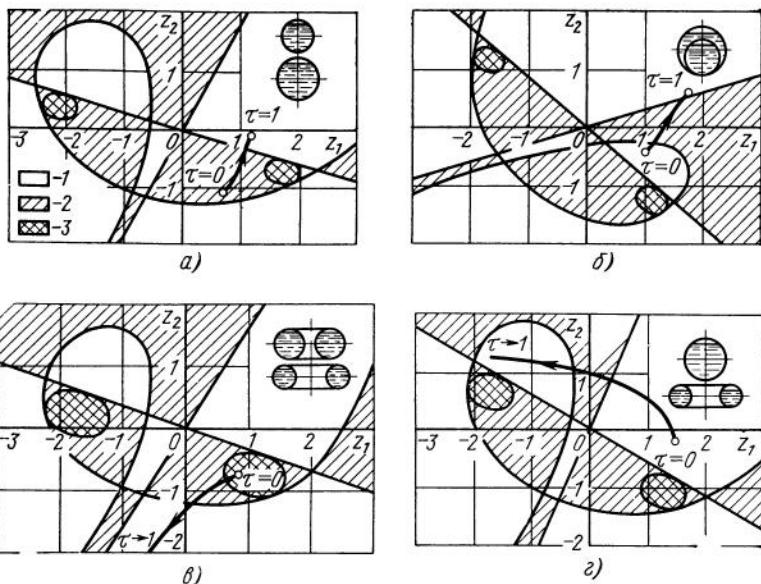


Рис. 11.10. Области стабилизируемости 1, нестабилизируемости 2, собственной динамической неустойчивости 3 и линии состояния системы жесткий корпус — жидкость в двух баках:
 $a - b$ — сферические баки; c — тороидальные; d — комбинация сферического и тороидального баков

Анализ кривых, представленных на этом рисунке, свидетельствует о том, что нестабилизируемость на том или ином участке полета с работающим маршевым ЖРД типична для объектов с баками сложной конфигурации. При этом предпочтительнее баки, характеризующиеся стремлением частоты собственных колебаний жидкости к константе при уменьшении ее относительной глубины (рис. 11.10, a , b). Худшими характеристиками обладают баки, у которых частота собственных колебаний жидкости стремится к нулю при $h \rightarrow 0$; для них практически невозможно избежать пересечения линией состояния основной области нестабилизируемости, а иногда и области собственной динамической неустойчивости (см. рис. 11.10, c , d).

Одним из наиболее реальных средств улучшения динамических свойств КА как объекта регулирования после окончательного выбора геометрической конфигурации баков является изменение положения метацентра системы относительно свободных поверхностей жидкости в баках, что достигается либо передней, либо задней центровкой «сухого» объекта. Нетрудно видеть, что в координатах z_1 , z_2 этому соответствует смещение линии состояния объекта, при котором концы ее скользят вдоль линий, совпадающих (если пренебречь изменением радиуса инерции объекта

l при изменении центровки) с прямыми, наклоненными под углом 45° к оси Oz_1 , как это схематически показано на рис. 11.11, *a* (см. формулу (11.21)). Задней центровке при этом соответствует смещение в отрицательном направлении осей Oz_1 и Oz_2 , передней — в положительном направлении.

На рис. 11.11, *a* показаны и области собственной динамической неустойчивости; изменение эллиптической границы области стабилизируемости вследствие изменения параметра z_0 при изменении центровки в первом приближении не учитывается. Из рис. 11.11, *a* видно, что только на переднюю центровку имеется ограничение, связанное с приближением к эллиптической границе области стабилизируемости. Если учесть влияние изменения z_0 при изменении центровки и фиксированном положении оси подвески управляющих двигателей, то этот результат остается в силе, но ограничение на переднюю центровку становится более жестким.

С другой стороны, на заднюю центровку существует ограничение, связанное с управляемостью, т. е. необходимостью уравновесить при предельно допустимом отклонении управляющих органов максимальный возмущающий момент. Учитывая все эти обстоятельства, можно для объекта с выбранными конструктивно-компоновочной схемой, конфигурацией и расположением баков построить область допустимых центровок при отсутствии топлива в баках, которая схематически представлена на рис. 11.11, *b*. Эта область не заштрихована.

Удовлетворить полученным требованиям к центровке «сухого» объекта типа верхней ступени РН или КА, что гарантировало

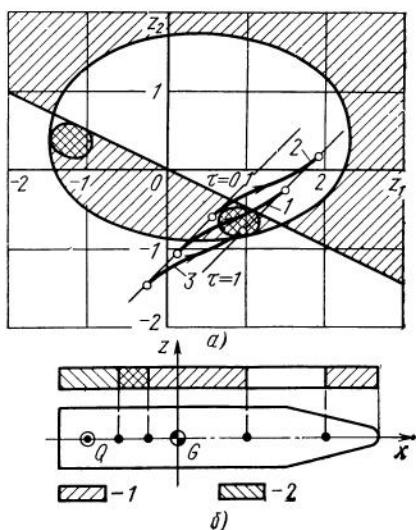


Рис. 11.11. Влияние изменения центровки на стабилизируемость и собственную динамическую устойчивость РН с жестким корпусом и двумя баками:

a — картина в параметрах z_1 , z_2 ; *b* — допустимые положения метacentра по длине корпуса; *1* — ограничение на центровку по стабилизируемости, *2* — ограничение на центровку по управляемости

бы стабилизируемость и управляемость этих объектов на всем активном участке полета, а следовательно, и фазовую стабилизацию, чрезвычайно трудно. Однако, как видно из рис. 11.11, б, меняя центровку, в принципе можно, как минимум, исключить собственную динамическую неустойчивость и передвинуть область нестабилизируемости к началу или к концу активного участка.

Рассмотрим для иллюстрации гипотетический объект с параметрами, близкими к первой ступени РН «Сатурн-5», принимая во внимание два нижних бака (окислитель и горючее). В табл. 11.2 приведена сводка основных исходных данных, использованных при расчете, в функции параметра $\tau = \frac{t}{t_k}$.

Таблица 11.2

τ	$m^\circ + m$, кг s^2/m	j , m/s^2	t , м	x_G , м
0	304 460	11,38	16,71	30,25
0,25	248 710	15,29	17,91	30,76
0,50	192 560	20,36	19,70	32,13
0,75	136 830	29,38	21,71	36,05

В табл. 11.3 приведены характерные безразмерные параметры, вычисленные с использованием частот и присоединенных масс, приведенных на рис. 6.21.

Таблица 11.3

τ	ζ	z_0	γ	k	x	z_1°	z_2°
0	0,0613	1,64	0,008	2,204	-6,01	1,02	-0,177
0,25	0,157	1,55	0,062	1,593	0,11	1,01	-0,019
0,50	0,149	1,48	0,076	1,510	0,40	1,06	0,26
0,75	0,175	1,53	0,087	1,804	1,51	1,15	0,52

На рис. 11.12, *a, б, в, г* представлены области стабилизируемости и нестабилизируемости и положение точки (z_1°, z_2°) , изображающей состояние системы (внутри кружка) для последовательных значений τ , построенные непосредственно на ЭВМ БЭСМ-6 с использованием системы БЭСМ — АЛГОЛ.

Как видно из рис. 11.12, нестабилизируемость наблюдается только в начальный момент, когда она не опасна, так как частоты σ_1° и σ_2° резко различаются. Во всех остальных случаях система стабилизируема, причем с помощью критериев разд. 9.2 можно показать, что для обеспечения устойчивости АС должен создавать фазовое опережение на соответствующих частотах.

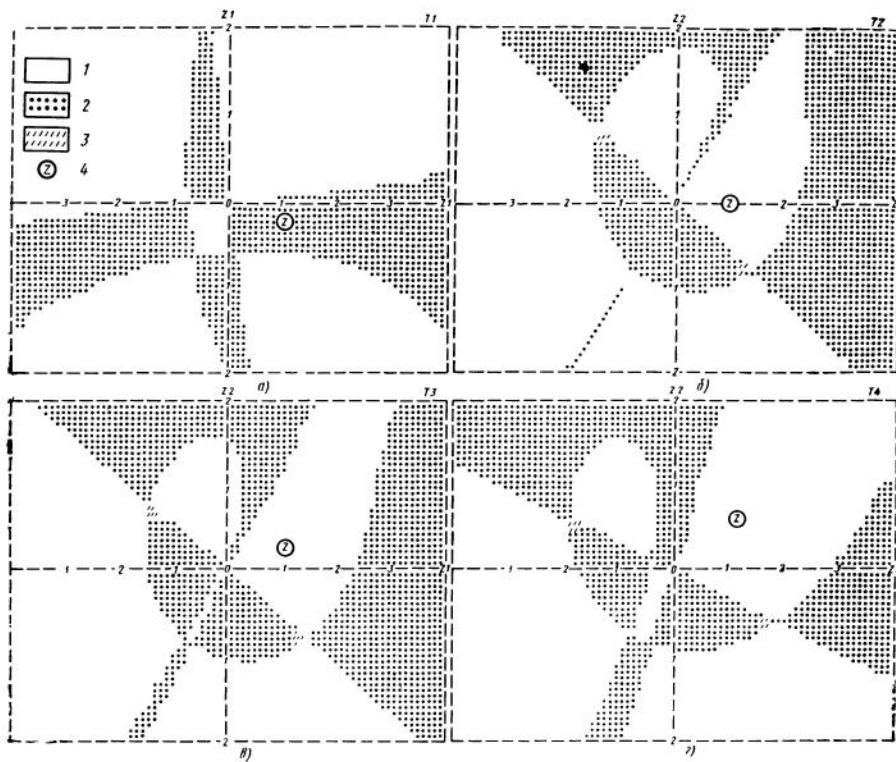


Рис. 11.12. Области стабилизуемости 1, нестабилизуемости 2, собственной динамической неустойчивости 3 и точка 4 (характеризующая состояние системы), построенные на ЭВМ для первой ступени РН «Сатурн-5» (жесткий корпус с баками окислителя и горючего отделяющейся части):

a — $\tau=0$; *b* — $\tau=0,25$; *c* — $\tau=0,50$; *d* — $\tau=0,75$

В случае невозможности этого по тем или иным причинам, как это имеет место на РН «Сатурн-5», о чем говорится ниже, или нестабилизуемости объекта на близких частотах обеспечить устойчивость можно методами амплитудной или амплитудно-фазовой стабилизации. Соответствующий анализ может быть проведен в плоскости z_1, z_2 на основе уравнений (11.17) по схеме, описанной в разд. 11.2, или путем непосредственного D -разбиения в пространстве тех или иных параметров, например β_{s_1}, β_{s_2} .

Однако здесь мы ограничимся рассуждениями качественного характера. Пусть, например, в некоторой точке активного участка траектории имеет место нестабилизуемость, причем, как это обычно бывает, на частоте разомкнутой системы σ_1^0 , соответствующей частоте жидкости в нижнем баке, требуется фазовое опережение, а на частоте σ_2^0 , соответствующей частоте жид-

кости в верхнем баке,— запаздывание. Соответствующие части амплитудно-фазовых характеристик объекта представлены на рис. 11.13, а. Охват точки $+1$ нижней петлей частотной характеристики, соответствующей верхнему баку, приводит к динамической неустойчивости замкнутой системы. Однако если изменить центровку в соответствии с рис. 11.11, б или резко уменьшить диаметр этой петли, то замкнутая система будет устойчива (рис. 11.13, б, в). Здесь мы имеем классический пример обеспечения возможности достижения фазовой (рис. 11.13, б) или амплитудно-фазовой стабилизации (рис. 11.13, в).

Последний вариант решения задачи обеспечивается применением специальных демпферов колебаний жидкости, резко увеличивающих декремент ее колебаний [20].

В гл. 6 были описаны методы определения характеристик демпферов в виде радиальных и кольцевых ребер и учета этих характеристик при составлении уравнений возмущенного движения. Эти устройства позволяют повысить естественное демпфирование колебаний жидкости примерно на два порядка и решить тем самым задачу амплитудной стабилизации на одной из частот σ_s^0 путем соответствующего увеличения параметра a_s^0 , так как при этом диаметр петли на амплитудно-фазовой характеристике объекта уменьшается, примерно во столько же раз (см. разд. 8.3). Когда уровень жидкости остается постоянным (например,

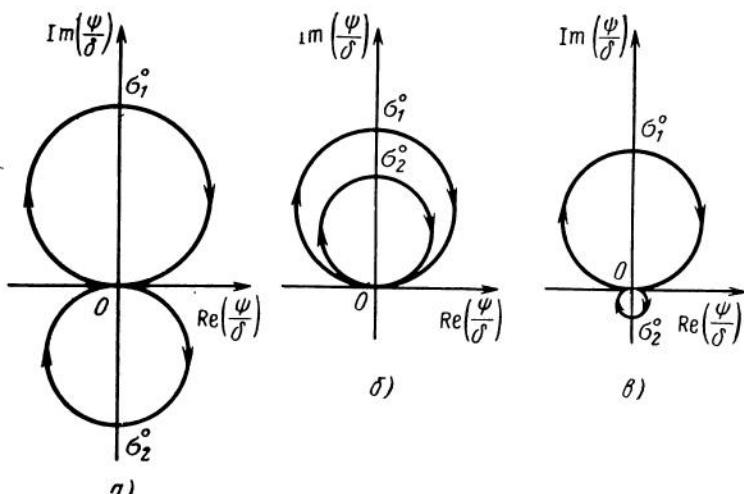


Рис. 11.13. Качественная картина амплитудно-фазовых характеристик разомкнутой системы корпус — жидкость в двух баках в окрестности частот собственных колебаний жидкости:

а — в области недопустимых центровок (см. рис. 11.11, б); б — в области допустимых центровок; в — в области недопустимых центровок (неустойчивость), но с применением демпфера колебаний жидкости в баке, которому соответствует частота разомкнутой системы σ_2^0 .

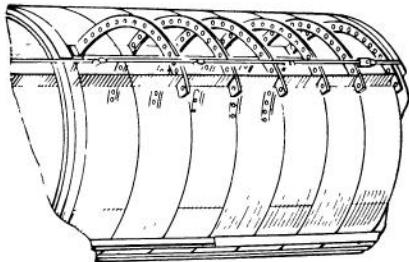


Рис. 11.14. Кольцевые демпферы колебаний жидкости в баке окислиителя баллистической ракеты «Атлас D»

в баках второй ступени на активном участке полета первой ступени РН) или амплитудная стабилизация требуется в течение короткого времени (верхние ступени, не стабилизируемые в начале или в конце активного участка), выгодно применять демпферы в виде одного или нескольких кольцевых ребер (рис. 11.14 и рис. 1.2). Если необходимо резко повысить собственное демпфирование в широком диапазоне изменения уровня жидкости в баке (верхняя ступень РН или КА, не стабилизируемые на большей части активного участка траектории), предпочтительны демпферы в виде радиальных ребер. Потребные характеристики демпферов можно в первом приближении определить по формулам гл. 6, если задаться некоторой предельно допустимой амплитудой колебаний свободной поверхности жидкости у стенки n -го бака s_{n0}^* , а следовательно (согласно уравнениям возмущенного движения), и амплитудой угловых колебаний корпуса ψ^* и управляющих органов (δ_0^*). Пренебрегая при применении демпферов колебаний жидкости в качестве исходного приближения всеми диссипативными эффектами, кроме собственного демпфирования, можно положить

$$a_s^\circ \approx -\frac{1}{2} \sigma_s^\circ \tilde{\beta}_s \sqrt{s_{s0}^*}$$

и определить потребное значение $\tilde{\beta}_s$ в функции $A(\sigma_s^\circ)$. Далее при помощи формул, устанавливающих зависимость коэффициентов, аналогичных β_s , от характерных параметров демпфера (число ребер, относительная ширина и т. д., см. гл. 6) можно определить потребные геометрические характеристики демпфера. То, что диссипативные эффекты, создаваемые радиальными и кольцевыми ребрами, приблизительно пропорциональны корню квадратному из амплитуды колебаний жидкости, является благоприятным фактором, способствующим формированию в системе устойчивого предельного цикла. Более точное определение параметров этого цикла в функции времени полета требует более детальных исследований, описанных в гл. 12 книги [20], включающих интегрирование системы уравнений возмущенного движения (11.18) с учетом нелинейности диссипативных сил при наличии в баках радиальных или кольцевых ребер.

Обширные материалы по демпфирующим устройствам приведены в монографии [50]. В книгах [20, 21] дана сводка результатов, опубликованных в литературе и полученных авторами.

В заключение заметим, что в случае собственной динамической неустойчивости объекта регулирования влияние демпфирования является значительно более сложным, в частности, увеличение демпфирования только в одном из баков усугубляет неустойчивость системы, расширяя область неустойчивости. Для амплитудной стабилизации объекта, обладающего собственной динамической неустойчивостью, необходимо резкое увеличение коэффициентов демпфирования в обоих баках [45, 46]. Именно поэтому целесообразно исключить собственную динамическую неустойчивость объекта регулирования изменением компоновки или центровки, о чем говорилось выше.

11.4. Устойчивость в диапазоне частот поперечных колебаний корпуса

Рассмотрим задачу об устойчивости замкнутой системы в диапазоне близких между собой частот собственных поперечных колебаний корпуса в рамках концепции, сформулированной в предыдущем разделе (спектры учитываемых частот колебаний жидкости и упругих колебаний корпуса не пересекаются). Эта задача особенно актуальна для тяжелых носителей КА со сравнительно низкими частотами собственных упругих колебаний корпуса, особенно для первых степеней.

Уравнения возмущенного движения, соответствующие такой постановке задачи, получим из уравнений (4.74) в результате пренебрежения силами, связанными с колебаниями жидкости (низкие частоты), собственными колебаниями ЖРД (высокая частота), а также правыми частями этих уравнений и системой БС:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a_{\zeta\zeta}'\dot{\zeta} + a_{\zeta\psi}'\dot{\psi} + a_{\zeta\psi}\psi + a_{\zeta\delta}\delta &= 0; \\ \ddot{\psi} + a_{\psi\zeta}'\dot{\zeta} + a_{\psi\psi}'\dot{\psi} + a_{\psi\psi}\psi + a_{\psi\delta}\delta &= 0; \\ \ddot{q}_j + \beta_{q_j}\dot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + a_{q_j\delta}\delta &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi^\circ); \\ \psi^\circ &= \psi - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x^\circ) q_j \quad (j=1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Здесь m — число учитываемых форм упругих поперечных колебаний с близкими частотами.

Анализ стабилизируемости в диапазоне частот ω_{q_j} ($j = 1, 2, \dots, m$) может быть проведен с использованием более

простой системы уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} + a_{\zeta\psi}\dot{\psi} + a_{\zeta\delta}\delta &= 0; \\ \ddot{\psi} + a_{\psi\delta}\delta &= 0; \\ \ddot{q}_j + \omega_{q_j}^2 q_j + a_{q_j\delta}\delta &= 0; \\ \delta &= \mathcal{L}(\psi^\circ); \\ \psi^\circ &= \psi - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x^\circ) q_j \\ (j &= 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Рассмотрим задачу о стабилизируемости на частотах ω_{q_s} и $\omega_{q_{s+1}}$ в той же постановке, что и при исследовании устойчивости в диапазоне частот собственных колебаний жидкости в баках, не накладывая никаких ограничений на близость этих частот.

Воспользуемся системой уравнений (11.23), характеристическое уравнение которой можно представить в виде

$$\Phi_0(p^2) + \mathcal{L}(p)\Psi_0(p^2) = 0, \quad (11.24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(p^2) &= p^2 \prod_{j=1}^m (p^2 + \omega_{q_j}^2); \\ (11.25) \end{aligned}$$

$$\Psi_0(p^2) = a_{\psi\delta} \prod_{j=1}^m (p^2 + \omega_{q_j}^2) - p^2 \sum_{j=1}^m a_{q_j\delta} a_{\psi q_j} \prod_{i=1}^{m'} (p^2 + \omega_{q_i}^2).$$

Знак ' означает пропуск индекса $i=j$.

Общее условие стабилизируемости разд. 8.6, заключающееся в чередовании нулей функций $\Phi_0(-\omega^2)$ и $\Psi_0(-\omega^2)$, можно записать в форме

$$\xi_j > 0 \text{ или } \xi_j < 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (11.26)$$

где ξ_j определяется с помощью вспомогательного соотношения

$$\xi_j = -\frac{\lambda \Psi_0(-\sigma_j^2)}{2\Phi'_0(-\sigma_j^2)} \quad (11.27)$$

(λ — произвольная положительная константа).

В рассматриваемом случае $\sigma_j^\circ = \omega_{q_j}$. Если приписать λ значение $\omega_{q_j}^2$, то в силу формул (11.25) и (11.27) получим

$$\xi_j = \frac{a_{q_j} a_{\psi q_j} \prod_{i=1}^m (-\omega^2 + \omega_{q_i}^2)}{2\omega_{q_j}^2 \left[\frac{d}{dp^2} \prod_{i=1}^m (p^2 + \omega_{q_i}^2) \right]_{p^2 = -\omega_{q_j}^2}} = \frac{a_{q_j} a_{\psi q_j}}{2\omega_{q_j}^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{e_j^\circ \eta'_j(x^\circ)}{2\eta_j(x_Q)} & \text{(управление с помощью силы } P^\delta \delta) \\ \frac{e_j^\circ I^2 \eta'_j(x^\circ) \eta'_j(x_P)}{2\eta_j^2(x_Q)} & \text{(управление с помощью пары сил } M^\delta \delta). \end{cases} \quad (11.28)$$

Параметры e_j° определяются формулами (9.48) и (9.49). Неравенства (11.26) совпадают в силу выражений (11.28) с неравенствами, вытекающими из формул (9.43), (9.48) и (9.49). Таким образом, результаты, полученные в разд. 9.3, остаются в силе и при сближении частот ω_{q_j} .

Из условий (11.26) — (11.28) ясно, что правильный выбор расположения датчика углового положения по длине корпуса с учетом координат пучностей форм колебаний $\eta_j(x)$ является наиболее эффективным средством обеспечения стабилизируемости объекта в диапазоне частот упругих колебаний корпуса.

Однако имеются ограничения конструктивного характера, связанные с возможностью размещения приборного отсека с гиростабилизированной платформой (а следовательно, и датчиков углового положения) только в определенных местах корпуса, в частности, достаточно далеко от двигательной установки. С этой точки зрения задача решается значительно проще при применении в контуре управления одного или нескольких датчиков угловой скорости (ДУС), которые крепятся непосредственно к корпусу, так что выбор соответствующих сечений существенно облегчается.

Рассмотрим случай одного ДУС. Уравнение управления приобретает при этом форму

$$\delta = \mathcal{L}(\psi^\circ) + \mathcal{L}_1(\dot{\psi}_1);$$

$$\begin{aligned} \psi^\circ &= \psi - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x^\circ) q_j; \\ \dot{\psi}_1 &= \dot{\psi} - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x_1^\circ) \dot{q}_j, \end{aligned} \quad (11.29)$$

где m — число учитываемых форм поперечных колебаний корпуса. Координата x_1° сечения корпуса, где расположен ДУС, является новым независимым параметром, рациональный выбор ко-

торого упрощает решение задачи фазовой стабилизации системы на частотах упругих колебаний корпуса.

Обычно можно считать решение удовлетворительным, если выбор положения ДУС позволяет обеспечить стабилизуемость объекта на частотах одной-двух первых форм колебаний, что создает принципиальную возможность фазовой стабилизации на соответствующих частотах путем деформации в нужном направлении фазо-частотной характеристики АС (см. ниже). Поскольку характерная частота системы объект как твердое жесткое тело — АС обычно в несколько раз ниже частоты первого тона поперечных колебаний корпуса, при изучении динамической устойчивости системы в диапазоне управляемых частот собственных упругих колебаний корпуса можно заменить уравнение (11.29) следующим приближенным:

$$\delta = \mathcal{L}(\dot{\psi}^o); \dot{\psi}^o = \dot{\psi} - \sum_{j=1}^m \eta'_j(x^o) \dot{q}_j \quad (11.30)$$

(здесь опущен индекс «1» у оператора \mathcal{L} и параметров x^o и $\dot{\psi}^o$, так что x^o теперь координата ДУС).

В основе перехода от уравнения (11.29) к (11.30) лежат те же соображения, что и при пренебрежении каналами НС и БС (см. разд. 9.1). При этом критерии (11.26) и (11.28) остаются в силе, так что можно разбить корпус по длине на области, в которых может быть размещен ДУС, исходя, например, из выполнения условий $\eta'_j(x^o) > 0$ на всем отрезке $0 \leq t \leq 1$. В этом случае условие фазовой стабилизации каждого из тонов сводится к требованию запаздывания, которому легче удовлетворить для реальных значений ω_{q_j} , характерных для тяжелых носителей.

На рис. 11.15 показаны соответствующие области для каждой из первых двух форм собственных колебаний корпуса гипотетического носителя класса «Сатурн-5», представленных схематически для $t=0; 0.5; 1.0$, а также область, в которой выполняется условие стабилизуемости двух первых форм колебаний $\eta'_1(x^o) > 0, \eta'_2(x^o) < 0$ при управлении поворотными двигателями с осью подвески, проходящей через точку Q , и $\eta_1(x_Q) > 0, \eta_2(x_Q) < 0$.

Оптимальный путь решения задачи устойчивости заключается в фазовой стабилизации основных гармоник (обычно $j=1$ или $j=1, 2$) и амплитудной стабилизации высших гармоник. Последняя задача облегчается тем, что коэффициент демпфирования β_{q_j} для этих гармоник возрастает приблизительно пропорционально частоте, а динамический коэффициент усиления автомата стабилизации падает, что делает реальным выполнение условий (9.47) или по крайней мере (9.46) для $j \geq 3$, а иногда и для $j \geq 2$.

На рис. 11.16 представлена схематически часть амплитудно-

фазовой частотной характеристики разомкнутой системы без автомата стабилизации (ϕ^0/δ) в окрестности первых двух частот собственных упругих колебаний корпуса при различном расположении ДУС.

Следует заметить, что чем ниже частоты собственных упругих колебаний корпуса, тем сложнее решение задачи фазовой стабилизации (см. разд. 9.4).

Возвращаясь к проблеме обеспечения динамической устойчивости замкнутой системы в диапазоне частот собственных упругих колебаний корпуса, пропускаемых исполнительными элементами системы стабилизации (сервопривод), методами, относящимися к объекту регулирования, следует рассмотреть еще две возможности:

- 1) увеличение коэффициента демпфирования колебаний корпуса;

- 2) увеличение жесткости конструкции корпуса и кинематической цепи, связывающей вал рулевой машины с сервоприводом.

Идея первого из методов основана на том, что, как показано выше, диаметр петель амплитудно-фазовой характеристики объекта регулирования на собственных частотах системы, близких к частотам собственных упругих колебаний корпуса, приблизительно

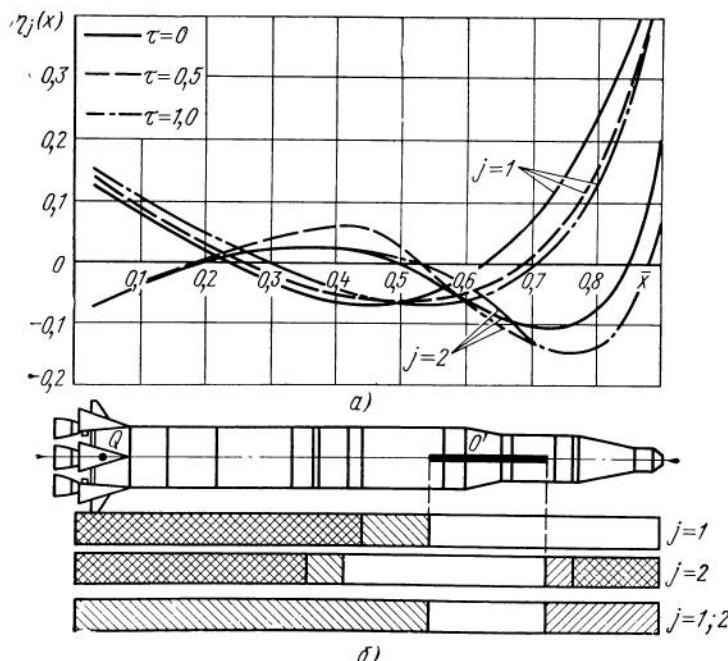


Рис. 11.15. Первые две формы поперечных колебаний корпуса первой ступени РН класса «Сатурн-5» (а) и положения ДУС по длине корпуса (б), допустимые исходя из фазовой стабилизации этих форм

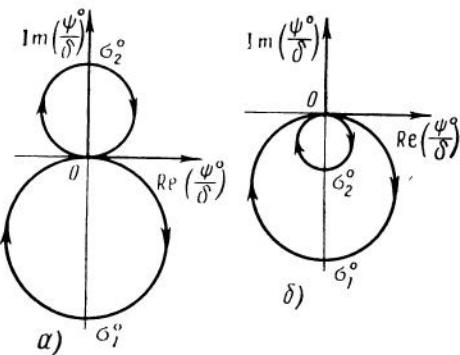


Рис. 11.16. Качественная картина амплитудно-фазовых характеристик упругого корпуса как разомкнутой системы в окрестности первых двух частот собственных колебаний при различном расположении ДУС:

a — вне благоприятной зоны (см. рис. 11.15, б); *б* — в пределах этой зоны

но обратно пропорционален соответствующим коэффициентам собственного демпфирования. Поскольку конструкционное демпфирование играет на этих частотах главную роль в общем балансе диссипативных сил, увеличение конструкционного демпфирования вдвое примерно во столько же раз уменьшает амплитудно частотную характеристику объекта на соответствующей частоте. Это могло бы облегчить амплитудную стабилизацию на данной частоте и улучшить качество переходных процессов при свободных упругих колебаниях корпуса. Трудность здесь заключается в том, что в отличие от создания демпферов колебаний жидкости разработка демпферов упругих колебаний корпуса представляет трудно разрешимую инженерную задачу. То же относится к искусственноному увеличению конструкционного демпфирования.

Второй метод — увеличение жесткости корпуса — может давать только локальный эффект, так как сколько-нибудь кардинальное увеличение изгибной жесткости объекта с выбранными линейными размерами невозможно без ухудшения массовых характеристик, пока не будут созданы конструкционные материалы с совершенно новыми свойствами.

Увеличение жесткости кинематической цепи, связывающей вал рулевой машины с маршевым двигателем, когда последний является исполнительным элементом системы стабилизации, достаточно реально и позволяет путем чисто конструктивных изменений (в том числе и уменьшения люфтов) повысить частоту собственных колебаний двигателя относительно оси подвеса и отодвинуть ее тем самым от частот наиболее опасных первых гармоник упругих колебаний корпуса [31].

Все мероприятия, перечисленные выше, требуют в зависимости от конкретной ситуации применения в автомате стабилизации специальных корректирующих цепей, включающих антирезонансные фильтры, способствующие дополнительному подавлению паразитных сигналов в диапазоне частот собственных упругих колебаний корпуса. Это тем более важно, чем менее достоверна

априорная информация о частотах и формах упругих колебаний корпуса и коэффициентах конструкционного демпфирования.

Оптимальная стратегия решения задач стабилизации тяжелых ракет-носителей при современном качестве априорной информации о динамических свойствах конструкции и применении автомата стабилизации «классической схемы», основанного на аналоговых принципах, заключается, по-видимому, в следующем (см., в частности, работу [62]).

1. Максимально возможная точность определения доверительных интервалов для частот, форм, обобщенных масс и коэффициентов демпфирования первых одной-двух гармоник с учетом возможных эксплуатационных разбросов и методических ошибок, с требуемым уровнем доверительной вероятности, на основе использования расчетных и экспериментальных методов.

2. Фазовая стабилизация этих гармоник путем рационального выбора сечений для размещения ДУС на основе полученной априорной информации об этих гармониках.

3. Амплитудная стабилизация высших гармоник упругих колебаний корпуса с помощью корректирующих цепей автомата стабилизации.

Целый ряд перспективных методов решения задач такого рода описан в обзоре [47]. Там же обсуждается и ряд активных методов управления упругими колебаниями с помощью автомата стабилизации, которых мы здесь не касались.

Говоря о системе стабилизации РН «Сатурн-5», автор работы [62] отмечает, что по соображениям, изложенным выше, на первой ступени была осуществлена фазовая стабилизация двух первых гармоник упругих поперечных колебаний корпуса, а на второй ступени — фазовая стабилизация только первой гармоники и амплитудная стабилизация всех высших гармоник как на первой, так и на второй ступенях. Фазовую стабилизацию удалось обеспечить благодаря размещению датчиков угловых скоростей в двух сечениях корпуса третьей ступени (в одном — для стабилизации первой ступени, в другом — второй и третьей). Кроме того, применены демпферы колебаний жидкости в большинстве баков; необходимость в демпферах при полете первой ступени, по-видимому, объясняется невыполнением условий фазовой стабилизации на соответствующих частотах. Последнее можно объяснить неблагоприятным изменением фазовой характеристики автомата стабилизации в области низких частот вследствие отрицательного влияния корректирующих цепей, обеспечивающих амплитудное подавление высокочастотных гармоник. В работе [62] указывается, что проектирование системы стабилизации РН «Сатурн-5» велось так, чтобы исключить динамическую неустойчивость даже на малом интервале времени. Видимо, опыт, накопленный на первых объектах серии «Сатурн» («Сатурн-1» и «Сатурн-1В»), сыграл в этом смысле определенную роль.

В то же время следует отметить, что в отношении продольных колебаний РН «Сатурн-5» этот принцип оказался нарушенным, по-видимому, в результате просчета проектировщиков, что потребовало дополнительных исследований уже в процессе летно-конструкторских испытаний. Интересно подчеркнуть различную направленность конструктивных мероприятий, оказавшихся наиболее эффективными для ликвидации динамической неустойчивости в плоскостях стабилизации и при колебаниях в направлении продольной оси.

В первом случае задача решается методом амплитудной стабилизации посредством искусственного резкого увеличения демпфирования собственных поперечных колебаний жидкости в баке (с малым изменением частоты), во втором — методом фазовой стабилизации на частотах колебаний жидкости и методом амплитудно-фазовой на частотах колебаний корпуса путем искусственного уменьшения частоты собственных продольных колебаний жидкости в магистрали (с малым изменением демпфирования).

Все сказанное выше относилось к аналоговым системам стабилизации или дискретным системам с периодом квантования $T_0 = \frac{2\pi}{\sigma_0}$, работающим в диапазоне частот σ_s° , в котором па-

раметр $\zeta_s^\circ = \frac{\pi\sigma_s^\circ}{\sigma_0}$ (см. разд. 8.5) значительно меньше единицы.

Рассмотрим теперь некоторые специфические особенности фазовой стабилизации при применении дискретной системы управления с БЦВМ, когда это условие не выполняется.

Воспользуемся формулой (8.91) для вещественных и мнимых частей корней характеристического уравнения замкнутой системы объект — АС с БЦВМ, предполагая равным нулю суммарный фазовый сдвиг, создаваемый сервоприводом и дискретным алгоритмом стабилизации (сверху опережения на $\frac{\pi}{2}$, создаваемого ДУС). Примем дополнительно в формуле (8.91)

$$\frac{A\gamma_{0s}}{\sigma_s^\circ} \ll 1,$$

тогда $\alpha_s \approx \alpha_s^\circ + \frac{A\gamma_{0s}}{\zeta_s^\circ} \cos^2 \zeta_s^\circ \operatorname{tg} \zeta_s^\circ;$

$$\sigma_s \approx \frac{\sigma_0}{\pi} \operatorname{arctg} |\operatorname{tg} \zeta_s^\circ|. \quad (11.31)$$

Рассмотрим две формы упругих колебаний, которым соответствуют значения собственных частот σ_i° и σ_j° , близкие, но допускающие возможность применения формул (11.31) (см. разд. 8.4 и 8.5):

$$\begin{aligned}\sigma_i^o &\approx \frac{1}{4} \sigma_0; \quad \sigma_j^o \approx \frac{3}{4} \sigma_0; \\ a_i = \frac{\delta\sigma_i^o}{\pi} &\approx \frac{\delta\sigma_0}{4\pi}; \quad a_j = \frac{\delta\sigma_j^o}{\pi} \approx \frac{3\delta\sigma_0}{4\pi};\end{aligned}\quad (11.32)$$

$$\operatorname{sign} \gamma_{0i} = \operatorname{sign} \gamma_{0j}$$

(δ — логарифмический декремент колебаний, одинаковый в первом приближении для обеих форм).

При применении дискретной системы стабилизации с БЦВМ в силу формул (11.31) имеем

$$\begin{aligned}\sigma_j^o &\approx \sigma_i \approx \frac{1}{4} \sigma_0; \quad a_j^o \approx a_i^o \approx \frac{\delta\sigma_0}{4\pi}. \\ a_i &\approx a_i^o + \frac{2A\gamma_{0i}}{\pi}, \quad a_j \approx a_j^o - \frac{2A\gamma_{0j}}{\pi},\end{aligned}\quad (11.33)$$

т. е. первоначально втрое более высокая частота σ_j^o трансформировалась в σ_i^o , соответственно уменьшился втрое коэффициент собственного демпфирования и, наконец, объект приобрел свойства нестабилизируемости, т. е., будучи динамически устойчивым на частоте σ_i^o ($\gamma_{0i} < 0$) при отсутствии у объекта собственной частоты σ_j^o , он может оказаться динамически неустойчивым при наличии такой частоты (если $a_j^o < \frac{2A}{\pi} |\gamma_{0j}|$). Из этого примера легко понять, какие далеко идущие последствия для динамической устойчивости может иметь квантование сигнала по времени при применении БЦВМ в контуре управления.

Остановимся в заключение на качественной характеристике нелинейных эффектов при достижении немалых амплитуд колебаний системы, связанных с развитием динамической неустойчивости.

Как показано в гл. 9, наиболее типичными требованиями к фазовой характеристике АС стабилизируемых объектов являются опережение по фазе на частотах колебаний жидкости в баках и запаздывание на частоте первого тона упругих колебаний корпуса на углы, не превышающие 180° . При невыполнении условия фазовой стабилизации на частоте колебаний жидкости система становится динамически неустойчивой. При превышении некоторой критической амплитуды колебаний жидкости возникает круговая волна, при этом наблюдается рост частоты собственных колебаний жидкости [20]. Одновременно вследствие увеличения уровня входного сигнала падает критическая частота АС, при которой фазовое опережение равно нулю.

Оба эти фактора увеличивают фазовое запаздывание на частоте колебаний жидкости, и динамическая неустойчивость прогрессивно нарастает. Устойчивый предельный цикл может сфор-

мироваться только при достаточно больших градиентах увеличения коэффициента демпфирования колебаний жидкости и падения динамического коэффициента АС по амплитуде колебаний. Неустойчивость на частоте упругих колебаний корпуса может развиваться более благоприятно, поскольку увеличение фазового запаздывания АС на этой частоте и снижение динамического коэффициента усиления (что достаточно типично) способствуют формированию устойчивого предельного цикла.

Однако и в том, и в другом случае система может потерять устойчивость на значительно более низкой частоте. Это связано с изменениями свойств АС (главным образом сервопривода) по отношению к низкочастотным сигналам вследствие высокого уровня поступающих на его вход помех с более высокой частотой, характерной для развивающегося процесса динамической неустойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзerman М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. М., ГИТТЛ, 1956, 427 с.
2. Аренс В. Д., Федоров С. М., Хитрик М. С. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами. М., «Машиностроение», 1972, 231 с.
3. Биссплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М., ИЛ, 1958, 799 с.
4. Богомольный А. М., Черемных С. В. Об одном методе исследования структурных свойств колебательных систем — «Известия АН СССР. Автоматика и телемеханика», 1974, № 4, с. 5—11.
5. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М., Физматгиз, 1961, 339 с.
6. Ведров В. С. Динамическая устойчивость самолета. М., «Оборонгиз», 1938, 295 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967, 575 с.
8. Гольденблат И. И. Динамическая устойчивость сооружений. М., Стройиздат, 1948, 59 с.
9. Гончарова Л. Е., Козловская А. А., Рабинович Б. И. Построение системы управления с эталонной моделью. ДАН СССР, 1973, т. 213, № 5, с. 37—40.
10. Калман Р. Об общей теории систем управления. Труды I конгресса, ИФАК, т II, М., АН СССР, 1961, 521 с.
11. Карапаров К. А., Пилютик А. Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения. М., Физматгиз, 1962, 243 с.
12. Колесников К. С. Жидкостная ракета как объект регулирования М., «Машиностроение», 1969, 298 с.
13. Колесников К. С. Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. М., «Машиностроение», 1971, 260 с.
14. Лаврентьев М. А., Шабат Б. Б. Методы теории функций комплексного переменного М., Физматгиз, 1958, 606 с.
15. Лурье А. И. Операционное исчисление. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, 431 с
16. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.—Л., ГИТТЛ, 1951, 216 с
17. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л., ГИТТЛ, 1950, 472 с.

18. Мадатов Г. Л., Чернявская С. С. К анализу возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — ПМ, 1973, т. IX, вып. 9, с. 112—117.
19. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. М., Изд-во АН СССР, 1955, 503 с.
20. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М., «Машиностроение», 1968, 532 с.
21. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М., «Машиностроение», 1971, 563 с.
22. Миськович О. Р., Цуриков Ю. А. Области устойчивости одной динамической системы с учетом аэродинамических сил и запаздывания в регуляторе — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 6, с. 35—40.
23. Нариманов Г. С. О колебаниях жидкости в подвижных полостях. — «Известия АН СССР, ОТН», 1957, № 10, с. 71—74.
24. Натализон М. С. Влияние собственной частоты колебаний жидкости в топливоподающем тракте на продольную устойчивость корпуса ракет. — «Известия АН СССР Энергетика и транспорт», 1969, № 3, с. 111—118.
25. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967, 420 с.
26. Рабинович Б. И. Исследование устойчивости систем с многими степенями свободы. — «Известия АН СССР Техническая кибернетика», 1964, № 4, с. 159—169.
27. Рабинович Б. И. Об устойчивости продольных колебаний корпуса носителей космических аппаратов. — «Известия АН СССР Энергетика и транспорт», 1971, № 5, с. 104—107.
28. Рабинович Б. И., Черемных С. В. Методика исследования областей динамической устойчивости управляемых космических аппаратов с ЖРД на активных участках траектории. — «Космические исследования», 1971, т. IX, вып. 3, с. 331—340.
29. Рабинович Б. И. Об амплитудной стабилизации продольных колебаний корпуса носителей космических аппаратов. — «Известия АН СССР Энергетика и транспорт», 1972, № 5, с. 135—138.
30. Рабинович Б. И., Галлай Ю. М., Калинина А. В. О построении областей динамической устойчивости продольных колебаний космических аппаратов с ЖРД. — «Космические исследования», 1973, с. XI, вып. 5, с. 651—662
31. Рабинович Б. И., Черемных С. В. О динамической устойчивости системы корпус — двигатель на упругой подвеске. — В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск, 1974, с. 188—194.
32. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев, АН УССР, 1954, 287 с.
33. Рокар И. Неустойчивость в механике. М., ИЛ, 1959, 287 с.
34. Сидоров И. М., Коротаева И. П. Исследование структурной устойчивости механических систем с многими степенями свободы при наличии корректирующего устройства. — «Известия АН СССР Техническая кибернетика», 1965, № 5, с. 183—187.
35. Сидоров И. М., Черемных С. В. Об одном методе исследования устойчивости регулируемых систем. — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1967, № 2, с. 74—80.
36. Сидоров И. М., Крангачева Л. Б., Лебедев В. Г. Построение алгоритма стабилизации деформируемого космического аппарата с использованием БЦВМ — «Космические исследования», 1973, т. XI, вып. 3, с. 388—396
37. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М., «Наука», 1972, 448 с.
38. Федоров С. М., Литвинов А. П. Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами. М., «Энергия», 1965, 223 с.
39. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М., «Мир», 1971, 191 с.
40. Цуриков Ю. А. Об устойчивости одной динамической системы. — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1966, № 2, с. 193—195.

41. **Цыпкин Я. З.** Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963, 968 с
42. **Черемных С. В.** О некоторых задачах устойчивости твердого тела с жидким заполнением — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1966, № 3, с 33—39.
43. **Черемных С. В.** Исследование влияния компоновочной схемы космического аппарата на его динамическую устойчивость. — «Космические исследования», 1971, т. IX, вып. 3, с 341—349
44. **Черемных С. В., Левадный В. Г.** Об устойчивости поперечных колебаний корпуса носителей космических аппаратов. — «Известия АН СССР. Энергетика и транспорт», 1971, № 5, с. 108—113.
45. **Черемных С. В.** О стабилизации динамических неустойчивых систем — «Известия АН СССР. Энергетика и транспорт», 1973, № 4, с. 37—44.
46. **Черемных С. В.** О стабилизации управляемых космических аппаратов. — «Космические исследования», 1974, т. XII, вып. 6, с. 649—658.
47. **Сравнение различных методов компенсации и управления упругими колебаниями летательных аппаратов (обзор).** — «Вопросы ракетной техники», 1966, № 3, с 8—15
48. **Продольные** колебания ракет на жидком топливе (обзор). — «Вопросы ракетной техники», 1971, № 11, с 3—23.
49. **Продольные** колебания ракет на жидком топливе (обзор, продолжение). — «Вопросы ракетной техники», 1971, № 12, с 12—34.
50. **Abramson H. N. (Ed)** The dynamic behavior of liquids in moving containers with applications to space vehicles technology. NASA SP-106, 1966, Washington, D. C., 467 p.
51. **Bauer H. F., Shulz E.** Neue Methoden für Stabilisierung der POGO Schwingungen bei Flüssigkeitsraketen. — «Raumfahrtforschung», Heft 1/1972, s. 15—21
52. **Curtis H. S., Hagstrom C. T.** On structural complianceinduced coupling in a thrust-vector control system. — «Journal of Spacecraft and Rockets», 1967, vol. 4, N 11, p. 1465—1469.
53. **Geissler E. D., Haeussermann W.** Saturn guidance and control. — «Astronautics», 1962, vol. 7, N. 2, p. 44—45, 88—92.
54. **Goerner E. E.** Lox prevale to prevent POGO effect on Saturn V. — «Space/Aeronautics», 1968, vol. 7, N. 50, p. 72—74
55. **Goldman R. L.** Elimination of the POGO instability from the Gemini launch vehicle, Dynamic stability of structures, Proc. of an International Conf. held at Northwestern University, Evanston, Illinois, 1965, Oct., p. 157—166.
56. **Greensite A. L.** Analysis of luquid-propellant mode stability of a multi-tank ballistic booster vehicle. — «Journal of Aero/Space Sci.», 1962, vol. 29, N. 2, p. 130—139.
57. **Greensite A. L.** Analysis and design of space vehicle flight control systems, vol. I. Short periodic dynamics, NASA CR-820, 1967, Washington, D. C., 44 p.
58. **Greensite A. L.** Analysis and design of space vehicle flyght control systems, vol. VII, Attitude control during launch. NASA CR-826, 1967, Washington, D. C., 126 p.
59. **Greensite A. L.** Analysis and design of space vehicle flight control systems, vol. XIII, Adaptive control. NASA CR-832, 1967, Washington, D. C. 81 p.
60. **Greiner H. G.** Stabilizing the elastic modes of the space shuttle vehicle during launch. — «AIAA Paper», 1973, N. 319, 13 p.
61. **König H.** Einfluss der Strahlreaktionskräfte auf das elastomechanische Verhalten von Raketen. — «Raumfahrtforschung», Heft 1/64, s. 22—32.
62. **McDonoug G. F.** Stability problems in the control of Saturn launch vehicles, Dynamic stability of structures, Proc. of an International Conference held at Northwestern University, Evanston, Illinois, 1965, Oct., p. 113—127.
63. **McKenna K. J., Walker J. H., Winjie R. A.**, A model for studying the

coupled engine-airframe longitudinal instability of liquid rocket systems.— «AIAA Paper», N. 64—81.

64. **Nemat-Nasser S., Prasad S. M., Herman G.** Destabilizing effect of velocity-dependent forces in nonconservative continuous systems.— «AIAA Journal», 1966, vol. 4, N. 7, p. 1276—1280.

65. **Pinson L. D., Leonard H. W.** Longitudinal vibration characteristics of 1/10 scale Apollo/Saturn — replica model. NASA TN D-5159, 1969, Washington, D. C., 95 p.

66. **Pragenu G. L.** Stability analysis of Apollo-Saturn V propulsion and structure feedback loop.— «AIAA Paper», N. 69—677, 15 p.

67. **Rich R. L.** Saturn V POGO and solution, AIAA Structural Dynamics and Aeroelasticity Specialist Conference and ASME/AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, New Orleans, Louisiana, 1969, Apr., p. 32—41.

68. **Rubin S.** Longitudinal instability of liquid rockets due to propulsion feedback (POGO).— AIAA Symp. on Structural Dynamic and Aeroelasticity, Boston, Massachusetts, Aug.-Sept., 1965. — «Journal of Spacecraft and Rockets», 1965, vol. 3, N. 8, p. 1188—1195.

69. **Ryan R. S., Papandopoulos J. G., Kiefling L. A.** A study of Saturn AS—502 coupling longitudinal structural vibration and lateral bending response during boost.— «Journal of Spacecraft and Rockets», 1970, vol. 7, N. 2, p. 113—118.

70. **Ryan R. S., Kiefling L. A., Buchanan H. J.** Simulation of Saturn V S-II stage propellant feedline dynamics. «Journal of Spacecraft», 1970, vol. 7, N. 12, p. 1407—1412.

71. **Tai C. L., Loh M. M. H., Kraft L. E.** Evaluation study of S-II stage longitudinal oscillations (POGO) Rep. N. SID 66—1445 N. Amer. Avia., Inc., 1966, Sept. 30.

72. **Wick R. S.** The effect of vehicle structure on propulsion system dynamics and stability.— «Jet Propulsion», 1956, vol. 26, N. 10, p. 878—887.

73. **Worlund A. L., Hill R. D., Murphy G. L.** Saturn V longitudinal oscillation (POGO) solution.— «AIAA Paper», N. 69—548, 7 p.

74. «Aviation Week», 1970, vol. 92, N. 17, p. 26.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- А** Амплитудно-фазовые характеристики 276, 279, 280, 290, 304, 306, 386, 397, 404
Амплитудно-частотные характеристики 31, 32, 33, 108, 263, 276
Б Бортовая цифровая вычислительная машина (БЦВМ) 269, 291, 292, 310, 375, 406, 407
В Влияние на расчетную схему числа
- Бонда 35
 - кавитации 41, 42, 43, 45, 46, 117, 118
 - Маха 34, 60, 61
 - Рейнольдса 36, 68, 94, 97, 102
 - Струхала 37, 38, 49
 - Фруда 35, 36
- Г** Гидроаккумулятор 383, 384, 385, 386
- Д** Давление
- в произвольном сечении магистрали 117
 - в произвольной точке жидкости в баке 73
 - на входе в насос 118, 120
- Датчик угловых скоростей (ДУС) 291, 300, 402, 403, 405, 406
- Демпфер колебаний жидкости 24, 25, 397, 398, 399, 405
- Динамическая
- неустойчивость (устойчивость) 15, 16, 17, 262, 263, 265, 310
 - неустойчивость собственная 266, 267, 268, 388, 389, 390, 393, 394
 - неустойчивость в плоскостях стабилизации 16, 17, 266, 366, 387, 390, 393, 394, 399, 403, 404, 405, 407
 - неустойчивость в направлении продольной оси 16, 17, 375, 376, 377, 382
 - схема ракет носителей (РН) 47, 48, 49
- К** Квантование сигнала по времени 291, 292, 406, 407
- Кинематические параметры, характеризующие
- движение РН как твердого жесткого тела 55, 56, 57, 58
 - движение жидкости в баках 71, 99, 100, 101
 - движение жидкости в магистралях 123, 125
 - упругие деформации корпуса 124, 131, 132
- Корни характеристического уравнения замкнутой системы
- жесткий корпус — автомат стабилизации (АС) 319, 320
 - жесткий корпус — жидкость в баке — автомат стабилизации (АС) 325
 - жесткий корпус — жидкость в магистрали — двигатель 336, 338
 - жидкость в магистрали — двигатель 122, 123, 124
 - объект с аналоговым регулятором при отсутствии близких собственных частот 278
 - объект с аналоговым регулятором при наличии близких собственных частот 281, 283
 - объект с дискретным регулятором 299, 300
 - упругий корпус — АС 330
 - упругий корпус — жидкость в магистрали — двигатель (продольные колебания) 333, 335
- Коэффициенты
- гидродинамические основные, инвариантные относительно выбора нормировки, включая безразмерные 100, 102
 - гидродинамические, диссипативные 102, 222
 - общих уравнений возмущенного движения РН 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143
 - поперечных колебаний отсека с жидкостью 127
 - уравнений продольных колебаний столба жидкости в магистрали 125, 126
- Краевые задачи для
- жидкости, частично заполняющей бак 75, 76, 157, 158, 159
 - корпуса как упругого стержня 128, 129
 - столба жидкости в магистрали 117, 118
- Критерий стабилизируемости
- общий 302, 309
 - системы жесткий корпус — жидкость в баках 348, 356, 357, 360
 - системы упругий корпус 400, 401
 - системы упругий корпус — жидкость в одном из баков 370
 - системы упругий корпус — жидкость в одной из магистралей 342, 344
 - частный 311, 312
- Критерий собственной динамической устойчивости

- системы с двумя взаимно связанными осцилляторами 313
 - системы жесткий корпус — жидкость в баках 348, 356, 358
 - системы упругий корпус — жидкость в магистралях 380
- M** Метацентры
- жидкости в баках 92
 - системы корпус — жидкость 91
- Методы оценки частот и присоединенных масс жидкости 177, 178, 179, 180
- Метод решения основных краевых задач динамики жидкости в подвижных полостях
- асимптотический для глубокой жидкости 206, 207, 210
 - асимптотический для мелкой жидкости 211, 212
 - Бубнова — Галеркина 168, 169
 - возмущений для баков с внутренними ребрами 215, 216, 217, 218, 219, 220
 - конформного отображения 181, 182, 185
 - разделения переменных 159, 160, 161, 162
 - Ритца — Трефтца 171, 172, 173, 196, 197, 202
- Метод решения краевых задач динамики корпуса и жидкости в магистралях как одномерных упругих систем
- дискретизации 232, 233, 234
 - начальных параметров 243, 245, 247
 - теоретико-экспериментальный 249
- N** нелинейности при немалых колебаниях жидкости в баках 35, 36, 398, 407, 408
- O** Общие уравнения возмущенного движения РН с учетом подвижности жидкости в баках и магистралях и упругости корпуса 133, 134, 135, 143, 144
- P** Параметры маятниковой модели 100
- Передаточная функция
 - разомкнутой системы 269
 - разомкнутой системы с аналоговым регулятором 270
 - разомкнутой системы с дискретным регулятором 293
- Перемещение произвольного сечения корпуса 134
- Потенциал
- поля массовых сил невозмущенного движения 69
- смещений частиц жидкости 70, 71
- Присоединенные массы жидкости при волновых движениях в подвижной полости 77, 81, 85
- C** Силы (моменты)
- аэродинамические 50, 51, 59, 60
 - возмущающие, зависящие явно от времени 65
 - диссипативные, обусловленные эффектом пограничного слоя 37, 87
 - диссипативные, обусловленные вихреобразованием на острых кромках 37, 38, 219
 - гидродинамические, действующие на стенки бака 79, 88
 - гидродинамические, действующие на элемент ребра с острой кромкой 37, 217
 - гидростатические 77, 78
 - кориолисовы 51, 52, 64
 - управляющие 59, 60
- Системы координат
- для описания движения корпуса 69
 - жидкости в баке 68
- Стабилизация
- амплитудная 265, 326, 331, 334, 335, 337, 338, 377, 381, 386, 396, 397, 398, 404, 405
 - фазовая 265, 325, 330, 331, 334, 335, 337, 338, 371, 381, 382, 391, 392, 402, 403, 405, 406
- Стабилизируемость (неустойчивость) объекта регулирования 266, 267, 302, 303, 304, 309, 372, 373, 381, 382, 388, 389, 390, 393, 394, 396, 400, 402, 403, 407
- T** Тензор инерции присоединенной массы жидкости в подвижной полости 84
- У** Угол поворота произвольного сечения корпуса 134
- Уравнения
- возмущенного движения РН как жесткого твердого тела переменной массы 65
 - возмущенного движения РН как жесткого тела с жидкостью 90, 93, 96, 97, 106, 109, 110
 - возмущенного движения РН как упругого тела с жидкостью 130
 - волновых движений жидкости в баках 76
 - невозмущенного движения РН 60

- продольных колебаний столба жидкости в магистрали 125
- упругих колебаний корпуса 115
- Условия**
 - граничные 72, 115, 117, 118, 129
 - начальные 74, 75, 115, 116
- Ф** Фазо-частотные характеристики 31, 32, 33, 263, 276
- Х** Характеристическое уравнение
 - разомкнутой системы 270
 - замкнутой системы с аналоговым регулятором 270
 - замкнутой системы с дискретным регулятором 293
- Характерные параметры (как объекта регулирования) системы
 - жесткий корпус — жидкость в баке 346, 354, 355
 - упругий корпус 331
 - упругий корпус — жидкость в баке 370
 - упругий корпус — жидкость в магистрали (продольные колебания) 334, 335, 381
- Ч** Частоты собственных колебаний
 - жидкости в баках при волновых движениях на свободной поверхности (поперечные колебания корпуса) 72
 - жидкости в баках с плоской свободной поверхностью при упругих деформациях днища и обечайки (продольные колебания корпуса) 40
 - маршевых двигателей (поперечные колебания) 141, 404
 - несжимаемой жидкости в магистрали при деформации кавитационных каверн (продольные колебания) 44
 - несжимаемой и сжимаемой жидкости в магистрали при деформации кавитационных каверн и стенок магистрали (продольные колебания) 117
 - упруго деформирующегося корпуса 128, 129

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	5
Введение	9
Список литературы	18
Часть I. ДИНАМИЧЕСКАЯ СХЕМА ОБЪЕКТА. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ	21
<i>Глава 1. Объект исследования и элементы его расчетной модели</i>	<i>22</i>
1.1. Объект регулирования	22
1.2. Регулятор	29
1.3. Топливный бак как жесткое тело, частично заполненное жидкостью (движение в плоскостях стабилизации)	34
1.4. Топливный бак и магистраль, гидравлически связанная с баком и насосом, как гидроупругие системы (движение в направлении продольной оси)	39
1.5. Упругий корпус. Общая концепция динамической схемы РН в задачах динамической устойчивости	47
<i>Глава 2. Ракета как жесткое твердое тело переменной массы</i>	<i>54</i>
2.1. Системы координат, кинематические параметры	54
2.2. Уравнения невозмущенного движения	59
2.3. Уравнения возмущенного движения баллистической РН в плоскостях стабилизации	62
<i>Глава 3. Ракета как жесткое тело с отсеками, содержащими жидкость</i>	<i>67</i>
3.1. Предварительные замечания	67
3.2. Основные допущения. Краевые задачи для составляющих потенциала смещений	68
3.3. Общие уравнения возмущенного движения	76
3.4. Приведение уравнений возмущенного движения к каноническому виду	94
3.5. Уравнения возмущенного движения баллистических и крылатых РН в плоскостях стабилизации	104
<i>Глава 4. Ракета как упругое тело с отсеками, содержащими жидкость</i>	<i>111</i>
4.1. Предварительные замечания	111
4.2. Колебания столба жидкости в магистрали с сосредоточенной емкостью на нижнем конце	116
4.3. Демпфирование колебаний жидкости при сложном сопротивлении на выходе из магистралей	119
4.4. Вынужденные колебания жидкости в топливной магистрали и баке при колебаниях корпуса	124
4.5. Уравнения колебаний корпуса как эквивалентного стержня с присоединенными осцилляторами	128
4.6. Общие уравнения возмущенного движения РН с учетом подвижности жидкости в баках и магистралях и упругости корпуса	131
Список литературы	144
Часть II. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ДИНАМИЧЕСКУЮ СХЕМУ	149
<i>Глава 5. Методы определения параметров динамической схемы</i>	<i>150</i>
5.1. Коэффициенты уравнений возмущенного движения как параметры, характеризующие динамическую схему	150
5.2. Некоторые теоретические методы решения практических задач определения коэффициентов	153
<i>Глава 6. Расчет частот и присоединенных масс жидкости</i>	<i>157</i>
6.1. Метод разделения переменных в случае цилиндрических баков	157
6.2. Методы Бубнова — Галеркина и Ритца — Трефтца	168

6.3. Оценка значений частот и присоединенных масс жидкости	174
6.4. Применение конформного отображения и метода Бубнова — Галеркина для решения двухмерных краевых задач	180
6.5. Применение метода Трефтица в случае баков, имеющих форму тел вращения	195
6.6. Асимптотика глубокой жидкости	203
6.7. Асимптотика мелкой жидкости	211
6.8. Метод возмущений в задачах о колебаниях жидкости в баках с узкими кольцевыми или радиальными ребрами	214
Глава 7. Расчет частот и форм собственных упругих колебаний корпуса	230
7.1. Метод дискретизации	230
7.2. Метод начальных параметров	243
7.3. Теоретико-экспериментальный метод определения динамических характеристик эквивалентных стержней	248
Список литературы	256
Часть III ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ОБЪЕКТ — ДВИГАТЕЛЬНАЯ УСТАНОВКА — АВТОМАТ СТАБИЛИЗАЦИИ	261
Глава 8 Методы исследования динамической устойчивости	262
8.1. Методологические аспекты проблемы	262
8.2. Механические аспекты проблемы	265
8.3. Применение частотных методов	269
8.4. Случай близких собственных частот разомкнутой системы	280
8.5. Учет влияния квантования по времени при применении дискретных систем стабилизации с БЦВМ	291
8.6. Нестабилизируемость и собственная динамическая неустойчивость РН	302
8.7. Исследование динамической устойчивости РН в пространстве безразмерных конструктивных параметров	310
Глава 9. Исследование динамической устойчивости при отсутствии близких парциальных частот	317
9.1. Корпус как твердое тело с системами УС и БС	317
9.2 Система жесткий корпус — жидкость в баках — СУС	320
9.3. Система упругий корпус — жидкость в баках — СУС	326
9.4. Система упругий корпус — жидкость в магистралях ЖРД (продольные колебания)	332
Глава 10. Исследования областей нестабилизируемости и собственной динамической неустойчивости при сближении парциальных частот	339
10.1. Система упругий корпус — жидкость в магистрали (продольные колебания)	339
10.2. Система жесткий корпус — жидкость в баке (поперечные колебания КА при движении в атмосфере планеты)	345
10.3. Объект с жестким корпусом и двумя баками	353
10.4. Система упругий корпус — жидкость в баке	366
Глава 11. Некоторые методы обеспечения устойчивости при наличии близких парциальных частот	374
11.1. Общие соображения об обеспечении динамической устойчивости	374
11.2. Устойчивость в диапазоне частот продольных колебаний корпуса и компонентов топлива в магистралях	375
11.3 Устойчивость в диапазоне частот колебаний компонентов топлива в баках	386
11.4. Устойчивость в диапазоне частот поперечных колебаний корпуса	399
Список литературы	408
Предметный указатель	412