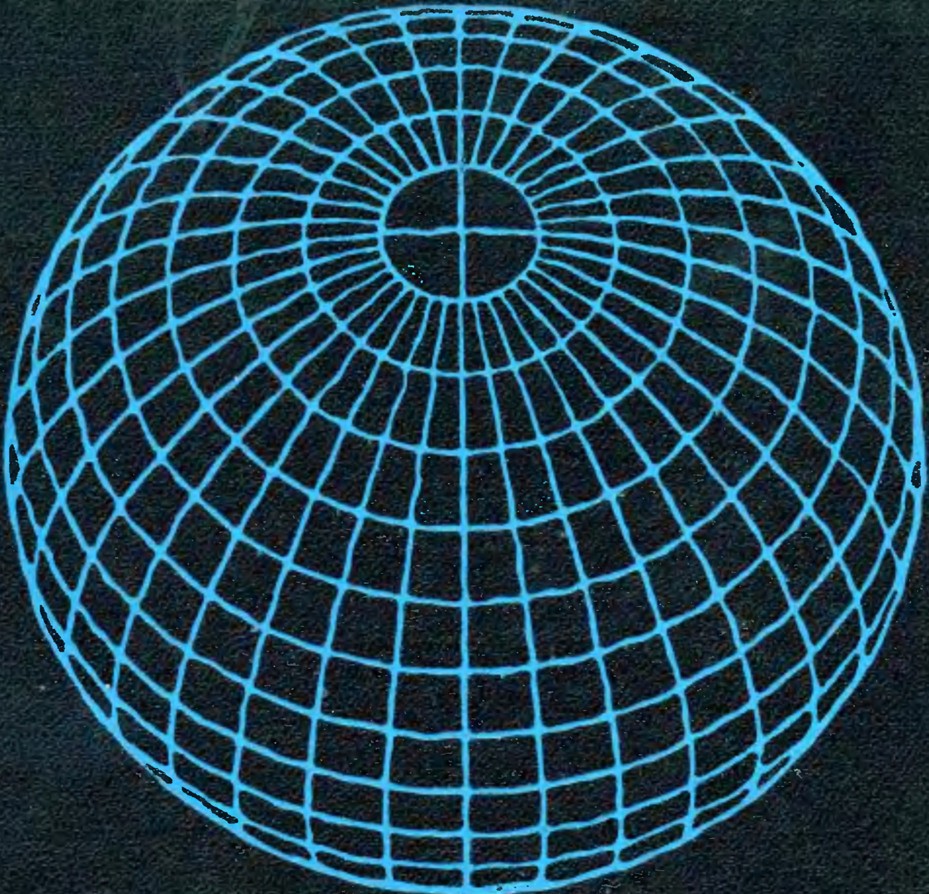


И · Меллер

ВВЕДЕНИЕ В СПУТНИКОВУЮ ГЕОДЕЗИЮ

INTRODUCTION
TO
SATELLITE GEODESY

Ivan I. Mueller

Associate Professor
Department of Geodetic Science
The Ohio State University

●

Frederick Ungar Publishing Co.

New York

1964

И. Меллер

ВВЕДЕНИЕ В СПУТНИКОВУЮ ГЕОДЕЗИЮ

Перевод с английского

под редакцией

А. В. БУТКЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1967

УДК 529.195.1 : 528

В настоящее время искусственные спутники Земли все шире применяются для решения древнейшей задачи геодезии — определения формы и размеров Земли. Книга И. Меллера посвящена новым геодезическим методам и приборам, применение которых стало возможным в результате запусков искусственных спутников.

Первая часть монографии знакомит с классическими методами геодезии, при которых используются наблюдения затмений Солнца и покрытий звезд, что дает читателю необходимый теоретический фундамент. Вторая часть отведена собственно спутниковой геодезии: в ней рассматриваются теория движения близких спутников, различные возмущения, методика и аппаратура для наблюдения спутников, а также обработка результатов наблюдений. Заключительная часть книги посвящена специальным геодезическим спутникам.

Книга предназначена для геодезистов, гравиметристов, картографов — как специалистов, так и студентов — и представляет большой интерес для военных специалистов.

Редакция космических исследований, астрономии и геофизики

Инд. 2—6—5

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Спутниковая, или космическая, геодезия как наука об определении размеров и формы Земли и положений опорных пунктов на земной поверхности и вне ее с помощью наблюдений спутников Земли зародилась в XX в. на основе работ Г. Баттермана (Германия, 1902 г., наблюдения покрытий звезд Луной), Т. Банахевича (Польша, 1929 г.), В. Ламберта (США, 1949 г., наблюдения полных солнечных затмений), А. А. Михайлова (СССР, 1954 г.) и В. Марковица (США, 1954 г., фотографические наблюдения Луны и звезд).

Ее существенной особенностью является использование дифференциальных методов наблюдений, освобождающих их результаты от трудно учитываемого влияния рефракции и уклонений отвеса, имеющего место при обычных астрономо-геодезических наблюдениях. Хотя методы использования наблюдений Луны для решения геометрических и физических задач высшей геодезии и обеспечивают большую дальность действия (до 3000 *км*), но они очень сложны в организационном отношении, сильно зависят от условий погоды и дают невысокую точность, так как во все уравнения входит в качестве коэффициента $\operatorname{cosec} \pi_{☾} \approx 60$, и все ошибки наблюдений и координат Луны умножаются на 60.

Искусственные спутники Земли (ИСЗ), первый из которых был запущен в СССР 4 октября 1957 г., открыли новую эпоху в развитии геодезии, подобно тому как аэрофотосъемка в 30-х годах открыла новый период в развитии топографии. Спутниковые наблюдения явились весьма эффективным средством измерений в геодезии и астрономии, за короткое время своего применения приобрели большое значение и еще больше обещают дать в ближайшем будущем.

С помощью наблюдений ИСЗ весьма точно решаются такие сложные задачи высшей геодезии, как определение сжатия Земли и параметров ее гравитационного поля, определение абсолютных координат пунктов в системе центра масс Земли, связь различных геодезических систем и референц-эллипсоидов с центром масс и между собой, установление параметров и ориентации общего земного эллипсоида, образование единой мировой системы координат. В дальнейшем спутники будут играть важную роль при картографировании Луны и планет.

Курс «Основы космической геодезии» с 1965 г. введен в учебные планы институтов инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии. Но до последнего времени вопросы космической геодезии излагались лишь в малодоступных журнальных статьях и монографиях. Первыми капитальными трудами по этим вопросам были книги: А. Беррот и В. Хофманн, Космическая геодезия, 1960; В. М. Каула, Космическая геодезия, 1962; Геодезическое использование искусственных спутников Земли, под ред. Г. Вейса, 1962.

В последние годы советская литература обогатилась рядом ценных монографий в области небесной механики и теории движения ИСЗ Г. А. Чеботарева, Л. М. Лахтина, М. Б. Балка, В. В. Белецкого, П. Е. Эльясберга (см. библиографию к разд. 2.2 и 2.5). Однако учебные пособия по космической геодезии еще не изданы. Книга И. Меллера, в которой наиболее полно изложены вопросы курса, в известной степени может служить таким пособием.

Первая часть книги посвящена геодезическому использованию естественного спутника Земли — Луны. В ней излагаются основы теории и предвычисления солнечных затмений и покрытий звезд Луной, методы наблюдений и их геодезическое применение. Эта часть представляет как бы введение к главной, второй части книги, относящейся к геодезическому использованию ИСЗ. Теоретическую основу этой новой науки составляют динамика и геометрия эллиптического движения ИСЗ и его возмущений, вызываемых неправильностями земного гравитационного поля и другими влияниями.

Далее идет описание методов наблюдений, обработки наблюдений и геодезических применений ИСЗ в геометрическом и динамическом планах.

В основу книги положен курс лекций, прочитанных в Университете штата Огайо; она требует от читателя не столько глубоких математических, физических и астрономических познаний, сколько стремления к напряженной работе. Наглядности изложения автор достигает тем, что дает выводы производных не полностью, а ссылается на учебники небесной механики и широко использует матричное исчисление.

Ценно подробное описание сферических функций с ссылками (для более подготовленных читателей) на различные системы этих функций. Описание методики наблюдений поясняется детальными чертежами инструментов и четкими рисунками, а сложные формулы — многочисленными примерами вычислений. Книга заканчивается описанием геодезических спутников Анна и др.

К недостаткам книги следует отнести: далеко не полное освещение работ советских ученых; весьма беглое изложение наиболее важных вопросов геометрического применения ИСЗ, в частности синхронных наблюдений по программе Интеробс, их обработки и т. д.

При переводе книги сохранены обозначения автора. Терминология местами изменена в соответствии с принятой в СССР. Библиография разбита по разделам и содержит около 500 названий. Она существенно дополнена работами советских ученых.

Перечень запущенных космических объектов (по состоянию на 30 сентября 1963 г.) исключен, так как он неполон; более исчерпывающие и современные сведения о советских искусственных спутниках Земли, космических кораблях-спутниках и о космических ракетах можно найти в следующих советских изданиях:

а) Искусственные спутники Земли, вып. 12, 3—5, 1962.

б) Базыкин В. В., Искусственные спутники Земли и другие космические объекты, изд-во «Знание», М., 1966.

в) Искусственные космические объекты (4 окт. 1957—1 янв. 1965), Бюллетень станций оптических наблюдений ИСЗ, вып. 45, 1965.

Книга рассчитана на геодезистов, гравиметристов и картографов и представляет большой интерес для военных специалистов.

Перевод книги выполнили: В. А. Падве (разд. 1.0—1.7), Э. А. Могилевский (разд. 2.0—2.2), К. М. Антонович (разд. 2.3—2.4) и А. В. Буткевич (разд. 2.5—2.6).

А. В. Буткевич

апрель 1967 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Геодезия — одна из старейших в истории человечества наук — имеет как чисто научные, так и практические задачи. Научные задачи геодезии — определение размеров и формы Земли. На основе этих данных в практической геодезии выполняют необходимые измерения и вычисления для точного картографирования земной поверхности.

В течение нескольких веков координаты пунктов, на которых основывалось точное картографирование, определяются с помощью триангуляции, т. е. являются геодезическими координатами. Астрономические широты, долготы и азимуты определяются лишь в некоторых местах, чтобы передавать полученные координаты на исходные пункты триангуляции и по ним контролировать возможное накопление ошибок в сети триангуляции по мере удаления от исходных пунктов. Астрономические координаты используются также в случае отсутствия геодезических широт и долгот.

Расхождения между астрономическими и геодезическими координатами могут быть выражены через компоненты уклонения силовой, или отвесной, линии. Если известны эти компоненты уклонения отвеса, то по астрономическим координатам можно вычислить геодезические координаты, и наоборот.

Очевидно, океанические острова приходится картографировать на астрономической основе, если невозможно связать их координаты с помощью триангуляции с другими островами или с континентом.

В течение последних десятилетий было предложено три важных метода определения геодезических координат островов и континентов:

1) электронный (трилатерация);
2) гравиметрический (физическая геодезия);
3) космический (спутниковая, или космическая, геодезия).

В данной книге освещается третий из этих методов, а также и другие геодезические применения естественных и искусственных спутников Земли. Книга была вначале написана как пособие для студентов геодезического факультета, но она, конечно, может быть использована всеми студентами и специалистами, работающими в области геодезии.

Целью данной книги является не описание всех деталей этой новой науки, а лишь изложение ее основ и приведение важнейших сведений для тех, кто пожелает продолжить изучение предмета. Предполагается, что читатель имеет достаточную подготовку по технике вычислений и по общей физике и хорошо знаком со сферической астрономией. В книге подтверждается положение, что применение матриц ускоряет некоторые алгебраические выводы и упрощает применение электронно-вычислительных машин. Алгебраические выражения отобраны так, чтобы сделать книгу доступной для лиц, не знакомых с матричным исчислением и электронно-вычислительной техникой. Преобразование этих формул в матрицы, если они потребуются для практических вычислений,— несложное дело.

Первая часть книги посвящена солнечным затмениям и покрытиям звезд Луной. Естественный спутник Земли Луна временами закрывает Солнце (солнечное затмение) или звезды (покрытия звезд Луной). Затмения Солнца представляют сравнительно редкое явление, которое к тому же может наблюдаться лишь при хороших погодных условиях, и имеют в настоящее время небольшое практическое значение для геодезии. Поэтому методика их наблюдений и предвычислений описывается в книге лишь кратко. Но, с другой стороны, теория затмений, которая является более общей, чем теория покрытий, излагается детально.

Во второй части книги описывается использование спутников как средств установления геодезической связи между отдаленными пунктами и как инструментов, при помощи которых косвенно изучается гравитационное поле Земли. Последнее применение ИСЗ ведет к лучшему, чем в геодезии, определению формы Земли. При этом упор делается на геодезические применения ИСЗ, а динамическое использование спутниковых орбит излагается лишь в принципе. В этой части также описывается техника наблюдений ИСЗ.

Уравновешивание наблюдений доводится только до составления уравнений погрешностей. Различные методы составления и решения нормальных уравнений читатели найдут в других доступных источниках.

Оригинальный материал в широком смысле слова в книге не излагается, так как это шло бы вразрез с ее основной целью: упростить для студентов детальное изучение многочисленных научных трактатов, перечисленных в библиографических списках. Библиография содержит несколько разделов, причем некоторые из них сравнительно стары и поэтому частично уже утратили свое значение. Они включены лишь для исторической полноты. На наиболее важные статьи сделаны ссылки в тексте.

Для помощи тем студентам, которые пожелают продолжить изучение материала, но не имеют возможности получать персональные консультации, можно специально рекомендовать следующие работы:

1. Berroth A., Hofmann W., Kosmische Geodäsie, Verlag G. Braun, Karlsrühe, 1960. (Русский перевод: Беррот А. и Хофманн В., Космическая геодезия, ИЛ, М., 1963.)

2. Brouwer D., Clemence G. M., Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, New York — London, 1961. (Русский перевод: Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, изд-во «Мир», М., 1964.)

3. Chauvenet W., A Manual of Spherical and Practical Astronomy, Dower Publications, Inc., New York, 1960 (reprint of fifth edition, 1891).

4. Kaula W. M., Celestial Geodesy, Advances in Geophysics, eds. H. E. Landsberg and J. van Mieghem, Vol. 9, Academic Press, New York — London, 1962, p. 191—293. (Русский перевод: Каула В. М., Космическая геодезия, изд-во «Недра», 1965.)

5. Weis G., Geodetic Uses of Artificial Satellites, Smithsonian Contributions to Astrophysics, Vol. 3, №, 9, Washington, 1960. (Русский перевод: Геодезическое использование искусственных спутников Земли под ред. Г. Вейса, изд-во «Недра», 1966.)

Автор с полным основанием выражает признательность всем лицам, перечисленным в библиографических списках, а также благодарит С. Гхоша, В. Хейсканена, С. Хенриксена, В. Каулу, Г. Морица и У. Утилу за замечания и поправки к рукописи.

И. Меллер

Факультет геодезии
Университета штата Огайо,
г. Колумбус, Огайо,
январь 1964 г.

Посвящается Марианне и Юлии

Часть 1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОДЕЗИИ СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ И ПОКРЫТИЙ ЗВЕЗД ЛУНОЙ

1.0. ОБОЗНАЧЕНИЯ В ЧАСТИ 1

Числа в скобках указывают номера разделов, в которых используются данные обозначения.

a, b — большая и малая полуоси референц-эллипсоида (1.4.2.1);
— долготный и широтный коэффициенты (1.4.2.1);

$\bar{a}$, $\bar{b}$ — большая и малая полуоси эллипсоида, сжатие которого равно сжатию референц-эллипсоида (1.4.2.3);

a — прямое восхождение оси тени (1.2, 1.3, 1.5.2);

a — d, a' — d' — бесселевы звездные постоянные (1.4.1);

$\underline{a}$ — $\underline{g}$ — коэффициенты (1.5.1.1);

$\bar{a}$ — $\bar{k}$ — коэффициенты (1.5.2.1);

δa — поправка к экваториальному радиусу (к большой полуоси) (1.5.3);

$b = r_M/r_S$ (1.2.2.1);
— геоцентрическая оптическая либрация по широте (1.7.1.2);

b_1 — b_7 — коэффициенты (1.5.3);

Δb — разность между топоцентрической и геоцентрической оптическими либрациями по широте (1.7.1.2);

$c_{1,\,2}$ — расстояния между вершинами конуса полутени и тени и фундаментальной плоскостью (1.2.2.3);

d — склонение оси тени (1.2, 1.3, 1.5.2);

d' — скорость изменения d (часовое изменение);

$d_{x,\,y}^{1,\,2,\,3}$ — первая, вторая и третья разности при интерполировании x или y (1.3.1.1, 1.4.1);

e — первый эксцентриситет эллипсоида вращения;
— число затмений (1.5.2.1);

$f_{1,\,2}$ — углы раствора конусов полутени и тени;

f — сжатие эллипсоида вращения;

h — часовой угол оси тени (1.2, 1.3, 1.5.2);

h_G — часовой угол оси тени для долготы Гринвича;

h_* — часовой угол звезды;

h_{*G} — часовой угол звезды для долготы Гринвича;

h_M — часовой угол Луны;

h' — скорость изменения h (часовое изменение);

h_0 — часовой угол звезды в момент геоцентрического соединения с Луной (1.4.2.2);

i — зенитное расстояние светового луча (1.3.4);
— наклонение оси Луны к фундаментальной плоскости (1.7.1.2);
— вспомогательная величина (1.2.2.4);
i_M — наклонение орбиты Луны к эклиптике (1.2.1);
k_M — угловой радиус Луны;
k_S — угловой радиус Солнца;
δk_M — поправка к k_M;
δk_S — поправка к k_S;
l — геоцентрическая оптическая либрация по долготе (1.7.1.2);
$l_{1,\,2}$ — радиусы лунной полутени и тени на фундаментальной плоскости;
Δl — разность между топоцентрической и геоцентрической оптическими либрациями по долготе (1.7.1.2);
m, M — относительные полярные координаты центра тени (по отношению к наблюдателю);
m — постоянная прецессии (1.4.1);
δm, δM — поправки к относительным полярным координатам m и M;
n, N — полярные координаты относительного перемещения тени и наблюдателя;
n — коэффициент преломления (1.3.4);
— постоянная прецессии (1.4.1);
o — число покрытий (1.5.1.2);
— дифференциальный коэффициент (1.5.2.2);
$\bar{o}$ — $\bar{s}$ — дифференциальные коэффициенты (1.5.2.2);
p — интерполяционный множитель (1.4.1);
p, s, t — вспомогательные координаты (1.2.2.1);
p, q, x — вспомогательные координаты (1.2.2.2, 1.4.4);
p, q, r — вспомогательные величины (1.3.3);
p — s — дифференциальные коэффициенты (1.5.1.1);
r — расстояние от центра Земли;
r_M — расстояние между центрами Земли и Луны;
r_S — расстояние между центрами Земли и Солнца;
s — полупродолжительность центральной фазы;
— число станций (1.5.1.2, 1.5.2.1);
t — время;
— число лет от эпохи 1950,0 (1.4.1);
t' — дробная часть текущего бесселева года (1.4.1);
$u = x - \xi$ (1.3.3);
$u' = x' - \xi'$ (1.3.3);
u, v, w — условные геоцентрические декартовы координаты наблюдателя (1.4.4, 1.5.3);

δu, δv, δw — поправки к декартовым координатам u, v, w (1.5.3);
$v = y - \eta$ (1.3.3);
$v' = y' - \eta'$ (1.3.3);
x, y, z — бесселевы координаты;
x', y', z' — часовые изменения бесселевых координат x, y, z;
z — истинное зенитное расстояние (исправленное на рефракцию);
z' — видимое зенитное расстояние;
z_M — геоцентрическое зенитное расстояние Луны (1.7.1.2);
$\Delta z = z - z'$;
$A - E$ — бесселевы числа;
A, $B_{1, 2, 3}$ — вспомогательные величины (1.3.3);
A. V. — годовое изменение;
$A - C$ — вспомогательные величины (1.4.4);
$A - F$ — коэффициенты (1.5.2.2);
$B_{2, 3}$ — бесселевы коэффициенты (1.4.1);
C — угловое расстояние от точки севера * диска Солнца до вертекса **;
$= 1/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ (1.3.3, 1.4.1);
— геоцентрический позиционный угол оси вращения Луны (1.7.1.2);
ΔC — разность топоцентрического и геоцентрического позиционных углов оси вращения Луны (1.7.1.2);
$D = uu' + vv'$, вспомогательная величина (1.3.3);
ET — эфемеридное время;
G — расстояние между центрами Луны и Солнца;
H — высота над референц-эллипсоидом;
— часовой угол звезды в момент геоцентрического соединения с Луной для долготы Гринвича (1.4.2.2);
ΔH — разность высот (1.3.3);
— фиктивное превышение, вызываемое рефракцией (1.3.4);
$L_{1, 2}$ — радиус полутени и тени на параллельной плоскости;

---

* Точка севера диска Солнца — ближайшая к северному полюсу мира точка пересечения круга склонения, проходящего через центр диска Солнца, с его краем.— *Прим. перев.*

** Вертекс диска Солнца — точка пересечения круга высоты, проходящего через центр диска Солнца, с его краем.— *Прим. перев.*

M, m — относительные полярные координаты центра тени по отношению к наблюдателю;
$\overline{M}$ — фаза затмения;
$\overline{M}_1$ — наибольшая фаза частного затмения;
$\overline{M}_2$ — величина центральной фазы;
δM, δm — поправки к относительным полярным координатам M, m;
N — радиус кривизны в плоскости первого вертикала;
— ондуляция геоида (1.5.1.1);
N, n — полярные координаты относительного перемещения тени и наблюдателя;
P — позиционный угол точки контакта;
dP — поправка к P;
Q — вспомогательный угол;
— параллактический угол;
δQ — поправка к Q;
$S = (1 - e^2)/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ (1.3.3, 1.4.1);
S.V. — вековое изменение (1.4.1);
T — предвычисленный момент затмения;
— сидерический период обращения Луны (1.7.1.2);
$T_{i,\ m,\ e}$ — предвычисленные моменты начала, максимальной фазы и конца затмения;
T_0 — приближенный момент затмения;
$T_{0i,\ 0m,\ 0e}$ — приближенные моменты начала, середины и конца затмения;
T_1 — момент максимальной фазы затмения (1.3.1.3);
T_0' — предвычисленный момент для центральной станции (1.4.2.1);
$T_{02,03}$ — предвычисленные моменты второго и третьего контактов (1.3.3);
ΔT — разность ET — UT;
ΔT_0 — поправка к предвычисленному моменту за малые изменения φ, λ, H (1.3.3);
U — вспомогательная величина (1.5.3);
UT — всемирное время;
V — угол между точкой касания и вертексом Солнца;
Y — бесселева координата Луны в момент геоцентрического соединения со звездой;
α_M — прямое восхождение Луны;
α_S — прямое восхождение Солнца:
α_* — прямое восхождение звезды;
$\delta\alpha_M$ — поправка к α_M;
$\delta\alpha_S$ — поправка к α_S;

$\Delta\alpha = \delta\alpha_M - \delta\alpha_S$ (1.5.2.2);
β_M — широта Луны;
β — вспомогательная величина (1.4.2.2);
♈ — точка весеннего равноденствия;
$\gamma_{1,\,2}$ — вспомогательные величины (1.4.2.2);
δ_M — склонение Луны;
δ_S — склонение Солнца;
δ_* — склонение звезды;
$\delta\delta_M$ — поправка к δ_M;
$\delta\delta_S$ — поправка к δ_S;
$\Delta\delta = \delta\delta_M - \delta\delta_S$ (1.5.2.2);
ε — наклон эклиптики (1.4.1);
η_2 — вспомогательная величина (1.3);
$\varkappa$ — масштабный множитель (1.7.1.3);
λ — геодезическая долгота (положительная к востоку);
— отношение (1.2.1);
$\Delta\lambda$ — разность долгот;
$\delta\lambda$ — поправка к долготе;
μ — эфемеридный часовой угол оси тени;
$\mu_{\alpha,\,\delta}$ — собственные движения звезды по прямому восхождению и склонению;
μ' — скорость изменения μ;
ξ, η, ζ — бесселевы координаты наблюдателя;
ξ', η', ζ' — часовые изменения бесселевых координат ξ, η, ζ;
$\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ — поправки к ξ, η, ζ;
π_M — горизонтальный параллакс Луны;
π_S — горизонтальный параллакс Солнца;
$\delta\pi_M$ — поправка к π_M;
$\delta\pi_S$ — поправка к π_S;
ρ — геоцентрическое расстояние наблюдателя;
$\delta\rho$ — поправка к ρ;
$\delta\sigma = \Delta - k_M$ (1.5.3);
τ — разность между предвычисленным и приближенным моментами, $T - T_0$;
τ' — разность между постоянными видимого и геоцентрического соединений (1.4.2.2);
τ_1 — разность предвычисленного и фактического моментов максимума затмения;
$d\tau$ — поправка к τ;
$\delta\tau$ — разность между наблюденным и предвычисленным моментами контакта;
φ — геодезическая широта;
φ' — геоцентрическая широта;

$\varphi_{1,\,2}$ — граничные параллели полосы покрытия (1.422);
$\Delta\varphi$ — разность широт;
$\delta\varphi$ — поправка широты;
ψ — вспомогательный угол;
ψ_1 — вспомогательная величина (1.33);
Δ — расстояние между наблюдателем и осью тени на параллельной плоскости;
$\bar{\Delta}$ — минимальное значение Δ;
$\bar{\Delta}'$ — поправка к $\bar{\Delta}$ за изменения φ, λ, H;
θ — местное звездное время;
θ_G — гринвичское звездное время;
Φ — астрономическая широта.

1.1. ВВЕДЕНИЕ

1.1.1. Определения

Термин *затмение* может быть применен к любому затемнению одного небесного тела другим. Затмение Солнца Луной называется *солнечным затмением*, а затмение Солнца одной из внутренних планет называется *прохождением* планеты по диску Солнца. *Покрытие* звезды или планеты Луной — это затмение звезды или планеты. *Лунное затмение* — это затмение Луны Землей. Что касается их геодезического применения, то мы рассмотрим лишь два явления: солнечные затмения и покрытия звезд Луной.

При обработке любых затмений могут быть использованы одинаковые основные принципы. Изучение солнечных затмений, с которых мы начнем, будет включать почти все, что нужно и для других случаев.

1.1.2. Два различных положения наблюдателя

Затмение может быть рассчитано для двух различных точек наблюдения. Ламберт писал:

1. «Наблюдатель, следящий за небом, находится в определенной точке земной поверхности. Положение Луны, а также Солнца на небе во время затмения искажается из-за параллакса. Наблюдатель видит Луну перемещающейся к востоку относительно звезд до тех пор, пока лунный диск не коснется края солнечного диска или не покроет звезду. В случае полного затмения будут еще три контакта, причем последний имеет место в момент, когда Луна полностью открывает Солнце. При покрытии бывает только еще один контакт (появление звезды), при котором движущаяся Луна оставляет звезду позади себя». В вычислениях используется экваториальная декартова система координат и должен точно вычисляться параллакс. Эти вычисления довольно утомительны.

2. «Наблюдатель находится где-нибудь вне Земли. Он видит, как тень, отбрасываемая Луной, падает на Землю, закрывая свет Солнца или звезды, и движется с запада на восток, поскольку Земля вращается вокруг своей оси; так представляется картина затмения внешнему наблюдателю». Преимущество этого метода, обычно приписываемого Бесселю, заключается в его общности и относительной простоте вычислений. Этот метод и будет использован в дальнейшем. Изложение метода Бесселя по Шовене — основное содержание настоящего раздела. В некоторых случаях Шовене упрощает выводы Бесселя без ущерба для точности.

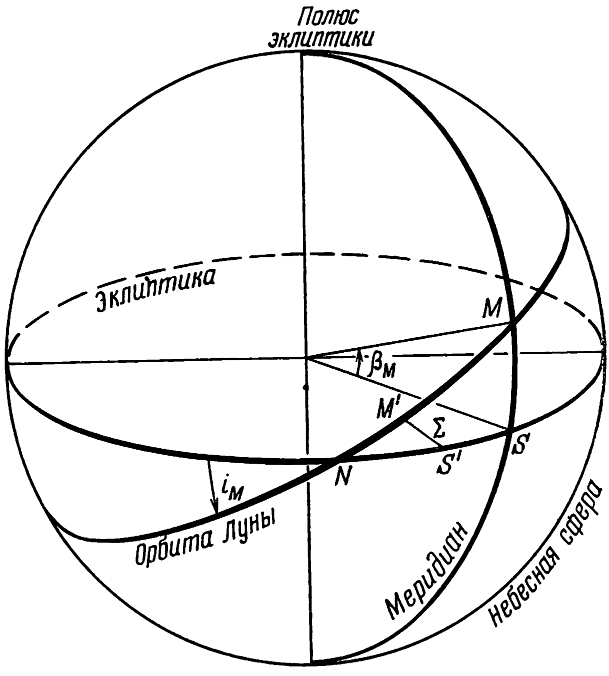
В вычислениях используется так называемая бесселева прямоугольная система координат, которая будет рассмотрена ниже.

Кроме того, надо отметить еще один важный фактор. Наблюдения затмений и покрытий включают регистрацию момента начала или конца явления по всемирному времени. Момент явления по всемирному времени зависит от геодезических координат наблюдателя, т. е. от его положения относительно тела Земли, а не от направления отвесной линии в точке наблюдения. Этот факт является ключом к применению и использованию затмений в геодезии.

1.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ

1.2.1. Предвычисление

Солнечное затмение происходит при покрытии солнечного диска Луной. Луна должна находиться в соединении с Солнцем или вблизи него, т. е. должно быть новолуние. Кроме того,



Р и с. 1.1. Луна и Солнце в момент соединения по долготе.

очевидно, что затмение может произойти лишь тогда, когда Луна находится в плоскости эклиптики либо вблизи нее. Эти два условия пояснены на рис. 1.1.

Обозначения на рисунке следующие:

M и S — положения Луны и Солнца соответственно на небесной сфере в момент соединения по долготе;

M' и S' — положения Луны и Солнца на небесной сфере, когда видимое расстояние между ними минимальное;

N — узел лунной орбиты, т. е. точка пересечения эклиптики и орбиты Луны;

i_M — наклонение лунной орбиты к эклиптике;
β_M — широта Луны в момент соединения;
Σ — расстояние $M'S'$.

Общие предвычисления заключаются в установлении границ, которые определяют вероятность солнечного затмения на какой-то

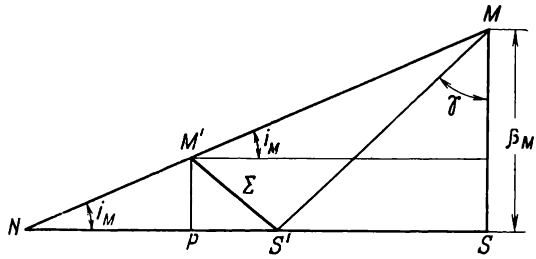


Рис. 1.2. Упрощенная схема расположения Луны и Солнца в соединении.

части земной поверхности. Для этих вычислений сферический треугольник SMN будем считать плоским (рис. 1.2).

Из рис. 1.2 видно, что

$$SS' = \beta_M \operatorname{tg} \gamma.$$

Обозначим символом λ отношение перемещений по долготе Луны (SP) и Солнца (SS') и получим

$$SP = \lambda \cdot SS' = \lambda\beta_M \operatorname{tg} \gamma;$$

отсюда

$$S'P = SP - SS' = \beta_M (\lambda - 1) \operatorname{tg} \gamma,$$

а

$$M'P = MS - SP \operatorname{tg} i_M = \beta_M - \lambda\beta_M \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} i_M.$$

Поэтому из этих выражений следует, что

$$\Sigma^2 = (M'P)^2 + (S'P)^2 = \beta_M^2 [(\lambda - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \gamma + \\ + (1 - \lambda \operatorname{tg} i_M \operatorname{tg} \gamma)^2]. \qquad (1.1)$$

Чтобы найти угол γ для момента затмения, продифференцируем это выражение по γ и приравняем его нулю. После некоторых преобразований получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\lambda \operatorname{tg} i_M}{(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 i_M}. \qquad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1), определим

$$\Sigma^2 = \frac{\beta_M^2 (\lambda - 1)^2}{(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 \operatorname{tg}^2 i_M},$$

или, вводя обозначение

$$\operatorname{tg} I = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \operatorname{tg} i_M, \tag{1.3}$$

найдем, что

$$\Sigma = \beta_M \cos I. \tag{1.4}$$

Расстояние между центрами Солнца и Луны, видимое из пункта наблюдения, может быть меньше Σ из-за разности горизонтальных параллаксов этих тел, т. е.

$$\text{минимальное видимое расстояние} = \Sigma - (\pi_M - \pi_S),$$

где π_M и π_S — горизонтальные параллаксы Луны и Солнца соответственно.

Очевидно, что затмение будет иметь место, когда это расстояние будет меньше, чем сумма угловых радиусов этих тел, т. е. при

$$\Sigma - (\pi_M - \pi_S) < k_M + k_S,$$

где k_M и k_S — угловые радиусы Луны и Солнца соответственно. С учетом выражения (1.4) получим

$$\beta_M \cos I < \pi_M - \pi_S + k_M + k_S. \tag{1.5}$$

Чтобы получить приближенное значение β_M, произведем некоторые приближенные расчеты. Из формулы (1.3), используя значения $i = 5°,145\,3964$ и $\lambda = 13,5$, найдем

$$\sec I = 1,00472,$$

и с этими данными из формулы (1.5) получим

$$\beta_M < (\pi_M - \pi_S + k_M + k_S) + (\pi_M - \pi_S + k_M + k_S)\, 0,00472.$$

Среднее значение второго члена около $25''$, так что

$$\beta_M < \pi_M - \pi_S + k_M + k_S + 25''. \tag{1.6}$$

Используя максимальные значения для π_M, k_M и k_S и минимальное для π_S ($\pi_M = 61'30''$; $k_M = 16'45''$; $k_S = 16'18''$; $\pi_S = 8'',65$), по данным American Ephemeris and Nautical Almanac мы определим, что

$$\beta_M < 1°34'49'',3.$$

Используя минимальные значения для π_M, k_M и k_S и максимальное для π_S ($\pi_M = 53'53''$; $k_M = 14'41''$; $k_S = 15'46''$; $\pi_S = 8'',96$), получим

$$\beta_M < 1°24'36'',0.$$

Значит, мы можем приближенно считать, что солнечное затмение *определенно* произойдет, если в новолуние $\beta_M < 1°24'36''$.

Если же $\beta_M > 1°34'49'',3$, то затмение *невозможно*. Когда же $1°24'36'' < \beta_M < 1°34'49'',3$, то затмение *может произойти или не произойти*.

Формула (1.5) может быть использована и для более точных общих предвычислений. Но в этом нет необходимости, так как American Ephemeris and Nautical Almanac всегда доступен, а он содержит предвычисленные обстоятельства солнечных затмений.

Пример

На стр. 26, 60 и 314 American Ephemeris and Nautical Almanac за 1963 г. мы найдем следующее:

Дата (время 0^h ET)	Солнце	Луна		
	долгота (средн. равноденств. 1963,0)	видимая долгота	видимая широта	возраст, дни
Июль 18	114°40′17″,4	77°04′13″,27	−2°54′39″,05	26,5
	3435″,8			
19	115 37 33,2	91 19 38 ,10	−1 44 02 ,12	27,5
	3436 ,4			
20	116 34 49,6	105 25 08 ,64	−0 27 51 ,40	28,5
	3437 ,0			
21	117 32 06,6	119 16 50 ,88	+0 48 44 ,25	0,1
	3437 ,5			
22	118 29 24,1	132 51 40 ,09	+2 00 58 ,60	1,1

ET — эфемеридное время, используемое с 1960 г. вместо всемирного времени при расчетах затмений и покрытий. О разности между всемирным и эфемеридным временем см.: А. Беррот, В. Хофманн, Космическая геодизия, М., ИЛ, 1963, стр. 111.— *Прим. ред.*

Путем простого сравнения этих данных мы видим, что Солнце и Луна будут находиться в соединении по долготе 20 июля 1963 г. Точная интерполяция показывает, что соединение будет в $20^h29^m11^s$. Поскольку в данном примере видимая широта Луны в момент новолуния $\beta_M < 1°24'36''$, то солнечное затмение определенно произойдет.

1.2.2. Условие начала или конца затмения Солнца в данном пункте Земли

Луна во время солнечного затмения отбрасывает два конуса тени (рис. 1.3), один из которых образуется внешними касательными к поверхности Луны и Солнца, а второй — внутренними каса-

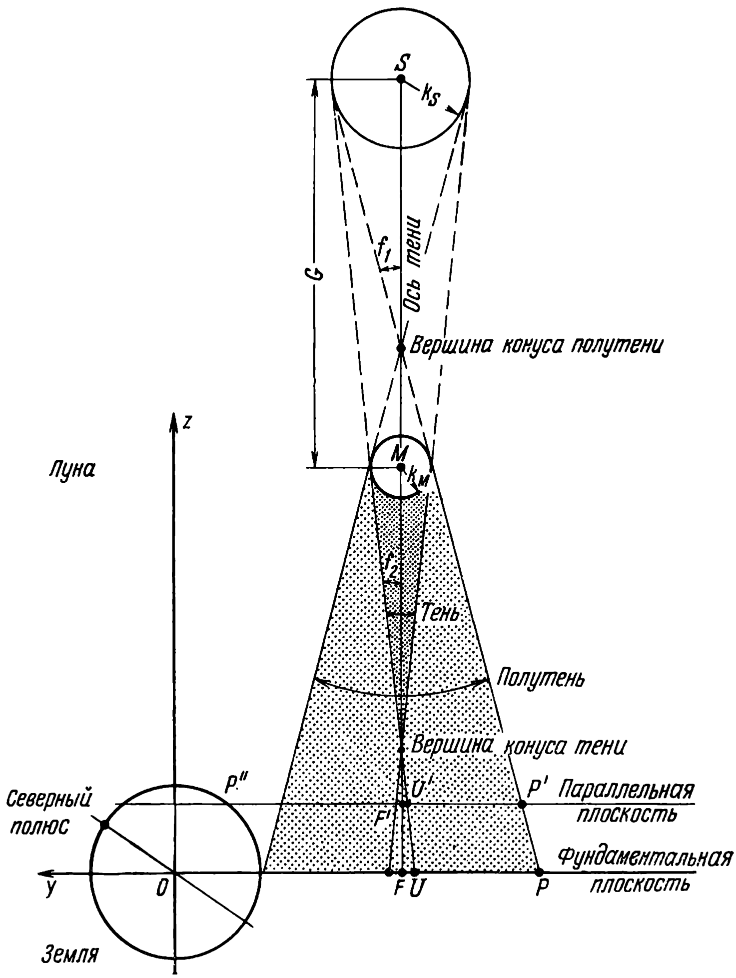


Рис. 1.3. Тень Луны.

тельными к ним. Первый конус называется *конусом тени*, а второй — *конусом полутени*. Ось этих конусов называется *осью тени*. Когда полутень покрывает и открывает заданный пункт на земной поверхности, наблюдатель, находящийся в этом пункте, видит внешние контакты дисков Солнца и Луны (первый и четвертый контакты). Покрытие и открытие пункта тенью соответствует двум внутренним контактам (второму и третьему). Если наблюдатель находится внутри конуса тени, между его вершиной и Луной, то он может наблюдать *полное* затмение, т. е. Луна для него полностью закроет свет Солнца. Если же наблюдатель находится в продолжении конуса тени, то для него видимый диаметр Луны будет меньше видимого диаметра Солнца, и поэтому Луна не полностью покроет солнечный диск. Такое затмение называется *кольцеобразным*. И наконец, наблюдатель, находящийся внутри конуса полутени, увидит, что Луна закрывает лишь часть солнечного диска; такое затмение называется *частным*.

Как упоминалось в разд.1.1.2, при дальнейшем рассмотрении будут использованы бесселевы прямоугольные координаты.

Как видно из рис. 1.3, начало этой системы находится в центре Земли O. Ось z параллельна оси тени и положительна в направлении Солнца. Плоскость xy называется *фундаментальной плоскостью* и перпендикулярна оси тени. Плоскость yz проходит через северный полюс Земли и ось y положительна к северу. Ось x перпендикулярна плоскости рисунка и положительна к востоку. Фактически она является линией пересечения фундаментальной и экваториальной плоскостей. Плоскость, проходящая через точку наблюдения и параллельная фундаментальной плоскости, называется *параллельной плоскостью*.

Введем следующие обозначения:

r_M — расстояние между центрами Земли и Луны, OM;
r_S — расстояние между центрами Земли и Солнца, OS;
l_1 — радиус полутени на фундаментальной плоскости, FP;
l_2 — радиус тени на фундаментальной плоскости, FU;
L_1 — радиус полутени на параллельной плоскости, $F'P'$;
L_2 — радиус тени на параллельной плоскости, $F'U'$;
ξ, η, ζ — бесселевы координаты наблюдателя;
Δ — расстояние между наблюдателем и осью тени на параллельной плоскости, $P''F'$.

Из сказанного видно, что внешние контакты дисков Солнца и Луны будут иметь место при условии, если расстояние между наблюдателем и центром тени равно радиусу полутени на параллельной плоскости, т. е.

$$\Delta = L_1.$$

Также очевидно, что внутренние контакты могут наблюдаться лишь при условии, если расстояние от наблюдателя до центра тени равно радиусу тени на параллельной плоскости, т. е.

$$\Delta = L_2.$$

Из этих условий видно, что для предвычисления момента любого контакта в данном месте на земной поверхности мы должны вычислить следующие величины:

1) положение оси тени на тот или иной заданный момент;

2) расстояние между наблюдателем и осью тени на параллельной плоскости;

3) радиус тени и полутени на параллельной плоскости.

Имея эти данные, мы можем написать аналитическое выражение условия наступления контактов.

1.2.2.1. Положение оси тени в заданный момент

Пусть ось тени пересекает небесную сферу в некоторой точке. Прямое восхождение (a) и склонение (d) этой точки определяются направлением оси тени, т. е. ее положением в пространстве. В данном разделе мы будем определять это направление в произвольный заданный момент.

Для этой цели используем экваториальную систему координат p, s, t (рис. 1.4).

Начало координат расположим в центре масс Земли; ось p совместим со средней осью вращения Земли, ось s — с проекцией на плоскость экватора направления Земля — Солнце (OS), а ось t направим так, чтобы она образовала с осями p и s правую систему координат. Положения Солнца (S) и Луны (M) определяются их прямыми восхождениями, склонениями и расстояниями от начала координат: α_S, δ_S, r_S и α_M, δ_M, r_M соответственно.

Проецируя расстояние Луна — Солнце (обозначенное G на рис. 1.4) как вектор на оси p, s и t, мы получим три уравнения:

$$\begin{aligned} G\sin d &= r_S \sin\delta_S - r_M \sin\delta_M, \\ G\cos d\cos(a-\alpha_S) &= r_S\cos\delta_S - r_M\cos\delta_M\cos(\alpha_M-\alpha_S), \\ G\cos d\sin(a-\alpha_S) &= -r_M\cos\delta_M\sin(\alpha_M-\alpha_S). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Обозначив

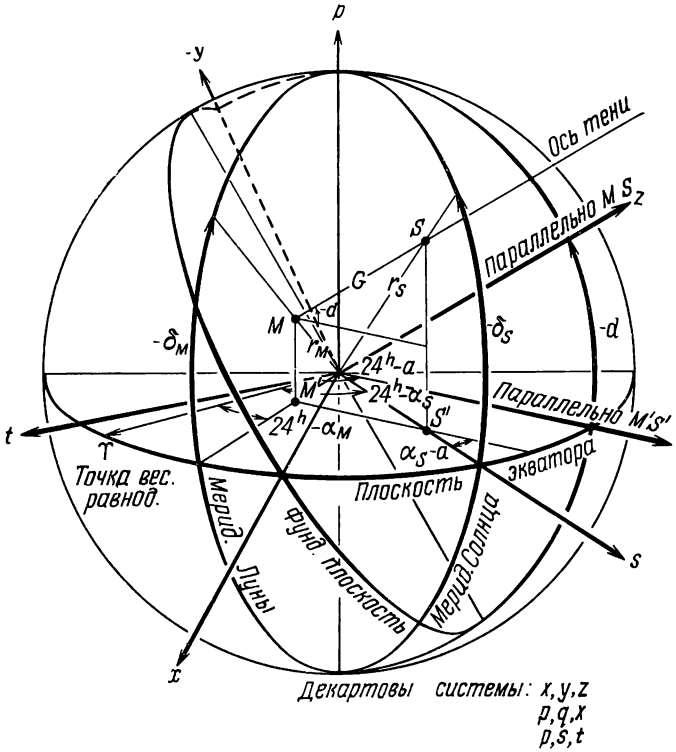
$$g=\frac{G}{r_S} \quad \text{и} \quad b=\frac{r_M}{r_S},$$

из (1.7) получим

$$\begin{aligned} g\sin d &= \sin\delta_S - b\sin\delta_M, \\ g\cos d\cos(a-\alpha_S) &= \cos\delta_S - b\cos\delta_M\cos(\alpha_M-\alpha_S), \\ g\cos d\sin(a-\alpha_S) &= -b\cos\delta_M\sin(\alpha_M-\alpha_S) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Величины α_M, δ_M, α_S, δ_S и r_S, входящие в эти уравнения, можно выбрать из American Ephemeris and Nautical Almanac. Если расстояние r_M неизвестно, то b вычисляется по формуле

$$b=\frac{r_M}{r_S}=\frac{\sin\pi_S}{\sin\pi_M},$$



Р и с. 1.4. Соотношения между различными системами прямоугольных координат.

где π_M и π_S — экваториальные горизонтальные параллаксы Луны и Солнца. Приняв за единицу среднее расстояние между центрами Земли и Солнца, можем написать

$$\sin \pi_S = \frac{\sin \pi_S^M}{r_S},$$

где π_S^M — средний экваториальный горизонтальный параллакс Солнца. Следовательно,

$$b = \frac{\sin \pi_S^M}{r_S \sin \pi_M}. \tag{1.9}$$

Выражение (1.9) очень удобно для вычисления b, так как π_M и r_S даются в American Ephemeris and Nautical Almanac, а π_S^M — величина постоянная.

Из решения уравнений (1.8) могут быть получены с любой требуемой точностью координаты направления тени a и d, а также расстояние G.

Формулы для приближенного решения уравнений (1.8), которые дают высокую точность, если $\alpha_M - \alpha_S < 1°43'$ и $a - \alpha_S < 17''$, были получены Шовене:

$$a = \alpha_S - \frac{b}{1-b} \cos \delta_M \sec \delta_S (\alpha_M - \alpha_S);$$
$$d = \delta_S - \frac{b}{1-b} (\delta_M - \delta_S);$$
$$g = 1 - b \text{ и } G = r_S g.$$

Эти выражения во многих случаях могут быть приведены к виду

$$a = \alpha_S - b(\alpha_M - \alpha_S),$$
$$d = \delta_S - b(\delta_M - \delta_S).$$

1.2.2.2. Расстояние от данного пункта наблюдения до оси тени в заданный момент

Для вычисления расстояния между заданным местом наблюдения и осью тени на параллельной плоскости найдем бесселевы координаты x и y оси тени и наблюдателя. Если эти координаты известны, то расстояние вычисляется с помощью простой геометрической формулы. Для вычисления бесселевых координат оси тени воспользуемся новой экваториальной прямоугольной системой координат p, q, x с началом в центре Земли (см. рис. 1.4). Ось p расположим так же, как в предыдущем разделе; ось q направим параллельно проекции линии MS на плоскость экватора, ось x — перпендикулярно двум другим осям; как видно из рисунка, она совпадет с осью x бесселевой системы координат.

В данной системе (см. рис. 1.4) координаты Луны выражаются так:

$$\begin{aligned} p &= -r_M \sin \delta_M, \\ q &= r_M \cos \delta_M \cos (\alpha_M - a), \\ x &= r_M \cos \delta_M \sin (\alpha_M - a). \end{aligned} \tag{1.10}$$

По этим координатам могут быть вычислены бесселевы координаты Луны с учетом поворота данной системы вокруг оси x до ее совпадения с системой x, y, z.

Преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= -p \cos d - q \sin d, \\ z &= -p \sin d + q \cos d. \end{aligned} \tag{1.11}$$

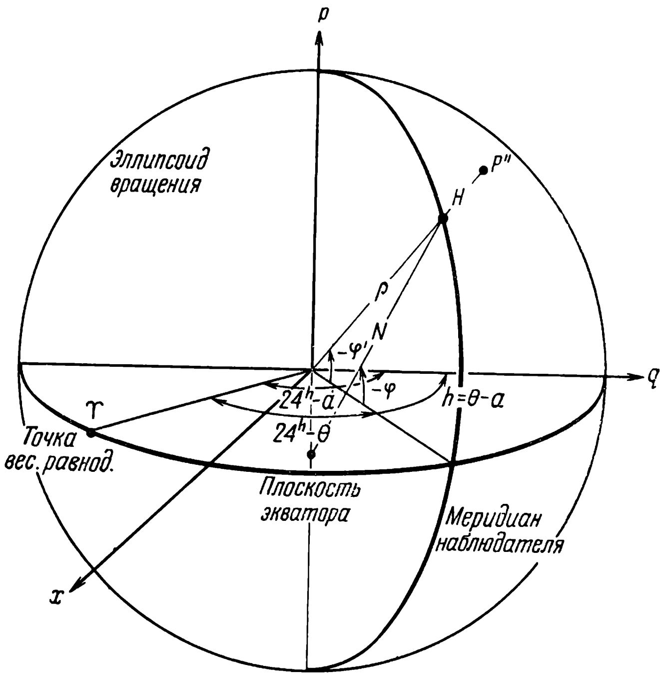


Рис. 1.5. Положение наблюдателя.

Подставляя сюда значения p, q и x из (1.10), получим

$$\begin{aligned} x &= r_M \cos\delta_M \sin(\alpha_M - a), \\ y &= r_M \sin\delta_M \cos d - r_M \cos\delta_M \sin d \cos(\alpha_M - a), \\ z &= r_M \sin\delta_M \sin d + r_M \cos\delta_M \cos d \cos(\alpha_M - a). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Как видно из рис. 1.3, координаты x и y оси тени и центра Солнца те же, что и координаты центра Луны. Координата z центра Солнца имеет вид

$$z_S = z + G,$$

где z вычисляется по формуле (1.12), а G — по формуле (1.8).

Следующий шаг — вычисление бесселевых координат наблюдателя. Из рис. 1.5 видно, что координаты наблюдателя p, q, x выражаются так:

$$\begin{aligned} p &= -\rho\sin\varphi', \\ q &= \rho\cos\varphi'\cos(\theta - a), \\ x &= \rho\cos\varphi'\sin(\theta - a). \end{aligned}$$

Здесь ρ — *истинное* расстояние от наблюдателя до центра масс Земли (геодезический радиус-вектор.— *Перев.*), φ' — геоцентрическая широта и θ — прямое восхождение меридиана наблюдателя, т. е. местное звездное время.

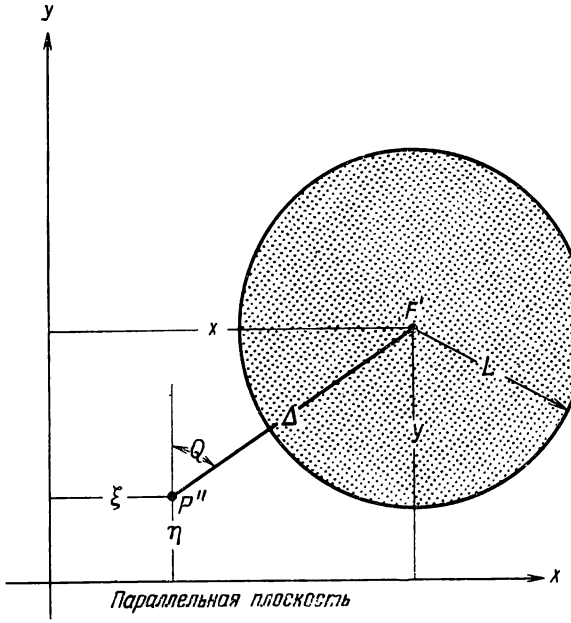


Рис. 1.6. Проекции положения наблюдателя и тени на параллельную плоскость.

Преобразуя их в бесселевы координаты с помощью уравнений (1.11), мы получим

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi' \sin (\theta - a), \\ \eta &= \rho \sin \varphi' \cos d - \rho \cos \varphi' \sin d \cos (\theta - a), \\ \zeta &= \rho \sin \varphi' \sin d + \rho \cos \varphi' \cos d \cos (\theta - a), \end{aligned} \tag{1.13}$$

или с учетом того, что для эллипсоида вращения

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi' &= (N + H) \cos \varphi, \\ \rho \sin \varphi' &= [N (1 - e^2) + H] \sin \varphi, \end{aligned}$$

получим с достаточной степенью точности бесселевы координаты наблюдателя:

$$\begin{aligned} \xi &= (N + H) \cos \varphi \sin (\theta - a), \\ \eta &= (N + H) [(1 - e^2) \sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos (\theta - a)], \\ \zeta &= (N + H) [(1 - e^2) \sin \varphi \sin d + \cos \varphi \cos d \cos (\theta - a)]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Здесь N — радиус кривизны первого вертикала, H — высота наблюдателя над эллипсоидом, φ — геодезическая широта, а e — эксцентриситет эллипсоида.

Величина $(\theta - a)$ — часовой угол оси тени (в дальнейшем будет обозначаться буквой h). Этот часовой угол может быть вычислен по различным формулам, например, так:

$$h = \theta - a = h_G + \lambda = \mu + \lambda - 1{,}0027\,\Delta T,$$

где h_G — часовой угол тени на долготе Гринвича, μ — ее эфемеридный часовой угол, λ — долгота наблюдателя (положительная к востоку), а ΔT — разность эфемеридного и всемирного времени, публикуемая в Ephemeris.

На рис. 1.6 показано положение наблюдателя P'' и центра тени F'. Очевидно, расстояние Δ может быть вычислено так:

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2. \tag{1.15}$$

Введя угол Q, можем написать для дальнейшего использования еще два уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta \sin Q &= x - \xi, \\ \Delta \cos Q &= y - \eta. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Входящие в эти уравнения величины x и y вычисляются по формулам (1.12), а ξ и η — по формулам (1.14).

1.2.2.3. Радиусы тени и полутени

Рис. 1.7 поясняет геометрию тени. Очевидно, углы растворов при вершинах конусов тени и полутени могут быть вычислены следующим образом:

$$\sin f_1 = \frac{k_S + k_M}{G},$$

$$\sin f_2 = \frac{k_S - k_M}{G},$$

или, в общем виде,

$$\sin f_{1,2} = \frac{k_S \pm k_M}{G}, \tag{1.17}$$

причем знак плюс берется для конуса полутени, а минус — для конуса тени.

Из рис. 1.7 следуют также зависимости:

$$\begin{aligned} l_1 \cos f_1 &= z \sin f_1 + k_M, \\ l_2 \cos f_2 &= z \sin f_2 - k_M. \end{aligned}$$

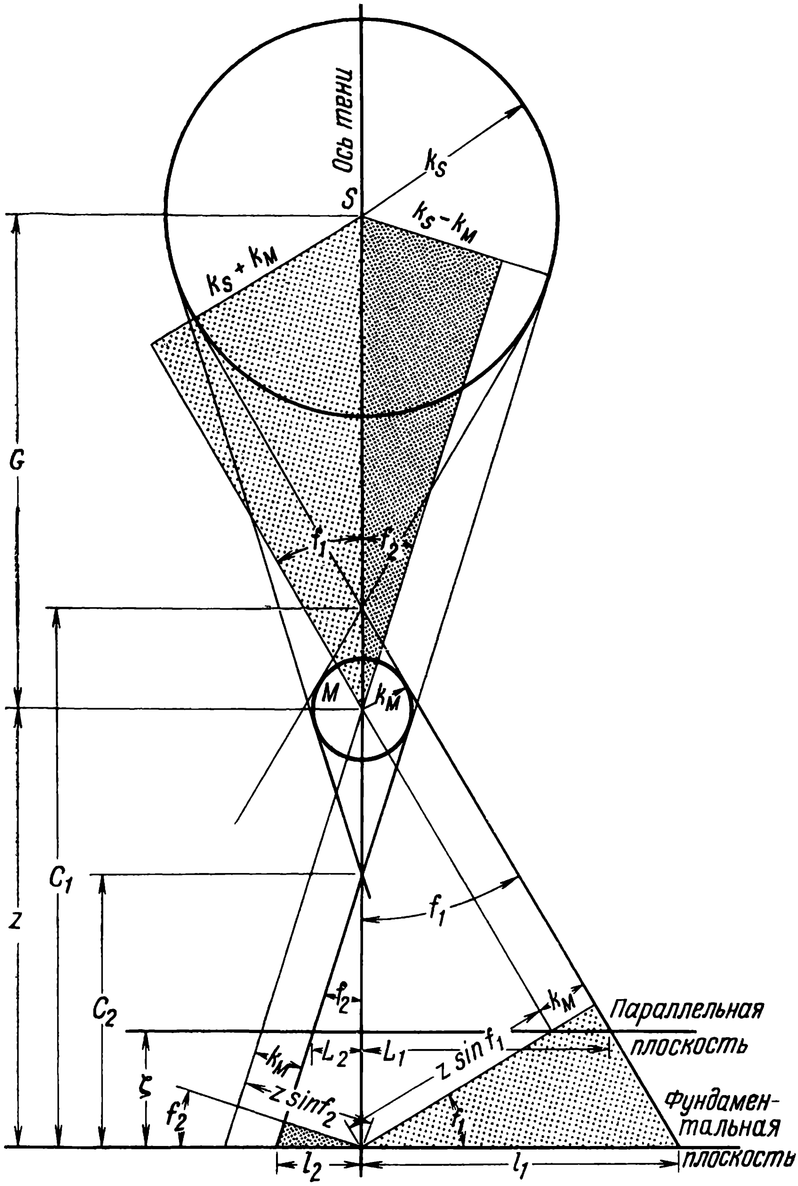


Рис. 1.7. Геометрия тени.

Поэтому радиусы теней на фундаментальной плоскости могут быть вычислены так:

$$l_{1,2}=\frac{z\sin f_{1,2}\pm k_M}{\cos f_{1,2}},$$

или, в другом виде,

$$l_{1,2}=z\operatorname{tg} f_{1,2}\pm k_M\sec f_{1,2}, \tag{1.18}$$

причем индекс 1 и знак плюс соответствуют полутени, а индекс 2 и знак минус — тени.

Расстояния от вершин конусов до фундаментальной плоскости имеют вид

$$c_{1,2}=z\pm\frac{k_M}{\sin f_{1,2}}, \tag{1.19}$$

причем индексы и знаки имеют тот же смысл, что и выше. С учетом (1.19), выражение (1.18) можно записать в более общем виде

$$l_{1,2}=c_{1,2}\operatorname{tg} f_{1,2}. \tag{1.20}$$

Из рис. 1.7 также очевидно, что радиусы теней на параллельной плоскости могут быть вычислены по формуле

$$L_{1,2}=l_{1,2}-\zeta\operatorname{tg} f_{1,2}=(c_{1,2}-\zeta)\operatorname{tg} f_{1,2}. \tag{1.21}$$

Для конуса полутени, т. е. для случая частного затмения, разность $c_1-\zeta$ всегда положительна и поэтому величина L_1 также положительна. Для конуса тени разность $c_2-\zeta$ отрицательна, если вершина конуса расположена ниже параллельной плоскости; значит, в случае полного затмения величина L_2 будет отрицательна. В случае кольцеобразного затмения вершина конуса тени располагается над параллельной плоскостью, поэтому $c_2-\zeta$, а также L_2 будут положительны. Естественно, что для радиусов теней на фундаментальной плоскости действуют те же правила знаков, т. е. радиус l_1 всегда положителен, l_2 положителен для кольцеобразного затмения и отрицателен для полного затмения.

1.2.2.4. Основное уравнение теории затмений

Основное уравнение теории затмений — аналитическое выражение условия наступления контактов, т. е. начала или конца солнечного затмения. Как нам уже известно, это условие (если пренебречь индексами) имеет вид

$$\Delta=L.$$

Вводя обозначение $i=\operatorname{tg} f$, можно с помощью уравнений (1.15) и (1.21) развернуть это выражение так:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=(l-i\zeta)^2. \tag{1.22}$$

Если же использовать уравнения (1.16), а не (1.15), то получим

$$
\begin{aligned}
(l - i\zeta)\sin Q &= x - \xi, \\
(l - i\zeta)\cos Q &= y - \eta.
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Любое из уравнений (1.22) и (1.23) может рассматриваться как основное уравнение теории затмений.

1.2.2.5. Бесселевы элементы затмения

Параметры, определяющие положение и геометрию тени на заданный момент, называются бесселевыми элементами затмения. Ими являются:

координаты оси тени на фундаментальной плоскости, x и y;

направление d оси тени в заданный момент и $h_G = \theta_G - a$, или d и $\mu = h_G + 1{,}0027\ \Delta T$;

радиусы кругов тени и полутени на фундаментальной плоскости, l_1 и l_2;

углы раствора конусов тени и полутени, f_1 и f_2.

Все эти элементы даются в Ephemeris для периода затмений с 10-минутными интервалами по времени. Отметим, что все эти элементы не зависят от положения наблюдателя.

1.3. ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ СОЛНЕЧНОГО ЗАТМЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАННОГО ПУНКТА

Предвычисление солнечного затмения для заданного пункта заключается в определении момента T, в который удовлетворяется основное уравнение (1.23). Ниже будут рассмотрены два по существу одинаковых метода предвычисления: общий метод и метод American Ephemeris and Nautical Almanac. Кроме того, будут описаны карты затмений как средство для приближенных предвычислений.

1.3.1. Общий метод

1.3.1.1. Момент контакта

Пусть T_0 — принятый момент контакта; $\tau = T - T_0$ — разность между ним и истинным моментом контакта; x, y, d, a, l и i — бесселевы элементы затмения; ξ, η и ζ — бесселевы координаты наблюдателя, вычисленные на момент T_0; x', y', ξ' и η' — часовые изменения величин x, y, ξ и η соответственно. Тогда в момент контакта T бесселевы координаты оси тени и наблюдателя будут следующие:

$$\begin{aligned} &x+x'\tau,\\ &y+y'\tau,\\ &\xi+\xi'\tau,\\ &\eta+\eta'\tau. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Величины x и y изменяются неравномерно, и, чтобы получить их значения с точностью имеющихся или заранее составленных таблиц, при интерполировании необходимо учитывать (в зависимости от шага таблиц) вторые и даже третьи разности. Часовые изменения x' и y' можно получить из тех же таблиц путем умножения разностей двух последовательных табличных значений на интерполяционный множитель час/интервал. Например, если величины x, y табулированы с шагом в 10 *мин*, то разности двух последовательных значений функций, умноженные на 6, дадут часовые изменения x', y'. Однако если таблицы составлены на каждый час, то часовые изменения могут быть вычислены так:

$$x' = \frac{1}{2}(x_1 - x_{-1}) - \frac{1}{6} d_x^3,$$

$$y' = \frac{1}{2}(y_1 - y_{-1}) - \frac{1}{6} d_y^3,$$

где x_1 и y_1 — величины, вычисленные на момент $T_0 + 1^h$, x_{-1} и y_{-1} соответствуют моменту $T_0 - 1^h$, а d^3 — третья разность. Ниже для примера дается таблица значений x. По ней для момента T_0 получаем

$$x' = \frac{1}{2}(0,464044 + 0,626559) + \frac{1}{6}\,0,0000525 =$$
$$= 0,545310 \text{ (земных радиусов в час).}$$

Изменения бесселевых координат наблюдателя ξ, η и ζ более равномерны и, следовательно, могут быть получены путем дифференцирования уравнений (1.13), в которых широта, долгота

Момент	x	d_x^1	d_x^2	d_x^3
$T_0 - 2^h$	$-1,171856$			
		$+0,545297$		
$T_0 - 1^h$	$-0,626559$		$+18$	
		$+0,545315$		-45
T_0	$-0,081244$		-27	
		$+0,545288$		-60
$T_0 + 1^h$	$+0,464044$		-87	
		$+0,545201$		
$T_0 + 2^h$	$+1,009245$			

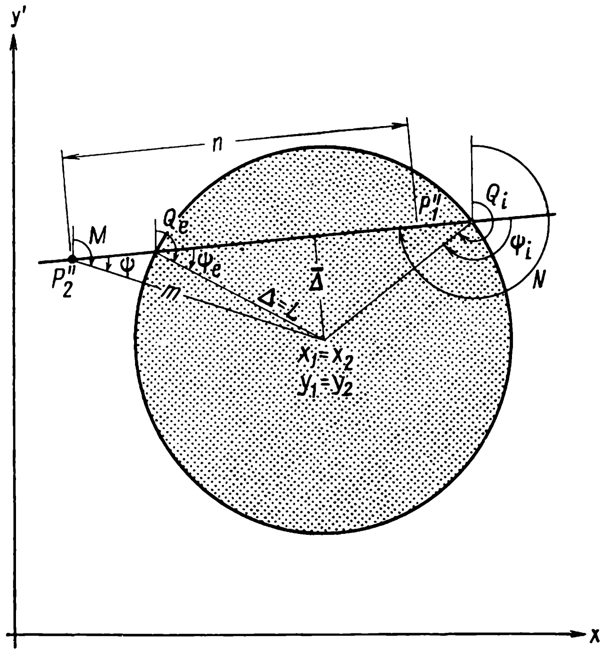
и геоцентрический радиус наблюдателя считаются постоянными. После дифференцирования получим

$$\begin{aligned}
\xi' &= \frac{d\xi}{dT} = \frac{\partial\xi}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial T} = h'\rho\cos\varphi'\cos h = h'(-\eta\sin d + \zeta\cos d),\\
\eta' &= \frac{d\eta}{dT} = \frac{\partial\eta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial T} + \frac{\partial\eta}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial T} = h'\xi\sin d - d'\zeta,\\
\zeta' &= \frac{d\zeta}{dT} = \frac{\partial\zeta}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial T} + \frac{\partial\zeta}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial T} = -h'\xi\cos d + d'\eta.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

В этих выражениях $d' = \partial d/dT$ — производная склонения оси тени, а $h' = \partial h/\partial T$ — производная ее часового угла, которую можно заменить производной часового угла μ из Ephemeris, т. е. $h' = \mu'$.

Используя значения величин x', y', ξ' и η', вычисленных описанным выше способом, можно по формулам (1.24) получить бесселевы координаты x, y, ξ и η на момент контакта T. Уравнения (1.23) на момент T без учета изменения L за небольшой период τ примут вид

$$\begin{aligned}
L\sin Q &= x - \xi + (x' - \xi')\tau,\\
L\cos Q &= y - \eta + (y' - \eta')\tau.
\end{aligned} \tag{1.26}$$



Р и с. 1.8. Относительные полярные координаты центра тени по отношению к наблюдателю.

Сохраняя обозначения Δ и Q для точек, находящихся внутри тени, и используя вспомогательные величины m и M для момента T_0, можем записать уравнения (1.26) так:

$$m \sin M = x - \xi, \qquad m \cos M = y - \eta. \tag{1.27}$$

Поскольку величины x, y, ξ и η известны, то по ним можно вычислить значения m и M, которые представляют полярные координаты центра тени относительно наблюдателя.

Подобные же уравнения могут быть написаны и для часовых изменений. На рис. 1.8 показана система координат x, y на параллельной плоскости. На этом рисунке часовые изменения показаны так, что тень неподвижна, в то время как наблюдатель движется. Расстояние $P_1''P_2'' = n$ — относительный вектор скорости, а N — направление относительного движения. Другими словами, величины n и N — это полярные координаты относительного движения тени и наблюдателя. Из рис. 1.8 видно, что для часовых изменений справедливы такие уравнения:

$$\begin{aligned} n\sin N &= x' - \xi', \\ n\cos N &= y' - \eta'. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Но x', y', ξ' и η' — известные величины, поэтому с их помощью можно вычислить n и N.

Подставляя уравнения (1.27) и (1.28) в (1.26), найдем, что

$$\begin{aligned} L\sin Q &= m\sin M + \tau n\sin N, \\ L\cos Q &= m\cos M + \tau n\cos N. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Умножим первое уравнение (1.29) на $\cos N$, вычтем из него второе уравнение (1.29), умноженное на $\sin N$, и получим

$$L\sin(Q - N) = m\sin(M - N).$$

Складывая произведение первого уравнения (1.29) на $\sin N$ с произведением второго уравнения на $\cos N$, найдем

$$L\cos(Q - N) = m\cos(M - N) + n\tau.$$

Воспользовавшись символом $\psi = Q - N$, можем эти уравнения привести к виду

$$\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{m}{L}\sin(M - N), \\ \tau &= \frac{L}{n}\cos\psi - \frac{m}{n}\cos(M - N). \end{aligned} \tag{1.30}$$

Второе уравнение (1.30) и решает поставленную задачу. Оно дает значение τ, которое мы прибавляем к приближенному моменту T_0 и получаем момент контакта T. В этом уравнении m и M получаются из (1.27); n и N — из (1.28); L (с соответствующим знаком) — из (1.21); ψ — из первого уравнения (1.30). Нужно отметить, что первое уравнение (1.30) не определяет знака $\cos\psi$ во втором уравнении. Для решения этого вопроса можно применить такое правило: $\cos\psi$ будет отрицательным для начала частного или кольцеобразного солнечного затмения и для конца полного затмения. Во всех других случаях он будет положительным. Знаки $\cos\psi$ и $\sin\psi$ в уравнении (1.30) определяют, в какой четверти лежит угол ψ. Таким образом, мы имеем следующие формулы для моментов затмения:

$$T_i = T_{0i} \mp \frac{L_i}{n_i}|\cos\psi_i| - \frac{m_i}{n_i}\cos(M_i - N_i) \quad \text{(начало)},$$

$$T_m = T_{0m} - \frac{m_m}{n_m}\cos(M_m - N_m) \quad \text{(середина)},$$

$$T_e = T_{0e} \pm \frac{L_e}{n_e}|\cos\psi_e| - \frac{m_e}{n_e}\cos(M_e - N_e) \quad \text{(конец)},$$

где нижний знак соответствует полному затмению, а верхний — всем другим случаям. Индексы i, m и e относятся соответственно к началу, середине и концу затмения.

Для более точного вычисления моментов описанным выше способом нужно вместо одного приближения делать два. Для второго приближения наиболее удобна следующая формула Шовене:

$$\tau = \frac{m}{n} \frac{\sin(M - N - \psi)}{\sin\psi}. \tag{1.30a}$$

Эта формула, однако, не очень точна при малых значениях угла ψ.

1.3.1.2. Позиционный угол

Предвычисление затмения для данного пункта включает определение положения точки на крае Солнца, в которой произойдет первый контакт. *Позиционный угол*, вычисляемый по формуле

$$P = N + \psi, \tag{1.31}$$

представляет угловое расстояние от точки севера на крае Солнца до точки контакта. Этот угол считается положительным при движении к востоку. В связи с тем, что приближенный момент, для которого вычислен угол ψ, не является точным моментом контакта, обычно требуется второе приближение.

Если отсчитывать позиционный угол от точки вертекса солнечного края (от точки на крае, ближайшей к зениту), то нужно производить дополнительное вычисление. Оно заключается в нахождении параллактического угла (углового расстояния от точки вертекса солнечного края до точки севера) из решения параллактического треугольника с вершинами полюс, зенит и ось тени (рис. 1.9).

Используя формулы сферической тригонометрии, можем написать

$$\sin z' \sin C = \cos\varphi' \sin h,$$

$$\sin z' \cos C = \sin\varphi' \cos d - \cos\varphi' \sin d \cos h.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} C = \frac{\cos\varphi' \sin h}{\sin\varphi' \cos d - \cos\varphi' \sin d \cos h}.$$

Сравнивая это выражение с (1.13), мы найдем, что

$$\operatorname{tg} C = \frac{\xi}{\eta}, \tag{1.32}$$

причем $\sin C$ имеет такой же знак, как и ξ.

Угол V между точкой контакта и вертексом имеет положительное направление к востоку и вычисляется так:

$$V = P - C = N + \psi - C. \tag{1.33}$$

Перевычисление ξ и η на требуемые моменты не представляет труда. Если же мы хотим воспользоваться уже найденными значениями ξ и η, то мы должны привести их к требуемому моменту путем учета

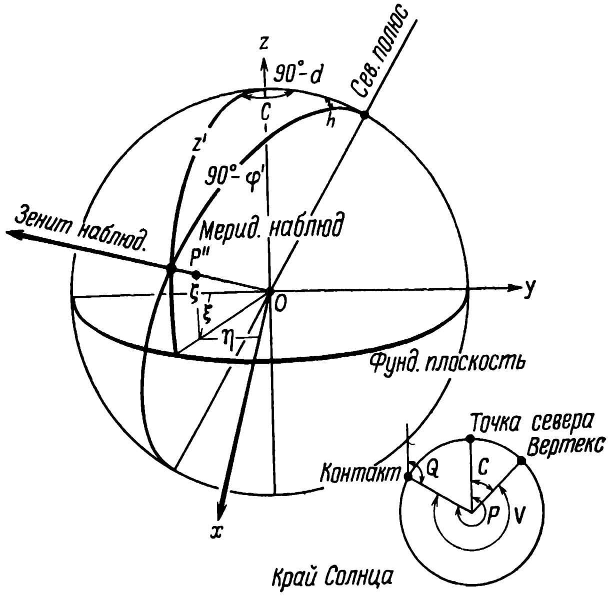


Рис. 1.9. Позиционный угол.

двух дополнительных членов ряда Маклорена для каждой из этих величин. Пользуясь уже вычисленными значениями, получим

$$\operatorname{tg} C = \frac{\xi + \tau\xi' - \tau^2\xi}{\eta + \tau\eta' + \tau^2\eta_2},$$

где τ — разность момента, для которого вычислены ξ и η, и момента соответствующего контакта, а

$$\eta_2 = \rho \cos \varphi' \sin d \cos h.$$

1.3.1.3. Максимальная фаза и ее момент

В момент наибольшего затемнения наблюдатель находится дальше всего от края тени, т. е. расстояние $L - \Delta$ максимально. Пренебрегая изменением L, можно сказать, что наибольшее затемнение произойдет при минимальном значении Δ. Отметим, что это имеет место в момент $T_1 = T_0 + \tau_1$. Величину τ_1 можно вычислить с помощью двух уравнений, предшествующих формулам (1.30), если в них заменить $Q - N$ на ψ_1, а L на Δ:

$$\Delta \sin \psi_1 = m \sin (M - N),$$

$$\Delta \cos \psi_1 = m \cos (M - N) + n\tau_1.$$

Сумма квадратов этих уравнений дает

$$\Delta^2 = m^2 \sin^2 (M - N) + [m \cos (M - N) + n\tau_1]^2.$$

Так как m и M вычисляются на момент T_0, а N — почти постоянная величина, то и первый член в правой части полученного выражения приближенно можно считать постоянным. Поэтому расстояние Δ минимально, когда второй член равен нулю, а это возможно, если

$$\tau_1 = -\frac{m \cos (M - N)}{n}. \tag{1.34}$$

Полученное выражение представляет второй член уравнения (1.30), вычисленный ранее.

В этом случае минимальное расстояние $\bar{\Delta}$ (рис. 1.8) получается так:

$$\bar{\Delta} = m \sin (M - N) = L \sin \psi.$$

Фаза затмения ($\bar{M}$) обычно определяется той частью видимого диаметра Солнца, которая покрыта лунным диском. Когда наблюдатель находится так далеко в зоне полутени, что попадает на границу полутени и тени, то начинается полное затмение. В этом случае расстояние от наблюдателя до края тени равно алгебраической сумме $L_1 + L_2$. В любом другом случае расстояние от наблюдателя до края полутени равно $L_1 - \bar{\Delta}$. Поэтому приближенно

$$\bar{M} = \frac{L_1 - \bar{\Delta}}{L_1 + L_2}. \tag{1.35}$$

1.3.2. Карты затмений

Карты, с помощью которых можно приближенно определять обстоятельства затмения для любого заданного пункта на земной поверхности, называются *картами затмений*. Обычно на эти карты наносят несколько кривых. Чаще всего вычерчивают такие кривые:

1. Граница лунной тени на Земле в заданное время. Эта линия — след пересечения конуса тени с поверхностью Земли, т. е. кривая, в каждой точке которой можно наблюдать контакты во время затмения.

2. Центральная линия затмения (полоса полной фазы.— *Перев.*). Это геометрическое место точек на поверхности Земли, через которые проходит ось тени.

3. Кривые начала и конца затмения при восходе и заходе Солнца. Это кривые, в каждой точке которых затмение начинается или заканчивается, когда Солнце находится на горизонте.

4. Кривая середины затмения при восходе и заходе Солнца. Это линия, для которой максимальная фаза затмения наблюдается, когда Солнце находится на горизонте.

5. Северная и южная границы затмения. Эти границы представляют кривые, содержащие точки, в которых наблюдается лишь один контакт дисков Солнца и Луны и появляющаяся Луна касается либо южного, либо северного краев Солнца. Другими словами, это линии, в каждой точке которых по мере продвижения границы тени по Земле наблюдается один контакт.

6. Кривые начала или конца затмения (изохроны). По этим кривым определяют время начала или конца затмения в любом пункте, где можно видеть это затмение.

7. Кривые середины затмения. Эти кривые дают среднее время между первым и последним контактами полутени для любой точки земной поверхности, в которой можно наблюдать затмение. Не надо путать это время с моментом максимальной фазы, от которого оно может отличаться на несколько минут.

8. Кривые полупродолжительности затмений. Они дают время полупродолжительности частной фазы затмения (прохождения полутени) для любого пункта. Время середины затмения плюс или минус полупродолжительность этого затмения дает приближенный момент конца или начала затмения для данного пункта.

На картах затмений из American Ephemeris and Nautical Almanac показаны кривые (2), (3), (4), (5) и, кроме того, кривые (7) и (8). Старые издания (до 1960 г.) вместо кривых (7) и (8) давали лишь кривую (6). На рис. 1.10 приведена карта затмения.

Дополнительно к этим кривым в некоторых отдельных случаях строят кривые, показывающие местные обстоятельства затмения. В большинстве своем они помогают при подготовке к наблюдениям. К ним можно отнести следующие кривые:

9. Изофазы, представляющие геометрические места точек, для которых фазы затмения равны. Значит, во всех этих точках можно наблюдать одинаковое затмение Солнца.

10. Изолимбы (изогоны.— *Перев.*)— геометрические места точек, в которых контакты при наблюдениях имеют один и тот же пози-

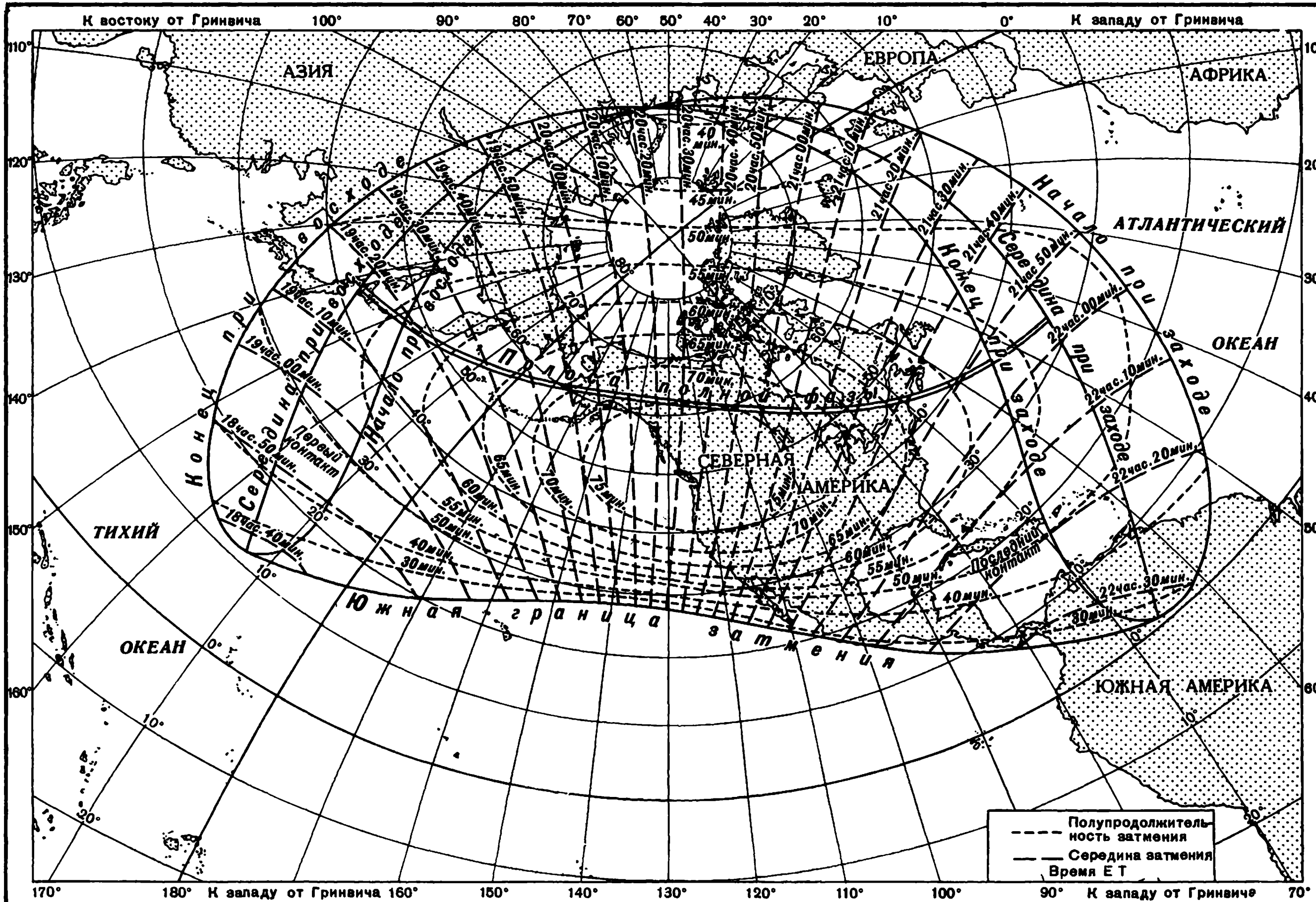


Рис. 1.10. Карта полного солнечного затмения 20 июля 1963 г.

ционный угол. Другими словами, на всем протяжении такой кривой контакт наблюдается в одной постоянной точке на краю Солнца.

Методы вычисления или построения всех этих кривых не входят в круг вопросов, рассматриваемых в данной книге. Эти методы очень хорошо изложены у Шовене и у Бюханана, которые детально рассматривают построение карт затмений, публикуемых в различных национальных ежегодниках. Метод, использованный при вычислениях кривых, имеющихся в Ephemeris, описан в Explanatory Supplement to the American Ephemeris and Nautical Almanac [80, sec. 9C], изданном совместно с National Almanac Offices Великобритании и США.

1.3.3. Метод American Ephemeris and Nautical Almanac и Astronomical Ephemeris

Данный метод основан на предыдущем, однако для расширения таблиц он более удобен.

В Ephemeris даются элементы и обстоятельства затмения для всех солнечных затмений, которые произойдут в текущем году. В качестве примера ниже приводятся данные для полного солнечного затмения 20 июля 1963 г.

Карты затмений являются тем исходным материалом, по которому приближенно определяют местные обстоятельства затмения для любого заданного пункта (рис. 1.10). Для вычисления точных моментов явлений в любом пункте, находящемся на поверхности Земли (или над ней), бесселевы элементы затмения табулируются с 10-минутными интервалами. Такие элементы приведены

Элементы затмения

Геоцентрическое соединение Солнца и Луны по прямому восхождению, июль $20^d20^h29^m10^s,74$ ET

Прямое восхождение Солнца и Луны	$7^h57^m50^s,115$
Часовые изменения	$10^s,009$ и $147^s,597$
Склонение Солнца	$+20°41'05'',51$
Часовое изменение	$-0'28'',01$
Склонение Луны	$+21°19'30'',98$
Часовое изменение	$-3'38'',37$
Экватор. горизонт. параллах Солнца	$8'',66$
Экватор. горизонт. параллах Луны	$58'21'',00$
Видимый радиус Солнца	$15'44'',3$
Видимый радиус Луны	$15'53'',9$

Обстоятельства затмения

Явление	ET	Эфемеридная долгота	Широта
	Июль		
Начало затмения	$20^d18^h04^m,8$	—168°24′	+28°45′
Начало центр. затм.	20 19 14 ,6	—142 12	+43 06
Центр. затм. в истин. местн. полдень	20 20 29 ,2	+125 44	+62 17
Конец центр. затм.	20 21 57 ,9	+ 43 42	+33 02
Конец затмения	20 23 07 ,8	+ 68 13	+18 19

в табл. 1.1. Табличные величины, за исключением отмеченных, выражены в долях экваториального радиуса Земли (6 378 388 *м*).

Широты и долготы точек центральной линии северной и южной границ вместе с продолжительностью полной или кольцеобразной фазы и высотой Солнца для центральной линии табулируются на весь период полного или кольцеобразного затмения с интервалом в 5 *мин* или меньше (табл. 1.2).

Элементы и обстоятельства затмения для Международного эллипсоида вычисляются по методу Бесселя, описанному выше, по видимым прямым восхождениям и склонениям Солнца и Луны с учетом короткопериодических членов нутаций. Для этой цели координаты Солнца вычисляются с повышенной точностью. Используемые при вычислениях радиусы Солнца и Луны не должны включать эффекта иррадиации. Радиус Солнца принимается для расстояния в одну астрономическую единицу равным 15′59″,63, т. е. таким же, как в эфемеридах Солнца. При вычислении продолжительности полного солнечного затмения для центральной линии синус видимого углового радиуса Луны полагается равным $0{,}272274 \sin \pi_M$, где π_M — горизонтальный параллакс Луны; однако начиная с 1963 г. для вычисления всех других затмений видимый радиус Луны принимается равным $0{,}272446\ \pi_M + 0'',079$.

При вычислении затмений поправку за рефракцню не вводят. Она не вводится и в бесселевы элементы. Обстоятельства затмения вычисляются для точек на поверхности эллипсоида, поэтому для них нет необходимости учитывать рефракцию.

На карте солнечного затмения (рис. 1.10) кривые, изображенные длинными штрихами, соответствуют моментам середины между первым и последним контактами полутени. Кривые, изображенные короткими штрихами, дают полупродолжительность частной

Таблица 1.1

Бесселевы элементы полного затмения Солнца 20 июля 1963 г.

ET	Пересеч. оси тени с фунд. плоскостью		Направление оси тени			Радиус тени на фунд. плоскости	
	x	y	$\sin d$	$\cos d$	μ	Полутень	Тень
h m					° ′ ″		
18 00	−1.368827	+0.793945	+0.353512	0.935430	88 26 07.3	0.543192	−0.003125
10	1.277073	0.785044	.353491	.935438	90 56 07.8	.543221	.003096
20	1.185318	0.776132	.353470	.935446	93 26 08.2	.543250	.003067
30	1.093561	0.767211	.353450	.935454	95 56 08.7	.543278	.003039
40	1.001804	0.758281	.353429	.935461	98 26 09.2	.543305	.003012
50	0.910046	0.749342	.353408	.935469	100 56 09.6	.543332	.002986
19 00	−0.818287	+0.740393	+0.353387	0.935477	103 26 10.1	0.543358	−0.002960
10	0.726528	0.731434	.353367	.935485	105 56 10.5	.543383	.002935
20	0.634768	0.722466	.353346	.935493	108 26 11.0	.543408	.002910
30	0.543009	0.713488	.353325	.935501	110 56 11.5	.543432	.002886
40	0.451249	0.704501	.353304	.935509	113 26 11.9	.543456	.002863
50	0.359490	0.695505	.353283	.935516	115 56 12.4	.543478	.002840
20 00	−0.267732	+0.686499	+0.353263	0.935524	118 26 12.9	0.543501	−0.002818
10	0.175976	0.677484	.353242	.935532	120 56 13.4	.543522	.002796
20	−0.084221	0.668459	.353221	.935540	123 26 13.8	.543543	.002775
30	+0.007533	0.659426	.353200	.935548	125 56 14.3	.543563	.002755
40	0.099284	0.650383	.353179	.935556	128 26 14.8	.543583	.002736
50	0.191034	0.641331	.353158	.935564	130 56 15.2	.543602	.002717
21 00	+0.282781	+0.632270	+0.353138	0.935571	133 26 15.7	0.543621	−0.002698
10	0.374526	0.623200	.353117	.935579	135 56 16.2	.543638	.002681
20	0.466269	0.614121	.353096	.935587	138 26 16.6	.543655	.002664
30	0.558009	0.605033	.353075	.935595	140 56 17.1	.543672	.002647
40	0.649745	0.595936	.353054	.935603	143 26 17.6	.543688	.002632
50	0.741479	0.586830	.353033	.935611	145 56 18.0	.543703	.002617
22 00	+0.833209	+0.577715	+0.353012	0.935619	148 26 18.5	0.543717	−0.002602
10	0.924936	0.568590	.352992	.935626	150 56 19.0	.543731	.002588
20	1.016658	0.559457	.352971	.935634	153 26 19.5	.543745	.002575
30	1.108377	0.550314	.352950	.935642	155 56 19.9	.543757	.002563
40	1.200091	0.541163	.352929	.935650	158 26 20.4	.543769	.002551
50	1.291801	0.532002	.352908	.935658	160 56 20.9	.543781	.002539
23 00	+1.383506	+0.522833	+0.352887	0.935666	163 26 21.4	0.543791	−0.002529
10	+1.475205	+0.513654	+0.352866	0.935674	165 56 21.8	0.543801	−0.002518

$\operatorname{tg} f_1 = 0.004601$
$\operatorname{tg} f_2 = 0.004578$
$\mu' = 0.261813$ *рад/час*
$d' = -0.000134$ *рад/час*

фазы. Эфемеридное время первого и последнего контактов получается соответственно вычитанием и прибавлением полупродолжительности фазы к моменту середины затмения. Эти кривые пересекают границы начала и конца затмения при восходе и заходе

Таблица 1.2

Элементы полосы полной фазы затмения Солнца 20 июля 1963 г.

Е Т	Сев. граница: Широта	Сев. граница: Эфем. долгота	Центр. линия: Широта	Центр. линия: Эфем. долгота	Южн. граница: Широта	Южн. граница: Эфем. долгота	Центр. линия: Прод. полной фазы	Центр. линия: Высота
	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	°	m s	°
Границы	+48 18	−141 59	+43 06	−142 12	+42 55	−142 26	0 31.5	0
19 h 15 m	+44 00.3	−143 41.6	+45 06.1	−147 06.5	+45 40.8	−149 20.2	0 36.4	4
16	46 37.4	149 59.7	46 56.9	151 37.9	47 12.4	153 08.9	0 41.1	8
17	47 58.5	153 16.0	48 09.6	154 37.4	48 18.4	155 55.5	0 44.2	10
18	+49 01.1	−155 49.1	+49 07.7	−157 02.7	+49 12.7	−158 14.2	0 46.8	12
19	49 53.9	158 00.0	49 57.4	159 08.8	49 59.6	160 16.1	0 49.1	14
20	50 40.2	159 56.6	50 41.4	161 02.2	50 41.5	162 06.7	0 51.2	16
21	51 21.9	161 43.3	51 21.2	162 46.6	51 19.6	163 48.9	0 53.1	17
22	+52 00.0	−163 22.7	+51 57.8	−164 24.2	+51 54.7	−165 24.5	0 54.8	18
24	53 08.1	166 25.3	53 03.3	167 24.3	52 57.7	168 22.0	0 58.0	20
26	54 08.1	169 12.9	54 01.0	170 09.9	53 53.4	171 05.7	1 01.0	22
28	55 01.7	171 49.8	54 52.9	172 45.2	54 43.4	173 39.5	1 03.7	24
30	55 50.4	174 19.2	55 39.9	175 13.1	55 28.9	176 06.1	1 06.2	26
32	+56 34.8	−176 42.5	+56 22.9	−177 35.1	+56 10.4	−178 26.9	1 08.5	28
34	57 15.7	−179 01.3	57 02.3	−179 52.7	56 48.5	+179 16.8	1 10.7	29
36	57 53.3	+178 43.4	57 38.7	+177 53.2	57 23.7	177 04.0	1 12.8	30
38	58 28.1	176 30.9	58 12.3	175 42.0	57 56.1	174 54.1	1 14.8	32
40	59 00.2	174 20.6	58 43.3	173 33.0	58 26.1	172 46.5	1 16.7	33
45	+60 10.4	+169 02.0	+59 51.0	+168 18.1	+59 31.2	+167 35.2	1 21.0	36
50	61 07.5	163 50.3	60 45.9	163 10.5	60 24.1	162 31.8	1 24.8	38
55	61 53.0	158 43.1	61 29.5	158 08.1	61 05.9	157 34.1	1 28.1	40
20 00	+62 27.7	+153 39.4	+62 02.7	+153 09.6	+61 37.5	+152 40.9	1 30.9	42
05	62 52.4	148 39.1	62 26.1	148 15.1	61 59.7	147 52.0	1 33.4	44
10	63 07.5	143 42.7	62 40.3	143 24.8	62 13.0	143 07.6	1 35.4	45
15	63 13.6	138 51.0	62 45.8	138 39.4	62 17.9	138 28.2	1 37.1	47
20	63 11.1	134 05.0	62 42.9	133 59.7	62 14.7	133 54.7	1 38.3	47
25	63 00.4	129 25.8	62 32.1	129 26.6	62 03.8	129 27.5	1 39.2	48
30	+62 41.9	+124 54.1	+62 13.8	+125 00.8	+61 45.7	+125 07.4	1 39.6	49
35	62 16.0	120 30.6	61 48.3	120 42.8	61 20.6	120 54.7	1 39.7	49
40	61 43.0	116 15.8	61 16.0	116 33.0	60 48.9	116 49.7	1 39.4	49
45	61 03.4	112 09.6	60 37.2	112 31.3	60 11.0	112 52.5	1 38.7	48
50	60 17.4	108 12.0	59 52.2	108 37.7	59 26.9	109 02.6	1 37.7	48
55	59 25.2	104 22.5	59 01.2	104 51.5	58 37.1	105 19.7	1 36.3	47
21 00	+58 27.1	+100 40.2	+58 04.4	+101 12.0	+57 41.5	+101 43.1	1 34.4	46
05	57 23.1	97 04.2	57 01.8	97 38.4	56 40.2	98 11.8	1 32.3	45
10	56 13.3	93 33.1	55 53.4	94 09.2	55 33.3	94 44.6	1 29.7	43
15	54 57.4	90 05.4	54 39.1	90 43.1	54 20.5	91 20.0	1 26.7	41
20	53 35.1	86 39.1	53 18.5	87 18.0	53 01.6	87 56.3	1 23.4	39
25	52 05.9	83 11.6	51 51.1	83 51.5	51 35.9	84 30.9	1 19.6	37
30	+50 28.8	+ 79 39.8	+50 15.9	+ 80 20.5	+50 02.6	+ 81 00.7	1 15.4	34
35	48 42.2	75 58.9	48 31.4	76 40.5	48 20.3	77 21.6	1 10.6	31
40	46 43.7	72 02.0	46 35.3	72 44.6	46 26.5	73 26.7	1 05.3	28
42	+45 52.0	+ 70 20.3	+45 44.7	+ 71 03.4	+45 36.9	+ 71 46.1	1 02.9	26
44	44 57.2	68 33.1	44 51.1	69 16.8	44 44.4	70 00.2	1 00.4	25
46	43 58.7	66 38.6	43 53.8	67 23.2	43 48.5	68 07.4	0 57.7	23
48	42 55.4	64 34.6	42 52.1	65 20.4	42 48.2	66 05.7	0 54.8	21
50	+41 46.0	+ 62 17.3	+41 44.5	+ 63 04.8	+41 42.4	+ 63 51.8	0 51.7	19
51	41 08.2	61 02.0	41 07.8	61 50.7	41 06.7	62 38.8	0 50.0	18
52	40 27.7	59 40.5	40 28.6	60 30.8	40 28.8	61 20.4	0 48.2	16
53	39 43.9	58 11.2	39 46.3	59 03.6	39 47.9	59 55.1	0 46.2	15
54	38 55.5	56 31.1	38 59.9	57 26.5	39 03.3	58 20.9	0 44.1	13
55	+38 00.5	+ 54 35.2	+38 07.6	+ 55 35.3	+38 13.5	+ 56 33.8	0 41.6	11
56	36 54.5	52 12.3	37 06.1	53 21.2	37 15.8	54 27.0	0 38.8	9
57	35 23.2	48 47.1	35 45.9	50 20.4	36 03.4	51 43.2	0 35.2	6
Границы	+33 12	+ 43 32	+33 02	+ 43 42	+32 51	+ 43 53	0 27.9	0

Солнца, хотя часть явления происходит, когда Солнце для наблюдателя расположено под горизонтом.

Чтобы точно предвычислить местные обстоятельства затмения, вычисляют геоцентрические координаты $\rho \sin \varphi'$ и $\rho \cos \varphi'$ по геодезической широте φ и долготе λ с помощью табл. VII в American Ephemeris and Nautical Almanac (табл. 1.3), используя следующие формулы:

$$\rho \sin \varphi' = (S + H) \sin \varphi,$$
$$\rho \cos \varphi' = (C + H) \cos \varphi.$$

Здесь S и C — величины, выбираемые из таблицы, а H — высота пункта над эллипсоидом в долях экваториального радиуса Земли (значение H в метрах умножают на $0{,}1567794 \cdot 10^{-6}$, а если H дано в футах, то на $0{,}0477865 \cdot 10^{-6}$). Значения C и S вычисляются по таким формулам:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$
$$S = \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Чтобы узнать местные обстоятельства затмения для точек с большими высотами, необходимо при этих вычислениях учитывать превышения над эллипсоидом. Найдя значения приближенных моментов начала, середины и конца затмения по карте, для каждого из этих трех моментов из таблиц бесселевых элементов выбирают величины x, y, $\sin d$, $\cos d$, μ и l_1, за исключением среднего момента полного или кольцеобразного затмения, для которого вместо l_1 берут l_2. Часовые изменения x' и y' координат x и y можно с достаточной точностью получать путем умножения первых разностей табличных значений на 6.

По формулам (1.13) и (1.25) для каждого из трех приближенных моментов вычисляют координаты ξ, η, ζ наблюдателя и их часовые изменения. Затем находят

$$u = x - \xi, \qquad u' = x' - \xi',$$
$$v = y - \eta, \qquad v' = y' - \eta',$$
$$L = l - \zeta \operatorname{tg} f, \qquad n^2 = u'^2 + v'^2, \qquad (n > 0),$$
$$\bar{\Delta} = \frac{1}{n}(uv' - u'v), \qquad D = uu' + vv',$$
$$\sin \psi = \frac{\bar{\Delta}}{L}.$$

Чтобы получить момент ЕТ максимальной фазы, вычисляют поправку τ приближенного момента середины затмения, прене-

Таблица 1.3

Коэффициенты *S* и *C* для вычисления геоцентрических координат

φ	*S*		*C*		φ	*S*		*C*	
±0°	0.993277		1.000000		±45°	0.994951		1.001685	
1	.993278	1	1.000001	1	46	.995009	58	1.001744	59
2	.993281	3	1.000004	3	47	.995068	59	1.001803	59
3	.993286	5	1.000009	5	48	.995126	58	1.001862	59
4	.993294	8	1.000016	7	49	.995185	59	1.001920	58
5	0.993303	9	1.000026	10	50	0.995242	57	1.001978	58
6	.993314	11	1.000037	11	51	.995300	58	1.002036	58
7	.993327	13	1.000050	13	52	.995357	57	1.002094	58
8	.993342	15	1.000065	15	53	.995414	57	1.002151	57
9	.993359	17	1.000082	17	54	.995470	56	1.002207	56
10	0.993378	19	1.000101	19	55	0.995525	55	1.002263	56
11	.993399	21	1.000122	21	56	.995580	55	1.002318	55
12	.993422	23	1.000145	23	57	.995634	54	1.002373	55
13	.993446	24	1.000170	25	58	.995687	53	1.002426	53
14	.993473	27	1.000197	27	59	.995740	53	1.002479	53
15	0.993501	28	1.000225	28	60	0.995791	51	1.002531	52
16	.993531	30	1.000255	30	61	.995841	50	1.002581	50
17	.993563	32	1.000287	32	62	.995890	49	1.002631	50
18	.993596	33	1.000321	34	63	.995939	49	1.002679	48
19	.993631	35	1.000356	35	64	.995985	46	1.002726	47
20	0.993668	37	1.000393	37	65	0.996031	46	1.002772	46
21	.993706	38	1.000432	39	66	.996076	45	1.002817	45
22	.993746	40	1.000472	40	67	.996118	42	1.002860	43
23	.993787	41	1.000514	42	68	.996160	42	1.002902	42
24	.993830	43	1.000557	43	69	.996200	40	1.002943	41
25	0.993874	44	1.000601	44	70	0.996239	39	1.002981	38
26	.993920	46	1.000647	46	71	.996276	37	1.003019	38
27	.993966	46	1.000694	47	72	.996311	35	1.003054	35
28	.994014	48	1.000742	48	73	.996345	34	1.003088	34
29	.994063	49	1.000791	49	74	.996377	32	1.003120	32
30	0.994113	50	1.000841	50	75	0.996407	30	1.003151	31
31	.994164	51	1.000893	52	76	.996436	29	1.003180	29
32	.994216	52	1.000945	52	77	.996462	26	1.003207	27
33	.994269	53	1.000999	54	78	.996487	25	1.003232	25
34	.994323	54	1.001053	54	79	.996510	23	1.003255	23
35	0.994378	55	1.001108	55	80	0.996531	21	1.003276	21
36	.994433	55	1.001163	55	81	.996550	19	1.003295	19
37	.994489	56	1.001220	57	82	.996568	18	1.003313	18
38	.994545	56	1.001277	57	83	.996583	15	1.003328	15
39	.994602	57	1.001334	57	84	.996596	13	1.003341	13
40	0.994660	58	1.001392	58	85	0.996607	11	1.003353	12
41	.994717	57	1.001450	58	86	.996617	10	1.003362	9
42	.994776	59	1.001508	58	87	.996624	7	1.003369	7
43	.994834	58	1.001567	59	88	.996629	5	1.003374	5
44	.994892	58	1.001626	59	89	.996632	3	1.003377	3
±45	0.994951	59	1.001685	59	±90	0.996633	1	1.003378	1

брегая изменением L, по формуле

$$\tau_1 = -\frac{D}{n^2},$$

причем она может быть выражена в минутах умножением на 60.

Поправка τ приближенных моментов начала, середины и конца затмения для определения моментов ET контактов равна

$$\tau = \frac{L}{n}\cos\psi - \frac{D}{n^2},$$

причем она тоже может быть выражена в минутах умножением на 60.

Чтобы определить, в какой четверти находится угол ψ, нужно помнить, что $\cos\psi$ отрицателен для начала затмения, начала кольцеобразной фазы и конца полной фазы, а для конца затмения, конца кольцеобразной фазы и начала полного затмения $\cos\psi$ положителен.

Если в данном пункте наблюдается частное затмение, то величины L_2, l_2 и $\sin\psi$ для момента середины затмения не нужны.

Для повышения точности вместо первоначальных приближенных моментов нужно взять моменты, вычисляемые описанным выше способом, и выполнить второе приближение.

Принятое значение ΔT нужно вычесть из окончательных моментов, чтобы получить моменты UT контактов и наибольшей фазы.

Величина максимальной фазы частного затмения в долях солнечного диаметра равна

$$\overline{M}_1 = \frac{L_1 - \overline{\Delta}}{2L_1 - 0{,}5459}.$$

Здесь используется абсолютное значение $\overline{\Delta}$.

Величина центральной фазы в тех же единицах равна

$$\overline{M}_2 = \frac{0{,}5459}{2L_1 - 0{,}5459}.$$

Чтобы получить позиционный угол точки контакта, вычисляют угол N, определяемый формулой

$$\operatorname{ctg} N = \frac{v'}{u'},$$

причем $\sin N$ имеет тот же знак, что и u'. Позиционный угол P точки контакта от северной точки солнечного диска и позиционный угол V точки контакта от вертекса (оба отсчитываемые к востоку) можно вычислить по формулам (1.31)—(1.33). Пример, иллюстрирующий применение всех этих формул, приводится ниже.

Пример

Предвычисления для частного солнечного затмения 20 июля 1963 г., выполненные Беннетом для астростолба станции Университета штата Огайо, Колумбус, Огайо, США.

Исходные данные

$H = 800$ *фут* $= 243{,}8$ *м* $\approx 38 \cdot 10^{-6}$ земных радиусов;
$\lambda = -5^h32^m09^s{,}7 = -83°02'25''{,}5$;
$\varphi = 40°00'12''{,}5$ с. ш.; $\cos\varphi = 0{,}766006$; $\sin\varphi = 0{,}642834$;
$S = 0{,}994660$; $C = 1{,}001392$;
$\rho \sin\varphi' = (S + H)\sin\varphi = 0{,}639426$;
$\rho\cos\varphi' = (C + H)\cos\varphi = 0{,}767101$; $\Delta T\,(1963{,}5) = 35^s = 525''$;
$1{,}0027\,\Delta T = 526''{,}4175 \approx 8'46''{,}4$;
Полупродолжительность $67^m{,}5$. Приближенный момент середины затмения 21^h42^m (по рис. 1.10).

Элементы формул	Начало	Конец
	Первое приближение	
T_0	$20^h34^m{,}5$	$22^h49^m{,}5$
x (из табл. 1)	0,048 821	1,287 215
y (из табл. 1)	0,655 357	0,532 460
x'	+0,550 506	+0,550 260
y'	—0,054 258	—0,054 966
$\sin d$ (из табл. 1)	+0,353 191	+0,352 909
$\cos d$ (из табл. 1)	0,935 552	0,935 658
l_1 (полутень) (из табл. 1)	0,543 572	0,543 780
μ ($\mu' = 0{,}261\,813$ *рад/час*)	$127°03'44''{,}5$	$160°48'50''{,}9$
$h = \mu + \lambda - 1{,}0027\,\Delta T$	$43°52'32''{,}6$	$77°37'39''{,}0$
$\sin h$	0,693 096	0,976 775
$\cos h$	0,720 844	0,214 267
$\xi = \rho\cos\varphi' \sin h$	0,531 675	0,749 285
$\eta = \rho(\sin\varphi' \cos d - \cos\varphi' \sin d \cos h)$	0,402 916	0,540 278
$\zeta = \rho(\sin\varphi' \sin d + \cos\varphi' \cos d \cos h)$	0,743 163	0,379 447
$\xi' = \mu'\rho\cos\varphi'\cos h$	0,144 772	0,043 033
$\eta' = \mu'\xi\sin d - \xi\, d'$ ($d' = -0{,}000134$)	+0,049 093	0,069 131
$u = x - \xi$	—0,482 854	—0,537 930
$v = y - \eta$	+0,252 441	—0,007 818
$u' = x' - \xi'$	+0,405 734	+0,507 227
$v' = y' - \eta'$	—0,103 351	—0,124 097
$n^2 = u'^2 + v'^2$	+0,175 301	+0,272 679
$L_1 = l_1 - \zeta \operatorname{tg} f_1$ ($\operatorname{tg} f_1 = 0{,}004601$)	0,540 153	0,542 034

Продолжение

Элементы формул	Начало	Конец
n	$+0,418\,690$	$+0,522\,187$
$\bar{\Delta}=(uv'-vu')/n$	$-0,125\,441$	$-0,120\,242$
$D=uu'+vv'$	$-0,222\,000$	$+0,273\,823$
$\sin\psi=\bar{\Delta}/L$	$-0,232\,232$	$-0,221\,835$
$\cos\psi$	$-0,972\,660$	$+0,975\,084$
$(L\cos\psi)/n$	$-1,254\,832$	$+1,012\,144$
$-D/n^2$	$+1,266\,393$	$-1,004\,195$
$\tau=[(L\cos\psi)/n]-D/n^2$	$+0,011\,561$	$+0,007\,949$
τ	$+41^s,6$	$+28^s,6$
T (первое приближение)	$20^h35^m11^s,6$	$22^h49^m58^s,6$
	Второе приближение	
T_0	$20^h35^m,1933$	$22^h49^m,9767$
x	$+0,005\,182$	$+1,291\,587$
y	$+0,654\,730$	$+0,532\,023$
x'	$+0,550\,506$	$+0,550\,260$
y'	$-0,054\,258$	$-0,054\,966$
$\sin d$	$+0,353\,189$	$+0,352\,909$
$\cos d$	$+0,935\,552$	$+0,935\,658$
l_1 (полутень)	$0,543\,573$	$0,543\,781$
μ ($\mu'=0,261813$ *рад/час*)	$127°14'08'',5$	$165°55'59'',9$
$h=\mu-\lambda-1,0027\,\Delta T$	$44°02'56'',6$	$77°44'48'',0$
$\sin h$	$+0,695\,274$	$0,977\,219$
$\cos h$	$+0,718\,745$	$+0,212\,235$
$\xi=\rho\cos\varphi'\sin h$	$+0,533\,345$	$+0,749\,626$
$\eta=\rho\sin\varphi'\cos d-\rho\cos\varphi'\sin d\cos h$	$+0,403\,485$	$+0,540\,828$
$\xi'=\mu'\rho\cos\varphi'\cos h$	$+0,144\,351$	$+0,042\,625$
$\eta'=\mu'\xi\sin d-\xi d'$ ($d'=+0,000134$)	$+0,049\,247$	$+0,069\,163$
$\zeta=\rho\sin\varphi'\sin d+\rho\cos\varphi'\cos d\cos h$	$+0,741\,655$	$+0,377\,990$
$u=x-\xi$	$-0,478\,163$	$+0,541\,961$
$v=y-\eta$	$+0,251\,245$	$-0,008\,805$
$u'=x'-\xi'$	$+0,406\,155$	$+0,507\,635$
$v'=y'-\eta'$	$-0,103\,505$	$-0,124\,129$
$n^2=u'^2+v'^2$	$+0,175\,675$	$+0,273\,101$
$L_1=l_1-\zeta\,\mathrm{tg}\,f_1$ ($\mathrm{tg}\,f_1=0,004601$)	$+0,540\,161$	$+0,542\,042$
n	$+0,419\,136$	$+0,522\,591$
$\bar{\Delta}=(uv'-vu')/n$	$-0,125\,382$	$-0,120\,176$

Продолжение

Элементы формул	Начало	Конец
$D = uu' + vv'$	$-0,220\,213$	$+0,276\,211$
$\sin\psi = \bar{\Delta}/L$	$-0,238\,120$	$-0,221\,710$
$\cos\psi$	$-0,972\,687$	$+0,975\,113$
$(L\cos\psi)/n$	$-1,253\,550$	$+1,011\,407$
$-D/n^2$	$+1,253\,525$	$-1,011\,388$
$\operatorname{tg}\tau = [(L\cos\psi)/n] - D/n^2$	$-0,000\,025$	$+0,000\,019$
$-\tau$	$-0^s,09 \approx -0^s,1$	$+0^s,068 \approx +0^s,1$
T (второе приближение)	$20^h35^m11^s,5$	$22^h49^m58^s,7$
$\operatorname{ctg} N = v'/u'$	$-0,254\,841$	$-0,244\,524$
$\operatorname{tg} C = \xi/\eta$	$1,321\,846$	$1,386\,071$
N	$104°17'49''$	$103°44'26''$
ψ	$193°25'19''$	$347°11'26''$
$P = N + \psi$	$297°43'08''$	$90°55'52''$
C	$52°53'31''$	$54°11'27''$
$V = P - C$	$244°39'37''$	$36°44'25''$

Для любой фазы затмения в пункте, лежащем в радиусе нескольких километров от исходного пункта, для которого были выполнены предыдущие вычисления, можно получить ЕТ с помощью дифференциальных поправок, большей частью известных из предварительных вычислений.

Пусть

$$A_1 = -\rho\cos\varphi'\cos h,$$
$$B_1 = -\xi\sin d,$$
$$A_2 = -(SC^2 + H)\sin\varphi\sin h,$$
$$B_2 = (SC^2 + H)(\cos\varphi\cos d + \sin\varphi\sin d\cos h),$$
$$A_3 = \cos\varphi\sin h,$$
$$B_3 = \sin\varphi\cos d - \cos\varphi\sin d\cos h.$$

Эфемеридное время ЕТ первого и последнего контактов для пункта с долготой $\lambda + \Delta\lambda$, широтой $\varphi + \Delta\varphi$ и высотой $H + \Delta H$ получается путем прибавления к точным моментам этих контактов для пункта с координатами λ, φ и H поправки ΔT_0 в секундах:

$$\Delta T_0 = p\Delta\lambda + q\Delta\varphi + r\Delta H.$$

Здесь $\Delta\lambda$ и $\Delta\varphi$ выражаются в минутах дуги, ΔH — в долях экваториального радиуса Земли, а p, q и r вычисляются так:

$$p = \frac{\sin 1'}{D}(uA_1 + vB_1),$$

$$q = \frac{\sin 1'}{D}(uA_2 + vB_2),$$

$$r = \frac{1}{D}(uA_3 + vB_3).$$

Величины p, q и r могут быть выражены в секундах путем умножения на 3600.

Эфемеридное время ET середины центральной фазы (или время максимальной фазы, если наблюдается частное затмение) для пункта P $(\lambda + \Delta\lambda,\ \varphi + \Delta\varphi,\ H + \Delta H)$ может быть получено прибавлением к соответствующему моменту T_m для пункта P_0 $(\lambda,\ \varphi,\ H)$ поправки ΔT_{0m} в секундах:

$$\Delta T_{0m} = p_m \Delta\lambda + q_m \Delta\varphi + r_m \Delta H.$$

Здесь

$$p_m = \frac{\sin 1'}{n^2}(u'A_1 + v'B_1),$$

$$q_m = \frac{\sin 1'}{n^2}(u'A_2 + v'B_2),$$

$$r_m = \frac{1}{n^2}(u'A_3 + v'B_3).$$

Эти три величины должны быть выражены в секундах путем умножения на 3600.

Если наблюдается полное или кольцеобразное затмение для пункта $(\lambda + \Delta\lambda,\ \varphi + \Delta\varphi,\ H + \Delta H)$, то моменты ET второго и третьего контактов будут равны:

$$T_{02} = T_{0m} + \Delta T_{0m} - s, \qquad T_{03} = \Delta T_{0m} + s,$$

где s — полупродолжительность центральной фазы. Чтобы вычислить s, при выполнении последнего приближения для момента середины затмения в пункте $(\lambda,\ \varphi,\ H)$ в значение $\bar{\Delta}$ следует внести поправку

$$\bar{\Delta}' = p_s \Delta\lambda + q_s \Delta\varphi + r_s \Delta H,$$

где

$$p_s = \frac{\sin 1'}{n}(u'B_1 - v'A_1),$$

$$q_s = \frac{\sin 1'}{n}(u'B_2 - v'A_2),$$

$$r_s = \frac{1}{n}(u'B_3 - v'A_3).$$

Тогда

$$\sin\psi_1 = \frac{1}{L_2}(\overline{\Delta} + \overline{\Delta}'),$$

а

$$s = \pm \frac{L_2}{n}\cos\psi_1.$$

Величина s всегда считается положительной и выражается в секундах умножением на 3600.

Для получения угла C для второго и третьего контактов в пункте ($\lambda + \Delta\lambda$, $\varphi + \Delta\varphi$, $H + \Delta H$) используют уравнение

$$\operatorname{tg} C = \frac{\xi \mp \xi' s}{\eta \mp \eta' s},$$

в котором верхний знак соответствует второму контакту, нижний — третьему, а величины ξ, η, ξ' и η' вычисляются для середины затмения в пункте (λ, φ, H). В этом уравнении s выражается в часах, а $\sin C$ имеет тот же знак, что и ($\xi \mp \xi' s$).

Углы P и V имеют значения:

$$P = N + \psi_1,$$
$$V = P - C,$$

причем в этом случае угол N считается постоянным, а угол ψ_1 получается при вычислении s. Для определения квадранта угла ψ_1 надо помнить, что при полном затмении $\cos\psi_1$ положителен для второго контакта и отрицателен для третьего, а при кольцеобразном затмении — наоборот.

Чтобы перейти к всемирному времени UT, величину ΔT, как и раньше, нужно вычитать из окончательного эфемеридного времени ET.

Вообще окончательно принятое значение ΔT в известных пределах будет отличаться от его значения, использованного в предварительных вычислениях. Однако нет необходимости повторять все вычисления для пункта (φ, λ, H). Если окончательное значение равно $\Delta T + \Delta' T$, то достаточно положить

$$\Delta\lambda = 1{,}0027\Delta' T; \qquad \Delta\varphi = 0; \quad \Delta H = 0$$

и вычислить ΔT_0, ΔT_{0m} и s указанным выше способом. Нужно отметить, что нам потребуются лишь величины A_1, B_1, p, p_m и p_s. Чтобы перейти ко всемирному времени UT, значение $\Delta T + \Delta' T$ нужно вычесть из эфемеридного времени ET.

Вывод этих формул и их использование при вычислении местных обстоятельств затмений, а также описание вычисления эфемерид в Ежегодниках приводятся в Explanatory Supplement [80, sec. 9].

Кроме сведений, приведенных в этом разделе, в соответствии с требованиями Комиссии по солнечным затмениям Международного астрономического союза основные обстоятельства всех солнечных затмений вычисляются на несколько лет вперед и публикуются в Ephemeris. Эти предварительные сведения, которые включают таблицы координат полосы полной фазы на восемь лет вперед, приводятся в U.S. Naval Observatory Circulars. Последние номера (№ 59, 85 и 89) содержат предварительные данные для солнечных затмений на период с 1960 по 1970 г.

Материалы Ephemeris, касающиеся солнечных затмений, публикуются также (перед выходом в свет самих Ephemeris) в Astronomical Phenomena, ежегодно издаваемых Военно-морской обсерваторией США.

Для дальнейшего изучения этого вопроса можно обратиться к книге Оппольцера [86].

1.3.4. Поправка за атмосферную рефракцию

В предыдущих главах мы рассмотрели наиболее важные вопросы предвычисления солнечного затмения. Так как для предвычислений не требуется высокая точность, мы не останавливались на

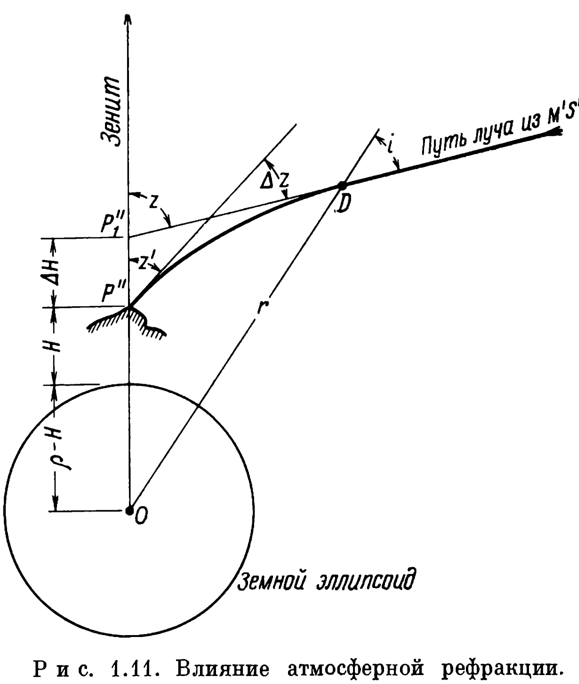


Рис. 1.11. Влияние атмосферной рефракции.

влиянии атмосферной рефракции. Это влияние, хотя и очень незначительное, должно быть рассмотрено до перехода к геодезическому использованию солнечных затмений, где требуется максимально возможная точность.

Пусть $S'M'DP''$ — луч света, который идет от края Солнца (S'), проходит через край Луны в точке контакта (M'), входит в атмосферу в точке D и наблюдается в точке P'' (рис. 1.11). Очевидно, наблюдатель в точке P'' увидит кажущийся контакт краев в тот же самый момент времени, как если бы он находился в точке P'' и наблюдал бы истинный контакт краев в отсутствие атмосферы, а следовательно, и рефракции. Это значит, что если производить вычисления не для точки P'', а для точки P''_1, т. е. если использовать вместо ρ значение $\rho + \Delta H$, то влияние рефракции будет полностью учтено. Итак, наша задача заключается в определении фиктивного превышения ΔH.

Луч света обладает следующим свойством: в любой его точке произведение $nr \sin i$ — величина постоянная. Здесь n — коэффициент преломления, r — расстояние от текущей точки до центра Земли, а i — зенитное расстояние луча (рис. 1.11). Применяя этот закон для точек D ($n = 1$) и P'' ($n = n_0$, $r = \rho$, $i = z'$), мы получим такое уравнение:

$$r \sin i = \rho n_0 \sin z'.$$

Из треугольника OP''_1D мы можем написать

$$r \sin i = (\rho + \Delta H) \sin z.$$

Подставляя значение $r \sin i$ в первое уравнение, получим

$$1 + \frac{\Delta H}{\rho} = n_0 \frac{\sin z'}{\sin z}.$$

Введя обозначение $\Delta z = z - z'$, получим

$$1 + \frac{\Delta H}{\rho} = n_0 \frac{\sin (z - \Delta z)}{\sin z} = n_0 (\cos \Delta z - \operatorname{ctg} z \sin \Delta z).$$

Поскольку Δz, т. е. поправка к зенитному расстоянию, вызываемая рефракцией, незначительна, то мы можем считать, что $\cos \Delta z = 1$ и $\sin \Delta z = \Delta z$. Следовательно,

$$1 + \frac{\Delta H}{\rho} = n_0 - n_0 \Delta z \operatorname{ctg} z,$$

или в окончательном виде поправка ΔH может быть вычислена по формуле

$$\frac{\Delta H}{\rho} = (n_0 - 1) - n_0 \Delta z \operatorname{ctg} z,$$

где величина Δz выражается в радианах и выбирается из любых таблиц рефракции.

Формулой для вычисления превышения ΔH нужно пользоваться очень осторожно. В большинстве случаев обычно неизвестные характеристики атмосферы над пунктом наблюдений, например, влажность воздуха, снижают точность любой поправки. Кроме того, эта формула очень чувствительна к ошибкам округления при некоторых значениях зенитного расстояния z и требует вычисления последнего с такой точностью, которая недостижима из-за влияния местных атмосферных условий.

1.4. ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКРЫТИЙ

1.4.1. Общий метод

Когда Луна закрывает свет звезды, то происходит покрытие звезды Луною. Мы считаем известным, что в данном месте будет наблюдаться покрытие. Границы области, в которой должно наблюдаться покрытие, могут быть определены с помощью формул разд. 1.4.2. По существу, покрытие — это упрощенный случай солнечного затмения, когда в роли Солнца выступает звезда. Такая точка зрения позволит нам использовать большинство уравнений, выведенных для солнечных затмений, путем простой замены параметров Солнца параметрами звезды. Так как можно считать, что звезда находится на бесконечно большом расстоянии от Земли, то расстояние G (Луна — «солнце») также бесконечно велико, а диаметр «солнца» k_S равен нулю. Подставляя эти величины в уравнение (1.17), мы получим $f_1 = f_2 = 0°$. Это значит, что вместо двух теневых конусов у нас получится один теневой цилиндр, диаметр которого равен диаметру Луны, т. е. $2k_M$. Ось этого теневого цилиндра проходит через звезду, поэтому ее направление определяется направлением на звезду.

Другими словами, чтобы получить формулы, необходимые для предвычислений покрытий звезд Луной, в предыдущих уравнениях нужно произвести следующие замены:

видимое прямое восхождение оси тени $a = \alpha_*$ (прямое восхождение звезды);
видимое склонение оси тени $d = \delta_*$ (склонение звезды);
расстояние Луна — Земля $r_M = \operatorname{cosec} \pi_M$;
видимый диаметр Солнца $k_S = 0$ (видимый диаметр звезды);
расстояние Луна — Солнце $G = \infty$ (расстояние Луна — звезда);
углы раствора конусов $f_1 = f_2 = 0$;
радиусы теневых конусов $L_{1,2} = l_{1,2} = k_M$ (видимый радиус Луны).

Здесь π_M — горизонтальный параллакс Луны, k_M — видимый радиус Луны, вычисляемый по формуле

$$k_M = 0{,}272\,446\,\pi_M + 0'',079$$

или

$$k_M = \arcsin 0{,}272\,274 \sin \pi_M.$$

Вновь напомним, что во всех вычислениях за единицу длины принимается большая полуось эллипсоида Земли. После всех этих замен вычисления выполняются следующим образом.

1. Бесселевы координаты оси тени [получаемые по формулам (1.12)]:

$$x = \cos\delta_M \sin(\alpha_M - \alpha_*) \operatorname{cosec}\pi_M,$$

$$y = [\sin\delta_M \cos\delta_* - \cos\delta_M \sin\delta_* \cos(\alpha_M - \alpha_*)] \operatorname{cosec}\pi_M =$$

$$= \left[\sin(\delta_M - \delta_*) \cos^2\frac{1}{2}(\alpha_M - \alpha_*) + \right.$$

$$\left. + \sin(\delta_M + \delta_*) \sin^2\frac{1}{2}(\alpha_M - \alpha_*) \Big) \right] \operatorname{cosec}\pi_M, \quad (1.36)$$

$$z = [\sin\delta_M \sin\delta_* + \cos\delta_M \cos\delta_* \cos(\alpha_M - \alpha_*)] \operatorname{cosec}\pi_M =$$

$$= \left[\cos(\delta_M - \delta_*) \cos^2\frac{1}{2}(\alpha_M - \alpha_*) - \cos(\delta_M + \delta_*) \times \right.$$

$$\left. \times \sin^2\frac{1}{2}(\alpha_M - \alpha_*) \right] \operatorname{cosec}\pi_M.$$

Для моментов покрытий более удобны вторые выражения для y и z, потому что первые уравнения являются разностями двух больших, но почти равных чисел.

Из уравнений (1.13) мы получим *бесселевы координаты наблюдателя*:

$$\begin{aligned} \xi &= \rho\cos\varphi' \sin h_*, \\ \eta &= \rho\sin\varphi' \cos\delta_* - \rho\cos\varphi' \sin\delta_* \cos h_*, \\ \zeta &= \rho\sin\varphi' \sin\delta_* + \rho\cos\varphi' \cos\delta_* \cos h_*. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Здесь h_* — часовой угол звезды, который может быть найден по одной из следующих формул:

$$h_* = \theta - \alpha_* = h_{*G} + \lambda = \theta_G - \alpha_* + \lambda,$$

где h_{*G} — часовой угол звезды для долготы Гринвича.

Геоцентрические координаты $\rho\sin\varphi'$ или $\rho\cos\varphi'$ могут быть вычислены так:

$$\rho\cos\varphi' = (N + H)\cos\varphi = (C + H)\cos\varphi,$$

$$\rho\sin\varphi' = [N(1 - e^2) + H]\sin\varphi = (S + H)\sin\varphi.$$

2. Часовые изменения бесселевых координат x', y', ξ' и η' могут быть получены аналогичным способом. Часовые изменения x' и y' определяются либо с помощью предварительно табулированных значений x и y, как это описано в разд. 1.3.1.1, либо из аналитических выражений. Для получения x' и y' продифференцируем уравнения (1.36). Работа эта довольно простая, но окончательные формулы получаются длинными, потому что все величины α_M, δ_M и π_M являются переменными. Однако для момента соединения можно вывести относительно прос-

тые соотношения, так как в этом случае $\alpha_M = \alpha_*$. Тогда мы получим

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{\partial \alpha}{\partial h_*} \cos \delta_M \operatorname{cosec} \pi_M, \\
y' &= \frac{\partial \delta}{\partial h_*} \cos (\delta_M - \delta_*) \operatorname{cosec} \pi_M.
\end{aligned} \tag{1.38}
$$

Эти же величины могут быть с достаточной точностью использованы и для моментов контактов. Значения $\partial\alpha/\partial h_*$ и $\partial\delta/\partial h_*$ находят с помощью часовых разностей в эфемеридах. При дальнейшем упрощении можно положить $\cos(\delta_M - \delta_*) = 1$.

Часовые изменения ξ' и η' вычисляются по формулам (1.25), если заменить соответствующие элементы и пренебречь d':

$$
\begin{aligned}
\xi' &= h'_* \rho \cos \varphi' \cos h_* = h'_* (-\eta \sin \delta_* + \zeta \cos \delta_*), \\
\eta' &= h'_* \xi \sin \delta_*, \\
\zeta' &= -h'_* \xi \cos \delta_*.
\end{aligned} \tag{1.39}
$$

3. После получения бесселевых координат и их часовых изменений по формулам (1.27) и (1.28) можно вычислить вспомогательные величины m, n, M и N на приближенный момент покрытия T_0.

4. Имея эти значения, в соответствии с формулами (1.30) находят разность τ между приближенным и истинным моментами контакта:

$$
\begin{aligned}
\sin \psi &= \frac{m}{k_M} \sin (M - N), \\
\tau &= \frac{k_M}{n} \cos \psi - \frac{m}{n} \cos (M - N),
\end{aligned} \tag{1.40}
$$

где $\cos \psi$, как и при затмениях, нужно брать с минусом для начала покрытия и с плюсом для конца. Момент контакта будет

$$T = T_0 + \tau.$$

Для повышения точности нужно сделать второе приближение, причем для этого более удобна формула Шовене (1.30а).

Вместо второго приближения American Ephemeris and Nautical Almanac рекомендует вводить в значение τ, полученное из первого приближения, следующую поправку:

$$d\tau = \frac{\tau^2}{n \cos \psi} [\eta_2 \cos (N + \psi) - \xi \sin (N + \psi)], \tag{1.41}$$

где $\eta_2 = \rho \cos \varphi' \sin \delta_* \cos h_*$. В этом случае исправленный момент будет

$$T = T_0 + \tau + d\tau.$$

Определение приближенного момента контакта T_0 будет описано в следующем разделе.

5. Вычисление позиционного угла точки контакта, отсчитываемого от точки севера или от вертекса лунного диска, производится так же, как и в случае солнечных затмений. Оно может быть выполнено с помощью уравнений (1.31)—(1.33). Однако вместо второго приближения American Ephemeris and Nautical Almanac рекомендует пользоваться поправкой

$$dP = \frac{\tau^2}{\cos\psi}(\eta_2 \sin N + \xi \cos N). \tag{1.42}$$

Таким образом, формула (1.31) примет вид

$$P = N + \psi + dP. \tag{1.43}$$

Во всех этих вычислениях нужно очень внимательно выбирать квадрант угла. Он определяется по знаку $\sin\psi$ в формуле (1.40) с учетом того, что $\cos\psi$ отрицателен для начала и положителен для конца покрытия. Кроме того, по условию угол, определяемый формулой (1.40), должен находиться в пределах $\pm 90°$. В этом случае в уравнениях (1.31), (1.41) и (1.43) угол ψ берется с минусом для начала и с плюсом для конца покрытия, а поправка dP из (1.42) также отрицательна для начала покрытия.

Пример предвычисления покрытия дается ниже.

Пример (по Сент-Клеру)

Вычисления для момента начала покрытия звезды 24 Рыб 20 января 1961 г. на станции «Физика» Университета штата Огайо приведены в табл. 1.4—1.6.

Геодезические координаты этой станции равны:

$$\varphi = +40°00'07'',410, \quad \lambda = -83°00'48'',275, \quad H = 251,45 \text{ м}.$$

Геоцентрические координаты равны:

$$\rho \sin\varphi' = 0,6394072, \quad \rho\cos\varphi' = 0,7671179.$$

Но звезды 24 Рыб нет в каталоге The Apparent Places of Fundamental Stars, 1961 г., поэтому ее среднее место, годовое изменение A.V., вековое изменение S.V., третий член и собственные движения (μ_α, μ_δ) на эпоху 1950,0 были взяты из Boss's General Catalog. Для вычисления среднего места звезды на начало 1961 бесселева года были использованы формулы:

$$\alpha_{1961,0} = \alpha_{1950,0} + t\,(\text{A. V.}) + \frac{t^2}{200}(\text{S. V.}) + \frac{t^3}{10^6}(\text{3-й член}),$$

$$\delta_{1961,0} = \delta_{1950,0} + t\,(\text{A. V.}) + \frac{t_2}{200}(\text{S. V.}) + \frac{t^3}{10^6}(\text{3-й член}).$$

В этих формулах через t обозначен промежуток времени с 1950,0 до 1961,0, выраженный в годах. Видимое место звезды на момент начала покрытия вычисляется с использованием бесселевых чисел по формулам:

$$\alpha_* = \alpha_{1961,0} + Aa + Bb + Cc + Dd + E + t'\mu_\alpha,$$
$$\delta_* = \delta_{1961,0} + Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + t'\mu_\delta.$$

Здесь

$$a = \frac{m^s}{n''} + \frac{1}{15}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta,$$
$$b = \frac{1}{15}\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta,$$
$$c = \frac{1}{15}\cos\alpha\sec\delta,,$$
$$d = \frac{1}{15}\sin\alpha\sec\delta,$$
$$a' = +\cos\alpha,$$
$$b' = -\sin\alpha,$$
$$c' = \mathrm{tg}\,\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta,$$
$$d' = \cos\alpha\sin\delta,$$

а величины A, B, C, D, E, ε, m и n находятся по таблицам American Ephemeris and Nautical Almanac. Часть тропического года, протекшая с начала бесселева года до предвычисляемого момента, обозначена t' Вычисления видимого места звезды 24 Рыб на момент начала покрытия приведены в табл. 1.4.

Видимое место и параллакс Луны были взяты из American Ephemeris and Nautical Almanac на каждую минуту, предшествующую и последующую наблюденному моменту начала покрытия. Интерполирование было выполнено с учетом первых, вторых и третьих разностей по формуле Бесселя:

$$f_p = f_0 + pd^1_{1/2} + B_2(d^2_0 + d^2_1) + B_3 d^3_{1/2} + \ldots,$$

где p — интерполяционный множитель, B_2 и B_3 — бесселевы коэффициенты, d^1, d^2 и d^3 — первая, вторая и третья разности. Поскольку координаты Луны и ее параллакс даются на момент эфемеридного времени, то до интерполирования на всемирное время была введена поправка 34 *сек*. Эти вычисления размещены в табл. 1.5.

В табл. 1.6 приводится вычисление момента начала покрытия звезды 24 Рыб. В качестве первого приближения был использован наблюденный момент контакта $23^h07^m05^s,8$. Разность между наблюденным и предвычисленным моментами составила $0^s,7$.

Таблица 1.4

Вычисление видимого места звезды 24 Рыб для $23^h\ 07^m$ UT 20 января 1961 г.

Из каталога Босса				
α_0 и δ_0	A. V.	S. V.	3-й член	μ_α и μ_δ
$23^h\ 50^m\ 21^s.382$ $-3^\circ\ 25'\ 59''.50$	$+\ 3^s.0813$ $+19''.984$	$-0^s.0005$ $+0''.010$	$+0^s.010$ $-0''.14$	$+0^s.0046$ $-0''.041$
	α		δ	
t (A. V.)	$33^s.8943$		$219''.824$	
$\frac{t^2}{200}$ (S. V.)	-0.0003		-0.006	
$\frac{t^3}{10^6}$ (3-й член)	0.0000		0.000	
1961.0	$23^h50^m49^s.140$		$-3^\circ22'19''.67$	

Из The American Ephemeris and Nautical Almanac

m^s	$3^s.0735$	a	$+0.1535$
n''	$20''.0416$	b	-0.0039
A	$-\ 0.959$	c	$+0.0667$
B	$+\ 8.822$	d	-0.0026
C	$-\ 9.593$	a'	-0.9992
D	$+17.615$	b'	$+0.0396$
E	$-\ 0.0001$	c'	$+0.4306$
$tg\epsilon$	$+\ 0.4337$	d'	-0.0588
$\sin\alpha$	$+\ 0.0396$	t'	$+0.0558$
$\cos\alpha$	$+\ 0.9992$	$t'\mu_\alpha$	$+0.0002$
$\sin\delta$	$-\ 0.0588$	$t'\mu_\delta$	-0.0022
$\cos\delta$	$+\ 0.9983$	α_*	$23^h50^m54^s.406$
$tg\delta$	$-\ 0.0589$	δ_*	$-3^\circ22'23''.53$

Таблица 1.5

Вычисление видимого места и параллакса Луны для покрытия звезды 24 Рыб 20 января 1961 г.

Видимое место Луны по эфемеридному времени						
Время	$\alpha_м$	d^1	d^2	$\delta_м$	d^1	d^2
22^h	$23^h48^m56^s.271$			$-3°05'57''.21$		
		+134.112			+673.42	
23	51 10.383		−0.232	$-2°54'43''.79$		+0.04
		+133.880			+673.46	
24	53 24.262		−0.230	$-2°43'30''.33$		−0.03
		+133.650			+673.43	
01	55 37.913			$-2°32'16''.96$		

Моменты / Формулы	$\alpha_м$ $23^h07^m34^s$	$\alpha_м$ $23^h08^m34^s$	$\delta_м$ $23^h07^m34^s$	$\delta_м$ $23^h08^m34^s$
p	+ 0.1261	+ 0.1428	+ 0.1261	+ 0.1428
pd^1	$+16^s.8837$	$+19^s.1150$	$+84''.9307$	+96.1546
$B_2(d_0^1+d_1^2)$	$+ 0^s.0129$	$+ 0^s.0143$	$+ 0''.0003$	$- 0''.0003$
$\alpha_м$ и $\delta_м$	$23^h51^m27^s.280$	$23^h51^m29^s.512$	$-2°53'18''.86$	$-2°53'07''.64$

Параллакс Луны по эфемеридному времени			
Время	$\pi_м$	d^1	d^2
20.0 янв.	$60'01''.973$		
		−26.323	
20.5 янв.	59 35.650		−1.527
		−27.850	
21.0 янв.	59 07.800		−0.820
		−28.670	
21.5 янв.	58 39.130		

Моменты / Формулы	$23^h07^m34^s$	$23^h08^m34^s$
p	+ 0.9272	+ 0.9286
pd^1	$-25''.8218$	$-25''.8605$
$B_2(d_0^1+d_1^2)$	$+ 0''.0399$	$+ 0''.0399$
$\pi_м$	$+59'9''.868$	$+59'9''.829$

Таблица 1.6

Предвычисление момента покрытия звезды 24 Рыб 20 января 1961 г. для станции «Физика»

Время	23^h7^mU T	23^h8^mU T
α_*	$+357°43'36''.09$	-
δ_*	$-\ \ 3°22'23''.53$	-
$\alpha_м$	$+357°51'49''.20$	$357°53'22''.68$
$\delta_м$	$-\ \ 2°52'18''.86$	$2°53'\ 7''.64$
$\pi_м$	$59'9''.868$	$59'9''.829$
$\sin\delta_*$	-0.0588 3949	-
$\cos\delta_*$	+0.9982 6746	-
$\sin\delta_м$	-0.0503 9375	-0.0503 3942
$\cos\delta_м$	+0.9987 2943	+0.9987 3217
$(\alpha_м-\alpha_*)$	$+8'13''.11$	$+8'46''.59$
$\sin(\alpha_м-\alpha_*)$	+0.0023 9066	+0.0025 5298
$\cos(\alpha_м-\alpha_*)$	+0.9999 9714	+0.9999 9675
$\sin\pi_м$	+0.0172 0940	+0.0172 0911
x	+0.1387 3941	+0.1481 6241
y	+0.4914 8262	+0.4946 5039
h_*	$+26°5'35''.43$	$+26°20'37''.89$
$\sin h_*$	+0.4398 3219	+0.4437 5730
$\cos h_*$	+0.8980 8000	+0.8961 4701
$\rho\sin\varphi'$	+0.6394 072	-
$\rho\cos\varphi'$	+0.7671 179	
ξ	+0.3374 0297	+0.3404 1399
η	+0.6788 3572	+0.6787 4851
$x-\xi$	-0.1986 6356	-0.1922 5158
$y-\eta$	-0.1873 5310	-0.1840 9812
	I приближение	II приближение
U.T.	$23^h7^m5^s.8$	$23^h7^m5^s.00$
$(x'-\xi')$	+0.3847 19	
$(y'-\eta')$	+0.1952 99	-
$x-\xi$	-0.1981 4383	-0.1981 2960
$y-\eta$	-0.1870 3846	-0.1871 1431
tan M	+1.0588 4014	+1.0588 6930
M	$46°38'13''.29$	$46°38'16''.12$
sin M	+0.7270 1852	+0.7270 2794
m	-0.2724 0548	-0.2725 1991
tq N	+1.9701 5471	-
N	$63°5'19''.70$	-
sin N	+0.8917 0911	-
n	+0.4314 4110	-
M-N	$-16°27'6''.41$	$-16°27'3''.6$
sin (M-N)	-0.2832 0832	-0.2831 8525
cos (M-N)	+0.9590 5842	+0.9590 6234
ψ	-	$+16°27'9''.01$
$\cos\psi$	+0.9590 8619	+0.9590 5489
τ^s	$-0^s.79$	$+0^s.09$
Контакт	-	$23^h7^m5^s.09$
P		$46°.6$

1.4.2. Метод American Ephemeris and Nautical Almanac и Astronomical Ephemeris

Хотя с 1960 г. в Ephemeris не приводятся сведения об обстоятельствах покрытий, Nautical Almanac Office неизменно продолжает публиковать программу покрытий. Эта программа в настоящее время содержит предвычисленные моменты для 88 центральных станций, а также широтные и долготные коэффициенты, дающие возможность наблюдателям получать моменты покрытий для своих станций. Было достигнуто соглашение с несколькими периодическими изданиями о публикации результатов этих предвычислений. Полный перечень центральных станций и названия этих периодических изданий можно найти в Explanatory Supplement, sec. 10B. Отпечатанные на машинке экземпляры результатов предвычислений для любой центральной станции можно получить по заказу в Nautical Almanac Office (Royal Greenwich Observatory, Herstmonceux Castle, Hailsham, Sussex, England). Результаты предвычислений для станций Северной Америки публикуются в ежемесячном журнале Sky and Telescope (Sky Publishing Company, Harvard College Observatory, Cambridge, Massachusetts).

Звезды, для которых выполняются эти вычисления, имеют яркость не меньше 7,5 звездной величины и берутся из Catalog of 3539 Zodiacal Stars for the Equinox 1950,0, опубликованного в т. X/II Astronomical Papers prepared for the use of The American Ephemeris and Nautical Almanac в 1940 г. Для светлого края Луны моменты исчезновения даются для звезд 4,5 звездной величины, а моменты появления — для звезд 3,5 величины и ярче. Для темного края моменты появления даются для звезд 6,5 величины и ярче. Для более подробного ознакомления с программой предварительных вычислений, например для составления перечня звезд в момент соединений и вычисления опубликованных данных, отсылаем читателей к Explanatory Supplement, sec. 10B.

1.4.2.1. Таблицы из журнала Sky and Telescope

Таблицы, ежегодно публикуемые в этом журнале, содержат приближенные результаты предвычисления покрытий для 13 центральных станций в Северной Америке, показанных на рис. 1.12.

Образец такой таблицы приведен на стр. 70. В табл. 1.7 для каждого покрытия даются: номер звезды по Zodiacal Catalogue, ее звездная величина, явление (1 — исчезновение, 2 — появление) и возраст Луны в днях. Под названием станции дается всемирное время события с точностью до $0^m,1$, долготный и широтный коэффициенты a и b в минутах времени и позиционный угол P с точностью до 1°.

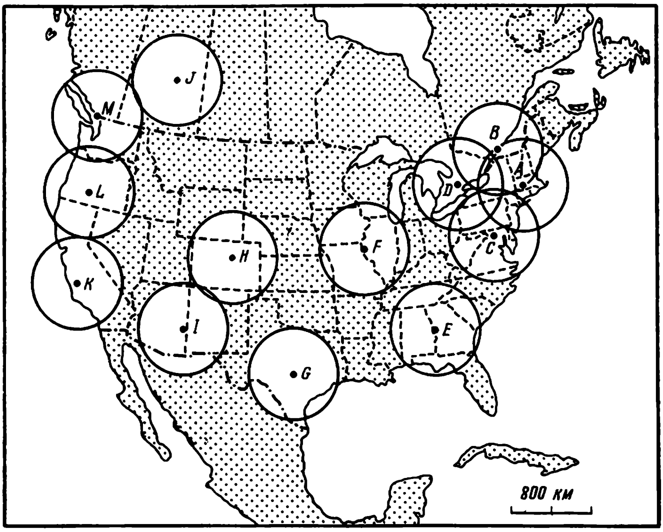


Рис. 1.12. Центральные станции в Северной Америке, для которых предвычисляются покрытия.

Обозначения	Название станции	Координаты	
		с. ш.	з. д.
A	Массачусетс	42°,500	72°,500
B	Монреаль (Квебек)	45 ,505	73 ,575
C	Вашингтон (округ Колумбия)	38 ,925	77 ,065
D	Торонто (Онтарио)	43 ,663	79 ,400
E	Алабама (Джорджия)	33 ,000	85 ,000
F	Иллинойс	40 ,000	91 ,000
G	Техас	31 ,000	98 ,000
H	Денвер (Колорадо)	39 ,677	104 ,950
I	Нью-Мексико (Аризона)	34 ,000	109 ,000
J	Эдмонтон (Альберта, Канада)	53 ,533	113 ,075
K	Калифорния	36 ,000	120 ,000
L	Орегон	42 ,500	121 ,000
M	Ванкувер (Брит. Колумбия, Канада)	49 ,500	123 ,000

Таблица 1.7

Дата	№ по Z.C.	Зв. велич.	Явление	Возраст Луны	J Эдмонтон W. 113°075, N. 53°533 UT	a	b	P	K Калифорния W. 120°000, N. 36°000 UT	a	b	P	L Орегон W. 121°000, N. 42°500 UT	a	b	P
1961				d	h m	m	m	°	h m	m	m	°	h m	m	m	°
Окт. 20	3332	7·2	1	10·5	8 05·7	−0·7	−1·2	84		N			8 15·7	−1·4	−2·2	112
21	3463	6·4	1	11·4	3 31·4	−0·9	+1·5	40	2 55·4	−1·4	+1·5	64	3 05·0	−1·2	+1·7	51
26	608	6·0	2	16·4	4 07·7	−0·4	+1·2	292		H			3 53·2	0·0	+1·1	278
26	626	6·4	2	16·6	8 07·6	−0·8	+2·5	213		N			7 24·1			179
26	635	3·9	1	16·6	9 37·7	−1·9	−2·0	128		N				N		
26	635	3·9	2	16·6	10 23·9	−1·1	+2·6	203		N				N		
26	659	6·4	2	16·7		S				N				N		
28	943	6·2	2	18·7	12 43·3			209		N				N		
28	947	5·2	2	18·7		G				S			13 46·2	−1·6	−1·7	291
Нояб. 15	3118	6·9	1	6·7	1 50·2	−1·7	−0·8	114		N			1 44·8			131
17	3421	5·1	1	8·8	4 55·8	−1·2	−0·8	85		N			4 53·2	−2·2	−1·3	106
17	3422	6·7	1	8·8		N			5 37·1	−0·3	+2·5	12		N		
18	36	7·2	1	9·9		N			9 02·2	−0·5	+0·1	53	9 04·9	−0·3	+0·9	27
18	37	7·5	1	9·9		H			9 10·9	−0·6	−1·3	94	9 04·1	−0·5	−0·7	70
19	165	6·7	1	10·9	6 40·3	−1·5	−1·6	107		N				N		
19	170	6·2	1	10·9	8 08·0	−0·8	−0·8	72		G			8 12·6	−1·5	−1·8	104
19	178	6·8	1	10·9	9 09·8	−0·6	−2·2	109		N				N		
21	405	4·4	1	12·7	0 50·6	+0·3	+2·7	9		H				H		
23	692	1·1	1	14·7	1 16·6	+0·4	+1·9	43		H				H		
23	692	1·1	2	14·7	2 01·9	−0·1	+1·2	289		H			1 49·6	+0·2	+1·0	276
27	1262	6·2	2	19·0	9 54·0	−1·4	+1·7	249		N				N		
28	1371	6·4	2	19·9	7 59·8	−0·6	+1·9	262		N			7 30·5	+0·1	+3·2	227
28	1375	5·6	2	20·0	9 44·7	−1·2	+0·8	281		G			9 17·6	−1·0	+2·5	245
29	1487	1·3	1	21·1		N			11 29·5	−2·0	+0·2	104	11 33·1	−1·9	+1·5	81
29	1487	1·3	2	21·1		N			13 01·5	−2·2	−1·2	300	12 49·8	−1·6	−1·9	320
Дек. 13	3231	7·4	1	5·1		N			3 04·8	−0·5	+1·4	25		G		
14	3375	6·9	1	6·1		N			3 11·1	−0·8	+1·6	27	3 26·0	·	·	356
17	364	4·3	1	10·1	23 53·2	−0·4	+1·7	77		S				S		
18	405	4·4	1	10·4	9 33·0	−0·3	−0·9	67	10 02·4	−0·1	−4·1	137	9 44·6	−0·5	−1·9	105
19	491	6·2	1	11·1	1 25·8	−0·5	+1·9	61		S				S		
19	498	6·2	1	11·2	3 07·7	−1·4	+0·7	101		N			2 50·0	−2·0	−0·1	120
19	508	4·3	1	11·2	5 31·1	·	·	140		N				N		
20	635	3·9	1	12·2	2 14·0	−0·8	+1·2	101		N			1 56·4	−0·9	+0·5	118
20	667	5·3	1	12·3	7 16·8	−1·3	0·0	71	7 22·9	·	·	135	7 06·9	−2·2	−0·9	103
20	677	4·8	1	12·4	8 40·9	−1·0	−3·9	138		N				N		
20	692	1·1	1	12·5	11 15·8	−0·2	−1·8	99		N			11 42·6	+0·3	−4·3	147
20	692	1·1	2	12·5	12 12·7	−0·1	−1·0	248		N			12 11·5	−0·9	+1·7	203
24	1236	5·1	2	16·5	13 05·9	−0·8	−1·5	272		N			13 05·2	−2·0	+0·5	233
24	1241	6·4	2	16·5	14 04·5	−0·2	−2·2	304		S			14 21·8	−0·7	−1·5	275
26	1434	5·6	2	18·3		N			6 48·8	·	·	356		N		
29	1749	6·1	2	21·5	13 11·0	−1·9	+0·2	262		N				N		

Коэффициенты a и b суть изменения предвычисленных моментов для центральных станций при увеличении долготы и широты на 1° (см. конец разд. 1.5.1.1). Они позволяют довольно точно вычислять моменты в пункте наблюдения P (φ; λ) в радиусе 300—500 *км* от центральной станции P_0 (φ'; λ').

Приближенный момент контакта на пункте наблюдения равен

$$T_0 = T'_0 - a(\lambda - \lambda') + b(\varphi - \varphi'),$$

причем надо должным образом учитывать арифметические знаки. Широты и долготы должны выражаться в градусах.

Приближенный момент контакта на центральной станции P_0 дается в табл. 1.7. На рис. 1.12 центральные станции показаны в центрах окружностей радиусом 400 *км*. В пределах площади, ограниченной каждой окружностью, можно пользоваться коэффициентами a и b, соответствующими данной центральной станции. Для пунктов, расположенных за пределами этих границ, коэффициенты a и b должны интерполироваться. Буквы, поставленные вместо пропущенных результатов предвычислений покрытий, означают следующее: G — происходит касательное покрытие; H — явление происходит под горизонтом или очень близко к нему; N — покрытия не происходит; S — наблюдениям мешает солнечный свет.

1.4.2.2. Таблицы Nautical Almanac Office

В таблицах содержатся следующие сведения: номер покрываемой звезды по Zodiacal Catalogue; звездная величина звезды; ее видимое прямое восхождение и склонение; дата и момент T_0 геоцентрического соединения по прямому восхождению; общий для звезды и Луны геоцентрический часовой угол для долготы Гринвича, H (положительный к западу); ордината оси тени в геоцентрическом соединении Y; изменения x' и y' величин x и y за один час среднего времени. Нужно отметить, что в момент геоцентрического соединения по прямому восхождению абсцисса x оси тени равна нулю.

Приближенный момент контакта для данного пункта с помощью этих таблиц может быть вычислен следующим образом.

1. Вычисляется приближенный момент видимого соединения Луны и звезды для наблюдения в данном пункте. Он может быть получен по моменту геоцентрического соединения с учетом приближенной поправки τ'. Она имеет тот же знак, что и местный часовой угол $h_0 = H + \lambda$ в момент геоцентрического соединения. Эта поправка может быть вычислена по формуле

$$\tau' = \frac{\xi_0}{x' - \xi'},$$

где $\xi_0 = \rho \cos \varphi' \sin h_0$; ξ' вычисляется по (1.39), а x' берется из таблиц.

Местный момент соединения будет равен $T_0 + \tau'$.

2. Вычисляются бесселевы координаты наблюдателя и оси тени и их изменения на этот момент с использованием местного момента соединения в качестве приближенного момента контакта по следующим формулам:

$$\xi = \rho \cos \varphi' \sin (h_0 + \tau'),$$
$$\eta = \rho \sin \varphi' \cos \delta_* - \rho \cos \varphi' \sin \delta_* \cos (h_0 + \tau'),$$
$$\xi' = h' \rho \cos \varphi' \cos (h_0 + \tau'), \quad \eta' = h' \xi \sin \delta_*,$$
$$x = x'\tau', \quad y = Y + y'\tau'.$$

В первых четырех уравнениях величина τ' должна быть выражена в единицах звездного времени, а в последних двух — в единицах среднего времени; значения x' и y' выбираются из таблиц.

3. С использованием этих величин и формул (1.27), (1.28) получаются вспомогательные величины m, n, M и N; угол ψ и поправка τ могут быть вычислены по формулам (1.40). Момент контакта будет равен

$$T = T_0 + \tau' + \tau + d\tau,$$

где $d\tau$ вычисляется по формуле (1.41).

4. Описанными выше способами по формулам (1.43), (1.32) и (1.33) вычисляются позиционные углы.

1.4.3. Границы полосы покрытия

До сих пор мы считали, что покрытие происходит лишь в каком-то одном пункте. Границы, в пределах которых наблюдается данное покрытие, могут быть определены по картам покрытий, подобным картам солнечных затмений (см. разд. 1.3.2). Но в связи с тем, что число покрытий велико, невыгодно составлять и публиковать отдельные карты для каждого покрытия. Кроме того, результаты предвычислений, выполняемых, как описано в предыдущем разделе, делают эти карты вообще ненужными. Подробное описание метода построения таких карт опубликовал Фокселл в Memoirs of the British Astronomical Association, vol. 30, 1934.

Другой способ определения границ покрытия основан на использовании механического прибора. Такой прибор сконструирован в Nautical Almanac Office и используется для определения момента любого выбранного соединения на тех станциях, для которых выполнены исследования возможных покрытий с помощью электронно-вычислительных машин. В этом приборе Земля представляется в виде глобуса, а тень системы Луна — звезда — в виде цилиндрического пучка света, радиус которого равен радиусу Луны в масштабе модели. Начальная регулировка прибора заключается в установке для момента соединения бесселевых элементов покрытия в соответствующем масштабе. Движение глобуса и «тени» осуществляется с помощью механической передачи так, что прибор воспроизводит непрерывную картину данного явления. Таким образом, за движением «тени» можно следить визуально и для всех станций по ходу движения отсчитывать промежутки времени от момента соединения до моментов появления и исчезновения звезды. Описание этого прибора дано в приложении к Nautical Almanac за 1938 г. Способ обработки был опубликован Комри в 1937 г. (см. также [3] и [13].— *Ред.*).

Третий способ определения границ покрытия и одновременно приближенных моментов контактов — графический. Контуры проекции лунного диска на фундаментальную плоскость изображаются на бумаге окружностью радиусом k_M. Туда же наносятся положения пунктов в моменты до и после соединения. Если точку внутри этой окружности соединить прямой линией с точкой за ее пределами, то пересечение этой линии с окружностью даст хорошие приближенные положения проекции пункта в моменты контактов. Приближенный момент контакта получают, исходя из предположения, что проекция пункта перемещается по прямой линии с постоянной скоростью. Для иллюстрации рекомендуются статьи Ламберта и Льюиса в Popular Astronomy соответственно за 1949 и 1935 гг.

Из различных методов, которые могут быть использованы для определения границ покрытия, ниже описывается метод определения граничных параллелей, предложенный Шовене. Он может быть использован вместе с таблицами Nautical Almanac Office, упомянутыми выше. В этом методе вычисляют следующие величины:

$$
\begin{aligned}
\cos\gamma_1 &= Y\sin N \pm k_M && (\gamma < 180^\circ),\\
\cos\gamma_2 &= Y\sin N \mp k_M, &&\\
\sin\beta &= \sin N\cos\delta_* && (\beta < 90^\circ),\\
\varphi_1 &= \beta \pm \gamma_1, &&\\
\sin\varphi_2 &= \sin(N \mp \gamma_2)\cos\delta_* && (N < 90^\circ).
\end{aligned}
$$

Здесь верхний знак соответствует северному склонению δ_*, а нижний — южному. Если склонение северное, то φ_1 соответствует северной границе полосы, а φ_2 — южной, а для южного склонения — наоборот. Значения Y и δ_* могут быть вычислены или выбраны из таблиц. Значение N можно найти по формуле

$$\operatorname{tg} N = \frac{x'}{y'},$$

где x' и y' либо выбираются из таблиц, либо вычисляются обычным способом, но всегда берутся со знаком плюс. N должно быть меньше 90°. Если $\cos\gamma_1$ получается мнимым, то $\varphi_1 = \pm 90°$, а если $\cos\gamma_2$ получается мнимым, то $\varphi_2 = \delta_* \mp 90°$. Если $\varphi_1 = \beta \pm \gamma_1 > > 90°$, то либо $\varphi_1 = 180° - (\beta \pm \gamma_1)$, либо $\varphi_1 = -180° - (\beta \pm \gamma_1)$.

Граничные параллели для каждой покрываемой звезды до 1960 г. давались в таблицах Ephemeris. Если наблюдатель находится в пределах зоны, образуемой граничными параллелями, которые определяются описанным выше способом, то он увидит покрытие при условиях, что местный часовой угол звезды $H + \lambda$ по абсолютному значению по крайней мере на один час меньше, чем полусуточная дуга параллели звезды *, а Солнце к моменту $T_0 + \lambda$ местного времени находится над горизонтом не более часа. Для более точного определения границ покрытия читатели отсылаются к книге Шовене [33, chap. X], или к Explanatory Supplement, sec. 10B.

1.4.4. Предвычисление изогоны покрытия

При наблюдении покрытия иногда требуется предвычислить так называемую линию равного края или изолимбу (изогону.— *Перев.*) на поверхности Земли. Наблюдатели, находящиеся на этой линии, могут видеть данное покрытие на одной и той же селенографической широте. Но наблюдать покрытие в одной и той же точке края Луны, т. е. на одинаковой селенографической широте и долготе, невозможно из-за либрации Луны. Как будет видно далее, описываемый метод имеет большое значение для устранения трудностей, возникающих в том случае, когда недостаточно хорошо известен профиль Луны. Этот метод разработал Хироза в Токийской астрономической обсерватории. Вычисления выполняются по следующей программе:

1. Предвычисляют обстоятельства покрытия для заданной опорной станции, определяя момент контакта T_1 и угол Q из уравнения (1.23), подставляя в него $k_M = L = l - i\zeta$, причем

$$k_M \sin Q = x_1 - \xi_1, \qquad k_M \cos Q = y_1 - \eta_1. \tag{1.44}$$

Бесселевы координаты x_1, y_1, ξ_1 и η_1 должны быть вычислены на момент T_1.

2. Бесселевы координаты второго наблюдателя ξ_2 и η_2, также находящегося на изогоне, могут быть вычислены с помощью того

---

* Т. е. часовой угол $|\,t\,|$ меньше 11^{h}.— *Прим. перев.*

же уравнения (если считать угол Q постоянным) по формулам

$$\xi_2 = x_2 - k_M \sin Q,$$
$$\eta_2 = y_2 - k_M \cos Q, \qquad (1.45)$$

где x_2 и y_2 должны быть вычислены на момент T_2.

Для вычисления координаты ζ_2 нужно знать расстояние ρ от центра Земли. Оно неизвестно заранее,так как является функцией широты точки. Задача определения ζ_2 может быть решена в предположении, что первая и вторая станции расположены на некоторой геометрической поверхности, либо по методу последовательных приближений, либо с помощью прямого метода, разработанного Бесселем и приведенного в Explanatory Supplement, sec. 9B.

Координата ζ_2 вычисляется на основании предположения, что первая и вторая станции расположены на поверхности эллипсоида, имеющего тот же эксцентриситет, что и земной эллипсоид. Большая и малая полуоси этого эллипсоида приближенно вычисляются по формулам

$$\bar{a} = a + \frac{a}{N} H,$$
$$\bar{b} = \bar{a}\sqrt{1 - e^2},$$

где a — большая полуось земного эллипсоида, H — высота второй точки над эллипсоидом, а N — радиус кривизны эллипсоида в плоскости первого вертикала.

Уравнение этого эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2 + q^2}{\bar{a}^2} + \frac{p^2}{\bar{b}^2} = 1, \qquad (1.46)$$

причем координатные оси x и q лежат в плоскости экватора (ось x совпадает с бесселевой координатной осью x), а осью p является средняя ось вращения Земли. Если мы повернем бесселеву систему координат вокруг оси x на величину склонения оси тени δ_*, то мы получим систему координат, которая фактически будет идентична системе, использованной в разд. 1.2.2.2 (см. рис. 1.4). Связь этих различных координат выражается такой системой уравнений:

$$x = \xi,$$
$$q = -\eta \sin \delta_* + \zeta \cos \delta_*, \qquad (1.47)$$
$$p = \eta \cos \delta_* + \zeta \sin \delta_*.$$

Подставляя (1.47) в (1.46), мы получаем следующее квадратное уравнение для ζ:

$$A\zeta^2 + 2B\zeta + C = 0, \qquad (1.48)$$

где

$$A = (1 + e^2 \sin^2 \delta_*)\, \bar{a}^{-2},$$

$$B = 2e^2 \sin \delta_* \cos \delta_* \bar{a}^{-2},$$

$$C = [\xi^2 + \eta^2 (1 + \cos^2 \delta_*) - 1]\, \bar{a}^{-2}.$$

Используя значения величин ξ_2 и η_2, вычисляемых по формулам (1.45), мы получим координату ζ_2 из уравнения (1.48). При решении этого уравнения надо брать положительное значение корня.

3. Следующий шаг — это преобразование бесселевых координат в обыкновенные геодезические координаты. Это можно сделать с помощью формул

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{v}{u},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{w + Ne^2 \sin \varphi}{u \cos \lambda + v \sin \lambda}. \qquad (1.49)$$

Здесь u, v и w — геоцентрические прямоугольные координаты наблюдателя [см. уравнения (1.68)], которые могут быть вычислены так:

$$u = \xi \sin h_{*G} - \cos h_{*G} (\eta \sin \delta_* - \zeta \cos \delta_*),$$

$$v = \xi \sin h_{*G} + \sin h_{*G} (\eta \sin \delta_* - \zeta \cos \delta_*), \qquad (1.50)$$

$$w = \eta \cos \delta_* + \zeta \sin \delta_*,$$

где h_{*G} и δ_* — часовой угол на долготе Гринвича и видимое склонение оси тени, т. е. звезды.

Следующие точки изогоны могут быть определены подобным же образом. Хироза считает, что полезно делать второе приближение, в котором будут учитываться изменения угла Q. Они появляются из-за либрации Луны и топоцентрических колебаний величины $P - Q$. Для дальнейшего изучения вопроса следует просмотреть конец разд. 1.7.1.2.

1.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОДЕЗИИ ПОКРЫТИЙ ЗВЕЗД ЛУНОЙ И СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ

Покрытия и солнечные затмения находят в геодезии следующее применение:

1. Установление геодезической связи между отдельными пунктами, т. е. определение геодезических координат точек в единой геодезической системе. Если эти координаты известны, то могут быть вычислены расстояние и азимут линии, соединяющей эти точки, по любому способу решения геодезических задач на большие расстояния.
2. Определение экваториального радиуса Земли.
3. Определение долгот станций.
4. Определение сжатия Земли.

Две последние задачи в известной степени уже устарели и поэтому здесь не рассматриваются. Долготы станций определялись из наблюдений солнечных затмений до изобретения проволочного и беспроволочного телеграфа. Сейчас сжатие Земли можно более точно определить гравиметрическим методом или по наблюдению искусственных спутников, чем по наблюдению солнечных затмений.

В настоящее время геодезическое использование затмений и покрытий заключается в следующем.

Предположим, что были предвычислены моменты контактов на основе принятых геодезических координат наблюдателя (φ, λ, ρ) и координат и параметров Луны (α_M, δ_M, k_M, π_M) и Солнца (α_S , δ_S, k_S, π_S), выбранных из таблиц и эфемерид. Принятые геодезические координаты будут зависеть от параметров земного эллипсоида (a, f) и от использованных исходных геодезических данных. При использовании покрытий данные о Солнце заменяются данными о звезде.

После окончания затмения мы увидим, что даже при безошибочных наблюдениях наблюденные моменты контактов будут отличаться от предвычисленных моментов на величины $\delta\tau$. Эти разности возникают из-за ошибок принятых данных. Для получения исправленных значений этих данных, по которым вычисляются геодезические координаты интересующей нас удаленной станции, нужно вычислить их поправки из уравнений вида

$$\delta\tau = \bar{a}\delta\lambda + \bar{b}\delta\varphi + \bar{c}\delta\alpha_M + \bar{d}\delta\delta_M + \bar{e}\delta\pi_M + \\ + \bar{f}\delta k_M + \bar{g}\delta\alpha_S + \bar{h}\delta\delta_S + \bar{i}\delta k_S + \bar{j}\delta\pi_S + \bar{k}\delta\rho.$$

Левая часть данного уравнения — разность между наблюденным и предвычисленным моментами, в правой части $\delta\varphi$, $\delta\lambda$ и т. д.— неизвестные поправки к принятым данным, а $\bar{a}$, . . . , $\bar{k}$ — коэффициенты, вычисляемые по наблюденным и принятым данным по способу, который будет рассмотрен ниже.

Каждое наблюдение дает нам одно такое уравнение. При достаточном числе уравнений неизвестные поправки могут быть вычислены по способу наименьших квадратов. Как будет показано ниже, некоторые неизвестные могут быть вычислены различными методами. В случае покрытия поправки к координатам и параметрам Солнца $\delta\alpha_S$, $\delta\delta_S$, δk_S и $\delta\pi_S$ заменяются поправками к прямому восхождению и склонению звезды, которые незначительны, если видимое положение звезды правильно выбрано из звездного каталога. В этом случае уравнение наблюдения (уравнение погрешностей.— *Перев.*) примет вид

$$\delta\tau = a\delta\lambda + b\delta\varphi + c\delta\alpha_M + d\delta\delta_M + e\delta\pi_M + f\delta k_M + g\delta\rho.$$

Поправки к координатам наблюдателя $\delta\lambda$ и $\delta\varphi$ представляют собой ошибки, вызываемые возможными различиями в геодезических данных и составляющими уклонения отвеса, которые в данном случае неизбежны, так как мы фиксируем только моменты наблюдений. Величина $\delta\rho$ — это поправка к высоте наблюдателя нац эллипсоидом, поэтому, если даже исправленная высота отсчитывается от уровня моря и в нее вводится поправка за рефракцию, то поправка $\delta\rho$ будет представлять собой расстояние между геоидом и эллипсоидом, т. е. высоту геоида над эллипсоидом. Величины $\delta\alpha_M$, $\delta\delta_M$, δk_M и $\delta\pi_M$ — это поправки к табличным значениям параметров Луны. Они могут быть получены и другими способами, которые становятся необходимыми, если измеряется не время, а, например, позиционный угол, как это иногда делается при солнечных затмениях, или, если целью наблюдений является не определение исправленных геодезических координат, а, например, определение значения экваториального радиуса земного эллипсоида.

Вычисление коэффициентов уравнений погрешностей и решение нормальных уравнений будет описано ниже. Мы изложим здесь методы наблюдений покрытий звезд, а для солнечных затмений перечислим лишь основные принципы, потому что затмения имеют меньшее геодезическое значение.

1.5.1. Применение покрытий для определения координат в единой геодезической системе

Геодезическая связь между двумя удаленными станциями считается установленной, если определены расстояние и азимут между ними.

Это можно сделать в два этапа: а) определить положения каждой станции в единой геодезической системе, б) вычислить длину и азимут линии из решения обратной геодезической задачи на большое расстояние. Здесь мы рассмотрим лишь первый этап.

1.5.1.1. Влияние ошибок в принятых данных на предвычисленный момент контакта

Подставляя в уравнения (1.26) $k_M = L$, мы получим уравнения, соответствующие покрытиям звезд:

$$k_M \sin Q = x - \xi + (x' - \xi')\,\tau, \qquad k_M \cos Q = y - \eta + (y' - \eta')\,\tau. \tag{1.51}$$

Будем считать, что все значения k_M, Q, x, y, ξ и η искажены ошибками δk_M, δQ, δx, δy, $\delta\xi$ и $\delta\eta$, что вызывает ошибку во времени контакта $\delta\tau$. Кроме того, предположим, что значение τ настолько мало (после второго приближения), что нет необходимости вводить поправки для x', y', ξ' и η'. Допущение о малости необходимо сделать главным образом в отношении бесселевых координат наблюдателя и их часовых изменений. Бесселевы координаты оси тени x и y и их изменения x' и y' получаются довольно хорошо для определенного периода; в любом случае x' и y' очень медленно изменяются за время покрытия. Вводя во все величины в уравнениях (1.51) соответствующие приращения, мы получим

$$(k_M + \delta k_M)\sin(Q + \delta Q) = x + \delta x - (\xi + \delta\xi) + (x' - \xi')(\tau + \delta\tau), \qquad (k_M + \delta k_M)\cos(Q + \delta Q) = y + \delta y - (\eta + \delta\eta) + (y' - \eta')(\tau + \delta\tau). \tag{1.52}$$

После преобразования, отбрасывания малых величин второго порядка и вычитания выражения (1.51) из (1.52) находим

$$\delta k_M \sin Q + k_M \cos Q\,\delta Q = \delta x - \delta\xi + (x' - \xi')\,\delta\tau,$$
$$\delta k_M \cos Q - k_M \sin Q\,\delta Q = \delta y - \delta\eta + (y' - \eta')\,\delta\tau.$$

Умножение первого уравнения на $\sin Q$, второго на $\cos Q$ и сложение этих произведений позволяет нам избавиться от поправки δQ. Решая полученное суммарное уравнение относительно $\delta\tau$ и учитывая, что $x' - \xi' = n \sin N$, $y' - \eta' = n \cos N$ и $Q = N + \psi$, получаем

$$\delta\tau = -\frac{\delta x - \delta\xi}{n\cos\psi}\sin(N + \psi) - \frac{\delta y - \delta\eta}{n\cos\psi}\cos(N + \psi) + \frac{\delta k_M}{n\cos\psi}. \tag{1.53}$$

Как видно из уравнения (1.36), величины δx и δy зависят от ошибок прямого восхождения, склонения и параллакса Луны

($\delta\alpha_M$, $\delta\delta_M$ и $\delta\pi_M$). Прямое восхождение и склонение звезды α_* и δ_* считаются безошибочными. Поэтому полные приращения δx и δy будут иметь вид

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial x}{\partial \alpha_M}\delta\alpha_M + \frac{\partial x}{\partial \delta_M}\delta\delta_M + \frac{\partial x}{\partial \pi_M}\delta\pi_M,\\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial \alpha_M}\delta\alpha_M + \frac{\partial y}{\partial \delta_M}\delta\delta_M + \frac{\partial y}{\partial \pi_M}\delta\pi_M.\end{aligned} \tag{1.54}$$

Значения частных производных из уравнений (1.36) равны

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_M} = \cos\delta_M \cos(\alpha_M - \alpha_*) \operatorname{cosec}\pi_M,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta_M} = -\sin\delta_M \sin(\alpha_M - \alpha_*) \operatorname{cosec}\pi_M,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \pi_M} = \cos\delta_M \sin(\alpha_M - \alpha_*) \frac{\cos\pi_M}{\sin^2\pi_M} = x \operatorname{ctg}\pi_M,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_M} = \cos\delta_M \sin\delta_* \sin(\alpha_M - \alpha_*) \operatorname{cosec}\pi_M,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta_M} = [\cos\delta_M \cos\delta_* + \sin\delta_M \sin\delta_* \cos(\alpha_M - \alpha_*)] \operatorname{cosec}\pi_M,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \pi_M} = -[\sin\delta_M \cos\delta_* - \cos\delta_M \sin\delta_* \cos(\alpha_M - \alpha_*)] \frac{\cos\pi_M}{\sin^2\pi_M} = -y \operatorname{ctg}\pi_M.$$

Из-за малости величин ($\alpha_M - \alpha_*$) и ($\delta_M - \delta_*$) в момент покрытия и невысоких требований точности мы можем считать, что $\cos(\alpha_M - \alpha_*) = 1$, $\sin(\alpha_M - \alpha_*) = 0$ и $\delta_M = \delta_*$. Учитывая все это, можем записать формулы для приращений δx и δy (1.54) в таком виде:

$$\begin{aligned}\delta x &= \delta\alpha_M \cos\delta_M \operatorname{cosec}\pi_M + \delta\pi_M x \operatorname{ctg}\pi_M,\\ \delta y &= \delta\delta_M \operatorname{cosec}\pi_M - \delta\pi_M y \operatorname{ctg}\pi_M.\end{aligned} \tag{1.55}$$

Для получения приращений величин ξ и η необходимо сделать подобные же преобразования уравнений (1.37). Переменными здесь будут φ', ρ и $h_* = h_{*G} + \lambda$, т. е. λ. Нужно еще раз отметить, что в величину ρ входит высота над эллипсоидом H и фиктивная высота ΔH, вызываемая влиянием рефракции. Об этом уже упоминалось в разд. 1.3.4. Если учесть поправку за рефракцию и высоту *над уровнем моря*, то приращение радиуса ρ будет представлять собой превышение N геоида над эллипсоидом, т. е. $\delta\rho = N$. Поэтому полные приращения $\delta\xi$ и $\delta\eta$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \frac{\partial\xi}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\xi}{\partial\varphi'}\delta\varphi' + \frac{\partial\xi}{\partial\rho}\delta\rho, \\ \delta\eta &= \frac{\partial\eta}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\eta}{\partial\varphi'}\delta\varphi' + \frac{\partial\eta}{\partial\rho}\delta\rho. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Значения частных производных в (1.56), согласно уравнениям (1.37), равны

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\xi}{\partial\lambda} = \rho\cos\varphi'\cos h_* = p, \\ &\frac{\partial\xi}{\partial\varphi'} = -\rho\sin\varphi'\sin h_* = q, \\ &\frac{\partial\xi}{\partial\rho} = \cos\varphi'\sin h_* = \frac{\xi}{\rho}, \\ &\frac{\partial\eta}{\partial\lambda} = \rho\cos\varphi'\sin\delta_*\sin h_* = r, \\ &\frac{\partial\eta}{\partial\varphi'} = \rho\cos\varphi'\cos\delta_* + \rho\sin\varphi'\sin\delta_*\cos h_* = s, \\ &\frac{\partial\eta}{\partial\rho} = \frac{\eta}{\rho}. \end{aligned}$$

Пренебрегая разностью между геодезической и геоцентрической широтами при вычислении поправки $\delta\varphi'$, окончательно получим

$$\begin{aligned} \delta\xi &= p\delta\lambda + q\delta\varphi + \frac{\xi}{\rho}\delta\rho, \\ \delta\eta &= r\delta\lambda + s\delta\varphi + \frac{\eta}{\rho}\delta\rho. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Подставляя уравнения (1.55) и (1.57) в (1.53), мы получаем после приведения подобных следующее уравнение погрешностей в том виде, в каком его дает Ламберт:

$$\delta\tau = a\delta\lambda + b\delta\varphi + c\delta\alpha_M + d\delta\delta_M + e\delta\pi_M + f\delta k_M + g\delta\rho. \tag{1.58}$$

Здесь

$$a = \frac{1{,}0472}{n\cos\psi}[p\sin(N+\psi) + r\cos(N+\psi)],$$

$$b = \frac{1{,}0472}{n\cos\psi}[q\sin(N+\psi) + s\cos(N+\psi)],$$

$$c = -\frac{0{,}017453}{n\cos\psi}\left[\frac{\sin(N+\psi)\cos\delta_*}{\sin\pi_M} + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos\delta_M\sin\delta_*\sin(\alpha_M-\alpha_*)}{\sin\pi_M}\cos(N+\psi)\right],$$

$$d = -\frac{0{,}017453}{n\cos\psi}\left[\frac{\cos(N+\psi)}{\sin\pi_M} + \frac{\sin\delta_M \sin(\alpha_M - \alpha_*)}{\sin\pi_M}\sin(N+\psi)\right],$$

$$e = \frac{0{,}017453}{n\cos\psi}\,\frac{x\sin(N+\psi) + y\cos(N+\psi)}{\operatorname{tg}\pi_M},$$

$$f = \frac{0{,}36}{n\cos\psi},$$

$$g = \frac{0{,}5644}{n\cos\psi}\left[\xi\sin(N+\psi) + \eta\cos(N+\psi)\right].$$

Постоянные величины в коэффициентах берутся таким образом, что если мы выразим $\delta\lambda$ и $\delta\varphi$ в минутах дуги, $\delta\alpha_M$, $\delta\delta_M$ и $\delta\pi_M$ — в секундах дуги, $\delta\rho$ — в километрах и δk_M умножим на 10^{-4}, то получим $\delta\tau$ в секундах времени. Этот прием позволяет нам получить первые значащие цифры коэффициентов в целых или десятых долях. В этих уравнениях величина n выражается в средних часах и соответственно должны быть вычислены ξ' и η'. За единицу расстояния принимается экваториальный радиус Земли.

В коэффициентах c и d вторые члены в скобках используются лишь тогда, когда нужна высокая точность.

Используя только два первых и последний члены уравнения (1.58), мы можем экстраполировать предвычисленные моменты покрытий для точек, окружающих опорную станцию. В этом случае коэффициенты a и b идентичны долготным и широтным коэффициентам в разд. 1.4.2.1.

1.5.1.2. О возможности определения поправок принятых данных

Если имеется достаточное число уравнений вида (1.58) (по одному контакту на одну станцию), то мы можем их решить для определения различных неизвестных поправок принятых данных. Предположим, что в o ночей мы отнаблюдали o покрытий (по одному покрытию в ночь), причем каждое наблюдалось на s станциях. Тогда для каждой станции будут три неизвестные поправки: $\delta\varphi$, $\delta\lambda$ и $\delta\rho$, а на всех станциях $3s$ неизвестных. Два неизвестных, а именно поправки к параметрам Луны $\delta\pi_M$ и δk_M, остаются постоянными для всех покрытий. Однако для каждого покрытия неизвестные $\delta\alpha_M$ и $\delta\delta_M$ будут переменными.

Общее число неизвестных будет равно

$$3s + 2o + 2.$$

С другой стороны, мы имеем $2so$ наблюдений контактов на обоих краях Луны. Большое число наблюдений на нескольких станциях позволяет нам найти эти неизвестные путем решения системы уравнений по способу наименьших квадратов.

По ряду причин это самый простой случай. Во-первых, не всегда возможно наблюдать оба контакта на каждой станции. Во-вторых, если Луна покрывает несколько звезд в течение одной ночи, то поправки $\delta\alpha_M$ и $\delta\delta_M$ можно считать постоянными для всех звезд этой ночи. Кроме того, $\delta\alpha_M$ и $\delta\delta_M$ могут быть определены независимо из наблюдений покрытий на станциях, положение которых известно, или из меридианных наблюдений на обсерваториях; ими можно пренебречь, если выбирать координаты Луны из специальных улучшенных эфемерид (см. разд. 1.7.1.3). Если мы сможем определить эти две неизвестные поправки различными способами, то, теоретически, мы можем определить остальные неизвестные для одной станции путем продолжения наблюдений только на ней.

Для установления геодезической связи необходимо иметь как минимум две станции. В этом случае $2o + 8 = 4o$, т. е. необходимо отнаблюдать минимум четыре покрытия, или восемь контактов, на каждой станции. Если поправки $\delta\alpha_M$ и $\delta\delta_M$ определены другим способом, то будет достаточно наблюдения двух покрытий, или четырех контактов, на каждой станции.

Для связи нескольких удаленных станций лучше всего вести систематические наблюдения всех покрытий на всех станциях в течение длительного периода, а затем решать полученные уравнения по способу наименьших квадратов.

После решения уравнений исправленные геодезические координаты наблюдателя можно вычислить, если ввести поправки в исходные данные:

$$\varphi + \delta\varphi, \qquad \lambda + \delta\lambda, \qquad H + \delta\rho.$$

Поправки $\delta\varphi$, $\delta\lambda$ и $\delta\rho$ содержат ошибки, вызываемые смещением центра референц-эллипсоида в центр масс Земли, ошибкой ориентировки и масштаба триангуляции и т. д. Для более подробного изучения рекомендуем обратиться к разд. 2.5.1.

Ниже приводится пример вычислений для отдельной станции.

Пример

Использование покрытий на Уиллистонской обсерватории, Массачусетс (по Сент-Клеру)

Наблюдения покрытий, проводившиеся Уиллистонской обсерваторией при колледже Маунт-Холиок, Массачусетс, публиковались ежегодно с 1925 по 1957 г. в The Astronomical Journal. Эти наблюдения выполнялись под руководством Фарнсуорт, причем регистрировались лишь исчезновения звезд у темного края Луны.

Для практического применения формул и теории покрытий в качестве примеров использовались шесть наблюдений, выполненных ночью 27 декабря 1952 г., и три наблюдения от 3 марта 1955 г., которые были опубликованы в 1954 и 1957 гг. в The Astronomical Journal. Результаты наблюдений приведены в табл. 1.8. Все наблюдения были выполнены на 8-дюймовом экваториальном рефракторе с астрономическими координатами

$$\Phi = 42°15'18'', 2 \text{ с. ш.}, \qquad \lambda = 4^h50^m18^s, 99 \text{ з. д.}$$

и высотой 76 *м*. Фиксирование моментов контактов выполнялось с помощью хронографа и коротковолнового радиоприемника, настроенного на волну станции WWV.

Девять наблюдений, приведенных в табл. 1.8, дают девять уравнений погрешностей. Для первых шести наблюдений, выполненных в одну ночь, ошибки табличных координат Луны можно считать постоянными, так что неизвестными в этих уравнениях будут $\delta\varphi$, $\delta\lambda$, $\delta\rho$, $\delta\alpha_M^1$, $\delta\delta_M^1$, $\delta\pi_M$ и δk_M. Три последних уравнения дадут еще два неизвестных $\delta\alpha_M^2$ и $\delta\delta_M^2$. Всего будет девять уравнений и девять неизвестных, так что возможно однозначное решение системы.

Предвычисление моментов исчезновения для каждой звезды выполнялось так, как это описано в разд. 1.4.1. Результаты этих предвычислений приведены в табл. 1.9. Прямое восхождение и склонение каждой звезды раньше давались на начало бесселева года в American Ephemeris and Nautical Almanac. Ими можно было воспользоваться для указанных покрытий, поскольку эти данные были исключены из этой публикации уже после того, как были проведены наблюдения. Координаты звезд в момент контакта определялись на соответствующий день.

Координаты и параллакс Луны выбирались из The Improved Lunar Ephemeris, 1952—1959 гг., с учетом первых, вторых и третьих разностей. Значения этих величин выбирались на каждую четную минуту до и после наблюденного момента исчезновения каждой звезды. Эти последние вместе с координатами звезд помещены в пяти первых столбцах табл. 1.9. Вычисления, производимые при использовании покрытий, довольно длинны и трудоемки; кроме того, необходимо выполнять много контрольных операций во избежание ошибок вычислений и трудоемких перевычислений, вызываемых этими ошибками. Методика наблюдений на одной станции предусматривает много контролей, так как предвычисления для нескольких звезд выполняются на короткий период времени. Такие величины, как прямое восхождение, склонение и параллакс Луны и их тригонометрические функции, увеличиваются или уменьшаются в хронологическом порядке. Местный часовой угол звезды и координаты наблюдателя также изме-

Таблица 1.8

Покрытия, наблюдавшиеся на Уиллистонской обсерватории на 8-дюймовом экваториальном рефракторе

Звезда	Звездная величина, m	Дата	Предвычисленные моменты по UT	Наблюденные моменты по UT	Наблюдатель
16 Тельца	5,4	27 дек. 1952 г.	$23^h40^m11^s{,}83$	$23^h40^m18^s{,}8$	Холмс
q Тельца	4,4	27 дек.	23 45 47,75	23 45 48,4	»
21 Тельца	5,8	28 дек.	0 10 52,04	0 10 54,0	»
22 Тельца	6,5	28 дек.	0 15 49,13	0 15 51,2	»
20 Тельца	4,0	28 дек.	0 19 25,62	0 19 29,6	»
BD+24°,571	6,8	28 дек.	1 56 11,66	1 56 13,4	»
3 Близнецов	5,8	3 марта 1955 г.	1 22 47,71	1 22 46,6	Коннелли
4 Близнецов	6,7	3 марта	1 55 45,09	1 55 46,8	»
6 Близнецов	6,3	3 марта	1 53 59,23	1 53 56,8	»

Таблица 1.9

Данные предвычисления покрытий звезд, наблюдавшихся на Уиллистонской обсерватории

Звезда	α_*	δ_*	$\alpha_м$	$\delta_м$	$\pi_м$	T	P
16 Тельца	55°30′31″.785	24°08′47″.58	54°49′54″.615	24°39′08″.79	56′47″.892	$23^h40^m11^s.84$	127°.9
q Тельца	55°36′33″.030	24°19′29″.00	54°57′50″.505	24°39′42″.55	56′47″.790	$23^h45^m47^s.75$	89°.4
21 Тельца	55°46′59″.970	24°24′45″.44	55°07′30″.255	24°42′30″.32	56′47″.282	$0^h10^m52^s.04$	84°.1
22 Тельца	55°49′07″.335	24°23′10″.21	55°10′26″.235	24°43′03″.78	56′47″.180	$0^h15^m49^s.13$	92°.6
20 Тельца	55°45′50″.175	24°13′32″.48	55°12′47″.040	24°43′30″.44	56′47″.099	$0^h19^m25^s.64$	133°.8
BD+24°.571	56°19′54″.600	24°50′54″.98	56°09′44″.955	24°54′05″.64	56′45″.139	$1^h56^m11^s.66$	27°.7
3 Близн.	91°45′35″.985	23°07′21″.67	91°43′26″.910	23°34′08″.64	58′51″.272	$1^h22^m47^s.71$	116°.0
4 Близн.	91°57′07″.665	23°00′28″.33	92°04′18″.030	23°32′11″.70	58′50″.904	$1^h55^m45^s.09$	133°.4
6 Близн.	92°24′26″.895	22°55′13″.68	92°40′54″.840	23°28′39″.35	58′50″.254	$2^h53^m59^s.24$	130°.6

няются хронологически, что позволяет легко обнаружить грубые ошибки. При вычислении моментов контактов по методу последовательных приближений каждое значение τ должно быть меньше своего предыдущего значения. Величина m (расстояние от наблюдателя до центра тени) с каждым приближением должна стремиться к предвычисленному значению радиуса тени (0,272496).

После выполнения предварительных вычислений нужно обратить внимание на выражение ($N + \psi$), которое используется при вычислении коэффициентов уравнений погрешностей. Поскольку

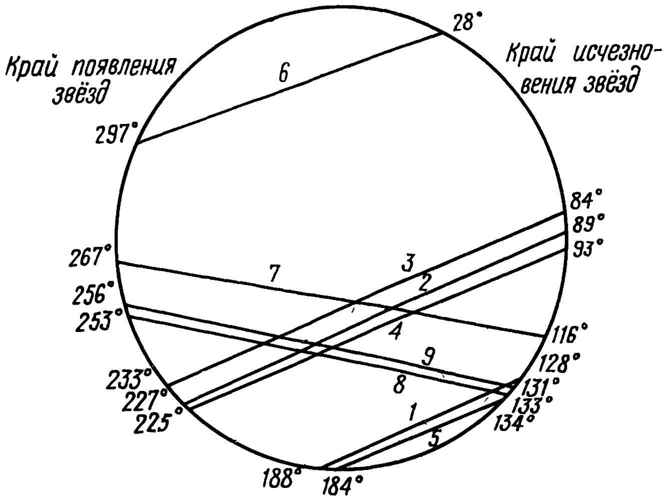


Рис. 1.13. Схема прохождения звезд, покрываемых Луной, по наблюдениям Уиллистонской обсерватории.

($N + \psi$)— позиционный угол звезды в момент появления, то он всегда заключен между 180 и 360°. В The American Ephemeris and Nautical Almanac дается позиционный угол на момент исчезновения. Этот угол равен ($N - \psi + 180°$). С помощью этого выражения можно грубо проконтролировать значения углов N и ψ. Хорошим контролем предвычислений является нанесение положений звезд в моменты контактов на окружность, изображающую край Луны. Следы звезд, отнаблюденных на одном пункте за короткий период времени, должны быть параллельными прямыми, пересекающими изображение лунного диска (рис. 1.13).

Для составления уравнений погрешностей использовалась формула (1.58). Значения величин h_*, x, y, ξ, η и π_M в этих уравнениях должны выбираться на момент наблюдений, а не на вычисленный момент. Число значащих цифр в коэффициентах зависит от точности фиксирования моментов контактов. Поскольку в дан-

Таблица 1.10

Коэффициенты уравнений погрешностей

	$\delta\alpha_м^2$	$\delta\delta_м^2$	$\delta\alpha_м^1$	$\delta\delta_м^1$	$\delta\pi_м$	$\delta k_м$	$\delta\lambda$	$\delta\varphi$	$\delta\tau$
(1)	0.0000	0.0000	-0.6082	-4.7390	+2.0823	-1.6310	-0.4408	+4.4726	+0.697
(2)	0.0000	0.0000	-1.7084	-1.7880	-0.6834	-0.8861	+0.8166	+2.3074	+0.063
(3)	0.0000	0.0000	-1.8769	-1.5562	-0.8305	-0.8829	+1.1040	+2.0767	+0.196
(4)	0.0000	0.0000	-1.7493	-1.9606	-0.5139	-0.9363	+0.9768	+2.3784	+0.207
(5)	0.0000	0.0000	-0.3640	-5.9624	+2.9356	-2.0353	-1.5366	+5.5464	+0.398
(6)	0.0000	0.0000	+0.4343	-3.8097	+0.2916	-1.3074	-0.4201	+3.5724	+0.174
(7)	-2.3285	-0.1454	0.0000	0.0000	-0.0269	-0.9024	+1.8758	-0.3615	-0.131
(8)	-2.4406	-0.8880	0.0000	-0.0000	+0.7693	-0.9903	+1.9532	+0.0754	+0.171
(9)	-2.2619	-0.5548	0.0000	0.0000	+0.9439	-0.8916	-1.5672	-0.5614	-0.243

Таблица 1.11

Нормальные уравнения

$\delta\alpha_м^2$	$\delta\delta_м^2$	$\delta\alpha_м^1$	$\delta\delta_м^1$	$\delta\pi_м$	$\delta k_м$	$\delta\lambda$	$\delta\varphi$	$\delta\tau$
+16.4946	+3.7607	0.0000	0.0000	- 3.9499	+ 6.5349	-12.6796	+ 1.9276	+0.4373
	+1.1175	0.0000	0.0000	- 1.2029	+ 1.5053	- 2.8767	+ 0.2971	+0.0020
		+10.1925	+12.8031	+ 1.4169	+ 5.9738	- 4.5309	-15.1879	-1.3342
			+81.9848	-24.9603	+29.6394	+ 7.7580	-79.8958	-7.1161
				+15.9431	- 9.5115	- 4.5967	+21.6510	+2.2626
					+13.5432	- 3.2416	-28.6069	-2.4333
						+15.3614	- 6.9054	-0.8128
							+79.2738	+7.1925
								+0.8654

Таблица 1.12

Преобразованные уравнения и их решения

$\delta\alpha^2_м$	$\delta\delta^2_м$	$\delta\alpha^1_м$	$\delta\delta^1_м$	$\delta\pi_м$	$\delta k_м$	$\delta\lambda$	$\delta\varphi$	$\delta\tau$
-16.4946	-3.7607	0.0000	0.0000	- 3.9499	- 6.5349	-12.6749	- 1.9276	-0.4373
- 0.22800	+0.2601	0.0000	0.0000	- 0.3023	+ 0.0153	+ 0.0142	- 0.1424	-0.0977
0.00000	0.00000	+10.1925	+12.8031	+ 1.4169	+ 5.9738	- 4.5309	-15.1879	-1.3342
0.00000	0.00000	- 1.25613	+65.9024	-26.7401	+22.1355	+13.4494	-60.8178	-5.4902
+ 0.23947	+1.16225	- 0.13901	+ 0.40575	+ 3.5991	+ 0.2223	- 1.5296	- 0.6185	+0.2116
- 0.39618	-0.05882	- 0.58610	- 0.32588	- 0.06177	+ 0.0035	+ 0.0136	+ 0.0051	+0.0122
+ 0.76871	-0.05459	+ 0.44453	- 0.20408	+ 0.42500	- 3.94387	+ 0.1510	- 0.0387	+0.0977
- 0.11686	+0.54748	+ 1.49010	+ 0.92285	+ 0.17185	- 1.48003	+ 0.25616	+ 0.0895	+0.0766
- 0.02651	+0.37562	+ 0.13090	+ 0.08331	- 0.05879	- 3.51562	- 0.64675	- 0.85545	+0.0012
- 1.0108	-0.86457	- 0.63612	- 1.18289	- 0.64579	+ 1.16539	- 0.86588	- 0.85545	

ном примере эта точность равна $0^s,1$, то поправка $d\tau$ получается с двумя значащими цифрами и в коэффициентах достаточно брать не больше четырех знаков. При фотоэлектрическом методе наблюдений коэффициенты надо брать до пятого или шестого знака.

Коэффициенты уравнений погрешностей для девяти контактов приведены в табл. 1.10. Отметим, что коэффициенты уравнений (2), (3) и (4) имеют одинаковый порядок для всех неизвестных. Уравнения (7), (8) и (9) и уравнения (1) и (5) также подобны. Уравнение (6) отличается от всех других. Если посмотреть на рис. 1.13, то станет понятным подобие коэффициентов: следы звезд, для которых уравнения подобны, параллельны и проходят близко друг к другу. Сопоставление коэффициентов может быть использовано для грубого контроля при составлении уравнений погрешностей.

Поправочный член $\delta\rho$ в уравнениях погрешностей, учитывающий ондуляцию, может быть отброшен.

Решение этих уравнений по способу наименьших квадратов, приведенное в табл. 1.11 и 1.12, дает следующие поправки к исходным данным:

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= +5'',13, & \delta\alpha_M^1 &= +0'',06,\\
\delta\lambda &= +5'',14, & \delta\delta_M^1 &= +0'',12,\\
\delta k_M &= -0,000012, & \delta\alpha_M^2 &= +0'',10,\\
\delta\pi_M &= +0'',06, & \delta\delta_M^2 &= +0'',09.
\end{aligned}$$

Следовательно, исправленные геодезические координаты станции наблюдений будут следующие:

$$\varphi = 42°15'23'',33 \text{ с. ш.}, \qquad \lambda = 4^h50^m19^s,33 \text{ з. д.}$$

Радиус Луны равен $k_M = 0,272484$.

1.5.2. Принципы использования солнечных затмений для определения координат в единой геодезической системе

1.5.2.1. Использование затмений в случае, когда наблюдаются только моменты контактов

Вывод формул для данного случая не является целью нашей работы. Мы лишь отметим для сравнения трудность вычислений путем схематического показа вывода уравнения, подобного (1.58), но для солнечных затмений. На практике обычно наблюдают относительные полярные координаты центра тени. Обработка вычислений для этого случая будет пояснена в следующем разделе.

Трудности в вычислениях по сравнению с аналогичными вычислениями для покрытий возникают в связи с тем, что вместо направления фиксированной звезды мы имеем дело с переменными направлениями оси тени и вместо постоянного радиуса тени k_M мы должны использовать радиус L, который, в свою очередь, зависит от нескольких переменных. Выражая все это в математической форме и подставляя вместо $\delta\alpha_* = \delta\delta_* = 0$, что видно из уравнений (1.10), мы получаем уравнения

$$\begin{aligned}\delta a &= \frac{\partial a}{\partial \alpha_S}\delta\alpha_S + \frac{\partial a}{\partial \delta_S}\delta\delta_S + \frac{\partial a}{\partial \alpha_M}\delta\alpha_M + \frac{\partial a}{\partial \delta_M}\delta\delta_M + \\ &\quad + \left[\frac{\partial b}{\partial r_S}\delta r_S + \frac{\partial b}{\partial \pi_M}\delta\pi_M\right]\frac{\partial a}{\partial b}, \\ \delta d &= \frac{\partial d}{\partial \delta_S}\delta\delta_S + \frac{\partial d}{\partial \delta_M}\delta\delta_M + \\ &\quad + \left[\frac{\partial b}{\partial r_S}\delta r_S + \frac{\partial b}{\partial \pi_M}\delta\pi_M\right]\frac{\partial d}{\partial b}.\end{aligned} \tag{1.59}$$

При этом дифференциальные коэффициенты могут быть вычислены с помощью формул (1.9) и (1.10).

Вместо простого выражения для δk_M мы имеем [см. формулу (1.21)]

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \zeta}\delta\zeta + \frac{\partial L}{\partial f}\delta f + \frac{\partial L}{\partial l}\delta l, \tag{1.60}$$

причем дифференциальные коэффициенты, вычисляемые по формулам (1.21), (1.13), (1.17) и (1.18), имеют вид

$$\begin{aligned}\delta\zeta &= \frac{\partial\zeta}{\partial\varphi'}\delta\varphi' + \frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\zeta}{\partial d}\delta d, \\ \delta f &= \frac{\partial f}{\partial k_M}dk_M + \frac{\partial f}{\partial k_S}\delta k_S + \frac{\partial f}{\partial G}\delta G, \\ \delta l &= \frac{\partial l}{\partial z}\delta z + \frac{\partial l}{\partial k_M}\delta k_M + \frac{\partial l}{\partial f}\delta f.\end{aligned} \tag{1.61}$$

Дифференциальные коэффициенты здесь вычисляются по формулам (1.13), (1.17) и (1.18). Величину δd в первом уравнении нужно заменить ее значением из (1.59), а δf в третьем уравнении — ее значением во втором уравнении системы (1.61). Величина δz в третьем уравнении (1.61), согласно формуле (1.12), равна

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial \delta_M}\delta\delta_M + \frac{\partial z}{\partial \alpha_M}\delta\alpha_M + \frac{\partial z}{\partial r_M}\delta r_M + \frac{\partial z}{\partial d}\delta d + \frac{\partial z}{\partial a}\delta a.$$

Дифференциальные коэффициенты вычисляются по формулам (1.12). Величины δd и δa должны быть заменены их значениями из уравнений (1.59). Очевидно, что все эти подстановки довольно сложны.

Начнем с уравнения (1.26). Предположим, как и раньше, что L, Q, x, y, ξ и η содержат ошибки δL, δQ, δx, δy, $\delta\xi$ и $\delta\eta$, но часовые изменения x', y', ξ' и η' можно считать независимыми от малых ошибок в исходных данных. Эти ошибки вызывают разницу $\delta\tau$ в предвычисленном моменте контакта. Введя все ошибки в уравнение (1.26), мы получим

$$(L+\delta L)\sin(Q+\delta Q)=x+\delta x-(\xi+\delta\xi)+(x'-\xi')(\tau+\delta\tau),$$
$$(L+\delta L)\cos(Q+\delta Q)=y+\delta y-(\eta+\delta\eta)+(y'-\eta')(\tau+\delta\tau).$$

После выполнения преобразований, подобных тем, которые были сделаны в уравнении (1.52), мы будем иметь

$$\delta\tau=-\frac{\delta x-\delta\xi}{n\cos\psi}\sin(N+\psi)-\frac{\delta y-\delta\eta}{n\cos\psi}\cos(N+\psi)+\frac{\delta L}{n\cos\psi}, \tag{1.62}$$

где δL вычисляется по (1.60). Остальные величины находят по формулам (1.12) и (1.13) следующим образом:

$$\delta x=\frac{\partial x}{\partial\alpha_M}\delta\alpha_M+\frac{\partial x}{\partial a}\delta a+\frac{\partial x}{\partial r_M}\delta r_M,$$
$$\delta y=\frac{\partial y}{\partial\alpha_M}\delta\alpha_M+\frac{\partial y}{\partial\delta_M}\delta\delta_M+\frac{\partial y}{\partial a}\delta a+\frac{\partial y}{\partial d}\delta d+\frac{\partial y}{\partial r_M}\delta r_M,$$
$$\delta\xi=\frac{\partial\xi}{\partial\varphi'}\delta\varphi'+\frac{\partial\xi}{\partial a}\delta a+\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\delta\rho,$$
$$\delta\eta=\frac{\partial\eta}{\partial\varphi'}\delta\varphi'+\frac{\partial\eta}{\partial a}\delta a+\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\delta\rho+\frac{\partial\eta}{\partial d}\delta d.$$

Здесь дифференциальные коэффициенты вычисляют по формулам (1.12) и (1.13). Величины δd и δa должны быть заменены их значениями из (1.59).

Вычислив все дифференциальные коэффициенты и подставив их соответствующим образом в уравнения (1.62), мы получим следующее уравнение погрешностей:

$$\delta\tau=\bar{a}\delta\lambda+\bar{b}\delta\varphi+\bar{c}\delta\alpha_M+\bar{d}\delta\delta_M+\bar{e}\delta\pi_M+\bar{f}\delta k_M+\bar{g}\delta\alpha_S+$$
$$+\bar{h}\delta\delta_S+\bar{i}\delta k_S+\bar{j}\delta\pi_S+\bar{k}\delta\rho, \tag{1.63}$$

где $\bar{a}$, ..., $\bar{k}$ — суммы соответствующих дифференциальных коэффициентов, подставленных в уравнение (1.62). Выражения для них значительно сложнее, чем для коэффициентов уравнения (1.58).

Каждая станция дает три неизвестных ($\delta\varphi$, $\delta\lambda$, $\delta\rho$); каждое затмение дает две неизвестные поправки в координаты Луны ($\delta\alpha_M$, $\delta\delta_M$) и две в координаты Солнца ($\delta\alpha_S$, $\delta\delta_S$). Остальные поправки (δk_M, $\delta\pi_M$, δk_S, $\delta\pi_S$) являются постоянными для любого числа затмений. Поэтому, если число затмений равно e, то общее число неизвестных составит

$$3s+4e+4.$$

Общее число наблюдений четырех контактов равно $4es$, а двух контактов $2es$.

Для установления геодезической связи необходимо иметь минимум два пункта. В этом случае

$$6+4e+4=8e,$$

или $e = 2{,}5$, т. е. необходимо отнаблюдать минимум 10 контактов, что практически невозможно. Однако, если неизвестные поправки к координатам Луны и Солнца определены каким-либо другим способом, например с помощью улучшенных эфемерид, вычисленных для данного затмения, и если нам достаточно получить поправки к наблюденным широте и долготе, пренебрегая поправкой к высоте, то приведенное выше уравнение преобразуется к виду $4 = 8e$; следовательно, $e = 0{,}5$, т. е. на каждой станции достаточно отнаблюдать два контакта.

Улучшение эфемерид — это регулярная процедура, которая уже выполнялась несколько раз, например Зундманом для затмения 9 июля 1945 г. и Хирвоненом для затмения 20 мая 1947 г.

Метод вычислений, подобный только что описанному, предложен Гольдстейном, Маттингли и Хейденом в связи с затмением 25 февраля 1952 г., причем момент середины затмения и продолжительность всего затмения определялись фотометрическим методом (сравнения интенсивности света; см. разд. 1.6.1.3).

1.5.2.2. Использование затмений в случае, когда наблюдаются относительные полярные координаты оси тени

Как будет видно ниже, при фотографировании затмения можно определить по снимкам относительные полярные координаты центра тени m и M по отношению к наблюдателю. С помощью формул (1.27) можно предвычислить эти же величины на момент контакта. Обозначим разности между предвычисленными и измеренными координатами через δm и δM соответственно.

Дифференцируя уравнение (1.27), мы получим

$$\begin{aligned} \delta m \sin M + \delta M m \cos M &= \delta\,(x-\xi), \\ \delta m \cos M - \delta M m \sin M &= \delta\,(y-\eta). \end{aligned} \qquad (1.64)$$

Приращения $\delta\,(x - \xi)$ и $\delta\,(y - \eta)$ могут быть вычислены с помощью формул (1.12) и (1.13). Выражения для них будут такие:

$$\delta\,(x-\xi) = \bar{q}\delta\varphi + \bar{p}\delta\lambda + o\Delta\alpha - \sin M\delta k_M,$$

$$\delta\,(y-\eta) = \bar{s}\delta\varphi + \bar{r}\delta\lambda + \bar{o}\Delta\delta - \cos M\delta k_M,$$

причем коэффициенты здесь подобны коэффициентам уравнения (1.65). Учитывая это, из уравнений (1.64) получаем

$$\begin{aligned}\delta m\sin M+\delta Mm\cos M&=\bar{q}\delta\varphi+\bar{p}\delta\lambda+o\Delta\alpha-\sin M\delta k_M,\\ \delta m\cos M-\delta Mm\sin M&=\bar{s}\delta\varphi+\bar{r}\delta\lambda+\bar{o}\Delta\delta-\cos M\delta k_M,\end{aligned}\tag{1.65}$$

где δm и δM —величины, известные из наблюдений; $\delta\varphi$, $\delta\lambda$, δk_M, $\Delta\alpha = \delta\alpha_M - \delta\alpha_S$, $\Delta\delta = \delta\delta_M - \delta\delta_S$ — неизвестные поправки. Коэффициенты здесь равны:

$$\begin{aligned}o&=\cos\delta_M\operatorname{cosec}\pi_M\,10^4\sin 1'',\\ o&=\operatorname{cosec}\pi_M\,10^4\sin 1'',\\ \bar{p}&=\cos\varphi\cos h\,10^6\sin 1'',\\ \bar{q}&=\sin\varphi\sin h\,10^6\sin 1'',\\ \bar{r}&=\cos\varphi\sin d\sin h\,10^6\sin 1'',\\ \bar{s}&=-(\cos\varphi\cos d+\sin\varphi\sin d\cos h)\,10^6\sin 1''.\end{aligned}$$

Используя эти коэффициенты и выражая δm в единицах экваториального радиуса Земли, а δM в градусах, мы получим все неизвестные в секундах дуги.

Для установления геодезической связи необходимо иметь минимум два пункта. Если мы определяем полярные координаты контакта m и M на обоих пунктах, то мы можем написать две системы уравнений вида (1.65), т. е. всего четыре уравнения:

$$\begin{aligned}\delta m_1\sin M_1+\delta M_1m_1\cos M_1&=\bar{q}_1\delta\varphi_1+\bar{p}_1\delta\lambda_1+o\Delta\alpha-\sin M_1\delta k_M,\\ \delta m_1\cos M_1-\delta M_1m_1\sin M_1&=\bar{s}_1\delta\varphi_1+\bar{r}_1\delta\lambda_1+\bar{o}\Delta\delta-\cos M_1\delta k_M,\\ \delta m_2\sin M_2+\delta M_2m_2\cos M_2&=\bar{q}_2\delta\varphi_2+\bar{p}_2\delta\lambda_2+o\Delta\alpha-\sin M_2\delta k_M,\\ \delta m_2\cos M_2-\delta M_2m_2\sin M_2&=\bar{s}_2\delta\varphi_2+\bar{r}_2\delta\lambda_2+\bar{o}\Delta\delta-\cos M_2\delta k_M,\end{aligned}$$

где индексы 1 и 2 соответствуют первому и второму пунктам. Члены $o\Delta\alpha$ и $\bar{o}\Delta\delta$ не имеют индексов, потому что коэффициенты o и $\bar{o}$ не зависят от положения пункта, а величины $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ можно считать постоянными во время затмения. Вычитая первое, а затем второе уравнения из третьего и четвертого, можно исключить $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$. Если поправка δk_M выбирается из улучшенных эфемерид, то мы получаем два уравнения, которые выражают связь между координатами двух пунктов.

Эти окончательные уравнения имеют такой вид:

$$\begin{aligned}\delta\varphi_1&=A+B\delta\varphi_2+C\delta\lambda_2,\\ \delta\lambda_1&=D+E\delta\varphi_2+F\delta\lambda_2.\end{aligned}$$

При этом коэффициенты $A, \ldots, F$ получены в результате преобразований, описанных выше.

Наблюдение второго контакта дает в результате вторую систему уравнений. Из этих четырех уравнений можно найти четыре неизвестных.

1.5.3. Использование покрытий при определении экваториального радиуса Земли и параллакса Луны

Теория этого метода, авторами которой являются О'Киф и Андерсон, состоит в преобразовании уравнения погрешностей, описанного в разд. 1.5.1.1.

Момент покрытия фиксируется, а расстояние между наблюдателем и центром тени Δ вычисляется с помощью формулы (1.15):

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

После этого вычисляется расстояние между наблюдателем и границей тени

$$\delta\sigma = \Delta - k_M, \tag{1.66}$$

которое считается измеренной величиной. Вместо выражения (1.58) мы получим уравнение погрешностей вида

$$\delta\sigma = b_1\delta u + b_2\delta v + b_3\delta w + b_4\delta\alpha_M + b_5\delta\delta_M + b_6\delta r_M + b_7\delta k_M. \tag{1.67}$$

Коэффициенты $b_1, \ldots, b_7$ получены путем суммирования дифференциальных коэффициентов в производных подобно тому, как это было сделано в разд. 1.5.1.1. Эти коэффициенты равны:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\sin h_{*G} \sin Q + \sin \delta_* \cos h_{*G} \cos Q,\\
b_2 &= -\cos h_{*G} \sin Q - \sin \delta_* \sin h_{*G} \cos Q,\\
b_3 &= -\cos \delta_* \cos Q,\\
b_4 &= r_M \cos \delta_M \sin Q,\\
b_5 &= r_M \cos Q,\\
b_6 &= \frac{x \sin Q + y \cos Q}{r_M},\\
b_7 &= +1.
\end{aligned}$$

Неизвестные δu, δv и δw в уравнении (1.67) являются поправками к прямоугольным геоцентрическим координатам наблюдателя, вычисляемым по формулам:

$$\begin{aligned} u &= \rho\cos\varphi'\cos\lambda = (N+H)\cos\varphi\cos\lambda, \\ v &= \rho\cos\varphi'\sin\lambda = (N+H)\cos\varphi\sin\lambda, \\ w &= \rho\sin\varphi' = [N(1-e^2)+H]\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Поправки δu, δv и δw для вычислений в определенной системе триангуляции могут считаться постоянными. Другие поправки в уравнении (1.67) рассматривались раньше.

При наблюдении в нескольких местах обыкновенного покрытия звезды величины h_{*G}, x и y изменяются заметно, а величины r_M, δ_M и δ_* изменяются лишь незначительно. Поэтому, если наблюдения проводятся *на пунктах, расположенных вдоль изогоны*, то величина

$$U = b_3\delta w + b_4\delta\alpha_M + b_5\delta\delta_M + b_7\delta k_M \tag{1.69}$$

является постоянной при условии, что δw, $\delta\alpha_M$, $\delta\delta_M$ и δk_M остаются постоянными во время покрытия. О постоянстве поправки δw упоминалось раньше; поправки к координатам Луны $\delta\alpha_M$ и $\delta\delta_M$ почти постоянны для одного покрытия. Величина δk_M будет постоянной, если пренебречь влиянием либрации на радиус Луны в той точке лунного края, где и происходит покрытие. Хотя это влияние и существует, все же считается, что δk_M также постоянная величина.

При всех этих допущениях уравнение (1.67) примет вид

$$\delta\sigma = b_1\delta u + b_2\delta v + b_6\delta r_M + U. \tag{1.70}$$

Можно показать, что каждая из этих трех поправок в свою очередь зависит от поправок экваториального радиуса Земли δa, геодезической широты $\delta\varphi$ и долготы $\delta\lambda$ и горизонтального параллакса Луны $\delta\pi_M$. Соответствующие формулы будут иметь вид

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta a\frac{u}{a} - \delta\lambda v - \delta\varphi u \operatorname{tg}\varphi, \\ \delta v &= \delta a\frac{v}{a} + \delta\lambda u - \delta\varphi v \operatorname{tg}\varphi, \\ \delta r_M &= \delta a \operatorname{cosec}\pi_M + \delta\pi_M a \operatorname{ctg}\pi_M \operatorname{cosec}\pi_M. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Также можно показать, что все члены этих уравнений, за исключением первых, с достаточной точностью являются постоянными для данной триангуляционной системы. О'Киф и Андерсон вычислили эти постоянные для территории США, подставив в уравнение (1.71) координаты пункта Мидс-Ренч ($\varphi =$

$$= 39°13'26'',686;\ \lambda = -98°32'30'',506;\ H = 0):$$

$$\delta\varphi = -1'',2;\quad \delta\lambda = -0'',5.$$

Второй член в третьем уравнении вычислялся по формуле

Ламберта для динамического параллакса

$$\delta\pi_M = \frac{\operatorname{tg}\pi_M}{3a}\,\delta a + \frac{\operatorname{tg}\pi_M}{3\gamma_e}\,\delta\gamma_e - \frac{\operatorname{tg}\pi_M}{3\frac{1}{f}\left(\frac{1}{f}-1\right)}\,\delta\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{\operatorname{tg}\pi_M}{\frac{3}{\mu}\left(\frac{1}{\mu}+1\right)}\,\delta\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

где γ_e — среднее экваториальное ускорение силы тяжести, f — сжатие эллипсоида, μ — масса Луны в единицах земной массы. Используя известные значения

$$a = 6\,378\,388 \text{ м},$$
$$f = 1/297{,}0,$$
$$\gamma_e = 978{,}052 \text{ см/сек}^2,$$
$$\mu = 1/81{,}53,$$
$$\pi_M = 3422'',682,$$

Ламберт получил следующее уравнение:

$$\delta\pi_M = 0{,}179\delta a - 1{,}17\delta\gamma_e - 0{,}0310\delta\left(\frac{1}{f}\right) + 0{,}170\delta\left(\frac{1}{\mu}\right);$$

причем, если δa выражено в километрах и $\delta\gamma_e$ — в *см/сек*^{2}, то $\delta\pi_M$ получится в секундах дуги.

Установив наиболее вероятные значения трех последних членов этого уравнения, О'Киф и Андерсон [84] получили выражение

$$\delta\pi_M = \frac{\operatorname{tg}\pi_M}{3a\sin 1''}\,\delta a - 0{,}025. \tag{1.72}$$

После подстановок уравнения (1.71) примут вид

$$\delta u = -0{,}1151\delta a - 14{,}94 \text{ м},$$
$$\delta v = -0{,}767\delta a - 21{,}45 \text{ м},$$
$$\delta r_M = \frac{2}{3}\,\delta a \operatorname{cosec}\pi_M + 0{,}7731 \operatorname{ctg}\pi_M \operatorname{cosec}\pi_M.$$

Подставив эти выражения в (1.70), мы получим

$$\delta\sigma' = B\delta a + U, \tag{1.73}$$

где

$$\delta\sigma' = \delta\sigma + 14{,}94b_1 + 21{,}45b_2 - 0{,}7731 \operatorname{ctg}\pi_M \operatorname{cosec}\pi_M b_6,$$
$$B = -0{,}1151b_1 - 0{,}767b_2 + \frac{2}{3}\,\frac{x\sin Q + y\cos Q}{a}.$$

Для решения используется уравнение (1.73). Решив его относительно δa, можно вычислить $\delta\pi_M$ по формуле (1.72). Очевидно, в триангуляционной системе, имеющей другие параметры, постоянные в уравнении (1.73) будут иметь другие значения.

О'Киф и Андерсон, используя девять станций и четыре покрытия на юго-западе США в 1949—1950 гг., получили следующие результаты:

$$a = 6\,378\,448 \pm 169 \text{ м},$$
$$\pi_M = 3422'',686 \pm 0'',03.$$

Принимая экваториальную полуось Международного эллипсоида неизменной ($\delta a = 0$) и считая, что $\delta\varphi = \delta\lambda = \delta\alpha_M = \delta\delta_M = \delta k_M = 0$, из уравнения (1.67) мы найдем

$$\delta\sigma = b_6 \delta r_M.$$

При использовании этого типа уравнений погрешностей получается

$$r_M = 384\,407,6 \pm 4,7 \text{ км},$$

что с помощью формулы

$$\sin \pi_M = \frac{a}{r_M}$$

дает

$$\pi_M = 3422'',662 \pm 0'',042.$$

Как видно по расхождениям этих результатов, значения динамического и геометрического параллаксов Луны совпадают.

В вычислениях, приведенных выше, превышения станций над Международным эллипсоидом определялись по карте геоида Хайфорда (U. S. Coast and Geodetic Survey, Special Publication № 82, 1909) для эллипсоида Кларка 1866 г. с учетом расстояний между эллипсоидом Кларка и Международным эллипсоидом, считая, что они касаются в пункте Мидс-Ренч. Используя свою карту геоида для территории Северной Америки (Bulletin Géodésique, № 57, 1960), Фишер вновь вычислила указанные параметры. Считая два эллипсоида касающимися в исходном пункте Мидс-Ренч и используя уравнения погрешностей в виде $\delta\sigma = b_6 \delta r_M$, она получила такие результаты:

$$r_M = 384\,404,1 \text{ км};$$
$$\pi_M = 3422'',693.$$

При использовании ее «Астрономо-геодезических мировых данных» (Journal of Geophysical Research, vol. 65, № 7, 1960) ($1/f = 298,3$, $a = 6\,378\,166$ м) получаются такие значения:

$$r_M = 384\,400,9 \text{ км},$$
$$\pi_M = 3422'',603.$$

Эти последние результаты очень хорошо согласуются с современными радиолокационными измерениями расстояния до Луны и со значением динамического параллакса.

Наблюдения, использованные в этих вычислениях, были выполнены фотоэлектрическим методом, который описывается ниже. Метод вычисления точек изолимбы в основном такой же, как метод, описанный в разд. 1.4.4.

1.6. НАБЛЮДЕНИЯ СОЛНЕЧНЫХ ЗАТМЕНИЙ И ПОКРЫТИЙ

1.6.1. Наблюдение солнечных затмений

Как мы уже отмечали, солнечное затмение — это довольно редкое явление и к тому же его можно наблюдать лишь при хороших погодных условиях. По этой причине и потому, что вместо затмения можно применить другие, более эффективные (с геодезической точки зрения) методы, солнечные затмения теперь имеют малое значение; в связи с этим мы рассмотрим только принципы методики наблюдений.

1.6.1.1. Кинематографический метод

Наиболее широко применяемый метод наблюдения солнечных затмений для геодезических целей — это непосредственная киносъемка затмения с регистрацией времени на киноленте. Предельная точность фиксирования времени определяется нечеткостью края диска Солнца и геометрической неправильностью диска Луны. Разность уровней порядка 5000 *м* между вершиной горы и прилежащей долиной на Луне, если в этой точке наблюдался контакт, может изменить истинный момент на несколько секунд. Однако если пункты наблюдений располагаются в полосе полной фазы затмения, то видимый лунный рельеф будет одинаков на всех этих пунктах. Таким образом, явление, известное как «четки Бейли», вызываемое прохождением солнечного света через впадины лунного рельефа во время внутренних контактов полного или кольцеобразного затмения, будет наблюдаться на всех пунктах. Многие из этих четок могут быть отождествлены в отдельности, так что получится несколько контактов вместо двух.

Впервые киносъемку затмения Солнца провели Да Коста Лобо, Шорр, Вилларт и другие 17 апреля 1912 г. В этих экспериментах время фиксировалось либо путем закрывания объектива в некоторые определенные моменты времени, либо путем одновременного фотографирования циферблата хронометра. Как известно, образование четок Бейли не использовалось ни в каких целях. Наоборот, четки Бейли часто считались вредным явлением, которое исключало возможность точного определения момента контакта. Из-за неровности профиля Луны киносъемка такого рода применялась лишь для приближенного определения моментов начала и конца затмения.

Мысль о наблюдении появления и исчезновения четок Бейли, т. е. контактов диска Солнца с фактическим краем Луны, принадлежит польскому астроному Банахевичу. Он и его коллеги Кордилевский и Андрушевский наблюдали полное солнечное затмение 29 июня 1929 г., производя киносъемку образования четок Бейли незадолго до и сразу же после полной фазы. Они работали на трех пунктах в Лапландии. Целью их работы было определение взаимного положения Луны и Солнца и разности их радиусов. Фиксирование времени осуществлялось с помощью хронографа с двумя перьями. Перья были соединены соответственно с контактным хронометром и механизмом заводки кинокамеры, дающим два контакта при каждом обороте. Скорость вращения этого механизма, задаваемая полусекундным метрономом, равнялась двум оборотам в секунду. Для контроля хода хронометра принимались сигналы времени с помощью длинноволновой радиоаппаратуры по методу «глаз — ухо». Кинокамера (фокусное расстояние 1200 *мм*, диаметр действующего отверстия 80 *мм*) монтировалась на горизонтальной установке и могла вращаться по высоте и по азимуту, сопровождая Солнце во время затмения. Используя описанный метод, Кордилевский получил моменты внутренних контактов с точностью $\pm 0^s,074$. Радиус Солнца получился равным $959'',70 \pm 0'',05$ [61].

В дальнейшем этот метод был разработан директором Финского геодезического института Бонсдорфом [22—24] в связи с полным солнечным затмением 9 июля 1945 г. Сигналы времени принимались камерой звукозаписи одновременно с работой обычной кинокамеры, что достигалось с помощью синхронных моторов. Бесшумная кинокамера (фокусное расстояние 2050 *мм*, диаметр действующего отверстия 130 *мм*), которой фотографировалось затмение, была установлена в экваториальной системе координат, что позволяло сопровождать Солнце по прямому восхождению. Частично для синхронной работы камер, но главным образом для отождествления точек на киноленте и ленте магнитофона использовалась обычная хлопушка.

Она состоит из двух деревянных брусков, соединенных шарнирно на одном конце и ударяющихся друг о друга. Эта операция фотографируется кинокамерой, а хлопок записывается звуковой камерой на магнитную ленту.

Основная идея метода Бонсдорфа заключалась в том, чтобы на всех кадрах незадолго до и сразу после внутренних контактов измерялись размеры солнечного серпа, а соответствующие моменты экспозиции определялись с помощью маркированных сигналов времени. Моменты контактов получались с учетом топографии лунного профиля.

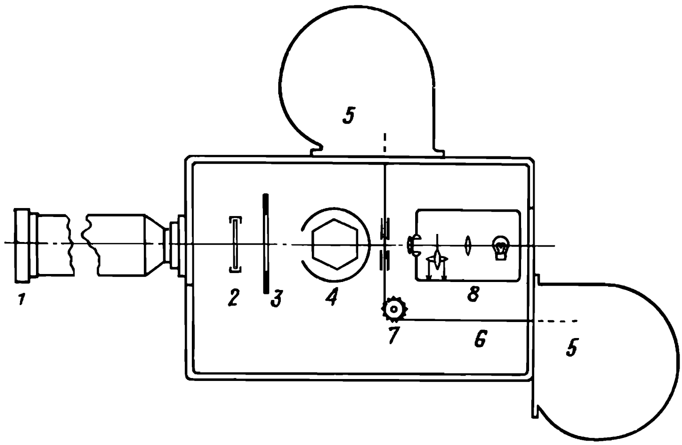
Затмение наблюдалось на двух главных и нескольких вспомогательных пунктах в Финляндии. Методика наблюдений и вычислений опубликована Хирвоненом, Калайей и Песоненом в 1955 г. [55, 59, 88]. Разность моментов контактов, вычисленная по этому методу, была получена с точностью $\pm 0^s,06$ для внешних контактов и $\pm 0^s,024$ для внутренних контактов, что соответствует примерно ± 60 и ± 24 *м* в относительном положении пунктов. Это же затмение наблюдалось в Швеции Линдбладом и в Центральной Канаде Хольбахом; таким образом впервые была установлена связь через океан между Американским и Европейским континентами.

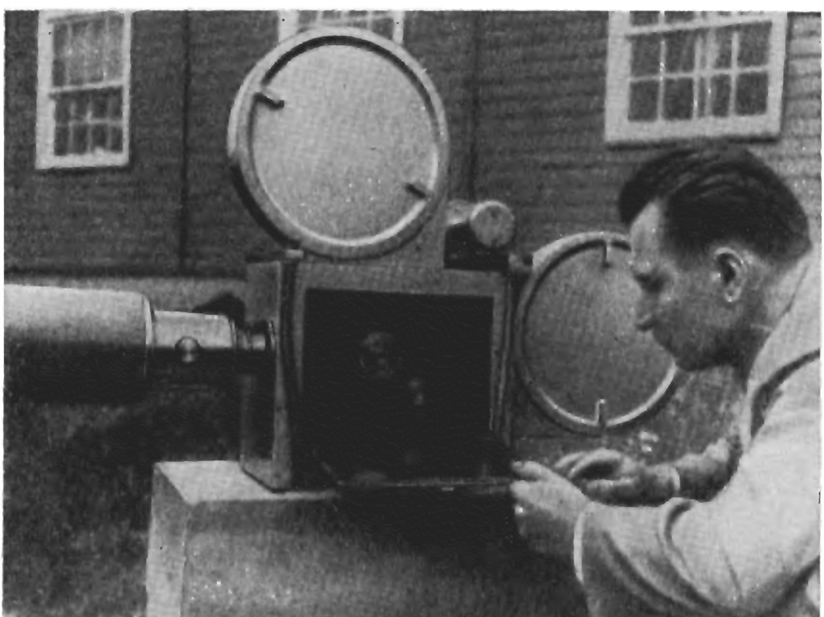
Ко времени полного солнечного затмения 20 мая 1947 г. аппаратура была несколько усовершенствована. Полоса полной фазы проходила через Южную Америку и Западную и Центральную Африку. Свои экспедиции направили Аргентина, Финляндия, Швеция и США. Финские экспедиции в Бразилии (Хирвонен) и на Золотом Берегу (Куккамяки) и шведская экспедиция в Африке получили вполне удовлетворительные результаты; таким образом была установлена связь между Южной Америкой и Африкой. Как и в 1945 г., здесь использовался метод Бонсдорфа, однако аппаратура была значительно изменена. Новую кинокамеру (фокусное расстояние 2050 *мм*, диаметр действующего отверстия 130 *мм*) сконструировали Куккамяки и Пулккила. Основной особенностью этой камеры было то, что кинолента в ней передвигалась с постоянной скоростью и что изображение следовало за движущейся лентой благодаря вращающейся шестигранной призме (рис. 1.14).

Для записи радиосигналов времени и ударов хронометра в камеру были вмонтированы два специальных механизма. В этих приборах размер клинообразной щели регулировался электромагнитом, на который поступали импульсы от радиоприемника или от хронометра. Изображение щели проецировалось с обратной стороны кинопленки на один из ее краев вблизи перфорационных отверстий. Радиосигналы записывались на один край пленки, а удары хронометра — на другой (рис. 1.15).

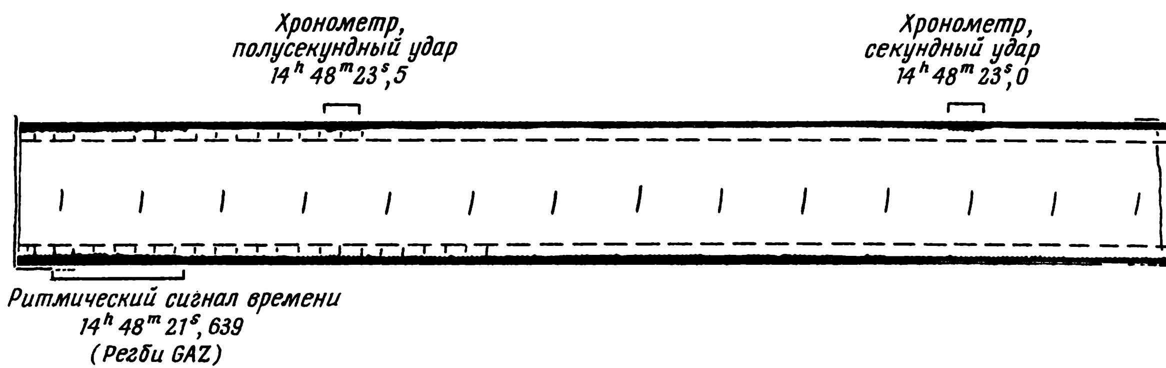
Кроме этих усовершенствований, был сконструирован целостат для слежения за движением Солнца в процессе фотографирования. Целостат состоит из двух идентичных зеркал. Ось одного зеркала устанавливается параллельно оси вращения Земли, а другого — отвесно. Первое зеркало следует за Солнцем, в то время как второе используется для отражения солнечных лучей в объектив. Методика наблюдений и обработки кинопленки совместно с результатами вычислений была описана Куккамяки и Хирвоненом в 1954 г. [56]. Вероятная ошибка расстояния между пунктами наблюдений по центральной линии на фундаментальной плоскости составила ± 94 *м*. Профиль Луны определялся по карте Хайна (см. разд. 1.7.1.1), которая не является достаточно точной.

Полное солнечное затмение 30 июня 1954 г. было многообещающим с точки зрения его геодезического применения. Полоса





Р и с. 1.14. Схема и фотография модифицированной камеры Бонсдорфа. *1* — телеобъектив, *2* — цветной фильтр, *3* — центральный затвор, *4* — стеклянная призма, *5* — кассеты, *6* — пленка, *7* — зубчатое колесо, *8* — затвор и механизм для записи времени.



Р и с. 1.15. Серп Солнца за 8 *сек* до второго контакта затмения 20 мая 1947 г. по наблюдениям на Золотом Берегу.

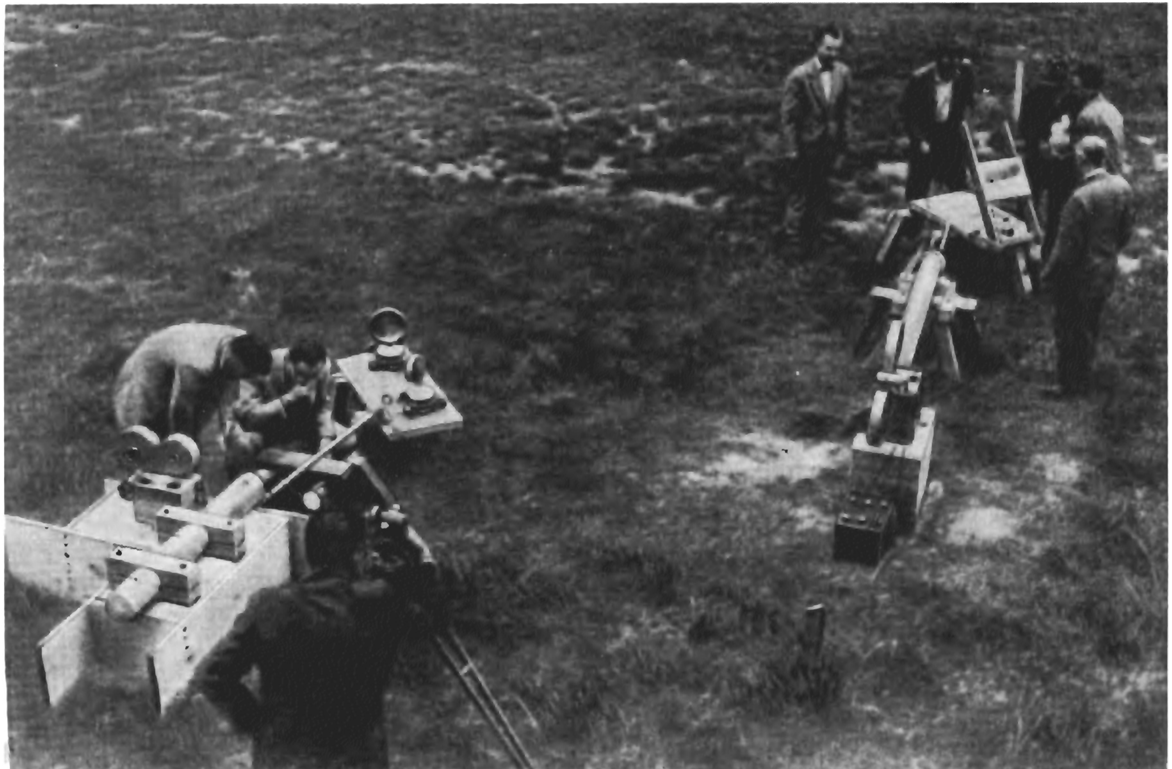


Рис. 1.16. Подготовка сотрудников Университета штата Огайо к экспедиции для наблюдения солнечного затмения 1954 г.

полной фазы проходила через Канаду, Гренландию, Исландию, Скандинавию, Советский Союз, Иран и Пакистан. Казалось бы, это идеальный случай для определения расстояния между Америкой и Евразией. Поскольку следующее полное затмение, видимое на обоих этих континентах, произойдет лишь 14 июня 2151 г., то некоторые европейские страны объединились с обсерваториями Соединенных Штатов. Швеция создала на своей территории три группы наблюдателей. Финляндия послала одну группу в Швецию, а другую в Норвегию. Проект Соединенных Штатов включал четыре группы под общим руководством Хейсканена из университета штата Огайо (рис. 1.16). Эти группы были посланы в Онтарио (Дойль), на Лабрадор (Хальбах), в Гренландию (Куккамяки) и Иран (Хайнек). Как выяснилось позже, лишь одна экспедиция работала при хорошей погоде, у иных небо было частично закрыто облаками, в то время как у остальных экспедиций была сплошная облачность. Таким образом, эти экспедиции не выполнили свои задачи. Что касается оборудования, то десять из одиннадцати экспедиций имели кинокамеры, подобные тем, которые использовала финская экспедиция в 1947 г. Единственным отличием было то, что американские группы заменили неудачный вариант механизма регистрации сигналов времени более простым, сконструированным Хальбахом. Результаты работы всех экспедиций университета штата Огайо и сообщения отдельных экспедиций, включая инструкции для использования кинокамер, были опубликованы Хейсканеном в 1955 г. [47].

Другой метод фиксирования времени при затмениях, о котором мы должны здесь упомянуть, принадлежит Аткинсону. Он получает момент середины затмения, измеряя позиционные углы линий, соединяющих рога солнечного серпа. Для этого производится киносъемка затмения, которая начинается незадолго до 2-го контакта и кончается сразу же после 3-го. За несколько минут, в течение которых длится полная фаза затмения, получается несколько тысяч измерений позиционного угла, так как в это время он изменяется быстрее всего. Точность этого метода, подобно методу Бонсдорфа, зависит от того, насколько хорошо известен профиль лунного края. Точность, достигнутая самим Аткинсоном, равнялась $\pm 0^s,05$.

1.6.1.2. Спектральная киносъемка затмений

Солнечный край представляет собой почти окружность, однако изображение его нечеткое. Поэтому определение момента контакта является не только геометрической, но и в некоторой степени фотометрической задачей. Нечеткость края солнечного диска вызывает некоторые трудности при наблюдениях. Чтобы

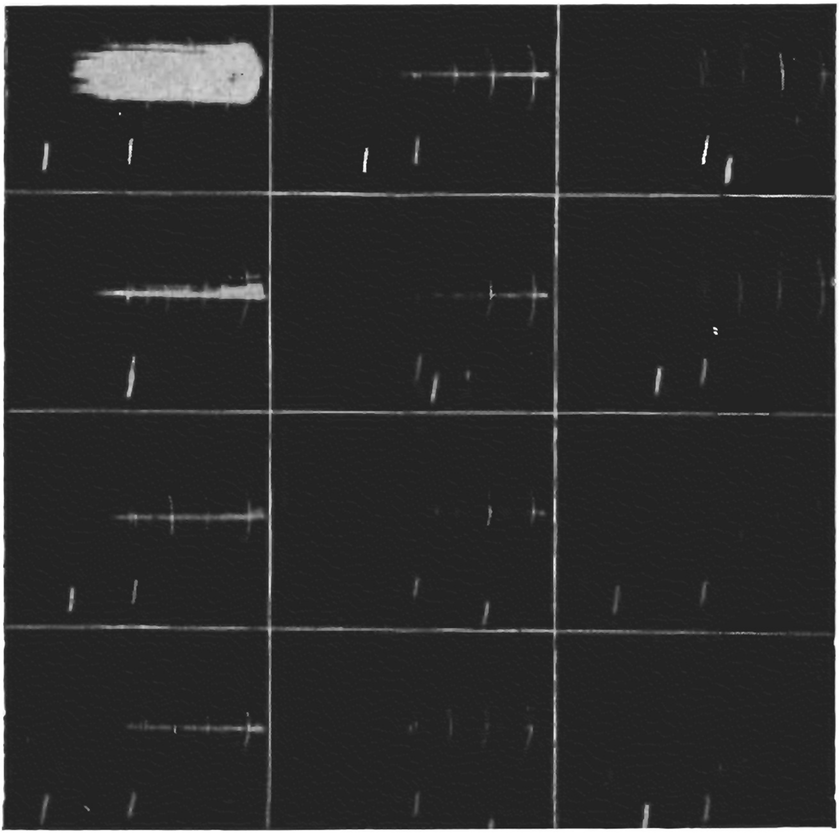


Рис. 1.17. Спектрокинематографические снимки затмения.

устранить этот источник ошибок, Линдблад предложил производить кинематографическую регистрацию не самих краев Солнца, а его спектра во время внутренних контактов (рис. 1.17). Во время внутреннего контакта спектр Солнца образуется двумя составляющими: непрерывным спектром видимой части солнечной поверхности (четки Бейли) и линейчатым спектром излучения той части солнечной атмосферы, в районе которой только что наступило затмение. В этот критический момент переход от непрерывного спектра к линейчатому или наоборот происходит очень быстро. Однако это явление не мгновенно, и поэтому необходимо определять момент контакта каким-нибудь подходящим способом, например из соотношения интенсивностей отдельной эмиссионной линии и соответствующего участка непрерывного спектра. Таким образом, шкала интенсивности должна быть нанесена на кинопленку до начала съемок. Очень важно также зарегистрировать оба внутренних контакта на каждом пункте, определяя моменты контактов одинаковым способом и образуя из них среднее. В таком случае расхождения в результатах спектрофотометрических измерений моментов контактов, возникающие из-за возможного различия используемой аппаратуры, будут исключены.

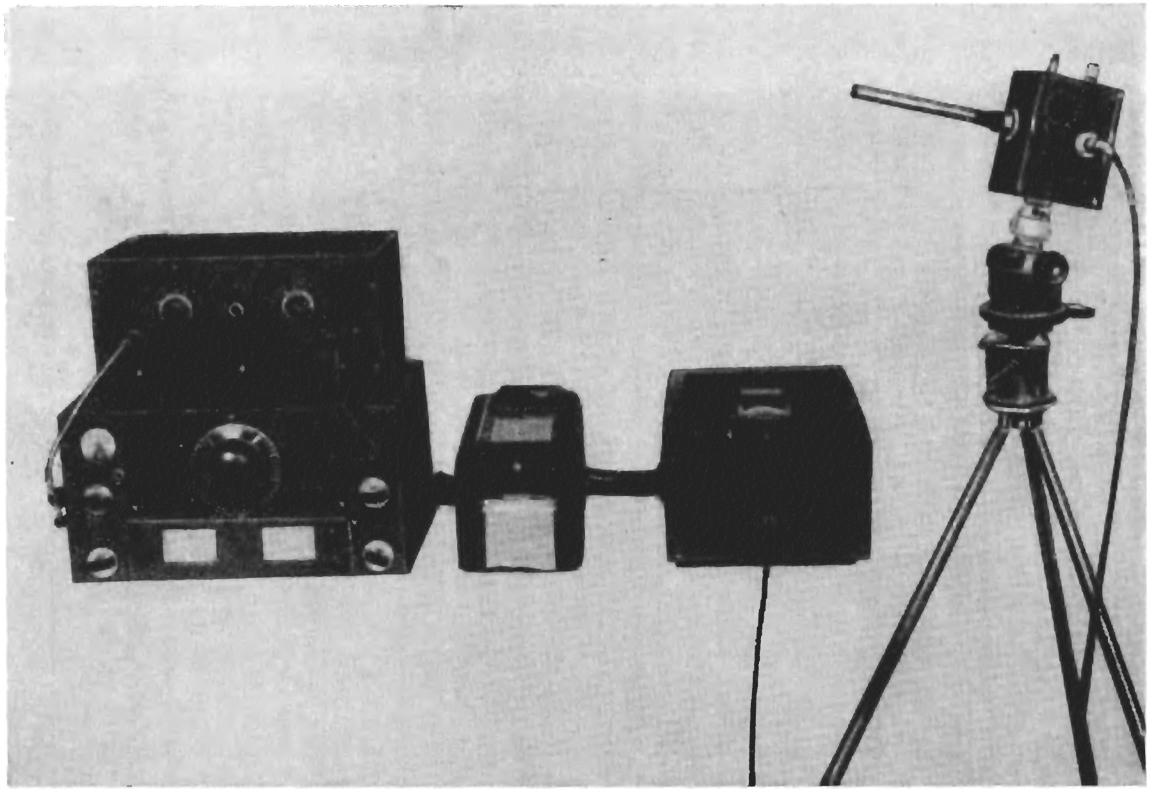
При этом должна приниматься во внимание топография лунного края точно так же, как и в кинематографическом методе. Неровности лунного края, обнаруживаемые на спектрофотометрических снимках, и соответствующие им изменения спектра могут быть сопоставлены друг с другом. В этом смысле данный метод не отличается от кинематографического метода. Однако он имеет два преимущества: во-первых, учитывается размытость края солнечного диска; во-вторых, значительно уменьшается отрицательное влияние неравномерной плотности земной атмосферы.

Камера Линдблада — это обычная кинокамера (фокусное расстояние 500 *мм*, диаметр действующего отверстия 62,5 *мм*) с объективной призмой, имеющей угол преломления 35° и помещаемой перед объективом. Метод Линдблада использовался обеими станциями в Финляндии и шведскими экспедициями в 1945 г., а также шведскими группами на Золотом Берегу и в Бразилии в 1947 г. Такой камерой были оснащены все четыре группы университета штата Огайо в 1954 г. Более подробно с этим вопросом можно ознакомиться по работам Линдблада [71], Кристенсена [62] и Хейсканена [47].

1.6.1.3. Фотометрический и другие методы

Для определения моментов внутренних контактов во время полного солнечного затмения можно использовать фотоэлектрические измерения интенсивности света солнечного серпа вместе с точными сигналами времени.

В прошлом уже выполнялось несколько таких экспериментов большей частью для исследования самого метода, главными преимуществами которого являются простота и портативность используемой аппаратуры и относительная независимость от погодных условий. Вероятно, первое наблюдение частного солнечного затмения фотометрическим методом было выполнено Ричардсом на станции Вудс-Хоул в штате Массачусетс в 1932 г. Он использовал фотоэлемент, направив его на Солнце. Отсчеты брались через 15-секундные промежутки времени незадолго до начала, во время и после полной фазы затмения. По полученной кривой яркости он определил время минимума освещенности с точностью $\pm 0^s,3$ [92].



Р и с. 1.18. Оборудование для фотометрических наблюдений затмений.

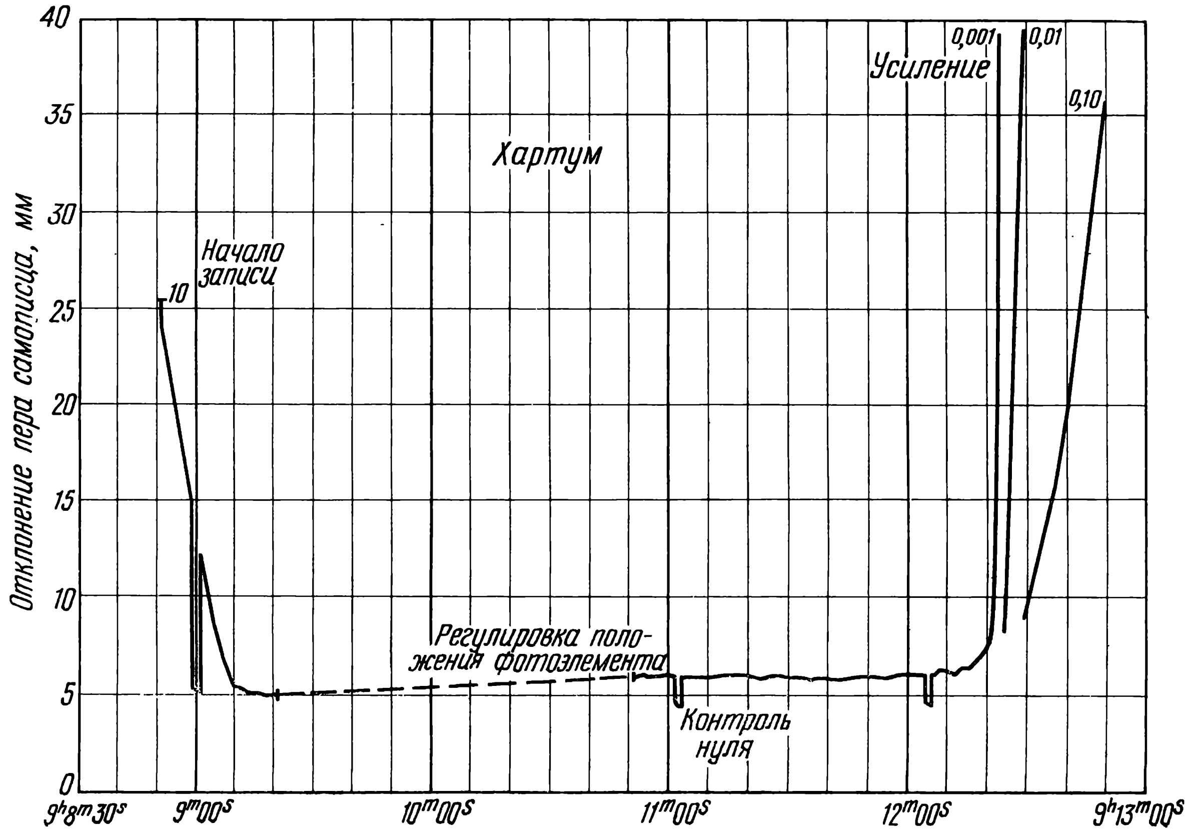


Рис. 1.19. Кривая изменения интенсивности света по наблюдениям в Хартуме.

Кроме Ричардса, некоторые другие эксперименты проводили Берджесс в 1925 г., Халберт в 1947 г. и Хаген во время экспедиции на Алеутские острова в 1950 г. С геодезической точки зрения наиболее важными экспедициями, использовавшими при наблюдении солнечного затмения фотометры, были объединенные экспедиции Джорджтаунского университета и ВВС США под руководством Хейдена и Шауэра в 1952 г. Полоса затмения 25 февраля шла от западного побережья Африки через Саудовскую Аравию в Иран. Были выбраны шесть пунктов наблюдений: два во Французской Экваториальной Африке, два в Судане и два в Саудовской Аравии. Все пункты, кроме одного, находились в полосе полной фазы протяженностью 5200 *км*. Оборудование каждой станции состояло из фотоэлектрического устройства на экваториальной установке, позволяющего улавливать минимальную интенсивность света во время полного затмения, усилителя и самописца для записи на одной ленте изменяющейся интенсивности света и сигналов времени, радиоприемника со звуковым фильтром для приема сигналов времени и портативного генератора для выработки электроэнергии (рис. 1.18). Фотометр был направлен на Солнце и передвигался вслед за ним с помощью ручного привода. По данным, взятым с ленты самописца, была построена кривая яркости (рис. 1.19), а по ее оси симметрии способом наименьших квадратов был вычислен момент середины полной фазы. Вероятная ошибка момента середины полной фазы равнялась $\pm 0^s,04$. Полное описание выполненных работ и вычислений было опубликовано отдельно Гольдстейном [43] и Шауэром [94] в 1952 г.

Существует несколько других методов, имеющих меньшее значение: комбинированный фотометрический и кинематографический метод Торрохи; «внефокальный» метод Плачека и его сотрудников; «косвенный» метод Панайи; метод, примененный Брейном и его сотрудниками в 1954 г. в Норвегии, который основан на одновременной регистрации интенсивности солнечного света широко- и узкоугольным фотометрами: метод Зандига, основанный на одновременной регистрации силы света двумя равноугольными фотометрами. Описание этих методов не входит в цели данной книги, и читатель для дальнейшего изучения отсылается к библиографии.

1.6.2. Наблюдения покрытий

1.6.2.1. Оптические методы

При наблюдении покрытий необходима лишь регистрация моментов исчезновения и появления звезды.

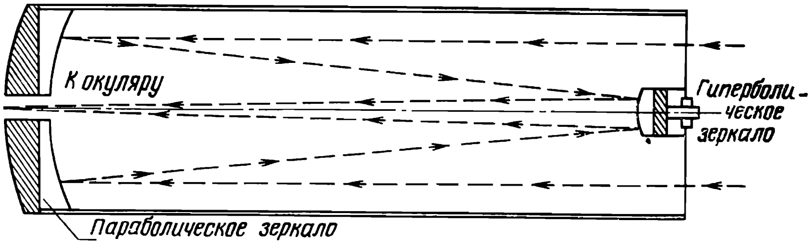
При визуальных наблюдениях невозможно достичь теоретической точности этого метода. В лучшем случае записанный момент явления получается не точнее $0^s,2$ плюс влияние личной разности. Особенно трудно фиксировать момент появления звезды на темном крае Луны. Кажется, что звезда выпрыгивает из-за Луны и застает наблюдателя врасплох, т. е. наблюдатель видит, что звезда появилась, а он ее не зафиксировал. Обычно это бывает в том случае, когда покрывается слабая звезда.

Использование фотографии при наблюдениях могло бы устранить эффект внезапности, упомянутый выше. Такие попытки предпринимались в Гарвардском университете и во Франции, однако без ощутимого успеха. Основной причиной неудачи является неэффективность фотографии для накопления световой энергии при съемке с малыми выдержками.

1.6.2.2. Фотоэлектрические методы

Наиболее эффективным прибором для наблюдения покрытий звезд является фотоэлемент. Фотоэлемент в соединении с телескопом и прибором для точной регистрации моментов времени дает возможность фиксировать покрытия звезд до девятой величины с точностью $\pm\,0^s,01$. Этот метод несколько раз испытывался в различных экспедициях, которыми руководила Картографическая служба армии США, в Соединенных Штатах Америки, в Марокко и на Азорских о-вах в 1949—1951 гг. Целью первой экспедиции в 1949—1950 гг., которой руководил О'Киф, было определение экваториального радиуса Земли и расстояния до Луны. Теория метода и полученные результаты были рассмотрены в разд. 1.5.3. Наблюдались покрытия четырех звезд на девяти станциях, расположенных в юго-западной части США на четырех изогонах. Каждая станция была оборудована 12-дюймовым рефлектором Кассегрена (светосила 1:4) на экваториальной установке (рис. 1.20). Рефлектор был соединен с фотоэлектрической системой, состоящей из фотоэлемента, усилителя и самописца. Очень небольшая диафрагма, установленная в фокальной плоскости телескопа, позволяла свету от звезды попадать на фотоэлемент, тогда как свет Луны она затемняла. Показания усилителя фотоэлемента записывались осциллографом-самописцем вместе с сигналами времени. Вся эта система была сконструирована Мирсом с помощью Уитфорда из университета штата Висконсин. Инструменты были испытаны летом 1949 г. На рис. 1.21 показана блок-схема оборудования для наблюдения покрытий. Образец записи на ленте самописца дан на рис. 1.22. Верхняя строчка — это запись радиосигналов времени WWV; нижняя строчка — показания фотоэлемента, возрастающие вниз.

Другим важным мероприятием, предпринятым Картографической службой армии США, была Тихоокеанская программа



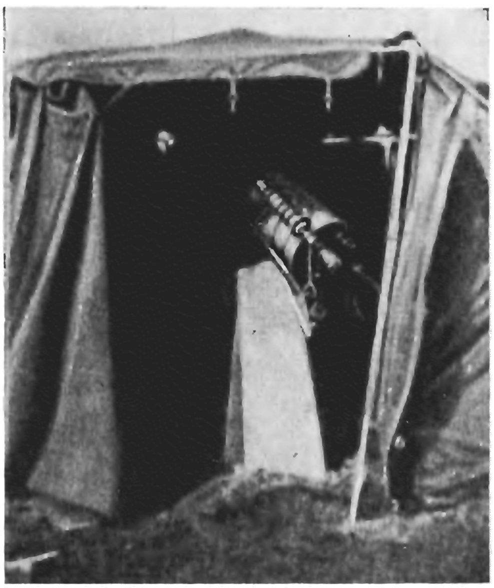


Рис. 1.20. Схема и фотография рефлектора Кассегрена для наблюдения покрытий.

наблюдений покрытий звезд. Покрытия наблюдались попарно на следующих станциях: Маркус — Япония; Уэйк — Япония; Маркус — Филиппины; Палау — Филиппины; Тайвань — Япония; Гуам — Маршаловы о-ва; Мидуэй — Япония; Маркус — Тайвань; Маршаловы о-ва — Тайвань; о-ва Джонстона — Гавайские о-ва и в некоторых других районах. В результате этих наблюдений была установлена прямая связь между Японией, Филиппинами, Окинавой с Гавайскими о-вами и с Соединенными Штатами Америки. Чтобы избежать влияния топографии края лунного диска, станции располагались вдоль соответствующих изогон. Проводится оценка результатов, полученных Occultation Survey Detachment. Часть материалов о связи Филиппин и о-ва Палау из группы Каролинских о-ов была опубликована Хенриксеном с сотрудниками в 1957 г. [50].

Подготовительные работы и исследования начались в Токийской астрономической обсерватории в 1948 г. Первая фотоэлектрическая установка, которая использовалась в проекте Мирса — Уитфорда, была исследована в начале 1950 г. В течение последующих двух лет оборудование вновь исследовалось и усовершенствовалось. Фирма «Ниппон Когаку» изготовила шесть комплектов модифицированного оборудования. Эти инструменты

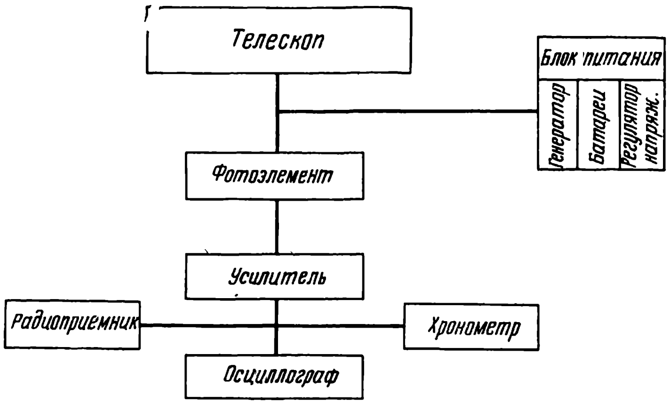


Рис. 1.21. Блок-схема установки для фотоэлектрического метода наблюдений покрытий.

имели портативное стальное основание и были легче по весу (рис. 1.23). Позднее они были дополнены лучшим оборудованием, выпускаемым японской фирмой «Соккиша». Первые практические работы были начаты в 1954 г.

С 1952 г. всей программой руководит Occultation Research Committee. В этот комитет входят японские ученые из Токийской астрономической обсерватории, Токийского университета, Гидрографического управления и Института географических съемок. Этот комитет отвечает за разработку и изготовление оборудования, подбор и обучение персонала, усовершенствование методов вычислений, предварительную обработку наблюдений и общее техническое руководство.

Описание инструментов и организации всех видов работ опубликовали Беннетт [19], Бейер [26] и Пул [90] в 1958 г.

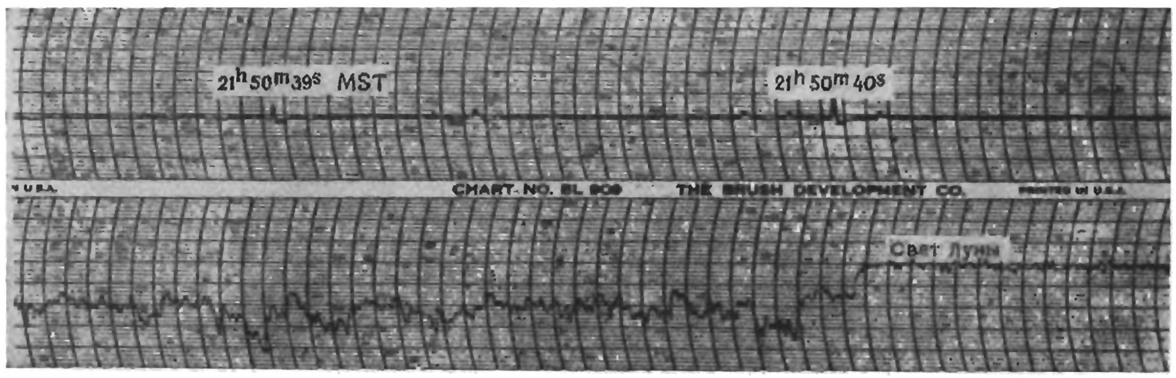


Рис. 1.22. Образец записи на ленту при фотоэлектрических наблюдениях.

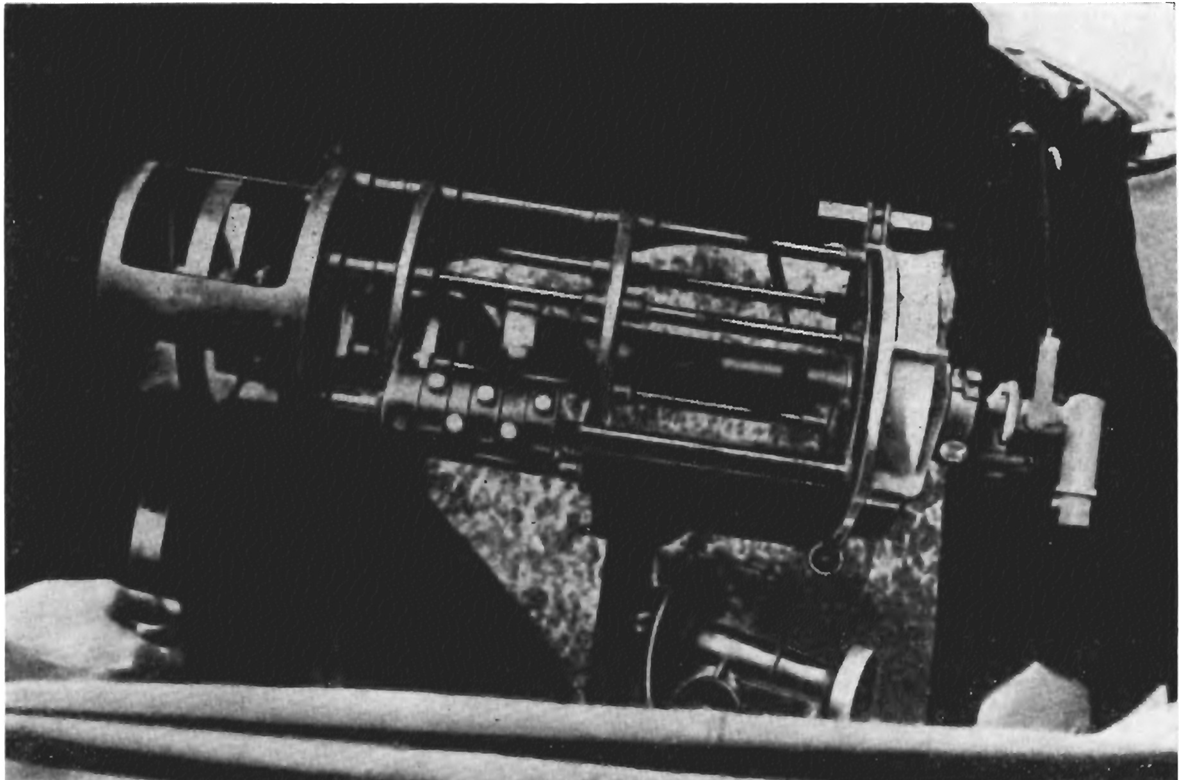


Рис. 1.23. Телескоп фирмы «Ниппон Когаку» для наблюдения покрытий

1.7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1.7.1. Основные причины, влияющие на точность результатов

Точность геодезической информации, получаемой из наблюдений затмений, зависит от того, насколько точно нам известны движения Луны и Солнца и другие параметры, входящие в вычисления, а также от точности самих наблюдений. Первую группу факторов мы рассмотрим здесь, а вторая уже была исследована в разд. 1.6.

1.7.1.1. Топография края лунного диска

Для получения удовлетворительных результатов радиус Луны должен быть известен с точностью до нескольких сот метров. Поскольку край Луны довольно неровен, то диск не может представлять собой круга какого-нибудь радиуса. В зависимости от того, где мы измеряем, возможны различия радиуса порядка 2″, или 6000 *м*: поэтому необходимо знание топографии края всего лунного диска.

Из первых попыток создать карту Луны лучше всех известны и наиболее широко используются карты Хайна. Повторное изучение этих карт показало, однако, что они базировались лишь на нескольких измерениях, сильно отличающихся друг от друга, поэтому для геодезических целей их ценность сомнительна. Веймер также опубликовал карты профилей лунного края, которые, быть может, и точнее, но слишком несистематичны, чтобы ими можно было воспользоваться даже с интерполяцией. Установлено, что карты Хайна содержат ошибки около $\pm 0'',5$, что соответствует ошибкам в положении в 900 *м*. Следует упомянуть также карты Нефедьева.

Новое картографирование краевых зон Луны было выполнено Ваттсом в Военно-морской обсерватории США. Измерено около 500 лунных профилей на нескольких сотнях фотопластинок, полученных на различных обсерваториях; по ним была составлена топографическая карта. Эти улучшенные карты подготовлены для опубликования (см. Astronomical Papers of the Ephemeris, vol. 17). Средняя квадратическая ошибка оценивается в $\pm 0'',07$. Улучшение достигнуто благодаря не только большому числу использованных лунных профилей, но и более тщательной методике измерений. Новые карты показывают неровности лунного края для различных сочетаний либраций. Поправки за рельеф края определяются по изолиниям, проведенным через $0'',2$. Позиционный угол от лунной оси дается в правом верхнем углу каждого листа. Горизонтальный и вертикальный аргументы — это соответственно топоцентрические либрации по долготе и широте. Поправки даны для среднего значения расстояния от Земли до Луны.

Вся эта проблема несколько упрощается в связи с тем, что мы имеем дело лишь с разностями высот. Поэтому влияние лунной топографии может быть сведено к минимуму путем наблюдения на всех пунктах одной и той же части лунного края в случае солнечного затмения либо путем наблюдения покрытий лишь в тех пунктах, в которых звезда скрывается за одной и той же точкой края Луны. Эти пункты, расположенные на изогоне, выбираются так, как описано в разд. 1.4.4. В этом случае учитывается лишь либрация Луны.

1.7.1.2. Либрация

Из-за либрации край Луны не всегда выглядит одинаково. Вследствие этого картина лунного края периодически меняется. Существуют три вида либрации, вызываемые главным образом следующими причинами:

а) эксцентриситетом лунной орбиты и наклоном оси вращения Луны к плоскости орбиты (оптическая либрация);

б) динамическими причинами (физическая или динамическая либрация);

в) вращением наблюдателя вместе с Землей (суточная либрация).

Числовые значения этих либраций различны. Оптическая либрация самая большая, ее максимальное значение около $\pm 8°$; либрация второго вида невелика — порядка $\pm 0°{,}03$: суточная либрация достигает $\pm 1°$.

Вычисление оптической либрации основывается на следующих правилах Кассини:

1. Нисходящий узел лунного экватора совпадает с восходящим узлом орбиты Луны.
2. Наклонение лунного экватора к эклиптике постоянно (1°32′,1).
3. Период вращения Луны равен среднему сидерическому периоду обращения Луны по ее орбите.

Ephemeris содержат геоцентрическую оптическую либрацию по долготе l и по широте b (в виде земной селенографической долготы и широты); позиционный угол C лунной оси (угол, образованный лунным меридианом, проходящим через видимую центральную точку диска и северный полюс Луны, и кругом склонения, проходящим через центральную точку) и физическую либрацию. Табличные значения либраций и позиционных углов оси должны быть приведены к видимым, или топоцентрическим, значениям. Для этой цели могут быть использованы следующие дифференциальные формулы, выведенные Аткинсоном:

$$\Delta l = -\pi'_M \sin(Q - C) \sec b,$$
$$\Delta b = \pi'_M \cos(Q - C),$$
$$\Delta C = \sin(b + \Delta b)\,\Delta l - \pi'_M \sin Q \operatorname{tg} \delta_M,$$

где Q — параллактический угол, а π'_M — топоцентрический параллакс. Они могут быть вычислены по таким формулам:

$$\sin Q = \sin h_M \cos \varphi \operatorname{cosec} z_M,$$
$$\cos Q = \frac{\sin \varphi - \cos z_M \sin \delta_M}{\sin z_M \cos \delta_M},$$
$$\pi'_M = \pi_M (\sin z_M + 0{,}0084 \sin 2z_M).$$

Здесь h_M и δ_M — местный часовой угол и геоцентрическое склонение Луны соответственно, φ — широта точки наблюдения. Геоцентрическое зенитное расстояние z_M Луны можно вычислить так:

$$\cos z_M = \sin \varphi \sin \delta_M + \cos \varphi \cos \delta_M \cos h_M.$$

Табличные значения должны быть проинтерполированы на момент наблюдения с учетом вторых разностей.

В Explanatory Supplement, sec. 10C даются несколько иные формулы для вычисления топоцентрических либраций по табличным значениям геоцентрических либраций.

В случае наблюдения покрытий на станциях, расположенных на изогоне, возможно дальнейшее упрощение. Хенриксен доказал, что скорость изменения позиционного угла одинакова для всех точек края лунного диска и равна первой производной параллактического угла по времени:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi}{T} \sin i,$$

где T — сидерический период обращения Луны, а i — наклонение лунной оси к фундаментальной плоскости.

Учтя это при вычислении либраций, можно получить, что покрытие всегда происходит в одной и той же части лунного края.

1.7.1.3. Координаты Луны и Солнца

Если поправки координат Луны и Солнца не включать в уравнения погрешностей, то положения этих тел должны быть известны с точностью в $\pm 0'',01$. В настоящее время принятой теорией лунной орбиты считается теория Брауна, который опубликовал свои исследования в Memoirs of the Royal Astronomical Society между 1901 и 1908 гг. Он подготовил и опубликовал специальные таблицы движения Луны [30]. Эти таблицы использовались для вычисления координат Луны в национальных Ежегодниках до 1952 г. Точность, с которой давались координаты Луны на каждый час, равнялась $0'',1$ по склонению и $0^s,01$ по прямому восхождению.

Позднее, с введением электронно-вычислительных машин, появилась возможность вычислять координаты Луны непосредственно по формулам Брауна, без использования его таблиц. Первым результатом этой работы было опубликование Improved Lunar Ephemeris, 1952—1959, изданных Военно-морской обсерваторией США и Гринвичской обсерваторией в 1954 г. В этой публикации координаты Луны даны с точностью $\pm 0'',01$ по склонению, $\pm 0^s,001$ по прямому восхождению и $\pm 0'',001$ по параллаксу. С 1960 г. улучшенные координаты Луны помещаются в Astronomical Ephemeris и American Ephemeris and Nautical Almanac. Описание вычислений эфемерид и сравнение этих координат с координатами, полученными по таблицам Брауна, включены в Improved Lunar Ephemeris, 1952—1959 гг.

Ephemeris дают наиболее точные координаты Луны из имеющихся в настоящее время материалов. Однако, поскольку принятое значение синуса параллакса ($3422''$, 5400) может быть ошибочным, в формулу, выражающую расстояние от Земли до Луны, должен быть введен неизвестный множитель $(1 + \varkappa)$:

$$r_M = (1 + \varkappa) \operatorname{cosec} \pi_M,$$

где π_M — величина, выбираемая из таблиц.

К сожалению, в отношении Солнца дела обстоят не так благополучно. Эфемериды Солнца вычисляются по Tables of the Sun Ньюкома (Astronomical Papers of the American Ephemeris, vol. VI, Part 1, 1895). Значение принятого видимого радиуса Солнца на расстоянии одной астрономической единицы равно $16'\,01'',18$. (При составлении таблиц затмений (см. разд. 1.3.3) принятое значение видимого радиуса равнялось $15'59'',63$, по Ауэрсу.) Точность, с которой могут быть получены координаты Солнца, равняется лишь $\pm 0'',1$ по склонению и $\pm 0^s,01$ по прямому восхождению.

Дело несколько упрощается в связи с тем, что нас интересует движение Солнца лишь в течение нескольких часов, поэтому можно более точно вычислять положение Солнца на период затмения. Для солнечных затмений 1945 и 1947 гг. Зундман и Хирвонен применили метод интегрирования уравнений движения, который также пригоден и для других затмений. Однако вычисления очень трудоемки. Этот же метод может быть применен для получения более точных координат Луны, если нет улучшенных эфемерид Луны.

1.7.1.4. Параллакс Луны

Как было указано в предыдущих разделах, принятое значение среднего параллакса Луны точно не известно. Он должен быть известен с такой же точностью, как и координаты Луны, т. е. около $\pm 0'',01$. О'Киф, Андерсон и Фишер при определении лунного параллакса (разд. 1.5.3) исходили из такой точности. Однако вопрос заключается в том, использовать ли однажды наблюденный параллакс еще раз или редуцировать его для других покрытий с надлежащей точностью; поэтому в уравнения погрешностей всегда надо включать поправку за параллакс. Как заявил Хирвонен на 9-й Ассамблее МГГС в Брюсселе в 1951 г., «основная цель заключается именно в точном решении вопроса относительно лунного параллакса...».

По-видимому, в настоящее время эта задача в значительной степени уже решена. Как уже упоминалось раньше, результаты, полученные Фишер ($r_M = 384\,400{,}9$ *км*, $\pi_M = 3422'',603$) и отнесенные к ее World Geodetic Datum [42], очень хорошо согласуются со средними динамическими значениями ($r_M = 384\,400 \pm \pm 2$ *км*, $\pi_M = 3422'',610 \pm 0'',013$), отнесенными к этой же системе, и с последними радиолокационными измерениями расстояния до Луны, выполненными Япли ($r_M = 384\,400 \pm 2$ *км*) так же, как и измененный Фишер на —2 *км* радиус Луны (1738 *км*), использованный при вычислении покрытий. Неопределенность значения динамического параллакса является следствием неточного значения массы Луны. Наиболее часто применяемые значения массы Луны (выраженной в единицах массы Земли) равны $\mu = 1/81{,}27$ по Спенсеру-Джонсу; $\mu = 1/81{,}219$ по Делано; $1/81{,}375$ по Рейбу и $1/81{,}361$ по Ephemeris с относительной ошибкой около $1/500$.

1.7.2. Преимущества и недостатки наблюдения покрытий по сравнению с солнечными затмениями

Основные преимущества наблюдения покрытий по сравнению с солнечными затмениями следующие:

1. Проще обработка результатов наблюдений.

2. Проще вычисления. Координаты Луны и звезды могут быть вычислены с достаточной точностью соответственно по Ephemeris и звездным каталогам. В случае затмений, поскольку нет точных координат Солнца, надо либо вычислять улучшенные эфемериды

Солнца на период затмения, либо вводить поправки координат Солнца в уравнения погрешностей, что увеличивает число необходимых измерений.

3. Число покрытий, наблюдаемых в течение одного года на одной станции, намного больше числа затмений. Это тем более справедливо, если сравнивать общее число покрытий с общим числом затмений. Число затмений в год колеблется от двух до пяти, тогда как число покрытий иногда достигает 50 за одну ночь. Число покрытий, фактически наблюдаемых в данном пункте, конечно, меньше; их бывает около десяти в месяц (если считать лишь покрытия ярких звезд). С другой стороны, в данном месте возможно наблюдать лишь одно затмение за 10 лет, а полное затмение — лишь один раз в 360 лет.

Большее число покрытий дает возможность вести их систематические наблюдения и получать, таким образом, более точные результаты. По той же причине наблюдения покрытий в меньшей степени зависят от погодных условий.

4. Область видимости покрытий значительно больше области видимости затмений. Полное или кольцеобразное затмение можно видеть лишь вдоль очень узкой полосы, которая также проходит через районы, непригодные для наблюдений.

Основные недостатки покрытий следующие:

1. При одном покрытии можно наблюдать максимум лишь два контакта.

2. Между точностью моментов контактов, наблюдаемых на темном и светлом краях Луны, имеется систематическая разница. Поэтому обычно наблюдается только один контакт на темном крае.

3. Неровности края лунного диска и либрация Луны значительно сильнее влияют на моменты контактов и на точность результатов при наблюдении покрытий, чем при наблюдении затмений. В последнем случае принимается во внимание суммарное влияние неровностей на малом участке края, которое меньше, чем влияние при разовом наблюдении.

4. В случае наблюдений по методу изогон погода является определяющим фактором.

БИБЛИОГРАФИЯ К ЧАСТИ 1

1. Амелин В. М., Методы использования Луны для геодезических целей, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 184, 19—42, 1958.
2. Буткевич А. В., Современные средства и методы геодезических соединений материков, Изв. вузов МВО, Геодезия и аэрофотосъемка, 1, 89—101, 1960.
3. Горячев Н. Н., Об организации массового наблюдения покрытий звезд Луной на обсерваториях, Труды Томского гос. ун-та, Астрономия и геодезия, 91, 1—7, 1939.

4. Изотов А. А., Современные представления о форме и размерах Земли, Труды ЦНИИГАИК, М., 73, 1950.
5. Изотов А. А., Генеральная ассамблея международной ассоциации геодезии, Геодезия и картография, № 4, 1958.
6. Михайлов А. А., Теория затмений, 1 изд., М., Гостехиздат, 1945; 2 изд., М., Гостехиздат, 1954.
7. Михайлов А. А., Что могут дать геодезии наблюдения Луны?, Геодезия и картография, № 9, № 11, 1957.
8. Новое о Луне, Доклады и сообщения на международном симпозиуме по исследованию Луны, Пулково, 6—10 дек. 1961 г., Изд-во АН СССР, М., 1963.
9. Плахов Ю., Солнечные затмения и теория фигуры Земли, Труды МИИГАИК, **30**, 23—30, 1958.
10. Плахов Ю., Некоторые вопросы теории определения полярного сжатия Земли из лунного параллакса, Труды МИИГАИК, **30**, 31—34, 1958.
11. Поттер Х. И., К вопросу об использовании наблюдений Луны в геодезических целях, Астрон. ж., **35**, 4, 618—622, 1958.
12. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, изд-во «Наука», М.—Л., 1965.
13. Яковкин А. А., Машина для предвычисления покрытий звезд Луной, Астрон. ж., **24**, **4**, 223—227, 1947.
14. Яковкин А. А., Использование наблюдений Луны для геодезических целей, Труды III съезда ВАГО, Киев, 1960 г., М., Изд-во АН СССР, 1962.
15. Яковкин А. А., Движение, вращение и фигура Луны, сб. «Луна», М., Физматгиз, 1960.
16. Andre C., Observation de l'éclipse du 17 Avril 1912 a l'Observatoire Lyon, Compt. Rend. Commis. Géod. Baltique, Helsinki, p. 1056, 1912.
17. Arthur D. W., Lunar Cartography, Sky and Telescope, **19**, 12, 1960.
18. Banachiewicz Th., Die Polnische Sonnenfinsternisexpedition 1927, Compt. Rend. Commis. Géod. Baltique, Helsinki, pp. 161—164, 1929.
19. Bennett R. S., The Development of Occulation Methods of Survey in the Far East, Notes of the Week, Army Map Service, Far East, Tokyo, 1959.
20. Berroth A., Hofmann W., Kosmische Geodäsie, G. Brown, Karlsrühe, 1960. (Русский перевод: А. Беррот, В. Хофманн, Космическая геодезия, М., ИЛ, 1963.)
21. Bessel F. W., Analyse der Finsternisse, Abhandlungen, **3**, 369—428, 1876.
22. Bonsdorff I., Die Astronomische-geodätischen Arbeiten während der Sonnenfinsternis der 9 Juli 1945, Activ. Commis. Géod. Baltique, pendant les annees 1942—1943, Helsinki, pp. 5, 12—16, 1944.
23. Bonsdorff I., Gradmessung mittels der Sonnenfinsternis, Sitzungsber. Finn. Akad. Wissensch. 1945, Helsinki, pp. 213—218, 1946.
24. Bonsdorff I., Mitteilungen über die Sonnenfinsternis am 9 Juli 1945, Sitzungsber. Finn. Akad. Wissensch. 1945, Helsinki, 1946.
25. Bonsdorff I., Über die Sonnenfinsternis vom Jahre 1947, Sitzungsber. Finn. Akad. Wissensch. 1948, Helsinki, pp. 99—102, 1950.
26. Beyer D. B., The Present Instruments Used in Occultation, Notes of the Week, Army Map Service, Far East, Tokyo, 1959.
27. Brein H., Jelstrup H. S., Nottarp K., Sandig H. U., Sigl R., Beobachtungen für Sonnenfinsternis 1954 in Südnorwegen, Mitt. Inst. f. Angew. Geodäsie Nr. 16, Frankfurt, 1957. (Deutsches Geod. Komm. Reihe B, Nr. 34, 1957.)
28. Brouwer D., Interesting Examples of the Limb Effect and Errors in Star Positions in Occultations, Astron. J., **41**, 69, 1931.

29. Brouwer D., Watts C. B., A Comparison of the Results of Occultations and Meridian Observations of the Moon, Astron. Journ., 52, 169, 1947.
30. Brown E. W., Tables of the Motion of the Moon, Yale University Press 1919.
31. Buchanan R., The Mathematical Theory of Eclipses According to Chauvenet's Transformation of Bessel's Method, Philadelphia, 1904.
32. Burgess G. K., US Bureau of Standards Eclipse Observations, Scientific American, **133**, 170—171, 1925.
33. Chauvenet W., A Manual of Spherical and Practical Astronomy, Philadelphia, 1863, Reprinted by Dover Publ., New York, 1960.
34. Comrie L. J., The Reduction of Lunar Occultations, Astron. J., **46**, 61—67, 1937.
35. Da Costa Lobo F. M., Enregistrement cinématographique de l'éclipse du 17 avril, et forme un peu allongée du contour lunaire, Comp. Rend. Commis. Géod. Baltique, Helsinki, p. 1396, 1912.
36. Deutsch A. J., On the Possibility of Measuring a Long Geodetic Line by Observations of a Total Eclipse of the Sun, Mapping and Charting Research Laboratory, Ohio State University, 1949.
37. Eckert W. J., Improvement by Numerical Methods of Brown's Expressions for the Coordinates of the Moon, Astron. J., **63**, 415—418, 1958.
38. Eckert W. J., Jones R., Clark H. K., Improved Lunar Ephemeris, 1952—1959, U. S. Naval Observatory, 1954.
39. Evans D. S., Occultations and Lunar Mountains, Astron. Journ., **60**, 432—440, 1955.
40. Farnsworth A., Occultations of Stars by the Moon Observed during 1952, Astron. Journ., 58, 175, 1953.
41. Farnsworth A., Occultations of Start by the Moon Observed during 1955, Astron. Journ., **61**, 360, 1956.
42. Fischer I., The Parallax of the Moon in Terms of a World Geodetic System, Astron. Journ., **67**, 373—378, 1962; The Lunar Distance, 43rd Meeting of the American Geophysical Union, Washington, D. C., April, 1962.
43. Goldstein A., On the Reduction of Photoelectric Observations of a Total Solar Eclipse, Georgetown Coll. Obs. Mon., **3**, 1952.
44. Goldstein A., Mattingly O., Heyden F. J., On the Geodetic Application of a Solar Eclipse, Bull. Géod., 49, 1958.
45. Hagen J. P., Aleutian Radio Eclipse Expedition, Sky and Telescope, **10**, 5, 1951.
46. Hayn F., Selenographische Koordination, I-IV, Abh. d. Math. Phys. Klasse Königl. Sächsischen Ges. Wiss. Leipzig, **27** (9), 29 (1), **30** (1), **33** (1), 1902, 1904, 1907, 1914.
47. Heiskanen W. A., Final Report under Contract No. AF 19 (604)-878 Solar Eclipse, 30 June 1954, Mapping and Charting Res. Lab., Ohio State Univ. 1955.
48. Henriksen S. W., Mathematical Theory of Occultation Survey, XII Gen. Assembly IUGG, Helsinki, 1960.
49. Henriksen S. W., The Application of Occultations to Geodesy, Army Map Service, Tech. Rep., 46, 1962.
50. Henriksen S. W., Genatt S. H., Batchlor C. D., Marchant M. Q., Surveying by Occultations, Trans. Amer. Geophys. Union, 38, 15, 1957; Astron. Journ., **63**, 291—295, 1958.
51. Hirose H., On the Prediction of the Equal Limb Line for an Occultation, The Annals of the Tokyo Astron. Obs., Second Series, III, 4, 1953.
52. Hirvonen R. A., Die Brasilien-Expedition, Sitzungsber. Finn. Akad. Wissensch. 1948, Helsinki, pp. 115—125, 1950.
53. Hirvonen R. A., The Motions of Moon and Sun at the Solar Eclipse of 1947, May 20, Veröff. Finn. Geod. Inst., **40**, 1951.

54. Hirvonen R. A., On the Observation and Significance of Lunar Occultations, IX Gen. Assembly IUGG, Brussels, 1951.
55. Hirvonen R. A., Determination of the Inner Contact Moments from the 1945 Solar Eclipse Pictures, Veröff. Finn. Geod. Inst., **46**, 1955.
56. Hirvonen R. A., Kukkamäki T. J., The Finnish Solar Eclipse Expedition to the Gold Coast and Brazil 1947, Veröff. Finn. Geod. Inst., **44**, 1954.
57. Hulburt E. O., The Illumination from the Solar Crescent near Totality of the Eclipse of May 20, 1947, Astrophys. Journ., **111**, 1, 1950.
58. Innes R. T. A., Reduction of Occultations of Stars by the Moon, Astron. Journ., **35**, 155—156, 1924; Brown E. W., Errata, Astron. Journ., 39, 96, 1929.
59. Kalaja P., The Solar Eclipse Measurements by the Finnish Geodetic Institute in 1945, Veröff. Finn. Geod. Inst., **46**, 1955.
60. Kalaja P., Time Service by the Finnish Geodetic Institute's 1945 Solar Eclipse Expeditions, Veröff. Finn. Geod. Inst., **46**, 1955.
61. Kordylewski K., Die polnische Sonnenfinsternisexpedition nach Schwedisch-Lapland zur totalen Finsternis 1927 Juni 29, Acta Astron., Series b, Krakow, **1**, 133—200, 1932.
62. Kristensen H., Spectrophotometric Determinations of Contacts at Total Eclipses of the Sun, Stockholm Observ. Annaler, **17**, 1, 1951.
63. Kukkamäki T. J., Die Ausrüstung der finnischen Sonnenfinsternisexpeditionen vom Jahre 1947 und die Afrika-expedition, Sitzungsber. Finn. Akad. Wissensch. 1948, Helsinki, pp. 103—113, 1950.
64. Kukkamäki T. J., Provisional Results Reached by the 1947 Finnish Solar Eclipse Expeditions, Bull. Géod., **26**, 1952.
65. Kukkamäki T. J., Results Obtained by the Finnish Solar Eclipse Expeditions, 1947, Trans. Amer. Geophys. Union, **35**, 99—102, 1954.
66. Kukkamäki T. J., Aerial Photographing of the Moon's Shadow on the Earth's Survace, Veröff. Geod. Inst., **46**, 1955.
67. Lambert W. D., The Figure of the Earth and the Parallax of the Moon, Astron. Journ., 38, 181—185, 1928.
68. Lambert W. D., Geodetic Applications of Eclipses and Occultations, Bull. Géod., **13**, 1949.
69. Lambert W. D., Use of Occultations and Eclipses for Connnecting Geodetic Datums, The Journ. of U. S. Coast and Geodetic Survey, April 1950.
70. Lindblad B., Bemberkungen über die Messung der Kontaktzeiten während der totalen Sonnenfinsternis den 9 Juli 1945, Activ. Commis. Geod. Baltique pendant les annees 1942—43, Helsinki, pp. 17—19, 1944.
71. Lindblad B., Stockholm's Observatoriums Expeditioner för Observation av den totalen Solformörkelsen den 9 Juli 1945, Populär Astronomisk Tidskrift, Häfte 3—4, 1945.
72. McNair F. V., Reports of the Partial Eclipse of the Sun of 1892 Oct. 20, Astron. Journ., **12**, 140, 1892.
73. Mears D. D., Construction and Testing of Equipment for the Photoelectric Observation of Occultations, Army Map Service, Tech. Rep., 3, 1949.
74. Nautical Almanac Office, H. M., The Prediction and Reduction of Occultations, 1937, A Supplement to the Nautical Almanac for 1938, 1938.
75. Nautical Almanac Office, H. M., Reduced Observations of Lunar Occultations for the Years 1943—1947 (Appendix to Greenwich Oservations 1939), 1952.
76. Nautical Almanac Office, H. M., Reduced Observations of Lunar Occultations for the Years 1948—1953, Royal Observatory Annals, 2 (в печати).
77. Nautical Almanac Office, Solar Eclipses, 1960—1963, U.S. Naval Obs. Circ., No. 59, 1955.

78. Nautical Almanac Office, Solar Eclipses, 1963—1967, U. S. Naval Obs. Circ., No. 85, 1958.
79. Nautical Almanac Office, Solar Eclipses, 1968—1970. U. S. Naval. Obs. Circ., No. 89, 1960.
80. Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, H. M. Stationery Office, London, 1961.
81. O' Keefe J. A., A New Determination of the Lunar Parallax, Astron. Journ., 55, 177—178, 1950.
82. O' Keefe J. A., Surveying by Occultations, Army Map Service, Tech. Rep., 15, 1954.
83. O' Keefe J. A., The Occultation Method of Long Line Measurements, Bull. Géod., 49, 1958.
84. O' Keefe J. A., Anderson J. P., The Earth's Equatorial Radius and the Distance of the Moon, Astron. J., **57**, 108—121, 1952; Bull. Géod., 29, 1953.
85. O' Keefe J. A., Mears D. D., The 800-Inch Telescope, J. Roy. Astron. Soc. Canada, **48**, 1, 1954.
86. Oppolzer T. R., Canon der Finsternisse, Vienna, 1887.
87. Panay T. H., Note on Measurements of the Films on the Solar Eclipse May 9—8, 1948, Trans. Amer. Geophys. Union, **31**, 6, 1950.
88. Pesonen V., Determination of the Outer Contact Moments from the 1945 Solar Eclipse Pictures, Veröff. Finn. Geod. Inst., **46**, 1955.
89. Platzeck R., Maiztegui A., Gaviola E., Non Focal Methods for Determining 2nd and 3rd Contacts in Total and Center in Annular Solar Eclipses, Veröff. Finn. Geod. Inst., **36**, 1949.
90. Poole L. H., Planning-Logistic and Support Phases Occultation Program, Notes of the Week, Army Map Service, Far East, Tokyo, 1959.
91. Preston G. W., Stephenson C. B., Smith R. E., Thomas N., Photoelectric Observations of Occultations, Astron. Journ., 59, 443—444, 1954.
92. Richards O. W., Changes in Light Intensity during the 1932 Partial Eclipse at Woods Hole, Massachusetts, Astron. Journ., **42**, 127—128, 1933.
93. Sandig H. U., Bemerkungen für photoelectrischen Erfassung der Kontaktzeiten von Sonnenfinsternissen, Wiss. Zeitschr. T. H. Dresden, 8, 2, 1958/59.
94. Schauer P. C., The Determination of Geodetic Positions and Distances by Means of a Solar Eclipse, Georgetown Coll. Obs. Mon. 2, 1952; Aeronautical Chart and Inf. Service Tech. Rep. No. RL-ACIS-1.
95. Scott D. K., Measuring of the Profile of the Moon's Visible Limb, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ. **7** 1957.
96. Шистовский К., An Attempt of Utilizing the Cinema-Camera as a Means of Determining the Moments of Contact of the Total Eclipse of 1927, Publ. Astroph. de Russie, **4**, 2, 1929.
97. Slettebak A. E., Eclipses and Occultations for Geodetic Purposes. Mapping and Charting Res. Lab., Ohio State Univ., 1950.
98. Stevens A. W., Photographing the Eclipse of 1932 from the Air, Nat. Georg. Mag., **42**, 5, 1932.
99. Sundman K. F., The Motions of the Moon and the Sun at the Solar Eclipse of 1945, July 9, Activ. Commis. Géod. Baltique pendant les anees 1944—1947, Helsinki, pp. 63—94, 1948.
100. Thomas P. D., Geodetic Positioning of the Hawaiian Islands, Surveying and Mapping, **22**, 1, 1962.

101. Torroja J. M., On the Photometric Timing of Total Solar Eclipses, Bull. Géod., 39, 1956.
102. Torroja J. M., Bongera V., Determinación de los instantes de los contactos en el eclipse total de sol de 25 de febrero de 1952 en Cogo, Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad de Madrid, Publicación, **23**, 1954.
103. Veis G., Geodetic Uses of Artificial Satellites, Smithsonian Contrib. Astrophys., **3**, 9, 1960.
104. Vles F., Carvallo J., Enregistrement de l'eclipse de soleil du 17 Avril sur la portion espagnole de sa trajectorie, Compt. Rend. Commis. Géod. Baltique, Helsinki, **154**, 1142, 1912.
105. Watts C. B., Adams A. N., Photographic and Photoelectric Technique for Mapping the Marginal Zone of the Moon, Astron. Journ., **55**, 81—82, 1950.
106. Weimer Th., Atlas de Profils Lunaires, Obs. de Paris, 1952.
107. Whitford A. E., Photoelectric Observations of Diffraction at the Moon's Limb, Astrophys. Journ., **89**, 351, 1939.
108. Whitford A. E., Angular Diameters of Stars from Occultations by the Moon, Astron. Journ., **52**, 131, 1947.
109. Willaert S. J., Enregistrement cinématographique de l'éclipse de soleil du 17 Avril 1912 au poste du College Notre Dame de la Paix, a Namur, Belg. Bull., 1912.

Часть 2

ПРИМЕНЕНИЕ ИСЗ В ГЕОДЕЗИИ

2.0. ОБОЗНАЧЕНИЯ В ЧАСТИ 2

Числа в скобках указывают номера разделов в которых используются данные обозначения.

Верхние индексы:

$'$ — первая производная по времени (за исключением особо оговоренных случаев);
$''$ — вторая производная по времени;
$*$ — топоцентрический (за исключением особо оговоренных случаев);
c — геоцентрический.

Нижние индексы:

0 — начальная эпоха или место;
d — возмущающее тело.

Обозначения:

a — большая полуось орбиты;
— дробная часть цикла (2.3.4.1);
a_e — экваториальная полуось эллипсоида вращения;
$a_{e1,e2}$ — большая и малая полуоси трехосного эллипсоида;
a_{nm}, b_{nm} — коэффициенты разложения потенциала силы тяжести;
$\bar{a}_{nm}, \bar{b}_{nm}$ — коэффициенты разложения аномалии ускорения силы тяжести;
$\bar{\bar{a}}_{nm}, \bar{\bar{b}}_{nm}$ — коэффициенты разложения ондуляций геоида;
$\bar{a}$ — высота;
$\Delta\bar{a}_a$ — поправка к $\bar{a}$ за аберрацию;
b — малая полуось орбиты;
— полярный радиус эллипсоида (2.5.2.6);
c — скорость света;
d — диаметр спутника;
$\bar{d}$ — расстояние между двумя антеннами интерферометра;

e — эксцентриситет орбиты;
e' — второй эксцентриситет эллипса;
f — истинная аномалия;
— полярное сжатие эллипсоида;
f_e — экваториальное сжатие трехосного эллипсоида;
g_0 — измеренное ускорение силы тяжести, приведенное к уровню моря;
Δg — аномалия ускорения силы тяжести;
$h = 2A'$ (2.2.1.1);
$= \sin i$ (2.2.2.3);
— символ (2.3.4.2);
— ортометрическая высота;
h_{nm} — символ (2.2.2.2);
h^{Υ} — часовой угол точки весеннего равноденствия;
h_G^{Υ} — часовой угол точки весеннего равноденствия для долготы Гринвича;
$\Delta h = H - h$
$\delta h = H^c - H$;
i — наклонение орбиты к экватору;
i_M — наклонение орбиты Луны к эклиптике (2.2.2.5);
k — гравитационная постоянная;
— число полных циклов (2.3.4.1);
— фокусное расстояние камеры (2.4.2.1);
$k_{\xi,\eta}$ — масштабные множители;
$\bar{k}$ — символ (2.5.2.2);
l, g, h — переменные Делоне;
l — длина спутника;
m — порядок полиномов Лежандра;
— масса спутника;
— символ (2.3.4.2);
m^* — направляющий косинус относительно оси север — юг;
n — степень полиномов Лежандра;
— показатель преломления (2.4.1.1);
— число звезд сравнения (2.4.2.1);
n_0 — показатель преломления у поверхности Земли (2.4.1.1);
n^* — направляющий косинус относительно оси восток — запад;
$\bar{n}$ — среднее аномалистическое движение;
$p = a(1 - e^2)$;
$q = \omega_e^2 a_e^3 / k^2 M$;
$\bar{q} = q(1 - f)$;

q_{nm} — нормирующий множитель;
r — расстояние до спутника;
r_0 — минимальное расстояние до спутника;
r_d — расстояние до третьего возмущающего тела;
$r_п$ — расстояние спутника в перигее (радиус-вектор перигея);
r_{nm} — полный нормирующий множитель;
$\bar{r}$ — символ (2.2.1.2);
s — расстояние (2.2.2.2);
$= RT_0/\bar{R}$ (2.4.1.1);
s' — линейная скорость спутника;
$(s^*)'$ — линейная скорость спутника относительно наблюдателя;
$s'_п$ — линейная скорость спутника в перигее;
t — время;
— символ (2.2.2.2);
$t_G = h_G^{\Upsilon} - \alpha$;
$t_G^* = h_G^{\Upsilon} - \alpha^*$;
$\Delta t = t - T_0$;
Δt_L — время существования спутника от эпохи T_0;
u, v, w — декартовы геодезические координаты (т. е. отнесенные к центру референц-эллипсоида, или «квазигеоцентрические».— *Перев.*)
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ — декартовы геоцентрические координаты (т. е. отнесенные к центру масс Земли.—*Перев.*)
u_e^c, v_e^c, w_e^c — геоцентрические координаты центра референц-эллипсоида;
$v = (s^*)'$ (2.3.4.2);
$\bar{v} = \omega + f$;
$x = e/2$ (2.2.2.3);
x, y — прямоугольные координаты;
— символ (2.3.4.2);
— координаты точки на пластинке (2.4.2.1);
y — направление вверх (2.2.2.4);
z — зенитное расстояние;
— a_0e_0/H (2.2.2.4);
Δz — поправка за рефракцию;
Δz^m — поправка за среднюю рефракцию;
Δz_∞ — поправка за астрономическую рефракцию;
Δz_∞^m — поправка за среднюю астрономическую рефракцию;
A — площадь поперечного сечения спутника (мидель.— *Перев.*)

A' — секториальная скорость;
$\overline{A}$ — азимут;
A_{nm}, B_{nm} — коэффициенты разложения потенциала силы тяжести;
$\overline{A}_{nm}$, $\overline{B}_{nm}$ — нормированные коэффициенты разложения потенциала силы тяжести;
$\overline{\overline{A}}_{nm}$, $\overline{\overline{B}}_{nm}$ — полностью нормированные коэффициенты разложения потенциала силы тяжести;
A, B, C, D, E, F — моменты инерции Земли;
— постоянные пластинки (2.4.2.1);
— символы (2.5.1.3);
— направляющие косинусы (2.2.2.5);
АТ, А1 — время по атомным (молекулярным) часам;
$\Delta\overline{A}_a$ — поправка за аберрацию в $\overline{A}$;
C — параллактический угол;
$C_{B,\,T}$ — барометрические и температурные коэффициенты рефракции;
C_D — коэффициент сопротивления;
C_{nm}, S_{nm} — коэффициенты разложения потенциала силы тяжести;
E — эксцентрическая аномалия;
ЕТ — эфемеридное время;
$F = (S'/s')^2$ (2.2.2.4);
— частота приема;
F_0 — частота передачи;
F_{nmp} — символ (2.2.2.3);
$F'_{mmp} = dF_{nmp}/di$;
ΔF — разница между частотами приема и передачи;
G_{npq} — символ (2.2.2.3);
$G'_{npq} = dG_{npq}/de$;
H — высота над референц-эллипсоидом;
— шкала высот (2.2.2.4);
H^c — высота над геоцентрическим референц-эллипсоидом;
J_{nm}, K_{nm} — коэффициенты разложения потенциала силы тяжести;
$K = k^2 M_d / r_d^3$ (2.2.2.5);
L — долгота Солнца (2.2.2.5);
L_M — долгота Луны (2.2.2.5);
L, G, H — переменные Делоне;
M — масса Земли;
— радиус кривизны меридионального сечения эллипсоида (2.5.2.2);

$\overline{M}$ — средняя аномалия;
N — радиус кривизны сечения эллипсоида плоскостью первого вертикала;
— ондуляция геоида;
P — период обращения;
$P_{nm}(\mu)$ — полином Лежандра n-й степени и m-го порядка;
R — возмущающая функция;
— универсальная газовая постоянная (2.4.1);
R^t — земная возмущающая функция;
R_{nm}^t — пространственная сферическая гармоника земной возмущающей функции;
$\overline{R}$ — средний радиус Земли;
S, T, N — компоненты возмущающей силы;
S' — скорость воздуха;
S_{nmpq} — символ (2.2.2.3);
S'_{nmpq} — производная функции S_{nmpq} по соответствующему аргументу;
$\overline{S}_{nmpq}$ — интеграл от S_{nmpq};
$\overline{S}'_{nmpq}$ — интеграл от S'_{nmpq};
T — эпоха прохождения через перигей;
— сила взаимного притяжения (2.2.1.1);
— сопротивление воздуха (2.2.2.4);
— символ (2.4.2.1);
$= W - U$, возмущающий потенциал (2.5.2);
T_0 — начальная эпоха;
$= 273{,}16°K$ (2.4.1.1);
U — потенциальная функция нормального сфероида;
UT — всемирное время;
V — потенциал тяготения;
V' — центробежный потенциал;
$W = V + V'$, потенциал силы тяжести;
X, Y, Z — геоцентрические прямоугольные координаты;
X, Y — отсчеты измерительной аппаратуры (2.4.2.1);
$Y_n(\mu, \lambda')$ — поверхностная сферическая гармоника n-й степени;
α — прямое восхождение;
α_π — прямое восхождение перигея;
$\overline{\alpha}$ — астрономический азимут;
$\Delta\alpha_a$ — поправка к α за аберрацию;
$\Delta\alpha_r$ — поправка к α за рефракцию;
$\beta = 90° - \varphi'$, «коширота» (дополнение широты до 90°.— *Перев.*);

β — символ (2.2.1.2);
$= \beta_1 + \beta_2$ (2.5.2.3);
$\beta_{1,2}$ — коэффициенты (2.5.2.3);
γ — нормальное ускорение силы тяжести;
γ_e — нормальное ускорение силы тяжести на экваторе;
δ — склонение;
$\Delta\delta_a$ — поправка к δ за аберрацию;
$\Delta\delta_r$ — поправка к δ за рефракцию;
ε — ошибка масштаба;
— наклонение эклиптики (2.2.2.5);
$= \beta_2/4$ (2.5.2.3);
θ — местное звездное время;
— угловая полярная координата (2.2.1.1) (полярный угол.— *Перев.*);
— разность фаз (2.3.4.1);
— угол с направлением относительной скорости (2.4.1.2);
θ_G — гринвичское звездное время;
$\varkappa_m$ — символ (2.2.2.2);
λ — геодезическая долгота (положительная к востоку);
— длина волны радиосигнала (2.3.4.1);
λ_0 — геодезическая долгота наименьшей главной оси инерции (лежащей в плоскости экватора.— *Перев.*);
$\lambda' = \lambda - \lambda_0$;
λ^c — геодезическая геоцентрическая долгота;
$\Delta\lambda$ — предварительная разность времен (2.3.6);
$\mu = \cos\beta = \sin\varphi' = \cos\psi$;
ξ, η, ζ — координаты наблюдателя в системе X, Y, Z;
ξ, η — стандартные координаты звезд сравнения (2.4.2.1);
ξ^*, η^* — стандартные координаты спутника (2.4.2.1);
ρ — геоцентрический радиус-вектор наблюдателя;
σ — плотность воздуха;
σ_π — плотность воздуха в перигее;
φ — геодезическая широта;
φ^c — геодезическая геоцентрическая широта;
φ' — геоцентрическая широта;
ψ — угловое расстояние (2.4.2.1);
$\bar{\psi}$ — угловое расстояние (2.3.2.1);
ω — аргумент перигея;

ω_a — угловая скорость вращения атмосферы;
ω_e — угловая скорость вращения Земли;
Δ — смещение из-за аберрации;
Λ — средняя астрономическая долгота (наблюденная минус поправка $\delta\Lambda^t$);
$\delta\Lambda = \lambda - \lambda^c$;
$\delta\Lambda^t$ — топографо-изостатическая поправка к Λ;
$\Delta\Lambda = \Lambda - \lambda$;
Σ — дифференциальная рефракция (2.4);
Φ — средняя астрономическая широта (наблюденная минус поправка $\delta\Phi^t$);
— направление движения спутника (2.2.1.1);
$\delta\Phi = \varphi - \varphi^c$;
$\delta\Phi^t$ — топографо-изостатическая поправка к Φ;
$\Delta\Phi = \Phi - \varphi$;
Ω — прямое восхождение восходящего узла.

2.1. ВВЕДЕНИЕ

В этом разделе рассматривается применение в геодезии искусственных спутников Земли и естественного спутника Земли — Луны. Наблюдения спутников Земли преследуют две основные цели: научную и техническую. Научные задачи в свою очередь могут быть подразделены на две группы: динамические и геометрические.

Динамические задачи наблюдений спутников можно определить следующим образом: наблюдение положений и перемещений спутника в зависимости от времени с точностью, достаточной для построения теории движения, при помощи которой можно предвычислять координаты спутника по крайней мере с той же точностью, с какой производились наблюдения. Чтобы точно предсказать положение спутника на данный момент, необходимы хорошо разработанная математическая теория движения, точное знание определенных физических параметров (плотности воздуха, гравитационных постоянных и т. д.), а также точные геодезические координаты наблюдателя.

Поскольку физические параметры обычно не известны достаточно хорошо, то даже если теория движения спутника хорошо разработана и точно известно положение наблюдателя, наблюденное и предвычисленное положения искусственного спутника будут различаться. По этим различиям могут быть получены уточненные значения физических параметров.

В течение последних столетий небесная механика (раздел классической механики) достигла больших успехов в развитии теории движения. Лучшие математики приложили свои силы к решению этой проблемы главным образом в связи с движением планет. Характер движения искусственного спутника отличается от характера движения планеты в основном в двух отношениях: орбита спутника значительно ближе к притягивающему небесному телу, чем орбита любой планеты, и в случае Земли он движется, по крайней мере частично, в атмосфере, в то время как естественные спутники движутся практически в пустоте. Из первого факта следует, что движение искусственного спутника сильнее зависит от асимметрии гравитационного поля притягивающего тела, и поэтому он может быть использован для получения гравитационных параметров, определяющих это поле. Эти параметры в свою очередь могут служить источником информации о форме и распределении масс в притягивающем теле. Второй факт позволяет определить плотность атмосферы на высоте спутника. Имеются и другие факторы, которые также оказывают влияние на движение спутника, например световое давление, притяжение других небесных тел, действие магнитных полей и т. д., но их действие слабее по сравнению с гравитационным влиянием и сопротивлением атмосферы.

Теорию, изучающую движение искусственного спутника вокруг небесного тела, обычно называют *теорией движения близких спутников*. Эта проблема не рассматривается ни в одном из классических руководств, однако она освещена в более современных книгах [56, 60, 110].

Из изложенного следует, что движение Луны не может быть использовано для решения большинства динамических задач. Она слишком далека от Земли, и на неё не действуют ни вариации гравитационного поля Земли, ни сопротивление атмосферы. К тому же теория ее движения разработана настолько хорошо, что если известно положение наблюдателя, то наблюдаемые координаты Луны не будут отличаться от предвычисляемых. Однако в динамическом аспекте Луна пригодна для определения гравитационных постоянных и изучения приливного трения.

Геометрические задачи наблюдений ИСЗ состоят в приведении координат удаленных пунктов в единую геодезическую систему. Для этого применяется два основных метода: орбитальный метод (метод активных спутников.— *Перев.*) и метод космической, или звездной, триангуляции (метод пассивных спутников.— *Перев.*). В орбитальном методе спутник наблюдается на его орбите с различных станций с известными координатами. Результаты этих наблюдений сравниваются с предвычисленными данными, которые получаются на основе принятых или известных параметров орбиты и координат станций. По полученным отклонениям из совместного или раздельного уравнивания могут быть вычислены поправки к принятым параметрам орбиты или к координатам или те и другие вместе. В методе космической триангуляции спутник используется в качестве триангуляционной марки в пространстве, которая одновременно наблюдается со станций с известными и неизвестными координатами. По наблюдениям со станций с известными координатами определяется положение ИСЗ в момент наблюдения. По наблюдениям со станции с неизвестными координатами и по уже известным координатам ИСЗ получаются координаты определяемой станции. Этот метод также применим к самолетам или ракетам, дающим вспышки света. Из сказанного следует, что Луна может быть использована в качестве объекта наблюдений как в орбитальном методе, так и в методе космической триангуляции.

Можно назвать и другие, менее важные научные исследования, которые могут быть выполнены при помощи наблюдений ИСЗ.

Используя световые маяки, можно изучать атмосферную рефракцию (искривление пути светового луча в атмосфере) и поглощение оптического излучения; радиотехническими методами можно исследовать ионосферную и тропосферную рефракцию и скорость распространения радиоволн.

Технические цели наблюдений ИСЗ включают регулярные наблюдения для получения текущих параметров орбиты и слежение для ориентации передающих или телеметрических антенн на спутник.

В этом разделе мы ограничимся обсуждением геодезического применения динамического (гравиметрического) и геометрического (орбитального) методов. Другие научные исследования при помощи ИСЗ, такие, как определение плотности атмосферы, светового давления и т. д., и применение ИСЗ в технике здесь не рассматриваются. Основные вопросы космической триангуляции изложены в разд. 2.5.1.5. В книгу также включен обзор теории движения близких искусственных спутников и применяемой методики наблюдений. Теория движения Луны исключена, поскольку ее положение на любой момент может быть получено с достаточной для целей геодезии точностью по существующим лунным эфемеридам. Однако дано краткое описание наблюдений Луны и методики обработки этих наблюдений для геометрических целей. По вопросам лунной теории читатель отсылается к книгам [60; 132; 155].

2.2. ОБЗОР ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ БЛИЗКИХ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

Исследование движения спутника можно провести в два этапа. Начнем с упрощенного случая, когда массы Земли и спутника распределены сферически симметрично, или, что с точки зрения механики то же самое, когда массы сосредоточены в центре. Предположим далее, что движение совершается в пустоте и что другие небесные тела или физические явления не оказывают никакого возмущающего действия. Получаемая в результате такого движения орбита называется *нормальной*. Затем мы учтем перечисленные выше факторы и их влияние на нормальную орбиту. Такая орбита называется *возмущенной*. Отклонения возмущенной орбиты от нормальной называются *возмущениями*. В этом разделе приводится лишь обзор теории движения искусственных спутников, и поэтому большинство формул дается без выводов. Для изучения источников читатель отсылается к библиографии.

2.2.1. Нормальные орбиты

2.2.1.1. Нормальные орбиты в общем виде

Предположим, что точка пренебрежимо малой массы m движется по некоторой произвольной орбите относительно массы M (рис. 2.1). В произвольно ориентированной системе прямоугольных координат x, y с началом в точке M положение точки m задается либо прямоугольными координатами x и y, либо полярными координатами r и θ. Соотношения между этими координатами осуществляются следующими уравнениями:

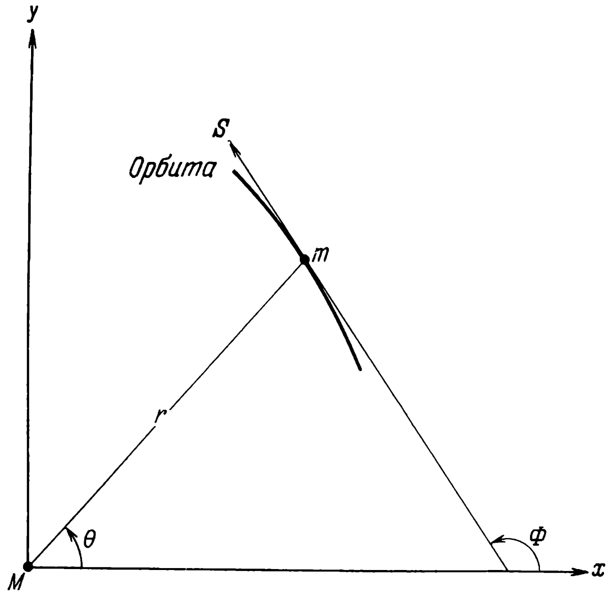
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ r &= \sqrt{x^2+y^2}, \\ \theta &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Производные этих выражений по времени дают соответственно две составляющие тангенциальной скорости x' и y', радиальную (лучевую) скорость r' и угловую скорость θ'.

Они получаются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{dx}{dt} = r' \cos\theta - r\theta' \sin\theta,\\
y' &= \frac{dy}{dt} = r' \sin\theta + r\theta' \cos\theta,\\
r' &= \frac{dr}{dt} = \frac{xx' + yy'}{r},\\
\theta' &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{xy' - yx'}{r^2}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Точка m движется в направлении s, которое определяется углом Φ. Скорость в этом направлении (тангенциальная ско-



Р и с. 2.1. Основные координаты на плоскости

рость) равна $s' = ds/dt$. Соотношения между s и ее прямоугольными составляющими выражаются формулами

$$
\begin{aligned}
x' &= s' \cos\Phi,\\
y' &= s' \sin\Phi,\\
s' &= \sqrt{x'^2 + y'^2},\\
\Phi &= \operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Когда точка m движется по своей орбите, радиус-вектор r описывает площадь A, ограничиваемую координатными осями и орбитой. Площадь, описываемая в единицу времени, называется секториальной скоростью и определяется через элемент площади $^1/_2 r^2 d\theta$ следующим уравнением:

$$A' = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2\theta' = \frac{1}{2} h,$$

где $h = r^2\theta'$ — секториальное ускорение. Заменяя последнее уравнение в (2.2), мы получим

$$h = r^2\theta' = xy' - yx'. \tag{2.4}$$

Производные скорости по времени дают ускорения, из которых тангенциальное и секториальное наиболее интересны. Дифференцируя по аргументу времени третье уравнение в (2.3) и выражение (2.4), получаем

$$\begin{aligned} s'' &= \frac{ds'}{dt} = \frac{x'x'' + y'y''}{s'}, \\ h' &= \frac{dh}{dt} = xy'' - yx'' = 2rr'\theta' + r^2\theta'', \end{aligned} \tag{2.5}$$

где двойные штрихи соответствуют второй производной по времени. Поскольку масса M пренебрежимо мала, то закон Ньютона для силы взаимного притяжения масс M и m можно записать в виде уравнения

$$T = -k^2 \frac{M}{r^2},$$

где k^2 — гравитационая постоянная, равная $6{,}673 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/*г* $\times$ $\times$ *сек*^{2}. Сила притяжения направлена вдоль линии, соединяющей две массы, т. е. вдоль радиуса-вектора, и поэтому T также определяется выражением

$$T = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

где V — потенциал тяготения. Наконец, согласно второму закону Ньютона, силу T (или ее составляющие) можно выразить как произведение массы на ускорение (или на ее составляющие):

$$\begin{aligned} T_x &= T\cos\theta = T\frac{x}{r} = Mx'', \\ T_y &= T\sin\theta = T\frac{y}{r} = My''. \end{aligned} \tag{2.5a}$$

Умножаем первое из этих уравнений на $-y$, а второе — на x, складываем их и сравниваем с (2.5):

$$M(xy'' - yx'') = Mh' = 0. \tag{2.6}$$

Следовательно, $h = \text{const}$. Но так как $h = 2A'$, то

$$A' = \text{const}, \tag{2.7}$$

что для эллиптических орбит выражает второй закон Кеплера. Смысл этого выражения таков: *в равные промежутки времени радиус-вектор описывает равновеликие площади.*

Форма орбиты определяется радиусом-вектором r как функцией переменной θ.

Умножая первое уравнение в (2.5а) на x', второе — на y' и складывая, получим

$$\frac{T}{r}(xx' + yy') = x'x'' + y'y''.$$

Сравнивая это уравнение с уравнениями (2.2) и (2.5), получаем

$$Tr' = s's''. \tag{2.8}$$

Дифференцирование уравнений (2.2) дает

$$x'' = r''\cos\theta - r'\theta'\sin\theta - r'\theta'\sin\theta - r\theta''\sin\theta - r(\theta')^2\cos\theta,$$
$$y'' = r''\sin\theta + r'\theta'\cos\theta + r'\theta'\cos\theta + r\theta''\cos\theta - r(\theta')^2\sin\theta.$$

Подставляя x'' и y'', а также x' и y' из (2.2) в уравнение (2.5), получаем

$$s's'' = r'r'' + r'r(\theta')^2 + r^2\theta'\theta''.$$

Сравнивая правую часть этого уравнения с уравнениями (2.5) и (2.6), получаем

$$s's'' = r'[r'' - r(\theta')^2],$$

что, согласно (2.8), должно быть равно Tr'. Эти отношения дают дифференциальное уравнение движения

$$T = r'' - r(\theta')^2. \tag{2.9}$$

Решение этого уравнения таково [132, p. 92]:

$$r = \frac{h^2/k^2}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{2.10}$$

где e и θ_0 — постоянные интегрирования. Это уравнение конического сечения в полярных координатах с началом координат в одном из фокусов. Постоянная h^2/k^2 в числителе является параметром конического сечения с эксцентриситетом e. Угол θ_0 определяет направление его большой оси. В зависимости от эксцентриситета e, который может принимать значения 0, <1; 1 или >1, коническое сечение является соответственно окружностью, эллипсом, параболой или гиперболой.

Эксцентриситет орбиты искусственного спутника зависит от условий запуска. Геодезические искусственные спутники запускаются с такими скоростями, что они выходят на эллиптические орбиты с различными эксцентриситетами. Это полностью согласуется с уравнением (2.10) и первым законом Кеплера, который для искусственных спутников звучит так: *орбитой искусственного спутника является эллипс, в одном из фокусов которого находится центр Земли.*

2.2.1.2. Геометрия эллиптической орбиты

Повернем нашу систему декартовых координат так, чтобы ось x совпала с большой осью эллипса. Значения x положительны в направлении ближайшей точки эллипса (рис. 2.2).

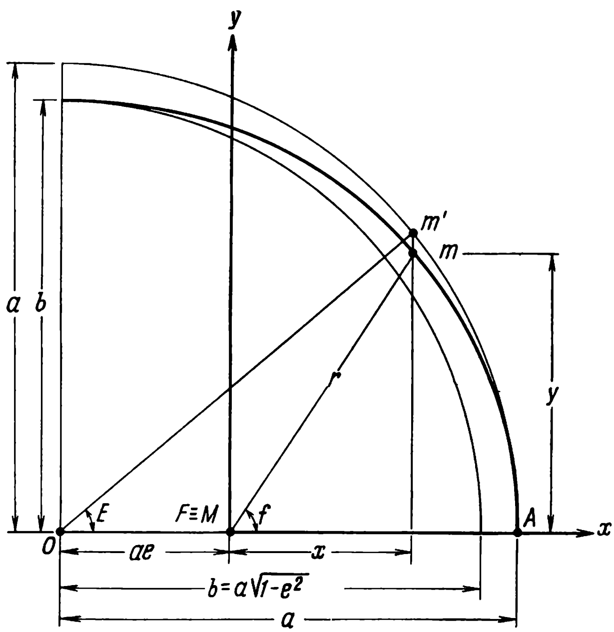


Рис. 2.2. Эллиптические координаты на плоскости.

Размеры и форма эллипса определяются его большой полуосью a и эксцентриситетом e. Как известно из геометрии эллипса, его малая полуось $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Расстояние от фокуса F до центра O равно ae. Ближайшая к фокусу точка на большой полуоси эллипса называется *перицентром* орбиты. Точка наибольшего удаления называется *апоцентром*.

Для орбит искусственных спутников Земли мы будем пользоваться более специальными терминами: *перигей* и *апогей*.

Если спутник находится в точке m орбиты, то его положение на орбите определяется углом mFA, т. е. *истинной аномалией*, которая отсчитывается в направлении движения и обозначается буквой f. Угол $m'OA$, соответствующий дуге вспомогательной окружности радиуса a, называется *эксцентрической аномалией* и обозначается буквой E. *Средней аномалией* называется истинная аномалия воображаемого искусственного спутника, движущегося с постоянной угловой скоростью. Она равна нулю в перигее и равномерно возрастает со скоростью 360° за оборот. Средняя аномалия обозначается буквой $\overline{M}$.

Положение спутника в заданный момент t определяется его полярными координатами r и f. Радиус-вектор может быть вычислен по прямоугольным координатам x и y, которые, как следует из чертежа, выражаются формулами:

$$\begin{aligned} x &= r\cos f = a\cos E - ae = a(\cos E - e), \\ y &= r\sin f = b\sin E = a(1-e^2)^{1/2}\sin E. \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Радиус-вектор равен

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = a\sqrt{(1-e^2)\sin^2 E + (\cos E - e)^2},$$

откуда

$$r = a(1 - e\cos E). \qquad (2.12)$$

Выражение для истинной аномалии может быть также получено из простых геометрических рассуждений:

$$\operatorname{tg} f = \frac{y}{x} = \frac{(1-e^2)^{1/2}\sin E}{\cos E - e},$$

или, в более удобной форме,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}f = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{1/2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E. \qquad (2.13)$$

Разложение (2.13) в ряд дает

$$f = E + 2\left(\beta\sin E + \frac{\beta^2}{2}\sin 2E + \frac{\beta^3}{3}\sin 3E + \dots\right),$$

где

$$\beta = \frac{1}{e}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right).$$

Полярные координаты в уравнениях (2.12) и (2.13) выражены в функции эксцентрической аномалии E, которая в свою очередь может быть получена из уравнения Кеплера, приводимого здесь без вывода [132, p. 159]:

$$\overline{M} = E - e \sin E. \tag{2.14}$$

Это уравнение может быть решено относительно E различными способами. Так, Мультон [132, p. 163] предложил приближенное графическое решение. Разложение E по $\overline{M}$ в ряд Лагранжа приведено у Мультона [132, p. 169]. Разложение E в ряд до седьмой степени с использованием бесселевых функций, практически удобное при малом эксцентриситете, описано Брауэром и Клеменсом [60, p. 76]:

$$\begin{aligned} E = \overline{M} &+ \left(e - \frac{1}{8} e^3 + \frac{1}{192} e^5 - \frac{1}{9216} e^7\right) \sin \overline{M} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{6} e^4 + \frac{1}{48} e^6\right) \sin 2\overline{M} + \\ &+ \left(\frac{3}{8} e^3 - \frac{27}{128} e^5 + \frac{243}{5120} e^7\right) \sin 3\overline{M} + \\ &+ \left(\frac{1}{3} e^4 - \frac{4}{15} e^6\right) \sin 4\overline{M} + \left(\frac{125}{384} e^5 - \frac{3125}{9216} e^7\right) \sin 5\overline{M} + \\ &+ \frac{27}{80} e^6 \sin 6\overline{M} + \frac{16807}{46080} e^7 \sin 7\overline{M}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Наиболее простым методом решения уравнения Кеплера является метод последовательных приближений. Применяя ряд Тейлора к формуле (2.14) и пренебрегая членами второй степени и выше, мы получим

$$\Delta\overline{M} = (1 - e \cos E)\, \Delta E.$$

Отсюда

$$\Delta E = \frac{\Delta\overline{M}}{1 - e \cos E}. \tag{2.16}$$

В первом приближении вычисляем E по упрощенному ряду (2.15):

$$E_1 = \overline{M} + e \sin \overline{M} + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\overline{M}.$$

Подставляя результат вычислений в (2.14), мы получаем приближенное значение $\overline{M}_1$, соответствующее E_1. Вычислим $\Delta\overline{M}_1 = \overline{M}_1 - \overline{M}$ и по формуле (2.16) найдем ΔE_1. После этого выполняем второе приближение $E_2 = E_1 + \Delta E_1$ и повторяем весь процесс до тех пор, пока значение $\overline{M}_n$, вычисленное по (2.14), не совпадет с начальным значением $\overline{M}$.

Чтобы определить среднюю аномалию $\overline{M}$, мы используем два важных свойства эллиптического движения: интеграл площадей и интеграл живой силы:

$$r^2\theta' = k\,[Ma\,(1-e^2)]^{1/2}, \tag{2.17}$$

$$(s')^2 = (x')^2 + (y')^2 = k^2 M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \tag{2.18}$$

Согласно (2.4), выражение для секториальной скорости можно записать в виде

$$A' = \frac{1}{2}\,r^2\theta';$$

она численно равна площади треугольника, показанного на рис. 2.3. Эта же площадь может быть выражена как половина

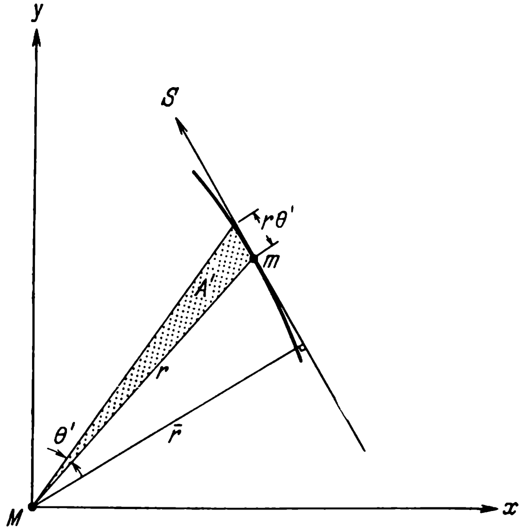


Рис. 2.3. Секториальная скорость.

произведения тангенциальной скорости s' на расстояние $\bar{r}$ по нормали от точки M до орбиты, т. е.

$$A' = \frac{1}{2}\,\bar{r}s'.$$

Подставляя (2.18) в это уравнение, получаем

$$A' = \frac{1}{2}\,\bar{r}\sqrt{k^2 M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}.$$

Поскольку A' — величина постоянная, то значения переменных r и $\bar{r}$ могут быть получены с использованием таких частных положений спутника, в которых эти величины известны. Такой точкой является конец малой оси, где $r = a$, а $\bar{r} = b$. Подставляя эти значения в приведенную выше формулу, получаем

$$A' = \frac{1}{2} b \sqrt{\frac{k^2M}{a}}.$$

По значениям секториальной скорости и площади эллипса можно вычислить период обращения P:

$$P = \frac{\pi ab}{A'} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k^2M}}. \tag{2.19}$$

Введем новый термин — *среднее аномалистическое движение*, или просто *среднее движение*. Оно находится по средней аномалии и обозначается символом $\bar{n}$:

$$\bar{n} = \frac{\bar{M}}{t-T} = \frac{\bar{M} - \bar{M}_0}{t - T_0}, \tag{2.20}$$

где T — момент, когда $\bar{M} = 0$, т. е. момент прохождения перигея, и $\bar{M} = \bar{M}_0$ в произвольную эпоху T_0. Применяя формулу (2.20) к полному периоду обращения ($\bar{M} = 2\pi$, $t - T = P$), находим

$$\bar{n} = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{k^2M}{a^3}}. \tag{2.21}$$

Отсюда получаем уравнение

$$\bar{n}^2 a^3 = k^2M = \text{const}. \tag{2.22}$$

Это третий закон Кеплера, который выражается так: *квадраты периодов обращения пропорциональны кубам больших полуосей орбит.*

Таким образом, расчет полярных или прямоугольных координат спутника в заданный момент t можно произвести следующим путем. Пусть даны значения a, e, T или a, e, $\bar{M}_0$, которыми определяются размеры и форма эллипса и время прохождения перигея. Постоянную k^2M полагаем известной. Уравнения (2.6) — (2.22) были получены с учетом предположения, что масса искусственного спутника пренебрежимо мала по сравнению с массой Земли M. Вычислим среднее движение по формуле (2.22) и среднюю аномалию по формуле (2.20). Из решения уравнения Кеплера (2.14) получим эксцентрическую аномалию E. После этого выражения (2.12) и (2.13) дадут полярные координаты r и f. Декартовы координаты x и y могут быть вычислены по формулам (2.11).

Параметры a, e и T (или $\overline{M}_0$) определяют размеры и форму эллиптической орбиты в ее плоскости. Положение плоскости орбиты искусственного спутника в пространстве дается обычно в геоцентрической экваториальной системе прямоугольных координат X, Y, Z. Начало этой системы совпадает с центром Земли. Ось Z ориентирована либо в направлении среднего северного полюса мира, определяемого на данную эпоху Международной службой широты, либо в направлении мгновенного полюса мира, определяемого путем вычислений. Плоскость XY является плоскостью среднего либо мгновенного экватора, и ось OX ориентирована в ней в направлении средней или мгновенной точки весеннего равноденствия ♈. В этом разделе различие между средней и мгновенной системами координат не имеет значения, поэтому координаты X, Y, Z мы будем называть просто *экваториальными прямоугольными* координатами.

Точки пересечения орбиты с земным экватором называются узлами (рис. 2.4). Угол между линией узлов и осью Ox называется *прямым восхождением восходящего узла* и обозначается ☊. Спутник движется над экватором, когда его прямое восхождение больше ☊. Угол между плоскостью орбиты и плоскостью экватора называется *наклонением* и обозначается i. Этими двумя величинами определяется положение плоскости орбиты относительно системы XYZ. Ориентация эллипса в плоскости орбиты задается направлением линии апсид (линии апогей — перигей.— *Перев.*), т. е. оси x относительно восходящего узла, называемым *аргументом перигея* ω.

Величины ☊, ω, i совместно с a, e и T (или $\overline{M}_0$) являются параметрами, или *кеплеровыми элементами*, орбиты, и ими определяется орбита в нашей координатной системе. Поскольку третий закон Кеплера устанавливает зависимость между a и $\overline{n}$, то полуось a может быть заменена величиной $\overline{n}$ или P. Тогда соответственно вместо момента прохождения перигея T используется момент прохождения узла. Положение спутника на определенной орбите в момент t задается его радиусом-вектором r и истинной аномалией f.

2.2.1.3. Преобразование координат (прямая задача)

Как будет показано в разд. 2.3, в результате наблюдений ИСЗ обычно получаются либо топоцентрические сферические координаты искусственного спутника (прямое восхождение и склонение или азимут и высота), либо его направляющие косинусы относительно некоторых исходных направлений, либо его расстояние и относительная скорость в момент максимального сбли-

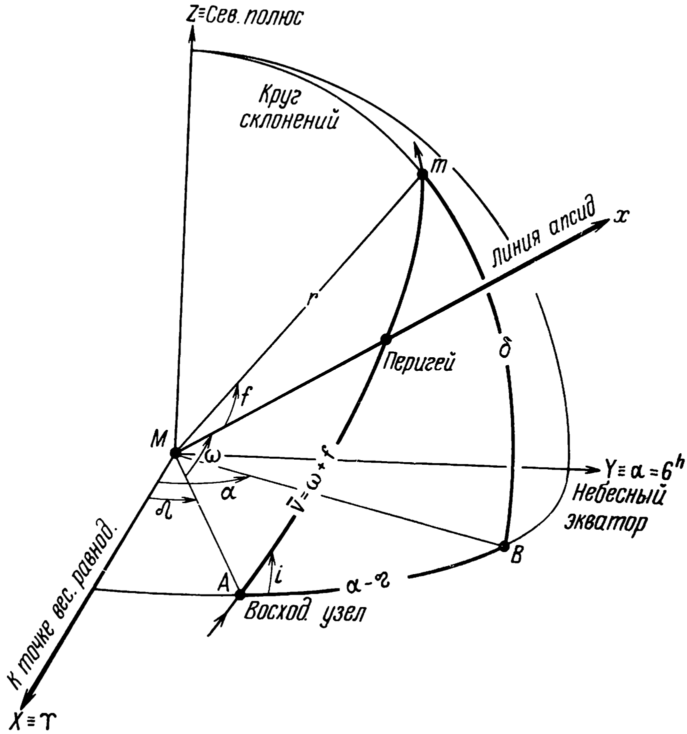


Рис. 2.4. Положение орбиты спутника в пространстве.

жения. Ниже мы исследуем, как эти данные могут быть получены по кеплеровым элементам орбиты и полярным координатам спутника в заданный момент. Эти преобразования имеют большое значение в большинстве геодезических задач, где предвычисленные координаты спутника сравниваются с наблюденными. При предварительном определении орбиты решается обратная задача: по результатам наблюдений находят мгновенные элементы орбиты.

Формулы для геоцентрических экваториальных координат спутника могут быть выведены с помощью сферического треугольника ABm (рис. 2.4).

Применяя формулы сферической тригонометрии, мы можем записать три следующих соотношения:

$$\cos(f+\omega)=\cos\delta\cos(\alpha-\Omega),$$
$$\sin(f+\omega)\cos i=\cos\delta\sin(\alpha-\Omega),$$
$$\sin(f+\omega)\sin i=\sin\delta.$$

Отсюда получаем геоцентрическое склонение и прямое восхождение:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin(f+\omega)\sin i, \\ \operatorname{tg}(\alpha - \Omega) &= \cos i \operatorname{tg}(f+\omega). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Эти величины до сравнения их с наблюденными топоцентрическими данными должны быть исправлены за геоцентрический параллакс [см. формулу (2.130)].

Более удобно непосредственно вычислять топоцентрические прямые восхождения и склонения по прямоугольным координатам. Декартовы координаты спутников в системе, показанной на рис. 2.4, выражаются так:

$$\begin{aligned} X &= r\cos\delta\cos\alpha = x\cos(xX) + y\cos(yX), \\ Y &= r\cos\delta\sin\alpha = x\cos(xY) + y\cos(yY), \\ Z &= r\sin\delta = x\cos(xZ) + y\cos(yZ). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Здесь x и y — прямоугольные координаты спутника, вычисляемые по формулам (2.11), а (xX), (yX) и т. д.— углы соответственно между x и X, y и X и т. д. Косинусы этих углов, называемые *направляющими*, могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \cos(xX) &= -\cos i\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega, \\ \cos(yX) &= -\cos i\cos\omega\sin\Omega - \sin\omega\cos\Omega, \\ \cos(xY) &= \cos i\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega, \\ \cos(yY) &= \cos i\cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega, \\ \cos(xZ) &= \sin i\sin\omega, \\ \cos(yZ) &= \sin i\cos\omega. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Контрольная формула имеет вид

$$\cos^2(xX) + \cos^2(xY) + \cos^2(xZ) = \cos^2(yX) + \cos^2(yY) + \cos^2(yZ) = 1.$$

Декартовы координаты наблюдателя определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \xi &= \rho\cos\varphi'\cos(h_G^{\Upsilon} + \lambda), \\ \eta &= \rho\cos\varphi'\sin(h_G^{\Upsilon} + \lambda), \\ \zeta &= \rho\sin\varphi'. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Здесь ρ, φ', λ — геоцентрический радиус пункта наблюдений, его геодезическая широта (положительная к северу) и долгота (положительная к востоку). Через h_G^{Υ} обозначен часовой угол точки весеннего равноденствия для долготы Гринвича. (Он отличается от гринвичского звездного времени на величину разности астрономической и геоцентрической долгот пункта наблюдения.) Подробное объяснение см. в разд. 2.5.1.1 и 2.5.1.2.

Те же прямоугольные координаты выражаются через геодезические (а не геоцентрические.— *Перев.*) координаты так:

$$\xi = (N + H)\cos\varphi\cos(h_G^{\Upsilon} + \lambda),$$
$$\eta = (N + H)\cos\varphi\sin(h_G^{\Upsilon} + \lambda),$$
$$\zeta = \left[\frac{N}{1 + (e')^2} + H\right]\sin\varphi^*.$$

Здесь N — радиус кривизны сечения земного эллипсоида плоскостью первого вертикала, e' — второй эксцентриситет эллипсоида, φ, λ, H — геодезические координаты наблюдателя и его высота над референц-эллипсоидом.

Введем топоцентрическую декартову систему координат X^*, Y^*, Z^*, оси которой параллельны соответствующим осям в системе XYZ, но начало системы совмещено с пунктом наблюдений. Координаты спутника в этой системе выражаются так:

$$\begin{aligned} X^* &= X - \xi, \\ Y^* &= Y - \eta, \\ Z^* &= Z - \zeta. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь X, Y, Z получаются по формулам (2.24), а ξ, η, ζ — по формулам (2.26).

Координаты X^*, Y^*, Z^* также могут быть выражены через топоцентрические сферические координаты:

$$\begin{aligned} X^* &= r^*\cos\delta^*\cos\alpha^*, \\ Y^* &= r^*\cos\delta^*\sin\alpha^*, \\ Z &= r^*\sin\delta^*. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Из этих формул можно получить топоцентрические координаты спутника — его прямое восхождение, склонение и радиус-вектор:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha^* &= \frac{Y^*}{X^*}, \\ \operatorname{ctg}\delta^* &= \frac{X^*}{Z^*}\sec\alpha^* = \frac{Y^*}{Z^*}\operatorname{cosec}\alpha^*, \\ r^* &= \frac{Z^*}{\sin\delta^*} = \frac{X^*}{\cos\delta^*\cos\alpha^*} = \frac{Y^*}{\cos\delta^*\sin\alpha^*} = \\ &= \sqrt{(X^*)^2 + (Y^*)^2 + (Z^*)^2}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Эти данные, отнесенные к определенному истинному времени или к средней эпохе, можно непосредственно сравнивать с надлежащим образом обработанными результатами наблюдений.

Пример

Вычислить топоцентрическое прямое восхождение и склонение спутника на момент всемирного времени август 25,0774535; 1958 г.

Кеплеровы элементы орбиты на этот же момент следующие (единица расстояния 6 378 388,0 *м*; единица времени 86 400 *сек*):

$$
\begin{aligned}
a &= 1,128647; \ (\bar{n} = 5109°,90635 \text{ в сутки});\\
e &= 0,085763 = 4°,913858;\\
T &= \text{авг. } 25,0586727 \text{ (прохождение перигея)};\\
\Omega &= 105°,381 = 105°22'52'';\\
\omega &= 28°,827 = 28°49'37'';\\
i &= 65°,200 = 65°12'00''.
\end{aligned}
$$

Координаты наблюдателя на Международном земном эллипсоиде (на эллипсоиде Хайфорда.— *Перев.*) следующие:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= +38°,566 = +38°33'58'',\\
\lambda &= -90°,425 = -90°25'30'',\\
H &= 0,000010 = 63,784 \text{ м}.
\end{aligned}
$$

1. Вычисление средней аномалии.

$$
\begin{aligned}
t &= \text{авг. } 25,0774535,\\
T &= \text{авг. } 25,0586727,\\
t - T &= 0,0187808 \text{ дня},\\
\bar{M} &= \bar{n}(t-T) = 95°,96812978 = 95°58'05'',265.
\end{aligned}
$$

2. Вычисление эксцентрической аномалии методом итерации.

$$
E_1 = \bar{M} + e\sin\bar{M} + \frac{1}{2}e^2\sin 2\bar{M} = 100°,3719238 = 100°22'19'',
$$

$$
\begin{aligned}
&\sin E_1 = 0,9836598; \quad \cos E_1 = -0,1800375,\\
&\bar{M}_1 = E_1 - e\sin E_1 = 95°,538592,\\
&\Delta E_1 = \frac{\bar{M} - \bar{M}_1}{1 - e\cos E_1} = 0,4232229,\\
&E_2 = E_1 + \Delta E_1 = 100°,7951467 = 100°47'43'',\\
&\sin E_2 = 0,9823027; \quad \cos E_2 = -0,1873004,\\
&\bar{M}_2 = E_2 - e\sin E_2 = 95°9682507,\\
&\Delta E_2 = \frac{\bar{M} - \bar{M}_2}{1 - e\cos E_2} = -0,0001195,\\
&E_3 = E_2 + \Delta E_2 = 100°,7950272 = 100°47'42''.
\end{aligned}
$$

Контроль:

$$E = \overline{M} + e \sin E_3; \quad \sin E_3 = 0{,}9823036,$$

$$e \sin E_3 = 4°49'37'', \quad E = 100°47'42'' = E_3 \text{ (сходится)}.$$

3. Вычисление истинной аномалии.

$$b = a(1 - e^2)^{1/2} = a\sqrt{0{,}9926447} = 1{,}1244886;$$

$$\sin E = 0{,}9823036,$$

$$\cos E = -0{,}1872956,$$

$$a(\cos E - e) = -0{,}3081868,$$

$$\operatorname{tg} f = \frac{b \sin E}{a(\cos E - e)} = -3{,}5841548, \quad f = 105°35'22''.$$

4. Вычисление расстояния от центра Земли до спутника.

$$r = a(1 - e \cos E) = 1{,}1467765.$$

5. Вычисление координат x и y в плоскости орбиты.

$$\sin f = 0{,}9632121,$$

$$\cos f = -0{,}2687424,$$

$$y = r \sin f = 1{,}1045890,$$

$$x = r \cos f = -0{,}3081875.$$

6. Вычисление направляющих косинусов по формулам (2.25).

$$\sin i = 0{,}9077775; \qquad \cos i = 0{,}4194521;$$

$$\sin \omega = 0{,}4821657; \qquad \cos \omega = 0{,}8760800;$$

$$\sin \Omega = 0{,}9641829; \qquad \cos \Omega = -0{,}2652383;$$

$$\cos(xX) = -0{,}1950016 - 0{,}2323700 = -0{,}4273716;$$

$$\cos(yX) = -0{,}3543118 + 0{,}1278888 = -0{,}2264230;$$

$$\cos(xY) = -0{,}0536432 + 0{,}8447014 = 0{,}7910582;$$

$$\cos(yY) = -0{,}0974681 - 0{,}4648959 = -0{,}5623640;$$

$$\cos(xZ) = 0{,}4376992; \qquad \cos(yZ) = 0{,}7952857.$$

7. Вычисление геоцентрических декартовых координат спутника по формулам (2.24).

$$X = 0{,}13171045 - 0{,}2501044 = -0{,}1183940;$$

$$Y = -0{,}2437940 - 0{,}6211811 = -0{,}8649751;$$

$$Z = -0{,}1348933 + 0{,}8784639 = 0{,}7435706.$$

Контроль:

$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2}$ должно равняться r;

$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} = 1{,}1467765$ (сходится; см. этап 4).

8. Вычисление геоцентрических декартовых координат наблюдателя по формулам (2.26) в предположении, что h_G^{Υ} равно гринвичскому звездному времени.

Из American Ephemeris and Nautical Almanac выписываем следующие данные:

$$C = 1{,}001309, \quad S = 0{,}994577,$$

$$\rho \sin \varphi' = (S + H) \sin \varphi = 0{,}6200220,$$

$$\rho \cos \varphi' = (C + H) \cos \varphi = 0{,}7829257.$$

Время наблюдений: 1958, август 25,0774535,

или 25 августа 1958, $1^h 51^m 31^s{,}98$ UT

Звездное время в 0^h UT	$22^h 11^m 00^s{,}49$;
Время UT	$1^h 51^m 31^s{,}98$;
Поправка за переход к звездному времени	$18^s{,}32$;
$h_G^{\Upsilon} \approx$ гринвич. звездн. время в момент набл.	$24^h 02^m 50^s{,}79$,
$+\lambda$	$-6^h 01^m 42^s{,}00$
$h_G^{\Upsilon} + \lambda$	$18^h 01^m 08^s{,}79 = 270°17'11'',85$

$$\sin (h_G^{\Upsilon} + \lambda) = -0{,}9999875, \quad \cos (h_G^{\Upsilon} + \lambda) = 0{,}0050025.$$

Тогда

$$\xi = \rho \cos \varphi' \cos (h_G^{\Upsilon} + \lambda) = 0{,}0039166,$$

$$\eta = \rho \cos \varphi' \sin (h_G^{\Upsilon} + \lambda) = -0{,}7820159,$$

$$\zeta = \rho \sin \varphi' = 0{,}6200220.$$

9. Вычисление топоцентрических декартовых координат спутника по формулам (2.27).

$$X^* = X - \xi = -0{,}1223106,$$

$$Y^* = Y - \eta = -0{,}0820592,$$

$$Z^* = Z - \zeta = 0{,}1235486.$$

10. Вычисление топоцентрических сферических координат спутника по формулам (2.29).

$$\operatorname{tg} \alpha^* = \frac{Y^*}{X^*} = 0{,}6709083,$$

$\alpha^* = 33°51'28'',76 + 180° = 213°51'28'',76$ (так как X^* и Y^* отрицательны);

$$\sin \alpha^* = -0{,}5571364, \quad \cos \alpha^* = -0{,}8304210.$$

$$\operatorname{tg} \delta^* = \frac{Z^* \cos \alpha^*}{X^*} = 0{,}8388264 \text{ или}$$

$$\operatorname{tg} \delta^* = \frac{Z^* \sin \alpha^*}{Y^*} = 0{,}8388264 \text{ (сходится).}$$

$$\delta^* = 39°59'26'',92.$$

Контроль:

$$r^* = Z^* \operatorname{cosec} \delta^* = 0{,}19224433,$$

$$r^* = \sqrt{(X^*)^2 + (Y^*)^2 + (Z^*)^2} = 0{,}19224433 \text{ (сходится).}$$

От величин, вычисляемых по формулам (2.29), легко перейти к азимуту и высоте спутника при помощи известных уравнений сферической астрономии:

$$\begin{aligned} \cos \bar{a} \sin \bar{A} &= -\cos \delta^* \sin (\theta - \alpha^*), \\ \cos \bar{a} \cos \bar{A} &= \sin \delta^* \cos \varphi - \cos \delta^* \cos (\theta - \alpha^*) \sin \varphi, \\ \sin \bar{a} &= \sin \delta^* \sin \varphi - \cos \delta^* \cos (\theta - \alpha^*) \cos \varphi. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Здесь $\bar{a}$ и $\bar{A}$ — топоцентрическая высота и азимут (измеряемый от точки севера по ходу часовой стрелки), а θ — местное звездное время. Величина $(\theta - \alpha^*)$ представляет топоцентрический часовой угол спутника.

Как было указано выше, некоторые методы наблюдений позволяют получить топоцентрические направляющие косинусы спутника или его расстояние и (или) его относительную скорость при прохождении. Проекции направляющих косинусов относительно осей север — юг и восток — запад в плоскости горизонта могут быть вычислены по формулам Пифагора сферической тригонометрии:

$$m^* = \cos \bar{a} \cos \bar{A},$$
$$n^* = \cos \bar{a} \sin \bar{A}, \qquad (2.31)$$

где m^* — направляющий косинус относительно оси север — юг, а n^* — направляющий косинус относительно оси восток — запад. Сравнение формул (2.31) и (2.30) приводит к выводу, что направляющие косинусы могут быть вычислены по топоцентрическому прямому восхождению и склонению следующим образом:

$$m^* = \sin \delta^* \cos \varphi - \cos \delta^* \cos (\theta - \alpha^*) \sin \varphi,$$
$$n^* = -\cos \delta^* \sin (\theta - \alpha^*). \qquad (2.32)$$

Местное звездное время прохождения спутника равно его геоцентрическому прямому восхождению, вычисляемому по формуле (2.23). Расстояние от наблюдателя до спутника в этот момент может быть вычислено с помощью выражения (2.29). Скорость движения спутника относительно наблюдателя определяется из решения уравнений живой силы (2.18), исправленного за скорость движения наблюдателя.

Компоненты абсолютной скорости спутника определяются следующими уравнениями [60, p. 36]:

$$X' = \frac{a\bar{n}}{r} (-A_X \sin E + B_X \cos E),$$
$$Y' = \frac{a\bar{n}}{r} (-A_Y \sin E + B_Y \cos E), \qquad (2.33)$$
$$Z' = \frac{a\bar{n}}{r} (-A_Z \sin E + B_Z \cos E),$$

где

$$A_X = a \cos (xX), \quad B_X = b \cos (yX),$$
$$A_Y = a \cos (xY), \quad B_Y = b \cos (yY),$$
$$A_Z = a \cos (xZ), \quad B_Z = b \cos (yZ).$$

Для численного контроля вычислений могут служить следующие выражения:

$$A_X^2 + A_Y^2 + A_Z^2 = a^2,$$
$$B_X^2 + B_Y^2 + B_Z^2 = b^2,$$
$$A_X B_X + A_Y B_Y + A_Z B_Z = 0.$$

Абсолютная скорость спутника вычисляется по формуле

$$s' = \sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2}.$$

Компоненты абсолютной скорости наблюдателя, получаемые путем дифференцирования уравнений (2.26), имеют вид

$$\begin{aligned} \xi' &= -\theta'\rho\cos\varphi'\sin(h_G^{\Upsilon}+\lambda), \\ \eta' &= \theta'\rho\cos\varphi'\cos(h_G^{\Upsilon}+\lambda), \\ \zeta' &= 0. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Здесь θ' — изменение часового угла h_G^{Υ}, т. е. скорость вращения Земли (в радианах за единицу времени), используемая в вычислениях. Величины θ' и $\bar{n}$ (2.33) должны выражаться в тех же единицах, что и составляющие скорости спутника.

Составляющими относительной скорости спутника являются разности

$$\begin{aligned} &X'-\xi', \\ &Y'-\eta', \\ &Z'. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Отсюда относительная скорость равна

$$(s^*)' = \sqrt{(X'-\xi')^2+(Y'-\eta')^2+(Z')^2}.$$

2.2.1.4. Преобразование координат (обратная задача)

Когда элементы орбиты вычисляются по результатам наблюдений, решается обратная задача преобразования координат. Этот метод используется при предварительном определении орбиты, когда предполагается, что кеплеровы элементы постоянны по крайней мере в течение определенного периода времени. Рассмотрение этой проблемы выходит за рамки данной книги, и поэтому ниже будут высказаны лишь некоторые соображения.

Поскольку орбита характеризуется шестью элементами, для ее определения должны быть заданы шесть независимых величин. Наилучшей является такая комбинация, в которой для определенного момента известны декартовы координаты спутника X, Y, Z и составляющие его скорости X', Y', Z'. Это классический случай, и для него известно решение, описанное Брауэром и Клеменсом [60, pp. 47—50]. Однако этот случай для искусственного спутника, пожалуй, маловероятен.

Как показано в разд. 2.3, современные методы, в которых наблюдения производятся с движущейся Земли, дают либо только направление на спутник из пункта наблюдений (в виде прямого восхождения и склонения, или азимута и высоты, или направляющих косинусов), или только минимальное расстояние от наблюдателя до спутника и его относительную скорость в этот момент, или только расстояние до спутника. Лишь очень немногие методы наблюдений позволяют проводить одновременные комплексные измерения.

Одно полное наблюдение направления дает две независимые величины, поэтому необходимы три наблюдения ИСЗ на одной и той же орбите для определения ее шести элементов. Применяя для этих наблюдений выражения с (2.24) по (2.32) в обратном порядке, мы получим в результате шесть уравнений, которые содержат шесть неизвестных элементов орбиты. Однако окончательные уравнения являются трансцендентными и содержат искомые элементы в очень сложной форме. Поэтому для обычных процессов невозможно прямое решение. Методы Лапласа и Гаусса являются классическими для решения этой проблемы. В обоих методах вначале определяются промежуточные данные, по которым затем находятся кеплеровы элементы орбиты. Детальное описание этого решения читатель найдет в книге Мультона [132 pp. 191—260]. Решение методом итерации дали Бригс и Слоуи [58], а другой быстрый метод — Гаррис и Джастров [88].

Одно полное измерение эффекта Допплера дает уверенные значения тангенциальной скорости и расстояния до спутника в момент его максимального приближения к наблюдателю. Таким образом, определяются две независимые величины, поэтому для определения приближенной орбиты необходимы наблюдения с трех станций. Итерация (если она возможна) позволяет уточнить значения полученных элементов. Один из методов решения задачи для этого случая описал Ижак [93]. Другой метод анализа измерений эффекта Допплера опубликовали Хемптон [87] и Котельников и др. [119].

Описание основных методов определения приближенных орбит дано в [56, sec. G].

2.2.1.5. Гравитационная постоянная

В разд. 2.2.1.1 упоминалась гравитационная постоянная $k^2 = 6{,}673 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}/*г·сек*^{2}. Это значение получено из непосредственных измерений. Пользоваться системой СГС в астрономии весьма неудобно. Во-первых, непрактично выражать массу небесных тел в граммах, так как она неизвестна с такой точностью. Еще больше трудностей с единицей длины. Расстояния между небесными телами нельзя непосредственно измерить в сантиметрах с требуемой точностью. Поэтому исключительно для удобства в астрономии за единицу массы принята масса Солнца, за единицу времени — эфемеридные сутки, состоящие из 86 400 эфемеридных секунд, за единицу длины — астрономическая единица, определяемая как длина большой полуоси эллиптической орбиты, которая по третьему закону Кеплера

$$\bar{n}^2 a^3 = k^2 (1+m)$$

должна иметь такое значение, при котором гауссова постоянная k точно равна 0,01720209895 (k^2 = 0,000295912208286).

Значение гравитационной постоянной, соответствующее k^2, может быть получено с помощью других единиц из выражения

$$k^2 = 0{,}000295912208286 \frac{L^3}{M_S T^2}, \qquad (2.36)$$

где M_S — масса Солнца, T — эфемеридные сутки, а L — астрономическая единица, выраженная в новых единицах.

Для движения вокруг Земли в качестве единиц используются масса Земли, экваториальный радиус Земли и эфемеридные сутки. Значение k^2 в этой системе зависит от принятых значений M_S и L в выражении (2.36). Используя наиболее современное значение астрономической единицы 149 598 845 *км*, вычисленное по радиолокации Венеры [135], и экваториальный радиус Земли 6378,160 *км* [80], мы получаем L = 23 454,85923. С принятым значением M_S = 333 432 эти величины дают

$$k^2 = 11451{,}28 \text{ (радиус Земли)}^3/\text{(сутки)}^2\cdot\text{(масса Земли)},$$

$$k = 107{,}0107 \text{ (радиус Земли)}^{3/2}/\text{(сутки)}\cdot\text{(масса Земли)}^{1/2}.$$

Следует также отметить, что величина k^2M (где M— масса Земли) может быть определена из анализа земных гравитационных наблюдений. Современное ее значение, соответствующее приведенному значению радиуса Земли и экваториальному ускорению силы тяжести 978,032 *см/сек*^{2}, равно

$$k^2M = 3{,}986036\cdot 10^{20} \ \textit{см}^3/\textit{сек}^2$$

(см. разд. 2.5.2.3), что согласуется с данными, полученными с помощью астрономических методов. Это значение в системе сутки — радиус Земли дает:

$$k^2 = 11467{,}86 \text{ (радиус Земли)}^3/\text{(сутки)}^2\cdot\text{(масса Земли)},$$

$$k = 107{,}0881 \text{ (радиус Земли)}^{3/2}/\text{(сутки)}\cdot\text{(масса Земли)}^{1/2}.$$

В другой системе единиц, обычно используемой в спутниковых вычислениях, $k^2M = 1$.

В этом случае единицей длины является a_e, а единица времени (каноническая единица) вычисляется по формуле

$$T = \sqrt{\frac{a_e^3}{k^2M}}. \qquad 101$$

Если величина k^2M считается точно известной, то она определяет единицу расстояния, которую можно назвать *гравитационным радиусом Земли*. Это радиус экваториальной круговой орбиты, по которой частица пренебрежимо малой массы, не испытывающая возмущений, будет совершать оборот вокруг Земли за период $2\pi/k^2M$ эфемеридных секунд.

Если же величина k^2M не считается точно известной, то, поскольку в этом случае третий закон Кеплера уже не определяет среднего движения $\bar{n}$ по орбите с большой полуосью a, орбита должна определяться семью [a, e, $\bar{n}$, T (или $\bar{M}_0$), i, ω и Ω], а не шестью кеплеровыми параметрами.

Более полно вопрос о гравитационной постоянной и астрономической единице изложен в разд. 2.5.2.3 и в работах [81, 91, 128, 153, 171].

2.2.2. Возмущенные промежуточные орбиты

В разд. 2.2.1 было показано, что сферический спутник, обращаясь вокруг сферической Земли, под влиянием сил взаимного притяжения описывает коническое сечение. Сферическую Землю можно заменить точкой, помещенной в один из фокусов конического сечения, в которой сосредоточена вся ее масса.

Мы ограничимся случаем, когда коническим сечением является эллипс, размеры которого, форма и ориентация определяются кеплеровыми элементами. Если окружающая Землю среда оказывает сопротивление спутнику, или распределение масс Земли или спутника несферично, или на движение спутника влияют другие небесные тела, или взаимное притяжение этих двух точечных масс нарушается каким-либо другим путем, то орбита спутника перестает быть правильным эллипсом. Расхождения в координатах и компонентах скорости для возмущенной и нормальной орбит, получаемые по формулам (2.24) и (2.33), называются *возмущениями*.

Возмущения могут рассматриваться с двух точек зрения. В первом случае предполагается, что искажаются непосредственно координаты спутника. При этом *вариации координат*, т. е. разности между нормальными и возмущенными координатами, вычисляются различными численными методами и не делается попыток выразить аналитически кривую возмущенной орбиты [60, chap. V, XIII]. Во втором случае предполагается, что спутник движется по эллиптической орбите, элементы которой непрерывно меняются. Предполагается также, что переменный эллипс касается действительной орбиты в каждой текущей ее точке и что действительная скорость спутника равна скорости, определяемой касательной невозмущенной орбитой. Вариации во времени элементов (или параметров) проявляются в попятном движении узлов относительно полярной оси, в постоянном изменении наклонения, во вращении линии апсид и в непрерывном изменении размеров и формы эллипса и момента прохождения перигея. Такое движение называется *оскулирующим* (соприкасающимся.— *Перев.*). В этом случае говорят, что эллипс оскулирует (соприкасается) с действительной орбитой в точке касания. Если в момент, называемый *моментом оскуляции*, удалить все возмущающие силы, то спутник будет двигаться по эллиптической орбите, определяемой мгновенными, или *оскулирующими*, *элементами*. В этом случае возмущениями являются различия между элементами кеплеровой орбиты в некоторую начальную эпоху и в момент оскуляции. Эти возмущения могут быть получены путем интегрирования по времени производных элементов орбиты, т. е. путем вариации элементов в заданном интервале времени. В дальнейшем изложении мы вернемся к этому способу.

2.2.2.1. Возмущения элементов орбиты

Причины упомянутых выше возмущений обычно выражаются в форме *возмущающих функций* R, которые следует прибавить к потенциалу притяжения сферы. Определение различных возмущающих функций рассматривается в следующих разделах. Здесь мы рассмотрим лишь *уравнения Лагранжа* для вариаций элементов в зависимости от некоторой возмущающей функции R, когда $M=1$ [132, p. 399]:

$$
\begin{aligned}
\Omega' &= \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i},\\
i' &= \frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega}\cos i - \frac{\partial R}{\partial \Omega}\right),\\
\omega' &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{-\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\,\frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial e},\\
a' &= \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial M},\\
e' &= \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\,\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
T' &= \frac{dT}{dt} = \frac{1-e^2}{n^2a^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{2}{n^2 a}\,\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Вместо последнего уравнения системы (2.37), выражающего вариации времени прохождения перигея, обычно используют вариации средней аномалии. Из уравнения (2.20) видно, что

$$\frac{d\overline{M}}{dt}=\overline{n}-\overline{n}\frac{dT}{dt}.$$

Поэтому вместо последнего уравнения в системе (2.37) можно записать

$$\overline{M}'=\frac{d\overline{M}}{dt}=\overline{n}-\frac{1-e^2}{\overline{n}a^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{\overline{n}a}\frac{\partial R}{\partial a}.$$

Эти уравнения называют *уравнениями движения* в функции кеплеровых элементов. Возмущающая функция, входящая в эти формулы, может быть представлена либо в аналитическом виде, либо в виде, удобном для вычисления на счетных машинах. Если производная функция взята со всей полнотой и строгостью и известны все требуемые физические постоянные, то элементы орбиты спутника в заданный момент могут быть вычислены путем прибавления к элементам начальной эпохи совокупности значений системы (2.37). Результирующие орбиты называются *промежуточными*, и в большинстве случаев они хорошо представляют истинную орбиту. В уравнениях (2.37) элементы орбиты a, e, i и т. д. являются оскулирующими, но на практике заменяются некоторыми средними элементами. В этом случае для окончательного решения необходимо несколько последовательных приближений. Можно также подставить в уравнения (2.37) некоторые зависимости для элементов орбиты, выражающие их вариации по ω, Ω, $\overline{M}$, T_0 и t, и таким путем получить решение.

Существуют и другие методы определения промежуточных орбит. В некоторых из них непосредственно не используются кеплеровы элементы и уравнения движения в виде (2.37), потому что окончательные формулы становятся чрезвычайно сложными. В этих методах вместо кеплеровых элементов применяются различные виды *канонических переменных*.

К кеплеровым элементам наиболее близки по значениям переменные Делоне, определяемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} L&=\sqrt{k^2Ma}, & l&=\overline{M},\\ G&=L\sqrt{1-e^2}, & g&=\omega,\\ H&=G\cos i, & h&=\Omega. \end{aligned} \tag{2.38}$$

При очень малых эксцентриситетах, когда нельзя найти точку перигея, и при очень малых наклонениях, когда положение точки узла становится неопределенным, используется другая система канонических переменных. Эти значения связаны с переменными

Делоне следующим образом [60, p. 540]:

$$\begin{array}{ll} L, & l+h+g, \\ G-L, & g+h, \\ H-G, & h. \end{array} \qquad (2.39)$$

Причины возмущений могут быть выражены также в форме ортогональных составляющих *возмущающей силы*. Эти составляющие являются частными производными возмущающей функции в выбранных направлениях. Используя уравнения, подобные

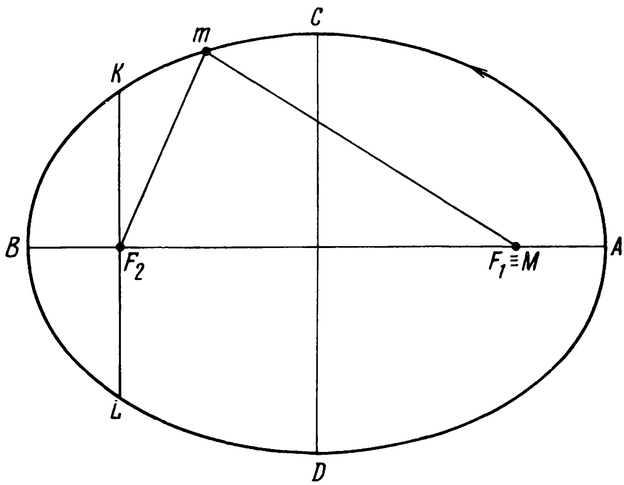


Рис. 2.5. Влияние компонент возмущающей силы на параметры орбиты.

(2.37), можно определить вариации элементов по составляющим возмущающей силы. Они были впервые описаны Гауссом и носят его имя (уравнение (33) у Брауэра и Клеменса [60, p. 30]). Эти составляющие возмущающей силы могут быть разложены по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Их влияние на кеплеровы элементы наиболее отчетливо может быть представлено, если возмущающая сила разложена по компонентам S, T и N. Ортогональная составляющая S перпендикулярна к плоскости орбиты и положительна к северу; тангенциальная составляющая T является касательной и положительна в направлении движения; нормальная составляющая N перпендикулярна к T и S и положительна в сторону Земли. Влияние этих составляющих на элементы орбиты приведено в табл. 2.1 [132, p. 332] и отражено на рис. 2.5, который соответствует положительным значениям возмущающих составляющих; для отрицательных значений возмущающих составляющих результат имеет противоположный знак.

В упомянутых выше уравнениях Гаусса составляющие возмущающей силы направлены по радиусу-вектору, по перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости орбиты и по перпендику-

Таблица 2.1

Влияние составляющих возмущающей силы на элементы орбиты

Составляющие / Элементы орбиты	S	T	N
Узел	Перемещается поступательно вперед в первой и второй четвертях; в третьей и четвертой четвертях движется в обратном направлении	0	0
Склонение	Возрастает в первой и четвертой четвертях и убывает во второй и третьей	0	0
Большая ось	0	Всегда возрастает	0
Линия апсид	Не изменяется, если ω отсчитывается от фиксированной точки, а не от ☊	В интервале ACB смещается вперед; в интервале BDA смещается назад	В интервале LAK смещается вперед; в интервале KBL смещается назад
Эксцентриситет	0	В интервале DAC возрастает; в интервале CBD убывает	В интервале ACB убывает; в интервале BDA возрастает

ляру к обоим упомянутым выше направлениям. Преобразование их в составляющие S, T и N может быть осуществлено с помощью выражений, приведенных Мультоном [132, p. 405].

Возмущения, испытываемые спутниками, можно подразделить на две группы: гравитационные и негравитационные.

Наиболее крупные гравитационные возмущения вызываются тем, что гравитационное поле Земли фактически несферично, и это оказывает влияние на движение ИСЗ (земные возмущения). Более слабые возмущения вызываются влиянием Луны и Солнца на более высокие спутники (лунно-солнечные возмущения), приливами и отливами и эффектом теории относительности.

Из негравитационных возмущений наиболее крупным является механическое торможение низких спутников в атмосфере. Очень малые возмущения вызываются также различными электромагнитными эффектами и световым давлением.

Возмущения могут быть, следовательно, классифицированы по их периодам или по их величине. В отношении периодов возмущения обычно подразделяют на вековые, долгопериодические и короткопериодические. Изменение элементов от вековых возмущений происходит со временем линейно или почти линейно. Долгопериодические возмущения вызывают вариации элементов орбиты сравнительно большого периода. Большинство из них изменяется вместе с величиной ω, которая в случае земного спутника изменяется со скоростью $12°$ в сутки (см. рис. 2.7). Все остальные вариации вызываются короткопериодическими возмущениями. Классификация возмущений в отношении величины поясняется в разд. 2.2.2.3.

С геодезической точки зрения земные влияния имеют большое значение, потому что они зависят от действительной формы и распределения масс Земли. По наблюдениям возмущений можно определить некоторые гравитационные параметры, которые в свою очередь дают информацию о форме и распределении масс Земли. В последующих разделах будут детально рассмотрены земные влияния, тогда как остальные эффекты будут изложены кратко. Прежде чем переходить к земным возмущениям, необходимо вначале описать гравитационное поле Земли.

2.2.2.2. Потенциал силы тяжести Земли

Потенциал притяжения тела с произвольно распределенной массой M выражается формулой

$$V = k^2 \int\limits_M \frac{dm}{s}, \tag{2.40}$$

где k^2 — гравитационная постоянная, а s — расстояние между

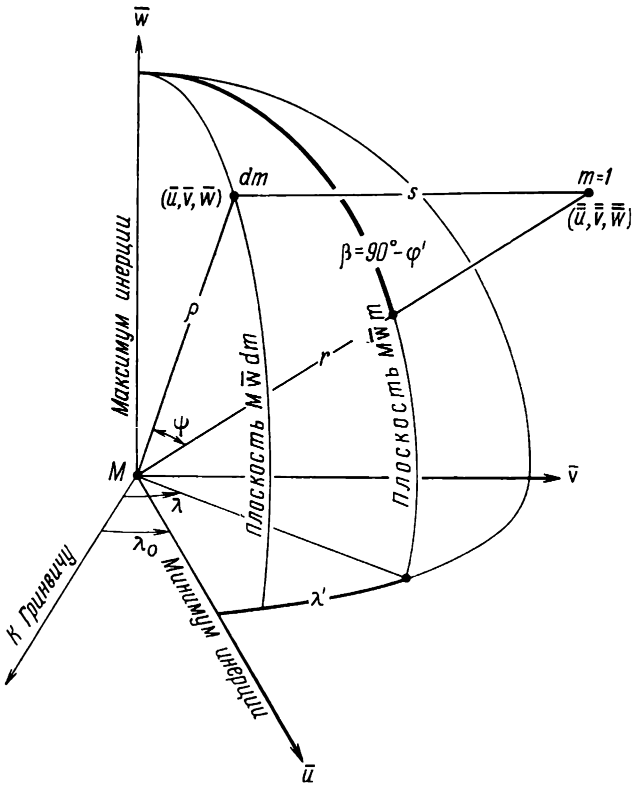


Рис. 2.6. Геоцентрические инерциальные прямоугольные координаты.

притягивающим элементом массы dm и притягиваемым телом единичной массы. Символ M показывает, что интегрирование производится по всей массе M. Исследование будем проводить в геоцентрической прямоугольной системе координат $\bar u$, $\bar v$, $\bar w$, где ось $\bar w$ совпадает с мгновенной полярной осью (одной из главных осей инерции Земли), $\bar u$ — главная ось инерции в плоскости экватора, относительно которой момент инерции минимален, и ось $\bar v$ перпендикулярна к $\bar u$ и $\bar w$, как видно на рис. 2.6. Положение тела единичной массы в этой системе координат задается либо прямоугольными координатами $\bar{\bar u}$, $\bar{\bar v}$, $\bar{\bar w}$, либо сферическими геоцентрическими координатами φ', λ', r. Положение элемента массы dm задается прямоугольными координатами $\bar u$, $\bar v$, $\bar w$. Его положение относительно притягиваемой точки определяется полярными координатами ρ и ψ.

Из рис. 2.6 следует, что

$$s^2 = \rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos\psi = r^2\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r}\cos\psi\right]$$

или

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r}(1+t)^{-1/2}, \tag{2.41}$$

где

$$t = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r}\cos\psi.$$

Разлагая (2.41) по биному, получаем

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 - \frac{5}{10}t^3 + \frac{35}{128}t^4 - \ldots\right).$$

Подставляя это значение в уравнение (2.40) и производя почленное интегрирование, находим

$$V = \frac{k^2}{r}\int\limits_M dm - \frac{k^2}{r}\int\limits_M \frac{t}{2}\,dm + \frac{k^2}{r}\int\limits_M \frac{3t^2}{8}\,dm - \frac{k^2}{r}\int\limits_M \frac{5t^3}{16}\,dm + \ldots,$$

или

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} V_n, \tag{2.42}$$

где после подстановки значений t из (2.41) получаем

$$V_0 = \frac{k^2}{r}\int\limits_M dm,$$

$$V_1 = \frac{k^2}{r^2}\int\limits_M \rho\cos\psi\,dm,$$

$$V_2 = \frac{k^2}{2r^3}\int\limits_M \rho^2(3\cos^2\psi - 1)\,dm,$$

$$\vdots$$

Можно показать, что функция от ψ, стоящая под знаком интеграла n-го порядка, может быть вычислена с помощью следующих общих выражений, обозначаемых $P_n(\cos\psi)$ или $P_n(\mu)$ и называемых полиномами Лежандра n-й степени (сферическими гармониками.— *Перев.*):

$$P_n(\cos\psi) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{d(\cos\psi)^n}(\cos^2\psi - 1)^n$$

или

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \tag{2.43}$$

Например, первые пять сферических гармоник имеют следующий вид:

$$P_0(\mu) = 1,$$
$$P_1(\mu) = \mu,$$
$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1),$$
$$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu),$$
$$P_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3).$$

Формулы для сферических гармоник до восьмой степени даны в [66, р. 151 и 159]. Графики этих функций приведены там же [66, р. 185].

Следует отметить, что связь между любой сферической гармоникой $(n+1)$-го порядка и двумя предыдущими устанавливается следующей формулой:

$$(n+1) P_{n+1}(\mu) - (2n+1)\mu P_n(\mu) + n P_{n-1}(\mu) = 0.$$

Отсюда, если известны $P_n(\mu)$ и $P_{n-1}(\mu)$, то можно вычислить $P_{n+1}(\mu)$.

С помощью выражения (2.43) можно получить любой n-й член разложения потенциала по формуле

$$V_n = \frac{k^2}{r^{n+1}} \int_M \rho^n P_n(\mu)\, dm, \tag{2.44}$$

а сам потенциал определяется выражением (2.42).

Используя уравнения (2.44) и (2.43), можно определить значения членов, входящих в уравнение (2.42).

Член нулевой степени равен

$$V_0 = \frac{k^2}{r} \int_M P_0(\mu)\, dm = \frac{k^2}{r} \int_M dm = \frac{k^2 M}{r}. \tag{2.45}$$

Это формула потенциала притяжения сферы с массой M. Если у тела сферическое распределение массы, то члены высших степеней равны нулю.

Член первой степени равен

$$V_1 = \frac{k^2}{r^2} \int_M \rho P_1(\mu)\, dm = \frac{k^2}{r^2} \int_M \rho \cos\psi\, dm.$$

Но из рис. 2.6 видно, что

$$\cos\psi = \frac{\bar{u}\bar{\bar{u}} + \bar{v}\bar{\bar{v}} + \bar{w}\bar{\bar{w}}}{\rho r},$$

и поэтому

$$V_1 = \frac{k^2}{r^3}\left(\bar{\bar{u}}\int\limits_M \bar{u}\,dm - \bar{\bar{v}}\int\limits_M \bar{v}\,dm + \bar{\bar{w}}\int\limits_M \bar{w}\,dm\right).$$

Как следует из классической механики, интегралы этих выражений равны нулю, так как начало координат системы $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ расположено в ее центре тяжести. Поэтому в данной системе координат

$$V_1 = 0. \tag{2.46}$$

Для вычисления члена второй степени потребуется несколько больше времени:

$$V_2 = \frac{k^2}{r^2}\int\limits_M \rho^2 P_2(\mu)\,dm = \frac{k^2}{2r^3}\int\limits_M \rho^2(3\cos^2\psi - 1)\,dm.$$

В этом выражении

$$\rho^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2$$

и

$$\cos^2\psi = \frac{(\bar{u}\bar{\bar{u}} + \bar{v}\bar{\bar{v}} + \bar{w}\bar{\bar{w}})^2}{\rho^2 r^2}.$$

Подставляя их в предыдущую формулу, находим

$$V_2 = \frac{k^2}{2r^5}\Bigg[\bar{\bar{u}}^2\int\limits_M(2\bar{u}^2 - \bar{v}^2 - \bar{w}^2)\,dm + \bar{\bar{v}}^2\int\limits_M(2\bar{v}^2 - \bar{w}^2 - \bar{u}^2)\,dm +$$
$$+ \bar{\bar{w}}^2\int\limits_M(2\bar{w}^2 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2)\,dm + 6\bar{\bar{u}}\bar{\bar{v}}\int\limits_M \bar{u}\bar{v}\,dm +$$
$$+ 6\bar{\bar{v}}\bar{\bar{w}}\int\limits_M \bar{v}\bar{w}\,dm + 6\bar{\bar{w}}\bar{\bar{u}}\int\limits_M \bar{w}\bar{u}\,dm\Bigg].$$

Если обозначить *моменты инерции* через

$$A = \int\limits_M(\bar{v}^2 + \bar{w}^2)\,dm, \qquad D = \int\limits_M \bar{v}\bar{w}\,dm,$$

$$B = \int\limits_M(\bar{u}^2 + \bar{w}^2)\,dm, \qquad E = \int\limits_M \bar{w}\bar{u}\,dm,$$

$$C = \int\limits_M(\bar{u}^2 + \bar{v}^2)\,dm, \qquad F = \int\limits_M \bar{u}\bar{v}\,dm,$$

то получим

$$V_2=\frac{1}{2}\frac{k^2}{r^5}[\bar{\bar{u}}^2(B+C-2A)+\bar{\bar{v}}^2(C+A-2B)+$$
$$+\bar{\bar{w}}^2(A+B-2C)+6\bar{\bar{v}}\bar{\bar{w}}D+6\bar{\bar{w}}\bar{\bar{u}}E+6\bar{\bar{u}}\bar{\bar{v}}F]. \qquad (2.47)$$

Величины A, B и C являются моментами инерции тела относительно осей $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$ соответственно. В случае симметрии относительно оси вращения $\bar{w}$ получаем $A=B$ и $F=0$. Если ось $\bar{w}$ является главной осью инерции тела (например, если она совпадает с мгновенной осью вращения), то моменты инерции D и E равны нулю. В этом упрощенном случае ориентация оси $\bar{u}$ может быть произвольной, например положительной в направлении гринвичского меридиана, и потенциал в (2.47) станет равным

$$V_2=\frac{1}{2}\frac{k^2}{r^5}[(\bar{\bar{u}}^2+\bar{\bar{v}}^2)(C-A)+2\bar{\bar{w}}^2(A-C)].$$

Однако можно продолжить преобразование общей формы уравнения (2.47). Преобразуя прямоугольные координаты $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$ в сферические при помощи формул

$$\bar{\bar{u}}=r\sin\beta\cos\lambda',$$
$$\bar{\bar{v}}=r\sin\beta\sin\lambda',$$
$$\bar{\bar{w}}=r\cos\beta,$$
$$\beta=90^\circ-\varphi',$$

получаем из уравнения (2.47) следующее выражение:

$$V_2=\frac{k^2}{r^3}\left\{\frac{2C-(A+B)}{4}(1-3\cos^2\beta)+\right.$$
$$+(3E\cos\lambda'+3D\sin\lambda')\cos\beta\sin\beta+$$
$$\left.+\left[\frac{3}{4}(B-A)\cos 2\lambda'+\frac{3}{2}F\sin 2\lambda'\right]\sin^2\beta\right\}, \qquad (2.48)$$

или в простейшем случае, когда $A=B$ и $D=E=F=0$,

$$V_2=\frac{k^2}{r^3}\left[\frac{C-A}{2}(1-3\cos^2\beta)\right].$$

Члены высших порядков могут быть получены аналогичным путем. Здесь мы хотели бы ввести другое выражение для потенциала притяжения, которое применимо, когда притягиваемая точка находится вне притягивающей массы или на ее поверхности. У Байерли [66, p. 198] дается формула, справедливая для любых гармонических функций:

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_e^{n+1}}{r^{n+1}}Y_n(\mu,\lambda') \tag{2.49}$$

Здесь $Y_n(\mu, \lambda')$ — *поверхностная сферическая гармоника* n-го порядка, $\mu=\cos\beta=\sin\varphi'$, a_e — экваториальный радиус Земли. Величина

$$\frac{1}{r^{n+1}}Y_n(\mu,\lambda')$$

называется *объемной сферической гармоникой*.

Поверхностная сферическая гармоника выражается следующей формулой:

$$Y_n(\mu,\lambda')=\sum_{m=0}^{n}(a_{nm}\cos m\lambda'+b_{nm}\sin m\lambda')P_{nm}(\mu). \tag{2.50}$$

Величины a_{nm}, b_{nm} являются коэффициентами, а $P_{nm}(\mu)$ называется *присоединенной функцией Лежандра* (или лежандрианом) n-й *степени и* m-го *порядка*, которая вычисляется с помощью следующего общего уравнения:

$$P_{nm}(\mu)=\frac{1}{\sqrt{h_{nm}}}\sqrt{\frac{\varkappa_m(n-m)!}{(n+m)!}}\frac{d^mP_n(\mu)}{d\mu^m}\sin^m\beta. \tag{2.51}$$

Здесь $P_n(\mu)$ — гармоника, получаемая из выражения (2.43), а $\varkappa_m=1$, если $m=0$, или $\varkappa_m=2$, если $m\neq 0$. Если $m=0$, лежандриан называется *зональной гармоникой* [сравните уравнения (2.43) и (2.51)]; если $m=n$,— *секториальной гармоникой*, а если $0<m<n$,— *тессеральной* (мозаичной.— *Перев.*) гармоникой. Общее количество коэффициентов в формулах (2.49) или (2.50) при суммировании от 0 до p равно $(p+1)^2$, из которых число зональных коэффициентов равно $p+1$, секториальных $2p$ и тессеральных $p(p-1)$. Применяются следующие три вида полиномов Лежандра:

стандартные (*обычные*), для которых

$$h_{nm}=\frac{\varkappa_m(n-m)!}{(n+m)!}$$

(формулы для них до восьмой степени включительно приведены у Байерли [66, pp. 198—199]);

нормированные, для которых

$$h_{nm}=1$$

(таблицы таких полиномов до восьмой степени включительно приведены у Юнга [106, pp. 623—624]);

полностью нормированные, для которых

$$h_{nm} = (2n+1)^{-1}.$$

В наших рассуждениях мы используем обычные полиномы Лежандра. Каула [108] при гармоническом анализе гравитации отдает предпочтение нормированным и полностью нормированным гармоникам.

Сравнивая (2.42) и (2.49), можно заметить, что

$$V_n = \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} Y_n(\mu, \lambda').$$

Определив первые три члена, получим следующую систему уравнений:

$$V_0 = \frac{a_e}{r} Y_0(\mu, \lambda') = \frac{a_e}{r} a_{00} P_{00}(\mu) = \frac{a_e}{r} a_{00},$$

$$V_1 = \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 Y_1(\mu, \lambda') = \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 [a_{10} P_{10}(\mu) + (a_{11}\cos\lambda' +$$
$$+ b_{11}\sin\lambda') P_{11}(\mu)] + \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 [a_{10}\cos\beta + (a_{11}\cos\lambda' + b_{11}\sin\lambda')\sin\beta],$$

$$V_2 = \left(\frac{a_e}{r}\right)^3 V_2(\mu, \lambda') = \left(\frac{a_e}{r}\right)^3 [a_{20} P_{20}(\mu) +$$
$$+ (a_{21}\cos\lambda' + b_{21}\sin\lambda') P_{21}(\mu) + (a_{22}\cos 2\lambda' + b_{22}\sin 2\lambda') P_{22}(\mu)] =$$
$$= \left(\frac{a_e}{r}\right)^3 \left[a_{20}\frac{1}{2}(3\cos^2\beta - 1) + (a_{21}\cos\lambda' + b_{21}\sin\lambda') 3\cos\beta\sin\beta +\right.$$
$$\left. + (a_{22}\cos 2\lambda' + b_{22}\sin 2\lambda') 3\sin^2\beta\right].$$

При сравнении этих уравнений с (2.45), (2.46) и (2.48) можно установить следующую связь между коэффициентами a_{nm}, b_{nm} и физическими константами Земли:

$$\begin{aligned}
a_{00} &= \frac{k^2 M}{a_e}, \\
a_{10} &= a_{11} = b_{11} = 0, \\
a_{20} &= -\frac{k^2}{a_e^3}\left[C - \frac{1}{2}(A+B)\right], \\
a_{21} &= \frac{k^2}{a_e^3} E, \quad b_{21} = \frac{k^2}{a_e^3} D, \\
a_{22} &= \frac{k^2}{a_e^3}\frac{B-A}{4}, \quad b_{22} = \frac{k^2}{a_e^3}\frac{F}{2}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Коэффициенты третьей степени являются функциями третьих моментов и т. д.

В упрощенном случае

$$a_{00} = \frac{k^2 M}{a_e}, \qquad a_{20} = -\frac{k^2}{a_e^3}(C - A).$$

Все остальные коэффициенты второй степени при этом равны нулю.

Общая формула, выражающая связь между коэффициентами и возмущающей массой Земли, приведена у Юнга [106, p. 587, формула (33.2)].

В спутниковой геодезии в выражениях (2.49) и (2.50) обычно используются безразмерные коэффициенты, обозначаемые через C_{nm}, S_{nm}. Связь между этими коэффициентами и коэффициентами a_{nm}, b_{nm} определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} C_{nm} &= a_{nm}\frac{a_e}{k^2 M}, \\ S_{nm} &= b_{nm}\frac{a_e}{k^2 M}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

где $n \geqslant m \geqslant 0$.

С этими обозначениями уравнения (2.49) и (2.50) выражают потенциал произвольного тела во внешней точке в виде, рекомендованном Международным астрономическим союзом [86]:

$$V = \frac{k^2 M}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm}\cos m\lambda' + S_{nm}\sin m\lambda')\, P_{nm}(\mu)\right]. \tag{2.54}$$

В современной литературе употребляются другие обозначения:

$$\begin{aligned} J_n &= -C_{n0}, \\ J_{nm} &= -C_{nm}, \\ K_{nm} &= -S_{nm}, \end{aligned}$$

где $n > 0$. С этими обозначениями потенциал силы тяжести выражается так:

$$\begin{aligned} V = \frac{k^2 M}{r}\Big\{1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \Big[J_n P_n(\mu) + \\ + \sum_{m=1}^{n}(J_{nm}\cos m\lambda' + K_{nm}\sin m\lambda')\, P_{nm}(\mu)\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

или в упрощенном случае

$$V = \frac{k^2 M}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\mu)\right].$$

Таблица 2.2

Постоянные для преобразования гармонических колебаний (по Раппу)

$$q_{nm} = \sqrt{\frac{\varkappa_m (n-m)!}{(n+m)!}}$$

n	m	q_{nm}	$\sqrt{2n+1}$	r_{nm}
0	0	1.00000000	1 00000000	1.00000000
1	0	1.00000000	1.73205081	1.73205081
	1	1.00000000		1.73205081
2	0	1.00000000	2.23606798	2.23606798
	1	.57735027		$.12909945 \times 10^{1}$
	2	.28867513		64549721
3	0	1.00000000	2 64575131	2.64575131
	1	.40824829		10801234×10^{1}
	2	.12909944		.34156501
	3	$.52704628 \times 10^{-1}$		.13944334
4	0	1.00000000	3.00000000	3.00000000
	1	.31622777		.94868331
	2	$.74535599 \times 10^{-1}$		.22360680
	3	$.19920477 \times 10^{-1}$		$.59761431 \times 10^{-1}$
	4	$.70429521 \times 10^{-2}$		$.21128856 \times 10^{-1}$
5	0	1.00000000	3.31662479	3.31662479
	1	.25819889		.85634884
	2	$.48795004 \times 10^{-1}$		.16183472
	3	$.99602384 \times 10^{-2}$		$.33034374 \times 10^{-1}$
	4	$.23476507 \times 10^{-2}$		$.77862765 \times 10^{-2}$
	5	$.74239234 \times 10^{-3}$		$.24622368 \times 10^{-2}$

Продолжение

$$r_{nm} = \sqrt{2n+1}$$

n	m	q_{nm}	$\sqrt{2n+1}$	r_{nm}
6	0	1.00000000	3.60555128	3.60555128
	1	.21821789		.78679579
	2	$.34503278\times10^{-1}$		.12440334
	3	$.57505463\times10^{-2}$		$.20733890\times10^{-1}$
	4	$.10499013\times10^{-2}$		$.37854730\times10^{-2}$
	5	$.22383971\times10^{-3}$		$.80706555\times10^{-3}$
	6	$.64616959\times10^{-4}$		$.23297976\times10^{-3}$
7	0	1.00000000	3.87298335	3.87298335
	1	.18898224		.73192507
	2	$.25717225\times10^{-1}$		$.99602384\times10^{-1}$
	3	$.36369648\times10^{-2}$		$.14085904\times10^{-1}$
	4	$.54829308\times10^{-3}$		$.21235300\times10^{-2}$
	5	$.91382180\times10^{-4}$		$.35392166\times10^{-3}$
	6	$.17921520\times10^{-4}$		$.69409749\times10^{-4}$
	7	$.47897277\times10^{-5}$		$.18550536\times10^{-4}$
8	0	1.00000000	4.12310562	4.12310562
	1	.16666667		.68718428
	2	$.19920477\times10^{-1}$		$.82134231\times10^{-1}$
	3	$.24520412\times10^{-2}$		$.10110025\times10^{-1}$
	4	$.31655716\times10^{-3}$		$.13051986\times10^{-2}$
	5	$.43898579\times10^{-4}$		$.18099848\times10^{-3}$
	6	$.67736978\times10^{-5}$		$.27928671\times10^{-4}$
	7	$.12367024\times10^{-5}$		$.50990546\times10^{-5}$
	8	$.30917559\times10^{-6}$		$.12747636\times10^{-5}$

Кроме уравнений (2.49), (2.54) и (2.55), потенциал часто выражают через сферические гармоники:

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{r^{n+1}}(A_{nm}\cos m\lambda'+B_{nm}\sin m\lambda')\,P_{nm}(\mu). \quad (2.56)$$

Сравнивая это уравнение с тремя приведенными выше, можно найти зависимости между различными коэффициентами:

$$\begin{aligned} A_{nm} &= -k^2Ma_e^nJ_{nm}=k^2Ma_e^nC_{nm}=a_e^{n+1}a_{nm}, \\ B_{nm} &= -k^2Ma_e^nK_{nm}=k^2Ma_e^nS_{nm}=a_e^{n+1}b_{nm}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где $n>0$.

Если используются не обычные полиномы Лежандра, а нормированные или полностью нормированные, то, как следует из уравнения (2.51), приведенные выше коэффициенты следует разделить соответственно на q_{nm} или на r_{nm}. Здесь

$$q_{nm}=\sqrt{\frac{\varkappa_m(n-m)!}{(n+m)!}}, \qquad r_{nm}=q_{nm}\sqrt{2n+1},$$

где $\varkappa_m=1$, когда $m=0$, и $\varkappa_m=2$, когда $m\neq0$.

В табл. 2.2 приводятся значения q_{nm} и r_{nm} до восьмой степени. При их использовании получаем

$$\begin{aligned} \bar{A}_{nm} &= \frac{A_{nm}}{q_{nm}}, & \bar{\bar{A}} &= \frac{A_{nm}}{r_{nm}}, \\ \bar{B}_{nm} &= \frac{B_{nm}}{q_{nm}}, & \bar{\bar{B}}_{nm} &= \frac{B_{nm}}{r_{nm}}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

где одна черта над буквой соответствует нормированным, а две черты — полностью нормированным коэффициентам.

2.2.2.3. Земные возмущения в движении ИСЗ

Возмущающая функция R^t определяется разностью между потенциалом силы тяжести Земли, выражаемым уравнениями (2.54) или (2.55), и потенциалом силы тяжести сферы, имеющей такую же массу, что и Земля. Поэтому

$$V=\frac{k^2M}{r}+R^t. \quad (2.59)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.55), получаем

$$R^t=-\frac{k^2M}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n\Big[J_nP_n(\mu)+ \\ +\sum_{m=1}^{n}(J_{nm}\cos m\lambda'+K_{nm}\sin m\lambda')\,P_{nm}(\mu)\Big], \quad (2.60)$$

или

$$R^t = -\frac{k^2M}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2(J_{nm}\cos m\lambda' + K_{nm}\sin m\lambda')P_{nm}(\mu). \quad (2.61)$$

Если обозначить объемную сферическую гармонику в (2.61) через R^t_{nm}, где

$$R^t_{nm} = -\frac{k^2Ma_e^n}{r^{n+1}}(J_{nm}\cos m\lambda' + K_{nm}\sin m\lambda')P_{nm}(\mu),$$

то уравнение (2.61) примет вид

$$R^t = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} R^t_{nm}. \quad (2.62)$$

Если преобразовать возмущающую функцию (2.60) или (2.62) в функцию кеплеровых оскулирующих элементов орбиты, продифференцировать ее по этим элементам и подставить результаты в выражение (2.37), то получатся уравнения движения. Возмущения в интервале интегрирования определяются путем интегрирования окончательных вариаций элементов.

В последнее время было сделано много попыток использовать описанный выше и другие методы с применением различных типов переменных для разработки общей теории движения искусственных спутников в земном гравитационном поле. Были получены решения основной проблемы теории движения близких спутников, когда возмущающая функция, выражаемая формулой (2.60), ограничивается условием $m = 0$ (зональные гармоники) и второй гармоникой ($n = 2$). В других случаях бралось больше гармоник, иногда принимали $m = 0$, иногда учитывалось много членов при $m \neq 0$. С другой стороны, многие авторы приводили формулы для возмущений с учетом того, что либо орбитальные элементы, являющиеся коэффициентами в правых частях уравнения движения, постоянны для определенного периода, либо имеют место лишь вековые колебания. Эти решения называются решениями первого порядка. Другие авторы предлагали решения второго порядка, в которых возмущения являются приращениями возмущений первого порядка и определяются путем вычисления приращений возмущающей функции. При этом предполагалось, что спутник движется не по эллипсу, как в решениях первого порядка, а по эллипсу, измененному возмущениями первого порядка.

Для углубленного изучения этих теорий читатель отсылается к библиографии по теории влияния Земли на движение ИСЗ * [38*, 52*, 53*, 55*, 62*, 66*, 68*, 71*, 75*, 76*, 84*, 88*, 107*, 110*, 114*]. Отличный обзор дан в работе Каулы [110, pp. 208—218].

В настоящее время наиболее обстоятельное изложение теории движения близких спутников с учетом влияния различных гармоник и с использованием переменных Делоне дал Козаи [75*]. Наиболее обобщенную теорию для учета влияния гармоник и для машинного счета предложил Каула [66*]. Решение Винти является наиболее ценным для учета влияния сжатия Земли.

В дальнейшем мы приведем формулы Каулы, которые очень удобны для вычислений на электронных машинах, и некоторые буквенные выражения, полученные Раппом, с помощью которых можно легче понять природу возмущений.

В методе Каулы (с изменением обозначений) поверхностная сферическая гармоника R^t_{nm} в выражении (2.62) трансформируется к оскулирующим кеплеровым элементам следующим образом:

$$R^t_{nm}=\frac{k^2Ma_e^n}{a^{n+1}}\sum_{p=0}^{n}F_{nmp}(i)\sum_{q=-\infty}^{\infty}G_{npq}(e)\,S_{nmpq}(\omega,\overline{M},\Omega,\theta_G). \tag{2.63}$$

Здесь θ_G — гринвичское звездное время, а функции в правой части уравнений определяются следующим образом:

$$S_{nmpq}(\omega,\overline{M},\Omega,\theta_G)=$$

$$=\begin{bmatrix}-J_{nm}\\ \\ K_{nm}\end{bmatrix}\begin{matrix}(n-m)\ \text{четное}\\ \cos[(n-2p)\omega+(n-2p+q)\overline{M}+m(\Omega-\theta_G)]-\\ (n-m)\ \text{нечетное}\end{matrix}$$

$$-\begin{bmatrix}K_{nm}\\ \\ J_{nm}\end{bmatrix}\begin{matrix}(n-m)\ \text{четное}\\ \sin[(n-2p)\omega+(n-2p+q)\overline{M}+m(\Omega-\theta_G)],\\ (n-m)\ \text{нечетное}\end{matrix} \tag{2.64}$$

$$F_{nmp}(i)=\sum_t\frac{(2n-2t)!}{t!\,(n-t)!\,2^{n-2t}}\sin^{n-m-2t}i\sum_s\binom{m}{s}\cos^s i\times$$

$$\times\sum_c\binom{n-m-2t+s}{c}\binom{m-s}{p-t-c}\frac{(-1)^{c-k}}{(n-m-2t)!}. \tag{2.65}$$

* Здесь и далее номера библиографических ссылок со звездочкой соответствуют работам по теории влияния Земли на движение ИСЗ, перечисленным на стр. 214—220.— *Прим. ред.*

Здесь t суммируется от 0 до p или k (в зависимости от того, что меньше), s суммируется от 0 до m, а c суммируется по всем значениям, при которых оба биномиальных коэффициента не равны нулю. Значение k равно $(n-m)/2$, если $(n-m)$ четное, и $(n-m-1)/2$, если $(n-m)$ нечетное.

Из уравнения (2.64) видно, что если $n-2p+q=0$, т. е. $q=2p-n$, то возмущение будет долгопериодическим. В этом случае

$$G_{npq}(e)=(1-e^2)^{1/2-n}\sum_{d=0}^{p'-1}\binom{n-1}{2d+n-2p'}\times$$
$$\times\binom{2d+n-2p'}{d}\left(\frac{e}{2}\right)^{2d+n-2p'}, \qquad (2.66)$$

где $p'=p$, если $p\leqslant n/2$, и $p'=n-p$, если $p>n/2$.

Если $q\neq 2p-n$ (короткопериодические члены), то

$$G_{npq}(e)=(-1)^{|q|}(1+\beta^2)^n\beta^{|q|}\sum_{k=0}^{\infty}P_{npqk}Q_{npqk}\beta^{2k}. \qquad (2.67)$$

Здесь

$$\beta=\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}},$$

$$P_{npqk}=\sum_{r=0}^{h}\binom{2p'-2n}{h-r}\frac{(-1)^r}{r!}\left[\frac{(n-2p'+q')e}{2\beta}\right]^r,$$

где $h=k+q'$, если $q'>0$; $h=k$, если $q'<0$, и

$$Q_{npqk}=\sum_{r=0}^{h}\binom{-2p'}{l-r}\frac{1}{r!}\left[\frac{(n-2p'+q')e}{2\beta}\right]^r,$$

причем $l=k$, если $q'>0$; $h=k$, если $q'<0$; $p'=p$, $q'=q$ для $p\leqslant n/2$; $p'=n-p$, $q'=-q$ для $p>n/2$.

Вводя уравнения (2.64) и (2.67) в (2.63), дифференцируя их по элементам орбиты и подставляя производные в уравнение движения (2.37), мы получим изменения элементов орбиты, вызываемые коэффициентами J_{nm} или K_{nm}, т. е. возмущающей функцией R^t_{nm}. В результате можно записать:

$$\Omega'_{nm}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{F'_{nmp}G_{npq}S_{nmpq}}{\bar{n}a^{n+3}\sqrt{1-e^2}\sin i},$$

$$\omega'_{nm}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{S_{nmpq}}{\bar{n}a^{n+3}}\left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}F_{nmp}G'_{npq}-\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{1-e^2}}F'_{nmp}G_{npq}\right],$$

$$\overline{M}'_{*nm}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{F_{nmp}S_{nmpq}}{\bar{n}a^{n+3}}\left[-\frac{1-e^2}{e}G'_{npq}+2(n+1)G_{npq}\right],$$

(2.68)

$$i'_{nm}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{F_{nmp}G_{npq}S'_{nmpq}}{\bar{n}a^{n+3}\sqrt{1-e^2}\sin i}[(n-2p)\cos i-m],$$

$$a'_{nm}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{2F_{nmp}G_{npq}S'_{nmpq}}{\bar{n}a^{n+2}}(n-2p+q),$$

$$e'_{nm}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{F_{nmp}G_{npq}S'_{nmpq}\sqrt{1-e^2}}{\bar{n}a^{n+3}e}\times$$

$$\times[\sqrt{1-e^2}(n-2p+q)-(n-2p)].$$

В этих уравнениях возмущение средней аномалии определяется уравнением

$$\overline{M}_*=\int_0^t\bar{n}\,dt-\bar{n}(t-T),$$

а другие обозначения имеют вид

$$F'_{nmp}=\frac{dF_{nmp}}{di},\qquad G'_{npq}=\frac{dG_{npq}}{de},$$

где S'_{nmpq} — производная от S_{nmpq} по соответствующему *аргументу*.

Чтобы получить выражение для интегрирования изменений элементов, подставим $\overline{S}_{nmpq}$ вместо S_{nmpq} и $\overline{S}'_{nmpq}$ вместо S'_{nmpq}, где чертой обозначены интегралы от S_{nmpq} и S'_{nmpq} по времени в предположении, что ω, $\overline{M}$, Ω и θ_G имеют вековые изменения. Например,

$$\overline{S}'_{nmpq}=\frac{S_{nmpq}}{(n-2p)\,\omega'+(n-2p+q)\,\bar{n}+m(\Omega'-\theta'_G)}. \tag{2.69}$$

Интегральное изменение прямого восхождения восходящего узла равно, например,

$$\Delta\Omega_{nm}=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{F'_{nmp}S_{npq}S_{nmpq}}{\bar{n}a^{n+3}\sqrt{1-e^2}\sin i}.$$

Полные вариации общих интегрируемых изменений элементов могут быть получены суммированием от $m=0$ до $m=n$ и от

$n = 2$ до $n = \infty$ так, что, например,

$$\Omega' = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Omega'_{nm}$$

или

$$\Delta\Omega = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \Delta\Omega_{nm}.$$

Исследуя знаменатель уравнения (2.69), убеждаемся, что максимальные возмущения получаются, когда $m = 0$ и $n - 2p + q = 0$, т. е. для долгопериодических и вековых эффектов сферических гармоник. Исследуя уравнения (2.63) и (2.68), убеждаемся, что короткопериодические вариации вызываются всеми членами. Если $m = 0$ и n четно, то вековые и долгопериодические изменения будут возникать в Ω, ω и $\overline{M}$ (или T), долгопериодические изменения — в e и i, но не произойдет никаких изменений в a. Если же n нечетно, то долгопериодические изменения возникают в Ω, ω, i, e и $\overline{M}$. При $m = 0$ и $n = 2$ должны быть учтены вторичные эффекты совместно с взаимодействием нечетных членов.

Обычно возмущения второго порядка вычисляются в переменных Делоне, так как использование кеплеровых элементов очень усложняет алгебраические выкладки [60, pp. 565—573].

Если $m \neq 0$, то возникают короткопериодические вариации элементов с частотой, равной $m(\Omega' - \theta'_G)$ [см. (2.69)].

Природу вариаций элементов орбиты легче всего понять из буквенных выражений, но их применение ограничивается алгебраическими трудностями, которые очевидны для приведенных ниже буквенных выражений. Эти уравнения основаны на методе Каулы, но они ограничены вековыми и долгопериодическими возмущениями, возникающими от действия коэффициентов сферических гармоник до десятой степени. В производных учитывались все члены в том смысле, что включались все члены основных уравнений. Применяемые числовые коэффициенты верны до восьмого знака. Изменения Ω и ω даются как производные по времени. Изменения в i выражаются как полное влияние за интервал времени, определяемый единицей времени, используемой в значениях ω', находящихся в знаменателях. Вариации в e могут быть рассчитаны с помощью выражения (2.73) с использованием вариаций в i, вычисленных с помощью формулы (2.72).

Эти формулы имеют вид:

$$\Omega' = \sum_{n=2}^{10} \sum_{j=0}^{n-2} J_n U_n \overline{U}_{nj} \begin{bmatrix} \cos j\omega \\ \sin j\omega \end{bmatrix} \begin{matrix} j \text{ и } n \text{ четные,} \\ j \text{ и } n \text{ нечетные,} \end{matrix} \qquad (2.70)$$

$$\omega' = \sum_{n=2}^{10} \sum_{j=0}^{n-2} J_n V_n \overline{V}_{nj} \begin{bmatrix} \cos j\omega \\ \sin j\omega \end{bmatrix} \begin{matrix} j \text{ и } n \text{ четные}, \\ j \text{ и } n \text{ нечетные}, \end{matrix} \tag{2.71}$$

$$\Delta i = \sum_{n=3}^{10} \sum_{j=1}^{n-2} J_n W_n \overline{W}_{nj} \begin{bmatrix} \cos j\omega \\ \sin j\omega \end{bmatrix} \begin{matrix} j \text{ и } n \text{ четные}, \\ j \text{ и } n \text{ нечетные}, \end{matrix} \tag{2.72}$$

$$\Delta e = -\frac{(1-e^2)\,\mathrm{tg}\, i}{e} \Delta i. \tag{2.73}$$

Здесь коэффициенты $U_n\overline{U}_{nj}$, $V_n\overline{V}_{nj}$ и $W_n\overline{W}_{nj}$ выражают амплитуды различных возмущений с длиной периода в $2\pi/j$, вызываемых сферической гармоникой с коэффициентом J_n. Из этого следует, что коэффициенты $U_n\overline{U}_{n0}$, $V_n\overline{V}_{n0}$ выражают амплитуды вековых вариаций [см. также уравнения (2.167)]. В случаях j нечетный (четный) и n четный (нечетный) не возникает никаких вариаций.

Коэффициенты U_n, V_n и W_n равны:

$$U_n = -\frac{k^2M}{a^3\bar{n}} \left(\frac{a_e}{p}\right)^n \cos i,$$

$$V_n = -\frac{k^2M}{a^4\bar{n}} \frac{a_e^n}{p^{n-1}},$$

$$W_n = -\frac{k^2M}{\bar{n}a^3\omega'} \left(\frac{a_e}{p}\right)^n e \cos i = U_n \frac{e}{\omega'},$$

где

$$p = a(1-e^2).$$

Вековые коэффициенты ($j=0$) имеют вид:

$$\overline{U}_{20} = \frac{3}{2},$$

$$\overline{U}_{40} = (6{,}5625h^2 - 3{,}75)(1+6x^2),$$

$$\overline{U}_{60} = (27{,}070313h^4 - 29{,}53125h^2 + 6{,}5625)(1+20x^2+30x^4),$$

$$\overline{U}_{80} = (109{,}97314h^6 - 175{,}95703h^4 + 81{,}21094h^2 - 9{,}84375)(1+42x^2+210x^4+140x^6),$$

$$\overline{U}_{(10)0} = (444{,}01657h^8 - 934{,}77168h^6 + 659{,}83886h^4 - 175{,}95706h^2 + 13{,}535156)(1+72x^2+756x^4+1680x^6+630x^8),$$

$$\overline{V}_{20} = \frac{3}{2}\frac{a}{p}(1{,}5h^2 - 1 - \cos^2 i),$$

$$\overline{V}_{40}=(1{,}640625h^4-1{,}875h^2+0{,}375)\left[3+\frac{7(1+6x^2)}{1-e^2}\right]-$$
$$-\frac{\cos^2 i}{(1-e^2)}(6{,}5625h^2-3{,}75)(1+6x^2),$$
$$\overline{V}_{60}=(4{,}5117188h^6-7{,}3828125h^4+3{,}2812h^2-$$
$$-0{,}3125)\left[\frac{11}{1-e^2}(1+20x^2+30x^4)+10+30x^2\right]-$$
$$-\frac{\cos^2 i}{1-e^2}(27{,}070313h^4-29{,}53125h^2+$$
$$+6{,}5625)(1+20x^2+30x^4),$$
$$\overline{V}_{80}=3(13{,}746643h^8-29{,}326172h^6+20{,}302735h^4-$$
$$-4{,}921875h^2+0{,}2734375)\left[7+70x^2+70x^4+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{1-e^2}(1+42x^2+210x^4+140x^6)\right]-$$
$$-\frac{\cos^2 i}{1-e^2}(109{,}97314h^6-175{,}95703h^4+81{,}21094h^2-$$
$$-9{,}84375)(1+42x^2+210x^4+140x^6),$$
$$\overline{V}_{(10)0}=4(44{,}401657h^{10}-116{,}84646h^8+109{,}973144h^6-$$
$$-43{,}989264h^4+6{,}7675782h^2-0{,}24609375)\times$$
$$\times\left[9+189x^2+630x^4+315x^6+\frac{19}{4(1-e^2)}(1+72x^2+\right.$$
$$\left.+756x^4+1680x^6+630x^8)\right]-\frac{\cos^2 i}{1-e^2}(444{,}01657h^8-$$
$$-934{,}77168h^6+659{,}83886h^4-175{,}95706h^2+$$
$$+13{,}535156)(1+72x^2+756x^4+1680x^6+630x^8).$$

Коэффициенты с периодом колебаний 2π (т. е. $j=1$) имеют вид:

$$\tilde{\overline{U}}_{31}=2e\operatorname{cosec} i\,(2{,}8125h^2-0{,}75),$$
$$\tilde{\overline{U}}_{51}=4\frac{e}{h}(12{,}304687h^4-9{,}84375h^2+0{,}9375)(1+3x^2),$$
$$\tilde{\overline{U}}_{71}=6\frac{e}{h}(51{,}320802h^6-67{,}67578h^4+22{,}148437h^2-$$
$$-1{,}09375)(1+10x^2+10x^4),$$
$$\tilde{\overline{U}}_{91}=8\frac{e}{h}(210{,}32364h^8-384{,}90600h^6+219{,}94629h^4-$$
$$-40{,}605477h^2+1{,}2304687)(1+21x^2+70x^4+35x^6),$$

$$\overline{V}_{31}=2\left[\frac{h}{e}(0{,}9375h^2-0{,}75)\left(1+\frac{20x^2}{1-e^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{e\cos^2 i}{h(1-e^2)}(2{,}8125h^2-0{,}75)\right],$$

$$\overline{V}_{51}=4\left\{\frac{h}{e}(2{,}4609375h^4-3{,}28125h^2+0{,}9375)\left[1+9x^2+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{36x^2(1+3x^2)}{1-e^2}\right]-\frac{e}{h}\frac{\cos^2 i}{1-e^2}(12{,}304687h^4-$$
$$\left.-9{,}84375h^2+0{,}9375)(1+3x^2)\right\},$$

$$\overline{V}_{71}=6\left\{\frac{h}{e}(7{,}3315431h^6-13{,}535156h^4+7{,}3828125h^2-\right.$$
$$-1{,}09375)\left[1+30x^2+50x^4+\frac{13e^2}{1-e^2}(1+10x^2+10x^4)\right]-$$
$$-\frac{e\operatorname{ctg} i\cos i}{1-e^2}(51{,}320802h^6-67{,}67578h^4+$$
$$\left.+22{,}148437h^2-1{,}09375)(1+10x^2+10x^4)\right\},$$

$$\overline{V}_{91}=8\left\{\frac{h}{e}(23{,}369293h^8-54{,}986571h^6+43{,}989258h^4-\right.$$
$$-13{,}535159h^2+1{,}2304687)\left[1+63x^2+350x^4+\right.$$
$$\left.+245x^6+\frac{17e^2}{1-e^2}(1+21x^2+70x^4+35x^6)\right]-$$
$$-\frac{e\cos^2 i}{h(1-e^2)}(210{,}32364h^8-384{,}90600h^6+$$
$$+219{,}94629h^4-40{,}605477h^2+1{,}2304687)(1+21x^2+$$
$$\left.+70x^4+35x^6)\right\},$$

$$\overline{W}_{31}=2(0{,}9375h^2-0{,}75),$$
$$\overline{W}_{51}=4(2{,}4609375h^4-3{,}28125h^2+0{,}9375)(1+3x^2),$$
$$\overline{W}_{71}=6(7{,}3315431h^6-13{,}535156h^4+7{,}3828125h^2-$$
$$-1{,}09375)(1+10x^2+10x^4),$$
$$\overline{W}_{91}=8(23{,}369293h^8-54{,}986571h^6+43{,}989258h^4-$$
$$-13{,}535159h^2+1{,}2304687)(1+21x^2+70x^4+35x^6).$$

Коэффициенты с периодом колебаний π (т. е. $j=2$) имеют вид:

$$\overline{U}_{42}=6(-4{,}375h^2+1{,}875)x^2,$$
$$\overline{U}_{62}=10x^2(-20{,}302735h^4+19{,}6875h^2-3{,}28125)(2+4x^2),$$

$$\overline{U}_{82} = -14x^2(87{,}978512h^6 - 131{,}96777h^4 + 54{,}140624h^2 - -4{,}921875)(3 + 20x^2 + 15x^4),$$

$$\overline{U}_{(10)2} = -72x^2(370{,}01381h^8 - 747{,}81737h^6 + 494{,}87915h^4 - -117{,}3047h^2 + 6{,}7675782)(1 + 14x^2 + 35x^4 + 14x^6),$$

$$\overline{V}_{42} = 6\left[0{,}5h^2(-1{,}09375h^2 + 0{,}9375)\left(1 + \frac{14x^2}{1-e^2}\right) - \frac{\cos^2 i}{1-e^2} \times \times x^2(-4{,}375h^2 + 1{,}875)\right],$$

$$\overline{V}_{62} = 2\left\{5h^2(-3{,}3837891h^4 + 4{,}921875h^2 - 1{,}640625)\left[1 + + 4x^2 + \frac{11(8x^2 + 16x^4)}{4(1-e^2)}\right] - \frac{5e^2\cos^2 i}{2(1-e^2)}(-20{,}302735h^4 + + 19{,}6875h^2 - 3{,}28125)(1 + 2x^2)\right\},$$

$$\overline{V}_{82} = 14\left\{0{,}5h^2(-10{,}997314h^6 + 21{,}994629h^4 - 13{,}535156h^2 + + 2{,}4609375)\left[3 + 40x^2 + 45x^4 + \frac{7{,}5e^2}{1-e^2}(3 + 20x^2 + + 15x^4)\right] - \frac{\cos^2 i}{1-e^2}(-87{,}978512h^6 + 131{,}96777h^4 - -54{,}140624h^2 + 4{,}921875)x^2(3 + 20x^2 + 15x^4)\right\},$$

$$\overline{V}_{(10)2} = 72\left\{-h^2(37{,}001381h^8 - 93{,}477171h^6 + 82{,}479858h^4 - -29{,}326176h^2 + 3{,}3837891)\left[0{,}5 + 14x^2 + \frac{105}{2}x^4 + + 28x^6 + \frac{19x^2}{1-e^2}(1 + 14x^2 + 35x^4 + 14x^6)\right] + + \frac{\cos^2 i}{1-e^2}(370{,}01381h^8 - 747{,}81737h^6 + 494{,}87915h^4 - -117{,}3047h^2 + 6{,}7675782)x^2(1 + 14x^2 + 35x^4 + 14x^6)\right\},$$

$$\overline{W}_{42} = 3hx(-1{,}09375h^2 + 0{,}9375),$$

$$\overline{W}_{62} = -10hx(3{,}3837891h^4 - 4{,}921875h^2 + 1{,}640625)(1 + 2x^2),$$

$$\overline{W}_{82} = -7hx(10{,}997314h^6 - 21{,}994629h^4 + 13{,}535156h^2 - -2{,}4609375)(3 + 20x^2 + 15x^4),$$

$$\overline{W}_{(10)2} = -36hx(37{,}001381h^8 - 93{,}477171h^6 + 82{,}479858h^4 - -29{,}326176h^2 + 3{,}3837891)(1 + 14x^2 + 35x^4 + 14x^6).$$

Коэффициенты с периодом колебаний $\frac{2}{3}\pi$ (т. е. $j=3$) имеют вид:

$$\overline{U}_{53}=8hx^3(-6{,}1523437h^2+3{,}28125),$$

$$\overline{U}_{73}=-20hx^3(30{,}792481h^4-33{,}83789h^2+7{,}3828125)(2+3x^2),$$

$$\overline{U}_{93}=-112hx^3(140{,}21576h^6-230{,}94360h^4+109{,}97315h^2-$$
$$-13{,}535159)(1+5x^2+3x^4),$$

$$\overline{V}_{53}=2h\left[h^2(-1{,}2304687h^2+1{,}09375)\left(3+\frac{9e^2}{1-e^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{4x^2\cos^2 i}{1-e^2}(-6{,}1523437h^2+3{,}28125)\right],$$

$$\overline{V}_{73}=10hx\left\{h^2(-4{,}3989259h^4+6{,}767578h^2-2{,}4609375)\times\right.$$
$$\times\left[3+7{,}5x^2+\frac{6{,}5e^2}{1-e^2}(2+3x^2)\right]+$$
$$+\frac{2\cos^2 i}{1-e^2}x^2(30{,}792481h^4-33{,}83789h^2+$$
$$\left.+7{,}3828125)(2+3x^2)\right\},$$

$$\overline{V}_{93}=14eh\left\{-h^2(15{,}579529h^6-32{,}991943h^4+21{,}994629h^2-\right.$$
$$-4{,}5117196)\left[3+25x^2+21x^4+\frac{17e^2}{1-e^2}(1+5x^2+\right.$$
$$\left.+3x^4)\right]+\frac{4\cos^2 i}{1-e^2}(140{,}21576h^6-230{,}94360h^4+$$
$$\left.+109{,}97315h^2-13{,}535159)x^2(1+5x^2+3x^4)\right\},$$

$$\overline{W}_{53}=4h^2x^2(-1{,}2304687h^2+1{,}09375),$$

$$\overline{W}_{73}=-10h^2x^2(4{,}3989259h^4-6{,}767578h^2+2{,}4609375)(2+3x^2),$$

$$\overline{W}_{93}=-56h^2x^2(15{,}579529h^6-32{,}991943h^4+21{,}994629h^2-$$
$$-4{,}5117196)(1+5x^2+3x^4).$$

Коэффициенты с периодом колебаний $\frac{\pi}{2}$ (т. е. $j=4$) имеют вид:

$$\overline{U}_{64}=10h^2x^4(8{,}1210938h^2-4{,}921875),$$

$$\overline{U}_{84}=14h^2x^4(43{,}989258h^4-52{,}787109h^2+13{,}535156)(5+6x^2),$$

$$\overline{U}_{(10)4} = 252h^2x^4(211{,}43646h^6 - 373{,}90869h^4 + 197{,}95166h^2 - 29{,}326176)(1 + 4x^2 + 2x^4),$$

$$\overline{V}_{64} = 5x^2h^2\left[h^2(1{,}3535156h^2 - 1{,}2304688)\left(2 + \frac{22x^2}{1-e^2} - \frac{2x^2\cos^2 i}{1-e^2}\right)(8{,}1210938h^2 - 4{,}921875)\right],$$

$$\overline{V}_{84} = 14h^2x^2\left\{0{,}5h^2(5{,}4986572h^4 - 8{,}7978515h^2 + 3{,}3837891)\left[10 + 18x^2 + \frac{7{,}5e^2}{1-e^2}(5 + 6x^2)\right] - \frac{\cos^2 i}{1-e^2}(43{,}989258h^4 - 52{,}787109h^2 + 13{,}535156)x^2(5 + 6x^2)\right\},$$

$$\overline{V}_{(10)4} = 126x^2h^2\left\{h^2(21{,}14364h^6 - 46{,}738586h^4 + 32{,}991943h^2 - 7{,}3315441)\left[2 + 12x^2 + 8x^4 + \frac{19e^2}{2(1-e^2)}(1 + 4x^2 + 2x^4)\right] - \frac{2\cos^2 i}{1-e^2}(211{,}43646h^6 - 373{,}90869h^4 + 197{,}95166h^2 - 29{,}326176)x^2(1 + 4x^2 + 2x^4)\right\},$$

$$\overline{W}_{64} = 5h^3x^3(1{,}3535156h^2 - 1{,}2304688),$$

$$\overline{W}_{84} = 7h^3x^3(5{,}4986572h^4 - 8{,}7978515h^2 + 3{,}3837891)(5 + 6x^2),$$

$$\overline{W}_{(10)4} = 63h^3ex^2(21{,}143646h^6 - 46{,}738586h^4 + 32{,}991943h^2 - 7{,}3315441)(1 + 4x^2 + 2x^4).$$

Коэффициенты с периодом колебаний $\frac{2}{5}\pi$ (т. е. $j = 5$) имеют вид:

$$\overline{U}_{75} = 12h^3x^5(10{,}26416h^2 - 6{,}767578),$$

$$\overline{U}_{95} = 112h^3x^5(60{,}092468h^4 - 76{,}981198h^2 + 21{,}994629)(1 + x^2),$$

$$\overline{V}_{75} = 6h^3x^3\left[0{,}5h^2(1{,}4663086h^2 - 1{,}3535156)\left(5 + \frac{13e^2}{1-e^2}\right) - \frac{2\cos^2 i}{1-e^2}(10{,}26416h^2 - 6{,}767578)x^2\right],$$

$$\overline{V}_{95} = 28h^3x^3\left\{h^2(6{,}6769409h^4 - 10{,}997314h^2 + 4{,}3989258)\left[5 + 7x^2 + \frac{17e^2}{1-e^2}(1 + x^2)\right] - \right.$$

$$-\frac{4\cos^2 i}{1-e^2}(60{,}092468h^4-76{,}981198h^2+$$
$$+21{,}994629)\,x^2(1+x^2)\Big\},$$
$$\overline{W}_{75}=6h^4x^4(1{,}4663086h^2-1{,}3535156),$$
$$\overline{W}_{95}=14h^4x^4(6{,}6769409h^4-10{,}997314h^2+4{,}3989258)(1+x^2).$$

Коэффициенты с периодом колебаний $\frac{\pi}{3}$ (т. е. $j=6$) имеют вид:

$$\overline{U}_{86}=-14h^4x^6(12{,}568359h^2-8{,}7978515),$$
$$\overline{U}_{(10)6}=-24h^4x^6(79{,}288673h^4-106{,}83106h^2+$$
$$+32{,}991943)(7+6x^2),$$
$$\overline{V}_{86}=14h^4x^4\Big\{1{,}5h^2(-1{,}5710449h^2+1{,}4663086)\Big[1+$$
$$+\frac{5e^2}{2(1-e^2)}\Big]-\frac{\cos^2 i}{1-e^2}(-12{,}568359h^2+8{,}7978515)\,x^2\Big\},$$
$$\overline{V}_{(10)6}=24x^4h^4\Big\{-0{,}5h^2(7{,}9288673h^4-13{,}353882h^2+$$
$$+5{,}4986572)\Big[21+24x^2+\frac{19e^2}{2(1-e^2)}(7+6x^2)\Big]+$$
$$+\frac{\cos^2 i}{1-e^2}(79{,}288673h^4-106{,}83106h^2+$$
$$+32{,}991943)\,x^2(7+6x^2)\Big\},$$
$$\overline{W}_{86}=-7h^5x^5(1{,}5710449h^2-1{,}4663086),$$
$$\overline{W}_{(10)6}=-12h^5x^5(7{,}9288673h^4-13{,}353882h^2+$$
$$+5{,}4986572)(7+6x^2).$$

Коэффициенты с периодом колебаний $\frac{2}{7}\pi$ (т. е. $j=7$) имеют вид:

$$\overline{U}_{97}=-16h^5x^7(15{,}023117h^2-10{,}997314),$$
$$\overline{V}_{97}=4h^5x^5\Big[-h^2(1{,}6692352h^2-1{,}5710449)\Big(7+\frac{17e^2}{(1-e^2)}\Big)+$$
$$+\frac{4\cos^2 i}{1-e^2}(15{,}023117h^2-10{,}997314)\,x^2\Big],$$
$$\overline{W}_{97}=-8h^6x^6(1{,}6692352h^2-1{,}5710449).$$

Коэффициенты с периодом колебаний $\frac{1}{4}\pi$ (т. е. $j=8$) имеют вид:

$$\overline{U}_{(10)8}=18h^6x^8(17{,}619705h^2-13{,}353882),$$

$$\overline{V}_{(10)8}=18x^6h^6\left[0{,}5h^2(1{,}7619705h^2-1{,}6692352)\left(4+\frac{19e^2}{2(1-e^2)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos^2 i}{1-e^2}(17{,}619705h^2-13{,}353882)x^2\right],$$

$$\overline{W}_{(10)8}=9h^7x^7(1{,}7619705h^2-1{,}6692352).$$

Здесь

$$h=\sin i \quad \text{и} \quad x=e/2.$$

В этих уравнениях элементы орбиты a, e, i являются некоторыми средними, но не оскулирующими элементами.

Движение перигея иногда определяется как изменение прямого восхождения перигея α'_π, где $\alpha_\pi=\Omega+\omega\cos i$. Анализируя основные влияния в уравнении (2.70), т. е. те возмущения, которые зависят лишь от J_2, после подстановки $\bar{n}=\sqrt{k^2M/a^3}$ мы находим, что вековые возмущения будут следующие:

$$\Omega'=-\left(\frac{k^2M}{a_e^3}\right)^{1/2}\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\frac{3}{2}J_2\cos i,$$

$$\omega'=\left(\frac{k^2M}{a_e^3}\right)^{1/2}\left(\frac{a_e}{p}\right)^2\frac{3}{2}J_2(1+\cos^2 i-1{,}5\sin^2 i),$$

$$\alpha'_\pi=\left(\frac{k^2M}{a_e^3}\right)^{1/2}\left(\frac{a_e}{p}\right)^2J_2\left[1-\sin^2 i\left(\frac{5}{2}-\sin^2\omega\right)\right]\cos i.$$

Все величины в этих выражениях имеют средние значения. Таким образом, попятное движение узла (к западу) постоянно по скорости, которая зависит от наклонения.

Перигей также перемещается с постоянной скоростью, зависящей от наклонения. При наклонении, равном нулю, увеличение аргумента перигея происходит вдвое быстрее попятного движения узла, что согласуется с известным положением о том, что линия апсид поворачивается со скоростью, равной скорости попятного движения узлов. Для других наклонений картина будет иной. При наклонении около 63°26′ точка перигея неподвижна, а при бóльших наклонениях оба узла и перигей движутся попятно.

Все это показано на рис. 2.7, для построения которого использовались средние параметры Земли. На рисунке также показана вековая скорость $d\alpha_\pi/dt$ возмущений прямого восхождения перигея. Она зависит не только от наклонения, но также и от аргумента перигея, ее мгновенное значение будет лежать внутри

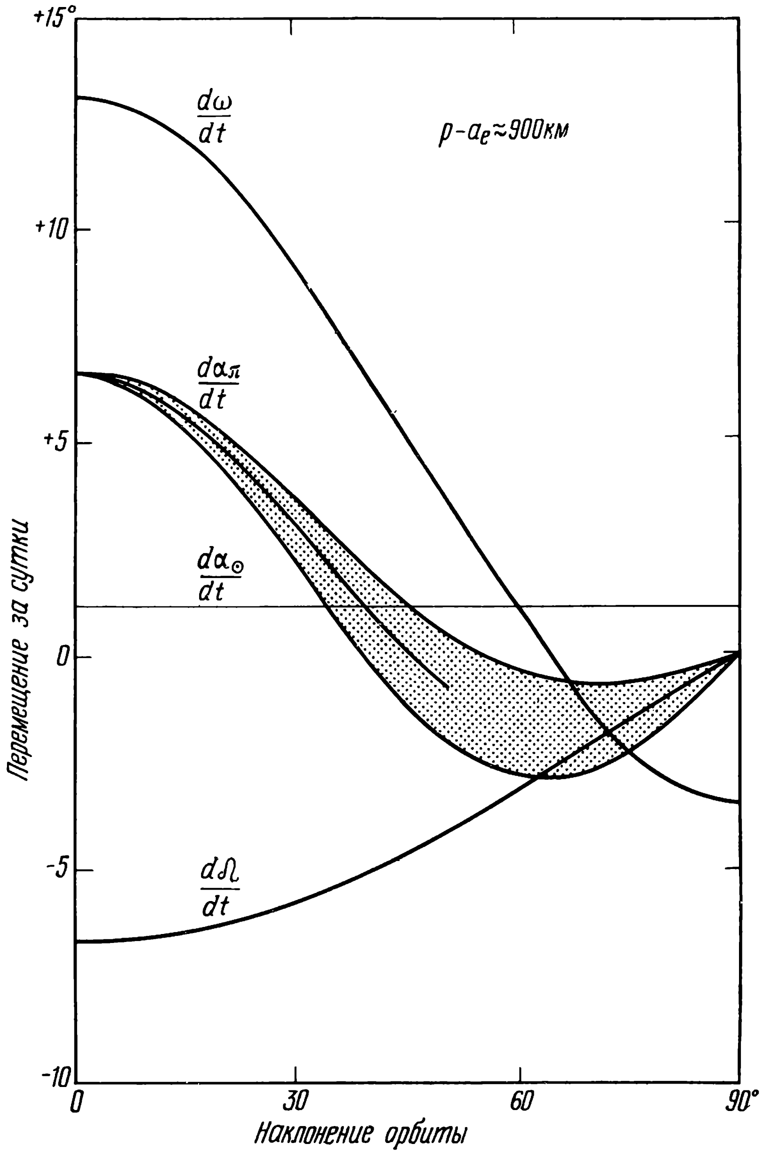


Рис. 2.7. Вековые возмущения в функции наклонения орбиты.

заштрихованного участка. Поскольку эта скорость зависит от аргумента перигея, который в свою очередь подвержен большим вековым возмущениям, то для того, чтобы получить среднее вековое возмущение прямого восхождения, необходимо осреднить один оборот перигея. Линия, лежащая внутри заштрихованного участка, дает результат для наклонений до 50°; при бо́льших наклонениях отклонение от среднего становится слишком большим для данного метода.

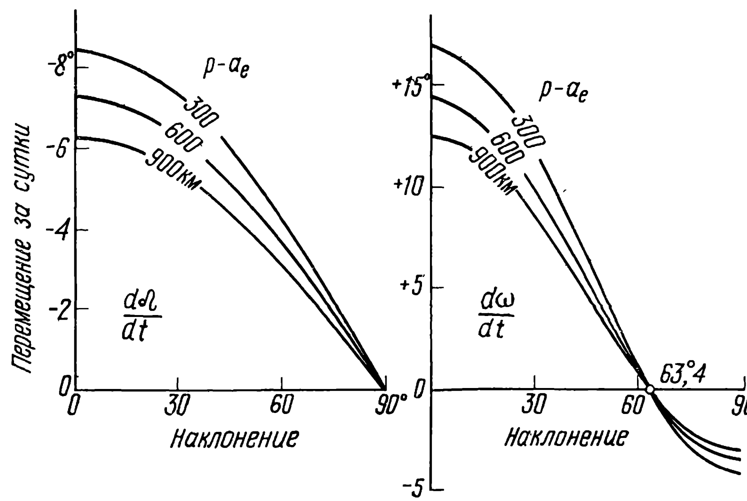


Рис. 2.8. Вековые возмущения в функции высоты спутника.

Горизонтальная линия с отметкой $+1°$ показывает изменение прямого восхождения Солнца при суточном движении. Как видно, для наклонения около 39° суточные движения Солнца и перигея равны, и поэтому в заданной сумеречной зоне одна и та же точка орбиты спутника может наблюдаться неопределенно долго. Если, кроме того, расстояние до спутника таково, что за сутки он совершает целое число оборотов вокруг Земли, то эта точка наблюдается неопределенно долго как в вечерние, так и в утренние сумерки, по крайней мере вблизи точек равноденствий. В первом случае наблюдения будут группироваться около двух точек орбиты, а в последнем случае — лишь около одной точки. Если плотность наблюдений будет слишком велика, то точность определения орбиты заметно понизится.

На рис. 2.7 показаны вековые возмущения, когда средняя высота спутника над Землей $p - a_e$ равна примерно 900 *км*. При уменьшении высоты спутника возмущения возрастают по закону, показанному на рис. 2.8.

Если наклонение очень мало или близко к критическому ($i = 63°26'$) или эксцентриситет очень мал, может потребоваться другой метод. В случае малого эксцентриситета и наклонения вместо кеплеровых элементов могут использоваться переменные Делоне в форме (2.39). Для детального изучения этого и других методов и для решения задачи в случае критического наклонения рекомендуются работы различных авторов [33*, 54*, 64*, 65*, 73*, 107*, 110*, 111*].

Что касается влияния секториальных и тессеральных гармоник, то мы считаем, что возмущения вызываются лишь наиболее важной для геодезии гармоникой J_{22}. Величина J_{22} вызывает изменения элементов Ω, ω, i и $\overline{M}$ малой амплитуды, но очень большого периода. Параметры a и e не подвержены изменениям. Суммарные эффекты за единичный интервал времени в единицах, используемых в знаменателях, имеют вид [62, p. 56]:

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= \frac{3}{4} J_{22} \frac{\bar{n} a_e^2 (3 - 5\cos^2 i)}{(\Omega' - \theta_G') p^2} \sin 2(\theta_G + \lambda_0 - \Omega),\\
\Delta\Omega &= \frac{3}{2} J_{22} \frac{\bar{n} a_e^2 \cos i}{(\Omega' - \theta_G') p^2} \sin 2(\theta_G + \lambda_0 - \Omega),\\
\Delta i &= \frac{3}{2} J_{22} \frac{\bar{n} a_e^2 \sin i}{(\Omega' - \theta_G') p^2} \cos 2(\theta_G + \lambda_0 - \Omega),\\
\Delta M &= \frac{9}{4} J_{22} \frac{\bar{n} a_e^2 \sqrt{1 - e^2} \sin^2 i}{(\Omega' - \theta_G') p^2} \sin 2(\theta_G + \lambda_0 - \Omega),
\end{aligned} \tag{2.74}$$

где λ_0 — долгота главной оси $\bar{u}$ на рис. 2.6.

2.2.2.4. Возмущения, вызываемые сопротивлением атмосферы

Вторая категория главных возмущений близких спутников (с высотой над поверхностью Земли в пределах 1000 *км*) вызывается сопротивлением атмосферы, или *механическим торможением в воздухе*. Возмущающей силой, возникающей при этом, является отрицательная тангенциальная составляющая, которая в случае постоянного сопротивления имеет одинаковую величину в точках, симметрично расположенных относительно большой полуоси. Из табл. 2.1 (стр. 166) можно видеть, что отрицательная составляющая силы ($-T$) вызывает непрерывное убывание большой полуоси и уменьшение эксцентриситета в интервале DAC и увеличение его в интервале CBD (рис. 2.5). Поскольку спутник дольше движется по дуге CBD, чем по дуге DAC, то создается впечатление, что эксцентриситет орбиты возрастает.

Однако влияние торможения на движение спутника непостоянно; оно зависит, кроме прочих параметров, и от его скорости, которая в перигее больше, чем в апогее. Полное воздействие торможения на эксцентриситет в общем случае выражается в *уменьшении эксцентриситета*. Если орбита спутника имеет явно эллиптическую форму, то наибольшее торможение имеет место в секторе вблизи перигея. Поэтому спутник испытывает слабое замедление при прохождении перигея, и это вызывает потерю высоты при последующем прохождении апогея при почти неизменной высоте в перигее. Таким образом, в результате атмосферного торможения орбита все более приближается к круговой: максимальная высота уменьшается при едва заметном изменении минимальной высоты, эксцентриситет, большая полуось и период обращения постепенно убывают. Если орбита круговая и величина сопротивления постоянна, то из-за непрерывного уменьшения полуоси орбита из круговой превращается в спиральную.

В дополнение к этим вековым изменениям в a и e линия апсид подвергается короткопериодическим возмущениям и поворачивается на некоторую величину в обратном направлении в интервале ACB (рис. 2.5) и на ту же величину в прямом направлении в интервале BDA (при условии постоянства торможения). Поэтому средняя вариация аргумента перигея остается равной нулю. (В действительности имеет место небольшая средняя вариация в ω.)

Другие малые эффекты связаны с вращением атмосферы совместно с Землей, что приводит к небольшим вековым изменениям i. к малым вариациям в скорости изменения a и e и к малым периодическим вариациям в Ω.

Сплюснутость атмосферы может изменять вариации, вызываемые сферической атмосферой, до 30%. Но обычно этот эффект значительно меньше, порядка 5—10%.

Все эти эффекты детально исследованы рядом авторов, при этом использовались различные модели атмосферы и различные переменные [73, 94, 99, 104, 112, 117, 173].

Целью этих исследований было выяснение действия атмосферного торможения на орбиту спутника, а также решение обратной задачи для получения информации о природе верхних слоев атмосферы. В последние годы на основе наблюдений спутниковых возмущений были опубликованы различные теории распределения плотности атмосферы и ее вариаций во времени [84, 99, 101, 102, 107, 116, 144, 145 и др.].

Ниже описан с математической точки зрения метод, предложенный Кинг-Хили, Куком и Уокером ([117], 1959). Их решение опирается на теорию сферически симметричной вращающейся атмосферы. в которой плотность атмосферы меняется экспоненциально с удалением от центра Земли и постоянна по времени. Также принимается, что других возмущений нет и что членами второго порядка, учитывающими влияние торможения, можно пренебрегать. Во второй работе ([117], 1960) авторы получили результаты для сплюснутой атмосферы.

Для спутников, у которых $0{,}015 < e < 0{,}2$, делается вывод, что сопротивление атмосферы действует на спутник в направлении, противоположном его скорости S', и может быть выражено так:

$$T = -\frac{1}{2}\sigma (S')^2 A C_D, \tag{2.75}$$

где σ — плотность атмосферы, A — площадь поперечного сечения спутника, перпендикулярного к S', C_D — коэффициент сопротивления. Для сферических спутников $A = \pi d^2/4$, где d — диаметр сферы, а для цилиндрических спутников (с учетом их вращения и кувыркания) величина A представляется выражением

$$A = ld\left(0{,}818 + 0{,}25\frac{d}{l}\right),$$

где d — диаметр, а l — длина цилиндра.

Коэффициент сопротивления C_D зависит от отношения скорости спутника к скорости молекулярного течения, от механизма переиспускания, от отношения энергии молекул до и после переиспускания, от температуры спутника и от доли молекул, распадающихся в результате удара. Было обнаружено, что для сфер и цилиндров с $5 < l/d < 20$, вращающихся вокруг поперечных осей, значение C_D лежит в пределах от 2,1 до 2,3.

Удобно записать уравнение (2.75) в форме

$$T = -\frac{1}{2}\sigma (s')^2 F A C_D, \tag{2.76}$$

где s' — скорость спутника относительно центра Земли, и величину $F = (S'/s')^2$ можно выразить в виде

$$F = 1 - \frac{r_\pi}{s'_\pi}\omega_a \cos i. \tag{2.77}$$

Здесь r_π и s'_π — расстояние и скорость ИСЗ в перигее. Символ ω_a обозначает угловую скорость атмосферы, которая для этого случая принимается равной угловой скорости вращения Земли. Величина F колеблется между 0,9 и 1,1, а для неподвижной атмосферы $F = 1$.

Предполагается, что экспоненциальное изменение плотности атмосферы с высотой выражается уравнением

$$\sigma = \sigma_\pi \exp\left(-\frac{r - r_\pi}{H}\right), \tag{2.78}$$

где σ_π — плотность атмосферы в перигее, которая определяется по изменению периода, а H — гидростатическая постоянная, или *шкала высот*.

Плотность атмосферы в перигее можно вычислить по формуле

$$\sigma_\pi = -\frac{m}{3FAC_D} P' \sqrt{\frac{2e}{\pi a H}} \left[1 - 2e + \frac{5}{2} e^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{H}{8ae} \left(1 - 10e + \frac{7H}{16ae} \right) + 0(e^3) \right], \quad (2.79)$$

где m — масса спутника, а $P' = dP/dt$ получается по наблюдениям либо вычисляется по формуле

$$P' = -\frac{3e_0P_0}{4\Delta t_L \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_L}}} \left\{ 1 + \frac{e_0}{6} \left(17 \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_L}} - 10 \right) + \right.$$
$$+ \frac{e_0^2}{144} \left(1081 - 1036 \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_L}} \right) - \frac{569}{96} e_0^2 \frac{\Delta t}{\Delta t_L} +$$
$$+ \frac{H}{2a_0e_0 \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_L}}} \left[1 + \left(\frac{27}{12} e_0 \ln \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_L}} + \frac{17}{12} e_0 \right) \times \right.$$
$$\left. \left. \times \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_L}} - \frac{e_0}{2} + \frac{3H}{4a_0e_0 \sqrt{1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_L}}} \right] + 0(e^3) \right\}. \quad (2.80)$$

Здесь индекс 0 указывает, что величина относится к начальной эпохе T_0; $\Delta t = t - T_0$ — промежуток времени между эпохами, а Δt_L — время существования спутника от начальной эпохи, которое выражается следующим уравнением:

$$\Delta t_L = \frac{e_0^2}{2B} \left[1 - \frac{11}{6} e_0 + \frac{29}{16} e_0^2 + \frac{7H}{8a_0} + 0\left(\frac{ae^5}{H} \right) \right]. \quad (2.81)$$

Здесь

$$B = \frac{2\pi}{P_0} \frac{FAC_D}{m} \sigma_{\pi 0} a_0 e_0 J_1 \left(\frac{a_0e_0}{H} \right) \exp \left(-\frac{a_0e_0}{H} - e_0 \right),$$

где $\sigma_{\pi 0}$ — плотность атмосферы в перигее в начальную эпоху и $J_1(a_0e_0/H)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента a_0e_0/H. В явной форме эта обычная функция имеет вид

$$J_1(z) = \frac{\exp z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{3}{8z} + \frac{15}{128z^2} - \ldots \right). \quad (2.82)$$

Шкала высоты, встречающаяся в этих выражениях, определяется как

$$\frac{1}{H} = -\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dy},$$

где y соответствует направлению вверх; таким образом, величину H можно определить по графику зависимости плотности от высоты. Ее значение меняется с высотой от 0 до 140 *км* днем и от 0 до 60 *км* ночью.

Подставляя уравнение (2.78) в уравнение (2.76), мы получим компоненту возмущающей силы, действующую на спутник с массой m:

$$T = -\frac{1}{2} FAC_D\sigma_\pi (s')^2 \exp\left(-\frac{r-r_\pi}{H}\right). \tag{2.83}$$

Подставляя значение σ (2.83) в гауссовы уравнения движения [132, p. 405] и интегрируя их, получим наиболее значительные вековые изменения для интервала Δt в таком виде:

$$\Delta e = e - e_0 = e_0\left\{\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}\left[1-\frac{e_0}{6}\left(1-\frac{19}{3}e_0\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\frac{29}{288}e_0^2\frac{\Delta t}{\Delta t_L} + \frac{3H}{16a_0}\ln\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}\right) + 0\left(\frac{ae^5}{H}\right)\right] - 1\right\}, \tag{2.84}$$

$$\Delta r_\pi = r_\pi - r_{\pi 0} = \frac{H}{2}\left[\left(1-\frac{17H}{8a_0}\right)\ln\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}} + \right.$$
$$+\frac{3H}{4a_0}\left(1+\frac{7}{6}e_0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}} - 1\right) -$$
$$\left. -\frac{5}{6}e_0\left(1+\frac{31}{30}e_0\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}\right) + \frac{121}{128}e_0^2\frac{\Delta t}{\Delta t_L}\right] + 0(ae^5), \tag{2.85}$$

$$\Delta P = P - P_0 = P_0\left\langle 1 - \frac{3}{2}e_0\left(1-\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}\right) \times \right.$$
$$\times\left[1+\frac{e_0}{12}\left(17\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}} - 3\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{e_0^2}{288}\left(557 - 467\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}} - 569\frac{\Delta t}{\Delta t_L}\right)\right] +$$
$$+\frac{3H}{4a_0}\left\{\ln\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}} + \right.$$
$$+\frac{e_0}{12}\left[\left(27\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}} - 6\right)\ln\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}} + \right.$$
$$\left. + 10\left(1-\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}\right)\right] -$$
$$\left.\left. -\frac{3H}{4a_0e_0}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\Delta t}{\Delta t_L}}} - 1\right)\right\} - 1 + 0(e^4)\right\rangle. \tag{2.86}$$

Здесь вновь индекс 0 соответствует значениям в начальную эпоху T_0; $r_\pi = a(1-e)$; $\Delta t = t - T_0$, а Δt_L получается из уравнения (2.81).

Если известны физические параметры F, A, C_D, m, H и $\sigma_{\pi 0}$, то интегральные вековые возмущения могут быть подсчитаны по приведенным выше формулам; если же наблюдаются возмущения, то распределение плотности может быть вычислено по формулам (2.81) и (2.78).

Как было указано ранее, формулы (2.84) — (2.86) выводились в предположении, что $0{,}015 < e < 0{,}2$ и что вращающаяся атмосфера сферична. Когда непрерывно уменьшающийся эксцентриситет достигает значения 0,015, необходимо пользоваться другим методом, так как асимптотическое выражение (2.82) становится неточным.

Для ознакомления с этим методом читатель отсылается к первоисточнику ([117], 1959, формулы (60), (61), (63)). Что касается сплюснутости атмосферы, то ее влияние будет наибольшим для полярных орбит ($i \approx 90°$) и наименьшим для экваториальных ($i \approx 0°$). Оно зависит также от величины ω. Если ω' велико, то возмущения будут периодическими с периодом 2ω. Если величина ω' близка к нулю ($i = 63°{,}4$), то влияние сплюснутости будет наименьшим при средних значениях ω, близких к 45°, 135° и т. д., и наибольшим при значениях ω, близких к 0°, 90° и т. д. Трудно сказать еще что-нибудь о влиянии несферичности атмосферы, поскольку она связана с несколькими независимыми параметрами. При наихудшем сочетании параметров результаты для сферической атмосферы могут изменяться приблизительно так: Δr_π на 30%, P/P_0 на 5%, $\sigma_{\pi 0}$ на 15%. Однако в обычном случае ожидаемые изменения гораздо меньше: соответственно 5, 0,2 и 1%. Время существования спутника не зависит от этого влияния. Соответствующий материал для этого случая можно найти во второй работе упомянутых выше авторов.

Следует отметить, что вследствие весьма асимметричной формы и изменчивости атмосферы, вызываемых атмосферными эффектами, часто используют не полные алгебраические выражения типа описанных выше, а один из следующих методов: численное интегрирование влияния модели атмосферы, численный гармонический анализ влияния модели атмосферы и применение произвольных полиномов.

2.2.2.5. Лунно-солнечные возмущения

К третьей категории главных возмущений, испытываемых искусственными спутниками, относится гравитационное притяжение Солнцем и Луной. Подобно атмосферному торможению, эти возмущения следует проанализировать, особенно когда речь идет о гравитационном поле Земли.

Влияние третьего тела на орбиту Луны рассмотрено в классических трудах по небесной механике. Но эти лунные теории неприменимы к искусственным спутникам. В последние годы различными авторами исследован вопрос о влиянии возмущающего тела на орбиту искусственного спутника [55, 72, 109, 120, 139, 140, 142]. Некоторые из этих теорий опираются на известные модификации лунных теорий; в некоторых после разложения возмущающей функции применяют уравнения движения Лагранжа, тогда как в других исследованиях используют особые приемы. Одни теории ограничиваются рассмотрением эксцентриситета, и большинство из них дают либо только вековые, либо только долгопериодические возмущения.

Методы, разработанные Каулой, пригодны для расчетов на электронно-вычислительных машинах. Были сделаны попытки применить методы Антона с сотрудниками и Козаи к исследованиям Каулы гравитационного поля Земли путем использования возмущающей функции Земли (2.63), как описано в разд. 2.2.2.3.

Кук [72] приводит развернутые выражения для вековых и долгопериодических возмущений, вызываемых притяжением третьего тела. Приведенные здесь результаты справедливы для любых значений эксцентриситета, но они применимы лишь к таким спутникам, у которых большая полуось орбиты меньше одной десятой расстояния от Луны до Земли.

Вариации первого порядка изменяющихся элементов для одного оборота выражаются так:

$$\Delta e = -\frac{15\pi K e\,(1-e^2)^{1/2}}{\bar{n}^2}\left[AB\cos 2\omega - \frac{1}{2}(A^2-B^2)\sin 2\omega\right],$$

$$\Delta\Omega = \frac{3\pi KC}{2\bar{n}^2\,(1-e^2)^{1/2}\sin i}\,[5Ae^2\sin 2\omega + B\,(2+3e^2-5e^2\cos 2\omega)],$$

$$\Delta i = \frac{3\pi KC}{2\bar{n}^2\,(1-e^2)^{1/2}}\,[A\,(2+3e^2+5e^2\cos 2\omega)+5Be^2\sin 2\omega], \tag{2.87}$$

$$\Delta\omega + \Delta\Omega\cos i = \frac{3\pi K\,(1-e^2)^{1/2}}{\bar{n}^2}\left\{5\left[AB\sin 2\omega + \frac{1}{2}(A^2-B^2)\cos 2\omega\right] - \right.$$
$$-1+\frac{3}{2}(A^2+B^2)+\frac{5a}{2r_{de}\,(1-e^2)^{1/2}}\times$$
$$\left.\times(A\cos\omega + B\sin\omega)\left[1-\frac{5}{4}(A^2+B^2)\right]\right\};$$

$$\Delta a = 0.$$

Изменения высоты в перигее при одном обороте можно подсчитать по формуле

$$\Delta r_\pi = -a\Delta e.$$

В этих уравнениях

$$K = \frac{K^2 M_d}{r_d^3}, \tag{2.88}$$

где M_d, r_d — масса возмущающего тела и его расстояние от центра Земли. Коэффициенты A, B, C — направляющие косинусы радиуса-вектора возмущающего тела, отнесенные к геоцентрическим осям координат, проходящим соответственно через восходящий узел спутника, вершину орбиты и нормаль к орбите. Они постоянны в течение одного оборота. Таким образом, предполагается, что среднее движение возмущающего тела значительно меньше, чем движение спутника.

Направляющие косинусы вычисляются по элементам орбиты посредством следующих формул:

$$\begin{aligned}
A &= \cos(\Omega - \Omega_d)\cos\bar{v}_d + \cos i_d \sin\bar{v}_d \sin(\Omega - \Omega_d),\\
B &= \cos i\,[-\sin(\Omega - \Omega_d)\cos\bar{v}_d + \cos i_d \sin v_d \cos(\Omega - \Omega_d)] +\\
&\quad + \sin i \sin i_d \sin\bar{v}_d,\\
C &= \sin i\,[\cos\bar{v}_d \sin(\Omega - \Omega_d) - \cos i_d \sin\bar{v}_d \cos(\Omega - \Omega_d)] +\\
&\quad + \cos i \sin i_d \sin\bar{v}_d,
\end{aligned} \tag{2.89}$$

где $\bar{v} = \omega + f$, а индекс d приписывается возмущающему телу.

Для Солнца $\Omega_d = 0$, $i_d = \varepsilon$, $\bar{v}_d = L$, где L — геометрическая средняя долгота, измеряемая вдоль эклиптики от точки весеннего равноденствия, ε — среднее наклонение эклиптики (23°26′).

Для Луны необходимые элементы могут быть вычислены по формулам сферической тригонометрии так:

$$\cos i_d = \cos\varepsilon \cos i_M - \sin\varepsilon \sin i_M \cos L_\Omega,$$

$$\sin\Omega_d = \frac{\sin i_M \sin L_\Omega}{\sin i_d},$$

$$\bar{v}_d = L_M - L_\Omega + \arcsin\frac{\sin\varepsilon \sin L_\Omega}{\sin i_d},$$

где i_M — наклонение лунной орбиты к эклиптике (5°09′); L_Ω — долгота среднего восходящего узла лунной орбиты, измеряемая по эклиптике от точки среднего равноденствия. Она вычисляется по формуле

$$L_\Omega = 178°{,}78 - 0°{,}05295t.$$

Здесь t — число дней, протекших от 1,0 января 1960 г. Величина L_M — средняя долгота, измеряемая по эклиптике от точки среднего равноденствия до среднего восходящего узла орбиты, а затем вдоль орбиты. Значения L и L_M приводятся в American Ephemeris and Nautical Almanac или в Astronomical Ephemeris.

Возвращаясь к уравнению (2.88) для этих вычислений, мы можем заменить r_d на a_d и тогда получим

$$K = M_d \bar{n}_d^2.$$

Для Луны M_d — отношение массы Луны к массе Земли, а $\bar{n}_d$ — среднее движение Луны вокруг Земли. Для Солнца $M_d = 1$, а $\bar{n}_d$ — среднее движение Земли вокруг Солнца. Используя в качестве единицы *град²/сутки²* и принятые для величин M_d и $\bar{n}_d$ постоянные, получим для Луны и Солнца значения

$$K_M = 2{,}1320, \qquad K_S = 0{,}9714.$$

В заключение, рассматривая уравнения (2.87) и (2.89), следует отметить, что возмущающее третье тело вызывает вековые вариации в Ω и ω. Все остальные элементы, за исключением большой полуоси, будут испытывать долгопериодические изменения, связанные с вращением линии апсид, с движением возмущающего тела и с движением восходящего узла спутника относительно третьего тела.

Большая полуось не подвергается этим возмущениям первого порядка (пренебрежение членами второго порядка может в случае максимальной вариации дать около 30 *м* в сутки). Теория Кука непригодна для экваториальных орбит, так как с ее помощью нельзя определить положения узлов. В этом случае предлагается вести рассуждения относительно плоскости эклиптики, где для Солнца $i_d = \Omega_d = 0$, а для Луны $i_d = i_M$ и $\Omega_d = L_\Omega$.

Лунно-солнечные влияния заметно возрастают с увеличением эксцентриситета.

2.2.2.6. Другие возмущения и резонансные соотношения

Из оставшихся возмущающих факторов, упомянутых в разд. 2.2.2.1, лишь два малых возмущения — световое давление и электромагнитные эффекты — рассмотрены ниже без выводов. Приливные и релятивистские эффекты почти не имеют значения для геодезии и потому не рассматриваются. Для изучения этих вопросов читатель отсылается к библиографии.

Влияние *светового давления* разделяется на прямое и косвенное (отраженное или излученное Землей) влияние. В первом приближении косвенное влияние можно не учитывать. Поскольку расстояние от Земли до Солнца намного больше размеров орбиты ИСЗ, то прямое световое давление можно считать постоянным, т. е. не зависящим от расстояния до Солнца. Направление возмущающей силы зависит от относительного расположения спутника и Солнца, тогда как ее величина есть функция положения ИСЗ относительно тени Земли. Если пренебрегать влиянием земной тени, т. е. считать, что спутник постоянно освещен Солнцем, то результирующие возмущения будут иметь вековой или долгопериодический характер и все элементы орбиты, за исключением большой полуоси, будут изменяться. Если учитывать, что спутник время от времени входит в земную тень, то возникают короткопериодические возмущения и большая полуось также подвергается определенным изменениям. Сила светового давления становится больше силы механического торможения для спутников, летящих на высоте более 1000 *км*, однако она особенно значительна лишь для крупных спутников типа Эхо 1. Для изучения аналитических и численных решений данной проблемы читатель должен обратиться к библиографии [65, 72, 120, 138].

Электромагнитные возмущения вызываются тем, что спутник при движении в ионосфере приобретает заряд и при этом движется в магнитном поле Земли. Соответствующая теория недостаточно разработана, но, по-видимому, электромагнитные возмущающие силы увеличивают вариации элементов, обусловленные механическим торможением. По-видимому, их также без опасения можно не учитывать для спутников с высотой перигея менее 300—600 *км*. Для дальнейшего детального изучения некоторых выводов рекомендуются работы [52, 53, 104, 162] и др.

В завершение следует отметить, что возмущения могут воздействовать и в резонансе. В этом случае результирующие вариации будут больше, чем сумма вариаций, рассмотренных в разд. 2.2.2.3—2.2.2.6. Для спутника Земли при наличии резонанса эксцентриситет является наиболее важным элементом, так как любое его изменение ведет к изменению расстояния в перигее, что влияет на продолжительность существования спутника. Согласно Куку, возможны 15 различных случаев, в которых может иметь место резонанс в вариации этого элемента:

$$\begin{aligned} \Omega' - \Omega'_d \pm \bar{v}'_d + \omega' &= 0, \\ 2\bar{v}'_d \pm (\Omega' - \Omega'_d) \pm 2\omega' &= 0, \\ \Omega' - \Omega'_d \pm \omega' &= 0, \\ \Omega' - \Omega'_d \pm 2\omega' &= 0, \\ \omega' \pm \bar{v}'_d &= 0, \\ \omega' &= 0. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Здесь индекс d относится к возможному третьему возмушающему телу. Для выяснения вопроса, оказывает ли резонанс влияние на возникающие возмущения, необходимо проанализировать эти соотношения.

2.2.3. Возмущенные эмпирические орбиты

Как было показано в разд. 2.2.2, главный метод определения элементов орбиты спутника для любого данного момента заключается в выборе системы рабочих координат, соответствующих независимых переменных и физических констант, в подстановке в выбранные уравнения движения различных возмущающих функций или компонент силы, в разработке и интегрировании уравнений движения с начальной эпохи по данный момент, в вычислении оскулирующих элементов для данного времени с учетом возмущений элементов начальной эпохи, полученных путем интегрирования.

Орбиты, вычисленные подобным образом, называются промежуточными орбитами, они хорошо согласуются с истинными орбитами, если используемый математический аппарат правилен, полон и строг, а константы известны с достаточной точностью.

Существует другой эмпирический метод определения элементов орбиты. В этом методе предполагается, что различные элементы орбиты изменяются по времени согласно некоторому ряду Фурье, возможно с дополнением показательных и гиперболических членов для подсчета всех вековых и периодических вариаций. Полное выражение для любого элемента орбиты (например, Ω) может быть записано так:

$$\Omega = \sum_{i=0}^{m} P_{\Omega i}(t-t_0)^i + \sum_{j=1}^{n} S_{0\Omega j}\sin[S_{1\Omega j} + S_{2\Omega j}(t-t_0)] + \sum_{k=1}^{p} E_{0\Omega k}\exp[E_{1\Omega k}(t-t_0)] + \sum_{l=1}^{r} H_{0\Omega l}(H_{1\Omega l}-t)^{H_{2\Omega l}}. \quad (2.91)$$

Для представления каждого элемента может быть выбрана сумма любой комбинации функций. В общем случае, отмеченном выше, каждый элемент может иметь $(3r + 2p + 3n + m + 1)$ коэффициентов ряда. Эти коэффициенты определяются с помощью уравнительных вычислений путем прямого сравнения уравнений типа (2.91) с наблюденными вариациями. Если короткопериодические возмущения исключены из наблюденных вариаций до уравновешивания путем использования некоторых теоретических формул, то коэффициенты P, S, E, H могут считаться постоянными для определенного периода времени, скажем 10 дней, для земных спутников ($t - t_0 \leqslant 10$ дней).

Поскольку коэффициенты выводятся эмпирическим путем, то результирующие орбиты называются *эмпирическими орбитами*. Этот метод применяется в специальной программе Смитсонианской обсерватории, в которой используются следующие ряды для элементов орбиты [172]:

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i=0}^{2} P_{\omega i}(t-t_0)^i + S_{0\omega}\sin[S_{1\omega}+S_{2\omega}(t-t_0)],\\
\Omega &= \sum_{i=0}^{2} P_{\Omega i}(t-t_0)^i + S_{0\Omega}\sin[S_{1\Omega}+S_{2\Omega}(t-t_0)],\\
i &= P_{i0}, \qquad (2.91а)\\
e &= \sum_{i=0}^{1} P_{ei}(t-t_0)^i + E_{0e}\exp[E_{1e}(t-t_0)],\\
\overline{M} &= \sum_{i=0}^{1} P_{Mi}(t-t_0)^i + S_{0M}\sin[S_{1M}+S_{2M}(t-t_0)] + H_{0M}(H_{1M}-t)^{H_{2M}}.
\end{aligned}$$

Ввиду того что программа предназначена для прямых наблюдений, большая полуось не включается в анализ, а выводится из наблюдений среднего движения $\overline{n}$ по следующей формуле:

$$a = \left(\frac{k^2M}{\overline{n}^2}\right)^{1/3}\left[1+\frac{1}{3}\frac{J_2}{p}\sqrt{1-e^2}\left(-1+\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\right], \qquad (2.91б)$$

где

$$p = \left(\frac{k^2M}{\overline{n}^2}\right)^{1/3}(1-e^2).$$

БИБЛИОГРАФИЯ К РАЗД. 2.2

Библиография *по теории влияния Земли на движение ИСЗ* выделена в особый список, чтобы подчеркнуть ее геодезическое значение (стр. 214—220). Ссылки на применение теории земных возмущений могут быть также найдены в библиографии к разделу о геодезических применениях ИСЗ.

1. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Об устойчивости некоторых классов орбит искусственных спутников Земли, Иск. спутн. Земли, **16**, 163—172, 1963.
2. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., О полярных орбитах искусственных спутников Земли, Вестник МГУ, 5, 81—89, 1962.

3. Алексахин И. В., Красовский А. А., Лебедев П. И., Яковлева А. И., Определение параметров начальных орбит искусственных спутников Земли, Иск. спутн. Земли, **16**, 211—225, 1963.
4. Алмар И., Илл М., Международное сотрудничество в исследовании некоторых геодезических величин по базисным наблюдениям искусственных спутников (Интеробс), Набл. иск. спутн. Земли, 1, 1957—1962; 46—50, 1962.
5. Астапович И. С., Каплан С. А., Визуальные наблюдения искусственных спутников Земли, М., Гостехтеоретиздат, 1957.
6. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета, изд-во «Наука», М., 1965.
7. Батраков Ю. В., Метод улучшения элементов орбит искусственных спутников по топоцентрическим расстояниям и радиальным скоростям, Бюлл. Инст. теорет. астрон., 8, 2, 93, 1961.
8. Батраков Ю. В., Определение первоначальных орбит искусственных спутников из наблюдений, моменты которых известны приближенно, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 7, 570—580, 1960.
9. Белецкий В. В., Некоторые вопросы поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском поле сил, Иск. спутн. Земли, **16**, 68—93, 1963.
10. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс, изд-во «Наука», М., 1965.
11. Богородский А. Ф., Релятивистские эффекты в движении искусственного спутника Земли, Астроном. ж., **36**, 5, 1959.
12. Вентцель М. К., Основы теоретической астрономии, Геодезиздат, М., 1962.
13. Гинзбург В. Л., Экспериментальная проверка общей теории относительности, Успехи физ. наук, 59, 11, 49, 1956.
14. Гонтиковская В. Т., Чеботарев Г. А., Лунные и солнечные возмущения в движении третьей советской космической ракеты, Астрон. ж., 38, 5, 954—960, 1961.
15. Григоревский В. М., О связи периода вращения спутника 1958δ с солнечной активностью, Иск. спутн. Земли, **17**, 82—90, 1963.
16. Дубошин Г. И., Теория притяжения, Физматгиз, М., 1961.
17. Дубошин Г. И., Небесная механика, Аналитические и качественные методы, изд-во «Наука», М., 1964.
18. Дубошин Г. И., Охоцинский Д. Е., Некоторые проблемы астродинамики и небесной механики, Космические исследования, **1**, вып. 2, 1963.
19. Егорова А. В., Влияние притяжения Луны и Солнца на движение искусственного спутника Земли, Иск. спутн. Земли, 8, 46—56, 1961.
20. Жонголович И. Д., Системы координат, применяемые при изучении движения искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **31**, 3—9, 1962.
21. Зонов И. В., К вопросу о взаимодействии спутника с магнитным полем Земли, Иск. спутн. Земли, **3**, 118—124, 1962.
22. Идельсон Н. И., Теория потенциала и ее приложение к вопросам геофизики, М., Гостехиздат, 1932.
23. Илл М., Определение плотности воздуха на основании изменений элементов орбит искусственных спутников Земли, Набл. иск. спутн. Земли, **2**, 58—62, 1963.
24. Калинин В. Н., Уравнения движения искусственного спутника Земли, Иск. спутн. Земли, **16**, 238—245, 1963.
25. Каплан С. А., Метод приближенного вычисления эфемерид искусственных спутников Земли и определения их орбит, Астрон. цирк., **192**, 5—8, 1958.

26. Ковалевский Т., Сходимость к решениям рядов небесной механики, получаемых численными методами, Пробл. движ. иск. неб. тел. М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 150—154.
27. Колегов Г. А., Вариации плотности верхней атмосферы по данным об изменении периодов обращения ИСЗ, Иск. спутн. Земли, **4**, 31—34, 1960.
28. Кондурарь В. Т., О поступательно-вращательном движении спутника под действием притяжения планеты и Солнца, Астрон. ж., **38**, 5, 969—981, 1961.
29. Куликов Д. К., Батраков Ю. В., Метод улучшения орбит искусственных спутников Земли по наблюдениям с приближенными моментами, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 7, 554—569, 1960.
30. Лахтин Л. М., Свободное движение в поле земного сфероида, Физматгиз, 1963.
31. Лидов М. Л., О приближенном апализе эволюции орбит искусственных спутников, Пробл. движ. иск. неб. тел, М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 119—134.
32. Лидов М. Л., Сопротивление неориентированного тела при движении в разреженном газе, Изв. АН СССР, Серия геофизич., **12**, 1957.
33. Маковер С. Г., Вычисление орбит искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **24**, 3—11, 1961.
34. Михневич В. В., Данилин Б. С., Репнев А. И., Соколов В. А., Некоторые результаты определения структурных параметров атмосферы с помощью третьего советского искусственного спутника Земли, Иск. спутн. Земли, **3**, 84—97, 1959.
35. Опальски Б., Определение приближенных элементов орбит искусственных спутников по измерениям их топоцентрических расстояний, Набл. иск. спутн. Земли, **2**, 80—89, 1963.
36. Погорелов Д. А., Теория кеплеровых движений летательных аппаратов, Физматгиз, 1961.
37. Полозова Н. Г., Шор В. А., Применение быстродействующих вычислительных машин к построению аналитических теорий движения планет и спутников. Пробл. движ. иск. неб. тел, М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 186—192.
38. Полякова Е. Н., Световое давление и движение спутников Земли, Бюлл. Инст. теорет. астрон., 9, 1, 15—45, 1963.
39. Репнев А. И., Свойства верхней атмосферы и искусственные спутники Земли, Труды Центр. аэролог. обс., **25**, 5—62, 1959.
40. Словохотова Н. П., К вопросу об эволюции орбит искусственных спутников Земли в связи с солнечной активностью, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **35**, 21—29, 1963.
41. Сочилина А. С., Улучшение орбитальных элементов искусственных спутников Земли, Бюлл. Инст. теорет. астрон., 9, 5, 310—322, 1963.
42. Фираго Б. А., Определение топо- и геоцентрического расстояния спутника и его высоты над поверхностью Земли, Бюлл. станции оптич. набл. ИСЗ, **32**, 29—31, 1963.
43. Козаи И., Движение близких искусственных спутников, Пробл. движ. иск. неб. тел, М., Изд-во АН СССР, 1963, стр. 107—118.
44. Чарный В. И., Об изохронных производных, Иск. спутн. Земли, **16**, 226—237, 1963.
45. Чеботарев Г. А., Макарова Е. Н., Сочилина А. С., Определение орбит и вычисление эфемерид искусственных спутников Земли, Иск. спутн. Земли, **2**, 64—79, 1963.
46. Штернфельд А., Искусственные спутники, М., Гостехиздат, 1-е изд., 1956; 2-е изд., 1958.

47. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, М., изд-во «Наука», 1965.
48. Яров-Яровой М. С., О рядах, определяющих движение спутника, Сообщ. Гос. астрон. инст. им. Штернберга, III, 15—38, 1961.
49. Яров-Яровой М. С., О вычислении точной и приближенной эфемериды искусственных спутников, Астрон. ж., **36**, 3, 524—534, 1959.
50. Baker R. M. L., Makemson M. W., An Introduction to Astrodynamics, Academic Press, New York and London, 1960.
51. Baker R. M. L., Westrom G. B., Hilton C. G., Gersten R. H., Arsenault J. L., Browne E. J., Effecient Precision Orbit Computation Techniques, Amer. Rocket Soc. Journ., **30**, 740—747, 1960.
52. Beard D. B., Johnson F. S., Charge and Magnetic Field Interaction with Satellites, Journ. Geophys. Res., **65**, 1, 1960.
53. Beard D. B., Johnson F. S., Ionospheric Limitations on Attainable Satellite Potential, Journ. Geophys. Res., **66**, 12, 1961.
54. Белецкий В. В., The Motion of an Artificial Earth Satellite Relative to its Centre of Mass, Royal Aircraft Establishment Library Translation, 824, 1959. См. [10].
55. Blitzer L., Lunar-Solar Perturbations of an Earth Satellite, Amer. Journ. Phys., **27**, 634—645, 1959.
56. Bowden G. E., Flis J. (eds.), Notes of the Summer Institute in Dynamical Astronomy at Yale University Observatory, July 1959, Yale University Observatory, New Haven, 1959; 2nd ed. revised by D. Brouwer and Gen-ichiro Hori, 1960.
57. Brenner J. L., Fulton R., Latta G. E., Sherman N., Weisfeld M., Methods for Satellite Orbit Calculation, Stanford Research Institute Rep., Menlo Park, Calif., 1959.
58. Briggs R. E., Slowey J. W., An Iterative Method of Orbit Determination from Three Observations of a Nearby Satellite, Smithsonian Astrophys. Obs., **27**, 1959.
59. Britton J. E., Jones H. M., Shapiro I. I., Perturbative Forces Affecting the Motion of Artificial Earth Satellites, Lincoln Laboratory Library 7th Reference Bibliography, Lincoln Lab., MIT, Lexington, Mass., 1961.
60. Brouwer D., Clemence G. M., Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, New York and London, 1961. (Русский перевод: Д. Брауэр, Дж. Клеменс, Методы небесной механики, М., изд-во «Мир», 1964.)
61. Brouwer D., Hori G. I., Theoretical Evaluation of Atmospheric Drag Effects in the Motion of an Artificial Satellite, Astron. Journ., **66**, 193—225, 1961.
62. Bryant R. W., Interim Definitive Orbits Determined at the NASA Computing Center, Jet Prop. Lab. Sem. Proc., J. Lorell and F. Yagi, eds., 1960.
63. Bryant R. W., NASA Computing Center Predictions, Jet Prop. Lab. Sem. Proc., J. Lorell and F. Yagi, eds., 1960.
64. Bryant R., A Comparison of Theory and Observation of the Echo I Satellite, Journ. Geophys. Res., **66**, 9, 1961.
65. Bryant R. W., The Effect of Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite, NASA-Tech. Note, D-1063; Astron. Journ., **66**, 8, 1961.
66. Byerly W. E., An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics, with Applications to Problems in Mathematical Physics, Ginn and Company, Boston, Mass. 1893; переиздание; Dover Publications, Inc., New York, 1959.

67. C h o p r a K. P., Interactions of Rapidly Moving Bodies in Terrestrial Atmosphere, Rev. Modern. Phys., **33**, 2, 1961.
68. C o l o m b o G., The Stabilization of an Artificial Satellite at the Inferior Conjunction Point of the Earth-Moon System, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 80, 1961.
69. C o o k G. E., Rotation of the Orbital Plane of an Earth Satellite Due to the Atmosphere, Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Note, GW. 351, 1959.
70. C o o k G. E., The Aerodynamic Drag of Near Earth Satellites, Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Note, GW. 531, 1959.
71. C o o k G. E., Effect of an Oblate, Rotating Atmosphere on the Orientation of a Satellite Orbit, Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Note, GW. 550, 1960.
72. C o o k G. E., Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite, Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., **6**, 3, 1962; Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Note, GW. 582, 1961.
73. C o o k G. E., P l i m m e r R. N. A., The Effect of Atmospheric Rotation on the Orbital Plane of a Near-Earth Satellite, Proc. Roy. Soc., **A258**, 516—528, 1960.
74. C o o k G. E., K i n g - H e l e D. G., W a l k e r D. M. C., The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag, I. With Spherically Symmetrical Atmosphere, Proc. Roy. Soc., **A257**, 224—249, 1960.
75. D a n b y J. M. A., Fundamentals of Celestial Mechanics, The Macmillan Co., New York, 1961.
76. E c k e r t W. J., B r o u w e r D., The Use of Rectangular Coordinates in the Differential Correction of Orbits, Astron. Journ., **46**, 125—132, 1937.
77. Е г о р о в а А. В., The Influence of the Gravitational Attraction of the Sun and the Moon on the Motion of an Artificial Satellite, Royal Aircraft Establishment, Library Translations, 983, 1962. См. [19].
78. E w a r t D. G., The Effect of Atmospheric Drag on the Orbit of a Spherical Earth Satellite, Journ. British Interplan. Soc., **18**, 7, 1962.
79. F a i n W. W., G r e e r B. J., Electrically Charged Bodies Moving in the Earth's Magnetic Field, Amer. Rocket Soc. Journ., **29**, 451—453, 1959.
80. F i s c h e r I., The Present Extent of the Astrogeodetic Geoid and the Geodetic World Datum Derived from It, Bull. Géod., **61**, 1961.
81. F i s c h e r I., Parallax of the Moon in Terms of a World Geodetic System, Astron. Journ., **67**, 373—378, 1962.
82. F o l k a r t B. M., S t e r n e T. E., S c h i l l i n g G. F., An Interim Model Atmosphere Fitted to Preliminary Densities Inferred from USSR Satellites, Smithsonian Contrib. Astrophys., **2**, 10, 1958.
83. G e y l i n g F. T., Satellite Perturbations from Extraterrestrial Gravitation and Radiation Pressure, Journ. Franklin Inst., **269**, 375—407, 1960.
84. G r o v e s C. V., Determination of Upper-atmosphere Density and Scale Height from Satellite Observations, Proc. Roy. Soc., **A252**, 16—27, 1959.
85. H a g i h a r a Y., Rotation of an Earth Satellite in Flight along Its Orbit, Smithsonian Contrib. Astrophys., 5, 9, 1961.
86. H a g i h a r a Y., Recommendations on Notation of the Earth Potential, Astron. Journ., **67**, 108, 1962.
87. H a m p t o n D. E., The Analysis of Doppler Records from Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 486—501, 1961.
88. H a r r i s I., J a s t r o w R., A Short Program for the Determination of Satellite Orbits, Proc. IRE, **47**, 5, 1959; Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 85—90, 1960.
89. H e r g e t P., The Computation of Orbits, Principia Press, Cincinnati, 1948.

90. H e r r i c k S., The Laplacian and Gaussian Orbit Methods, University of California Press, Berkeley, 1940.
91. H e r r i c k S., B a k e r R. M. L., Jr., H i l t o n C. G., Gravitational and Related Constants for Accurate Space Navigation, Proc. VIIIth Intern. Astronaut. Congr., Barcelona, 1957, Springer-Verlag, Wien, 1958, pp. 197—235.
92. H e r r i c k S., A Comparison of Astronomical and Ballistic Traditions in Orbit Computation, University of California, L. A., Astrodynamical Report, 14, 1962.
93. I z s a k I. G., Orbit Determination from Simultaneous Doppler-Shift Measurements, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 38, 1960.
94. I z s a k I. G., Periodic Drag Perturbations of Artificial Satellites, Astron. Journ., **65**, 355—357, 1960.
95. I z s a k I. G., Differential Orbit Improvement with the Use of Rotated Residuals, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 73, 1961.
96. J a c c h i a L. G., Two Atmospheric Effects in the Orbital Acceleration of Artifical Satellites, Nature, **183**, 526—527, 1959.
97. J a c c h i a L. G., The Solar Effects on the Acceleration of Artificial Satellites, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 29, 1959.
98. J a c c h i a L. G., The Effect of a Variable Scale Height on Determinations of Atmospheric Density from Satellite Accelerations, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 46, 1960.
99. J a c c h i a L. C., A Variable Atmospheric-Density Model from Satellite Accelerations, Journ. Geophys. Res., **65**, 9, 1960; Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 39, 1960.
100. J a c c h i a L. G., A Working Model for the Upper Atmosphere. Nature, **192**, 4808, 1961.
101. J a c c h i a L. G., S l o w e y J., Preliminary Analysis of the Atmospheric Drag of the Twelve-Foot Ballon Satellite (1961 δ_1), Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 84, 1962.
102. J a c c h i a L. G., S l o w e y J., Accurate Drag Determinations for Eight Artificial Satellites; Atmospheric Densities and Temperatures, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 100, 1962.
103. J a s t r o w R., B r y a n t R., Variations in the Orbit of the Echo Satellite, Journ. Geophys. Res., **65**, 10, 1960.
104. J a s t r o w R., P e a r s e C. A., Atmospheric Drag on the Satellite, Journ. Geophys. Res., **62**, 3, 1957.
105. J o n e s H. M., S h a p i r o I. I., Z a d u n a i s k y P. E., Solar Radiation Pressure Effects, Gas Leakage Rates, and Air Densities Inferred from the Orbit of Echo I, Space Research II, H. C. Van de Hulst, C. de Jager, A. F. Moore, eds., Interscience Publ., Inc., New York, 1961.
106. J u n g K., Figur der Erde, Encyclopedia of Physics, XLVII, Geophysics I, J. Bartels and S. Flügge, eds., Springer-Verlag, Berlin, 1956.
107. K a l l m a n n - B i j l H. K., Daytime and Nighttime Atmospheric Properties Derived from Rockets and Satellite Observations, Journ. Geophys. Res., **66**, 3, 1961.
108. K a u l a W. M., Statistical and Harmonic Analysis of Gravity, Journ. Geophys. Res., **64**, 12, 1959.
109. K a u l a W. M., Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite, Astron. Journ., **67**, 300—303; NASA Tech. Note, D-1126, 1962.
110. K a u l a W. M., Celestial Geodesy, NASA Tech. Note, D-1155, 1962; Advances in Geophysics, 9, H. E. Landsberg and J. van Mieghem, eds.,

Academic Press, New York and London, 1962, pp. 191—293. (Русский перевод: Каула В. М., Космическая геодезия, изд-во «Недра», 1965).
111. King-Hele D. G., Density of the Atmosphere at Heights Between 200 km. and 400 km. from Analysis of Artificial Satellite Orbits, Nature, **183**, 1224—1227, 1959.
112. King-Hele D. G., Method for Determining the Changes in Satellite Orbit Due to Air Drag, Space Research I, H. K. Kallmann-Bijl, ed., Interscience Publ., Inc., New York, 1960.
113. King-Hele D. G., Predicting the Life Time of Artificial Satellites in Theory and Practice, Nature, **193**, 638—639, 1962.
113a. King-Hele D. G., Satellites Seientific Research, London, Routledge and Kegan, 1962. (Русский перевод: Д. Кинг-Хили, Искусственные спутники и научные исследования, ИЛ, М., 1993.)
114. King-Hele D. G., Walker D. M. C., Irregularities in the Density of the Upper Atmosphere; Results from Satellites, Nature, **183**, 527—529, 1959.
115. King-Hele D. G., Walker D. M. C., Variation of Upper Atmosphere Density with Latitude and Season, Further Evidence from Satellite Orbits, Nature, **185**, 727—729, 1959.
116. King-Hele D. G., Walker D. M. C., Upper Atmosphere Density During the Years 1957 to 1961, Determined from Satellite Orbits, Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Note, GW. 579, 1961; Space Research II, H. C. Van de Hulst, C. de Jager, A. F. Moore, eds., Interscience Publ., Inc., New York, 1961.
117. King-Hele D. G., Cook G. E., Walker D. M. C., The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air-Drag, Part I, Royal Aircraft Establishment, Tech. Note, GW. 533, 1959; Part II, GW. 565, 1960.
118. Physics and Astronomy of the Moon, Kopal Z., ed., Academic Press, New York and London, 1961.
119. Котельников В. А., Дубровин В. М. и др., Using the Doppler Effect to Determine the Orbital Parameters of Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 880—891, 1961.
120. Kozai Y., On the Effects of the Sun and the Moon upon the Motion of a Close Earth Satellite, Smithson, Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 22, 1959.
121. Kozai Y., Effects of Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 56, 1961. См. [43].
122. Красовский В. И., Soviet Exploration of the Ionosphere with the Help of Rockets and Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year., **12**, 529—546, 1961.
123. LaPaz L., Magnetic Damping of Rotation of the Vanguard I Satellite, Science, **131**, 355—356, 1960.
124. LaPaz L., On the Magnetic Damping of Rotation of Artificial Satellites of the Earth, Journ. Geophys. Res., **65**, 7, 1960.
125. Lautman D. A., Computations, Amer. Geophys. Union Monograph No. 4, 1959.
126. Lorell J., Yagi F. (eds.), Tracking Programs and Orbit Determination, Jet Prop. Lab. Seminar Proc., California Institute of Technology, Pasadena, Calif., 1960.
127. Massey H. S. W., Artificial Satellites, Vistas in Astronomy, A. Beer, ed., **4**, Pergamon Press, New York, London and Paris, 1961, pp. 29—110.
128. Михайлов А. А., The Astronomical Unit of Length, Third Intern. Space Sci. Symp. and Fifth COSPAR Plenary Meeting, Washington, Apr. 30 to May 9, 1962.

129. Moe K., A Model for the Errors in Satellite Orbital Predictions Caused by Fluctuations in Drag, Space Tech. Lab. Tech. Rep. 60-0000-09154, 1960.
130. Moe K., The Errors in Orbital Predictions for Artificial Earth Satellites, Journ. Geophys. Res., 67, 9, 1962.
131. Moe M. M., Solar-Lunar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite, Amer. Rocket Soc. Journ., **30**, 483—487, 1960.
132. Moulton F. R., An Introduction to Celestial Mechanics, 2nd ed., Macmillan Co., New York, 1958.
133. Mowlen A. R., The Programming System for Orbit Determination at the IBM Space Computing Center, Jet Prop. Lab. Seminar Proc., J. Lorell, F. Yagi, eds., 1960.
134. Muhleman D. O., Hudson R. H., Holdridge N. B., Carpenter R. L., Oslund K. C., Observed Solar Pressure Perturbations of Echo I, Science, **132**, 1487, 1960.
135. Muhleman D. O., Holdridge D. B., Block N., The Astronomical Unit Determined by Radar Revlections from Venus, Astron. Journ., **67**, 191—203, 1962.
136. Musen P., Special Perturbations of the Vectorial Elements, Astron. Journ., 59, 262—267, 1954.
137. Musen P., Contributions to the Theory of Satellite Orbits, Space Research I, H. K. Kallmann-Bijl, ed., Interscience Publ., Inc., New York, 1960.
138. Musen P., The Influence of Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite, Journ. Geophys. Res., **65**, 5, 1960.
139. Musen P., On the Long Period Luni-Solar Effect in the Motion of an Artificial Satellite, NASA Tech. Note, D-1041, 1961; Journ. Geophys. Res., **66**, 6 and 9, 1961.
140. Musen P., On Long Range Effects in the Motion of Artificial Satellites, Symposium on Dynamics of Satellites, Intern. Union of Theoretical and Applied Mechanics, Paris, France, May 29—31, 1962.
141. Musen P., Bryant A., Bailie A., Perturbations in Perigee Height of Vanguard I, Science, **131**, 935—936, 1960.
142. Musen P., Bailie A., Upton E., Development of the Lunar and Solar Perturbations in the Motion of an Artificial Satellite, NASA Tech. Note, D-494, 1961.
143. Newell H. E., Cornier L. N., eds., Atmospheric Density Inferred from Drag Accelerations, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 207—319, 1960.
144. Newell H. E., Cornier L. N., eds., Atmospheric Density Pressure, Temperature, Composition and Winds, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 320—459, 1960.
145. Newell H. E., Jr., Cornier L. N., eds., Ionosphere, Ann. Intern. Geophys. Year., **12**, 486—608, 1961.
146. Newton R. R., Motion of a Satellite in an Atmosphere of Low Gradient, Amer. Rocket Soc. Journ., **32**, 5, 1962.
147. Nonweiler T. R., Effect of a Resisting Couple on the Rotational Motion of a Rigid Body, Nature, **187**, 311, 1960.
148. O'Keefe J. A., Eckels A., Squires R. K., The Gravitational Field of the Earth, Astron. Journ., **64**, 245—253, 1959.
149. Parkinson R. W., Jones H. M., Shapiro I. I., Effect of Solar Radiation Pressure on Earth Satellite Orbits, Science, **131**, 920—921, 1960.
150. Parkyn D. G., Satellite Orbits in an Oblate Atmosphere, Journ. Geophys. Res., **65**, 1, 1960.
151. Parkyn D. G., Satellite 1958 δ_2 Data Analysis, Journ. Geophys. Res., **67**, 2, 1962; Jacchia L. G., Letter to the editor, Journ. Geophys. Res., **67**, 7, 1962.

152. Paul E. W., A Series Expansion of the True Anomaly, Westinghouse Electric Corp., Air Army Div., Baltimore, Contract AF 49(638)-1002, Project 9783, 1961.
153. Pettingill J. H. et al., A Radar Investigation of Venus, Astron. Journ., **67**, 181—190, 1962.
154. Plimmer R. N. A., The Effect of the Earth's Atmospheric Rotation on the Orbital Inclination of a Near Earth Satellite, Royal Aircraft Establishment, Tech. Note GW. 504, 1959.
155. Plummer H. C., An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, Cambridge University Press, 1918; Dover Publications, New York, 1960.
156. Roberson R. E., Gravitational Torque on a Satellite Vehicle, Journ. Franklin Inst., **265**, 13—22, 1958.
157. Scarborough J. B., Numerical Mathematical Analysis; 3rd ed., The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md. 1955.
158. Schilling G. F., Sterne T. E., Densities of the Upper Atmosphere Derived from Satellite Observations, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., **12**, 1958.
159. Schilling G. F., Sterne T. E., Some Preliminary Values of Upper Atmosphere Density from Observations of USSR Satellites, Smithsonian Contrib. Astrophys., **2**, 10, 1958.
160. Schilling G. F., Whitney C. A., Atmospheric Densities from Explorer IV, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 18, 1958.
161. Shapiro I. I., Jones H. M., Perturbations of the Orbit of the Echo Balloon, Science, **132**, 1484—1486, 1960.
162. Shapiro I. I., Jones H. M., Effects of the Earth's Magnetic Field on the Orbit of a Charged Satellite, Journ. Geophys. Res., **66**, 12, 1961.
163. Smart W. M. Celestial Mechanics, Longmans, Green and Company, London, 1953.
164. Smith V. S., Bruijnes H. R., Sherman N. W., The Satellite Code, A Numerical Satellite Integration Program for the IBM 704, Univ. Calif. Rad. Lab. Rep., 5462, 1959.
165. Spitzer L., Perturbations of a Satellite Orbit, Journ. British Interplan. Soc., 9, 131—137, 1956.
166. Sterne T. E., An Atmospheric Model, and Some Remarks of the Inference of Density from the Orbit of a Close Earth Satellite, Astron. Journ., **63**, 81—87, 1958.
167. Sterne T. E., The Density of the Upper Atmosphere, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 11, 1958.
168. Sterne T. E., Effect of the Rotation of a Planetary Atmosphere upon the Orbit of a Close Satellite, Journ. Amer. Rocket Soc., 29, 777—782, 1959.
169. Stirton R. J., The Upper Atmosphere and Satellite Drag, Smithsonian Contrib. Astrophys., **5**, 2, 1960.
170. Upton E., Bailie A., Musen P., Lunar and Solar Perturbations on the Satellite Orbits, Science, **130**, 1710—1711, 1959.
171. Vaucouleurs G. de, The Astronomical Unit of Distance: Solar Parallax and Related Constants, Rand Memorandum, RM-294-NASA, 1961.
172. Veis G., Moore C. H., Smithsonian Astrophysical Observatory Differential Orbit Improvement Program, Jet. Prop. Lab. Seminar Proc., J. Lorell and F. Yagi, eds., 1960.
173. Vinti J. P., Theory of the Effect of Drag on the Orbital Inclination of an Earth-Satellite, Journ. Res. Nat. Bureau of Standards, **62**, 2, 1959.
174. Wen L. W., A Unified Treatment of Variation of Parameters and Differential Expressions Methods in Trajectory Prediction and Error Analysis, Journ. Aerospace Sci., **29**, 1, 1962.

175. Westerman H. R., Perturbation Approach to the Effect of the Geomagnetic Field on a Charged Satellite, Amer. Rocket Soc. Journ., **30**, 204—205, 1960.
176. Whitney C. A., The Structure of the High Atmosphere, I. Linear Models, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 21, 1959.
177. Whitney C. A., The Structure of the High Atmosphere; II.A Conduction Model, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 25, 1959.
178. Wilson R. H., Jr., Magnetic Damping of Rotation on the Vanguard I Satellite, Science, **131**, 356—357, 1960.
179. Wyatt P. J., Induction Drag on a Large Negatively Charged Satellite Moving in a Magnetic-Field-Free Ionosphere, Journ. Geophys. Res., **65**, 6, 1960.
180. Wyatt S. P., The Effect of Radiation Pressure on the Secular Acceleration of Satellites, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Special Rep., 60, 1961.
181. Wyatt S. P., Effect of the Diurnal Atmospheric Bulge on Satellite Accelerations, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 63, 1961.
182. Zadunaisky P. E., Atmospheric Drag on Non-Spherical Artificial Satellites, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 65, 1961.
183. Zadunaisky P. E., Shapiro I. I., Jones H. M., Experimental and Theoretical Results on the Orbit of Echo I, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 61, 1961.

БИБЛИОГРАФИЯ ПО ТЕОРИИ ВЛИЯНИЯ ЗЕМЛИ НА ДВИЖЕНИЕ ИСЗ

1*. Аксенов Е. П., О движении искусственного спутника в нецентральном поле тяготения Земли, Бюлл. Инст. теорет. астрон. **7**, 10, 350—358, 1960.
2*. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Качественный анализ форм движения в задаче о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли, Иск. спутн. Земли, **16**, 173—197, 1963.
3*. Астапович И. С., Каплан С. А., Визуальные наблюдения искусственных спутников Земли, Гос. изд. техн. теорет. лит., М., 1957.
4*. Батраков Ю. В., Сочилина А. С., Движение ракеты-носителя третьего советского спутника Земли ($1958\delta_1$) и величина сжатия Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **17**, 6—12, 1960.
5*. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимбирев Б. П., Теория фигуры Земли, Геодезиздат, М., 1961.
6*. Белецкий В. В., Классификация движений искусственного спутника Земли около центра масс, Иск. спутн. Земли, **6**, 11—33, 1961.
7*. Вентцель. М. К., Основы теоретической астрономии, Геодезиздат, М., 1962.
8*. Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, М., 1963.
9*. Егорова А. В., Возмущения в движении искусственного спутника Земли от Луны, Солнца и сжатия Земли, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 10, 815—821, 1960.
10*. Егорова А. В., Результаты численного интегрирования уравнений движения искусственного спутника Земли, Бюлл. Инст. теорет. астрон., 9, 5, 323—329, 1963.

11*. Жонголович И. Д., Некоторые формулы, относящиеся к движению материальной точки в поле тяготения уровенного эллипсоида вращения, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 7, 521—536, 1960.

12*. Жонголович И. Д., Основные возмущения искусственного спутника, происходящие от асимметрии северного и южного полушарий, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **2** (12), 25—30, 1960.

13*. Жонголович И. Д., Возмущения искусственного спутника в гравитационном поле Земли. Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 10, 743—756, 1960.

14*. Жонголович И. Д., Опыт определения некоторых параметров гравитационного поля Земли по результатам наблюдений спутников $1959\beta_2$, $1958\delta_1$, $1958\delta_2$, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **2**, 1—24, 1960.

15*. Жонголович И. Д., Обзор результатов определения параметров гравитационного поля Земли из наблюдений искусственных спутников, Набл. иск. спутн. Земли, **1** (1957—1962), 252, 32, 1962.

16*. Кислик М. Д., Точное решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли, Пробл. движ. иск. неб. тел, Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 76—91.

17*. Кочина Н. Г., Влияние гравитационных аномалий Земли на движение искусственных спутников, Труды Инст. теорет. астрон., 9, 65—203, 1962.

18*. Лейкин Г. А., О влиянии приливного трения на движение спутника Земли, Астрон. ж., **35**, 2, 297—300, 1958.

19*. Орлов А. А., Влияние сфероидальности планеты на движение ее спутника, Сообщ. Гос. астрон. инст. им. Штернберга, **112**, 3—32, 1961.

20*. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений орбиты, Успехи физ. наук, **63**, 19, 33—50, 1957.

21*. Проскурин В. Ф., Батраков Ю. В., Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 7, 537—548, 1960.

22* Проскурин В. Ф., Кочина Н. Г., Влияние гравитационных аномалий Земли на движение искусственных спутников, Проблемы движения искусственных небесных тел, АН СССР, М., 1963, стр. 144—149.

23*. Самойлович Г. В., Движение искусственного спутника несферической Земли, Иск. спутн. Земли, **16**, 140—153, 1963.

24*. Таратынова Г. П., О движении искусственного спутника Земли в нецентральном поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосферы, Успехи физ. наук, **63**, 19, 51—58, 1957.

25*. Тенгстрем А., О наличии полной информации (геофизических, гравитационных и геомагнитных данных) для уравнений движения искусственных спутников Земли, Проблемы движения искусственных небесных тел, АН СССР, М., 1963, стр. 229—235.

26*. Фоминов А. М., Движение искусственного спутника Земли в несферической атмосфере, Бюлл. Инст. теорет. астрон., 9, 3, 185—203, 1963.

27*. Яров-Яровой М. С., О силовой функции притяжения планеты и ее спутника, Проблемы движения искусственных небесных тел, АН СССР, М., 1963, стр. 259—277.

28*. Яцунский И. М., О влиянии геофизических факторов на движение спутника, Успехи физ. наук, **63**, 1а, 59—72, 1957.

29*. Arnold K., Die Bewegung der Knotenlinie einer Satellitenbahnebene auf Grund der Schwereanomalien, Gerl. Beitr. z. Geophys., **68**, 193—203, 1959.

30*. Arnold K., Die Präzessionsbewegung der Erde und der Bahn der Künstlichen Erdsatelliten, die Abplattung der Erde und die Dichtverteilung im Erdinnern, Gerl. Beitr. z. Geophys, 69, 191—199, 1960.
31*. Bailie A., Bryant R., Osculating Elements Derived from the Modified Hansen Theory for the Motion of an Artificial Satellite, Astron. Journ., 65, 451—453, 1960.
32*. Barrar R. B., Some Remarks on the Motion of a Satellite at an Oblate Planet, Astron. Journ., 66, 11—14, 1961.
33*. Blitzer L., Boughton E. M., Kang G., Page R. M., Effect of the Ellipticity of the Equator on 24-Hour Nearly Circular Satellite Orbits, Journ. Geophys. Res., 67, 1, 1962.
34*. Bonavito N. I., Computational Procedure for Vinti's Theory of an Accurate Intermediary Orbit, NASA Tech. Note, D-1177, 1962.
35*. Brenner J. L., Latta G. E., The Theory of Satellite Orbits Based on a New Coordinate System, Proc. Roy. Soc., A258, 470—485, 1960.
36*. Brouwer D., The Motion of a Particle with Negligible Mass under the Gravitational Attraction of a Spheroid, Astron. Journ., 51, 223—231, 1946.
37*. Brouwer D., Outline of General Theories of the Hill-Brown and Delaunay Types for Orbits of Artificial Satellites, Astron. Journ., 63, 433—438, 1958.
38*. Brouwer D., Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag, Astron. Journ., 64, 378—397, 1959.
39*. Brown E. W., Theory of the Motion of the Moon; Containing a New Calculation of the Expression for the Coordinates of the Moon in Terms of the Time, Mem. Roy. Astron. Soc., 53, 39—116, 163—202; 54, 1—64; 57, 51—145; 59, 1—104, 1897—1908.
40*. Brown E. W., An Introductory Treatise of the Lunar Theory, Cambridge Univ. Press, 1896; Dover Publ. Inc., 1960.
41*. Cain B. J., Determination of Mean Elements for Brouwer's Satellite Theory, Astron. Journ., 67, 391—392, 1962.
42*. Cook A. H., Resonant Orbits of Artificial Satellites, Space Research I, H. K. Kallmann-Bijl, ed., Interscience Publ., Inc., New York, 1960.
43*. Cook A. H., Resonant Orbits of Artificial Satellites and Longitude Terms in the Earth's External Gravitational Potential, Geophys. Journ., 4, 53—72, 1961.
44*. Cunningham L. E., The Motion of a Nearby Satellite with Highly Inclined Orbit, Astron. Journ., 62, 12—13, 1957.
45*. Davis R. J., Whipple F. L., Zirker J. B., The Orbit of a Small Earth Satellite, Scientific Uses of Earth Satellites, J. Van Allen, ed., Univ. of Michigan Press, 1958. (Русский перевод в сб. «Научное использование искусственных спутников Земли», ИЛ, М., 1960.)
46*. Demoraes A., Effects of the Earth's Oblateness on the Orbit of an Artificial Satellite, Anais da Academica Brasileira de Ciencias, 30, 4, 1958.
47*. Dobson W. F., Huff V. N., Zimmerman A. V., Elements and Parameters of the Osculating Orbit and Their Derivatives, NASA Tech. Note, D-1106, 1962.
48*. Eckert W. J., Improvement by Numerical Methods of Brown's Expression for the Coordinates of the Moon, Astron. Journ., 63, 415—418, 1958.
49*. Frick R. H., Garber T. B., General Equations of Motion of a Satellite in a Gravitational Gradient Field, Project Rand, Research Memorandum RM-2527, 1959.
50*. Frick R. H., Garber T. B., Perturbations of a Synchronous Satellite Due to the Triaxiality of the Earth, Rand Corp. Rep. RM-2996-NASA, 1962.

51*. Frick R. H., Garber T. B., Perturbations of a Synchronous Satellite, Rand Corp. Rep., RM-399-NASA, 1962.
52*. Garfinkel B., On the Motion of a Satellite of an Oblate Planet, Astron. Journ., **63**, 88—96, 1958.
53*. Garfinkel B., The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet, Astron. Journ., **64**, 353—367, 1959.
54*. Garfinkel B., On the Motion of a Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination, Astron. Journ., **65**, 624—627, 1960.
55*. Groves G. V., Motion of a Satellite in the Earth's Gravitational Field, Proc. Roy. Soc., **A254**, 48—65, 1960.
56*. Hagihara Y., Lubration or an Earth Satellite with Critical Inclination, Smithsonian Contrib. Astrophys., 5, 5, 1961.
57*. Hall N. S., Gawlowicz H. F., Orbits about an Oblate Pyriform Attracting Body, Space Research II, H.C. Van de Hulst, C. de Jager, A.F. Moore, eds., Interscience Publ., Inc., New York, 1961.
58*. Hansen P. A., Fundamenta Nova Investigonis Orbital Verae quam Luna Per Ustrat, Gotha, 1838.
59*. Hansen P. A., Darlegung der Theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln Angewandten Störungen, Abh. der K. Sachs. Gesell. d. Wissenschaften, **6**, 91—498; **7**, 1—399, 1862.
60*. Herget P., Musen P., Satellite Orbits-A Modified Hansen Lunar Theory for Artificial Satellites, Astron. Journ., **63**, 430—433, 1958.
61*. Hori G. I., The Motion of an Artificial Satellite in the Vicinity of the Critical Inclination, Astron. Journ., **65**, 291—300, 1960.
62*. Izsak I. G., A Theory of Satellite Motion about an Oblate Planet, I. A Second-Order Solution of Vinti's Dynamical Problem, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 52, 1960.
63*. Izsak I. G., A Determination of the Ellipticity of the Earth's Equator from the Motion of Two Satellites, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 56, 1961; Space Research II, H.C. Van de Hulst, C. de Jager, A.F. Moore, eds., Interscience Publ., Inc., New York, 1961; Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., **15**, 1961; Astron. Journ., **66**, 226—229, 1961.
64*. Izsak I. G., On Satellite Orbits with Very Small Eccentricities, Astron. Journ., **66**, 129—131, 1961.
65*. Izsak I. G., On the Critical Inclination in Satellite Theory, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 90, 1962.
66*. Kaula W. M., Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, NASA Tech. Note, D-572; Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., 5, 2, 1961. (Русский перевод: Каула В. М., Анализ орбит спутников для геодезических целей, Проблемы движения искусственных небесных тел, Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 135—143.)
67*. King-Hele D. G., The Effect of the Earth's Oblateness on the Orbit of a Near Satellite, Proc. Roy. Soc., **A247**, 49—72, 1958.
68*. King-Hele D. G., Gilmore D. M. C., The Effect of the Earth's Oblateness on the Orbit of a Near Satellite, Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Note, GW, 475, 1957; Proc. Roy. Soc., **A247**, 49, 1958.
69*. Кислик М. Д., Motion of an Artificial Satellite in the Normal Gravitational Field of the Earth, Иск. спутн. Земли, **4**, 3—17, 1960.
70*. Kozai Y., Note on the Secular Motion of the Node and Perigee of an Artificial Satellite, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 30, 1959.
71*. Kozai Y., The Motion of a Close Earth Satellite, Astron. Journ., **64**, 367—377, 1959.

72*. K o z a i Y., Effect of Precession and Nutation on the Orbital Elements of a Close Earth Satellite, Astron. Journ., **65**, 621—623, 1960.
73*. K o z a i Y., Motion of a Particle with Critical Inclination in the Gravitational Field of a Spheroid, Smithsonian Contrib. Astrophys., 5, 5, 1961.
74*. K o z a i Y., Note on the Motion of a Close Earth Satellite with a Small Eccentricity, Astron. Journ., **66**, 132—134, 1961.
75*. K o z a i Y., Second Order Solution of Artificial Satellite Theory without Air Drag, Astron. Journ., **67**, 446—461, 1962. (Русский перевод: К о з а и И., Движение близких искусственных спутников, Проблемы движения искусственных небесных тел, Изд-во АН СССР, М., 1963, стр. 107—118.)
76*. K r a u s e H. G. L., Die Säkularen und periodischen Störungen der Bahn eine Künstlichen Erdsatelliten, Proc. 7th Intern. Astronaut. Congr., Rome, 1956, pp. 523—585.
77*. L u n d q u i s t C. A., Orbite in Contemporary Geodesy, Amer. Geophys. Union Monograph, 4, 1959.
78*. L y d d a n e R. H., C o h e n C. J., Numerical Comparison between Brouwer's Theory and Solution by Cowell's Method for the Orbit of an Artificial Satellite, Astron. Journ., **67**, 176—177, 1962.
79*. M e r s m a n W. A., Theory of the Secular Variations in the Orbit of a Satellite of an Oblate Planet, NASA Tech. Rep., R-99, 1961.
80*. M e r s o n R. H., The Motion of a Satellite in an Axisymmetric Gravitational Field, Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., **4**, 17—52, 1961.
81*. M e r s o n R. H., K i n g - H e l e D. G., P l i m m e r R. N. A., Changes in the Inclination of Satellite Orbits to the Equator, Nature, **183**, 239—240, 1959.
82*. M e s s a g e P. J., On Mr. King-Hele's Theory of the Effect of the Earth's Oblateness on the Orbit of a Close Satellite, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **121**, 1—4, 1960.
83*. M i c h i e l s e n H. F., Orbital Theory for Artificial Satellites, Lockheed Aircraft Corp. Miss. and Space Div. Rep. 326080, Palo Alto, Calif., 1960.
84*. M u s e n P., Application of Hansen's Theory to the Motion of an Artificial Satellite in the Gravitational Field of the Earth, Journ. Geophys. Res., **64**, 12, 1959.
85*. M u s e n P., Contributions to the Theory of Satellite Orbits, Space Research I, H. K. Kallmann-Bijl, ed., Interscience Publ., Inc., New York, 1960.
86*. M u s e n P., A Modified Hansen's Theory as Applied to the Motion of Artificial Satellites, NASA Tech. Note, D-492, 1960.
87*. M u s e n P., On the Motion of a Satellite in an Asymmetrical Gravitational Field, Journ. Geophys. Res., **65**, 9; NASA Tech. Note, D-569, 1960.
88*. M u s e n P., The Theory of Artificial Satellites in Terms of Orbital True Longitude, Journ. Geophys. Res., **66**, 2, 1960.
89*. M u s e n P., On the Long-Period Effects in the Motion of an Artificial Satellite Caused by the Ellipticity of the Equator of the Earth, Journ. Geophys. Res., **67**, 1, 1962.
90*. M u s e n P., Long-Period Effects of the Ellipticity of the Earth's Equator on the Motion of Artificial Satellites, NASA Tech. Note, D-1179, 1962.
91*. M u s e n P., Computation of the Perturbations of Nearly Circular Orbits, Using a Nonsingular Set of Vectorial Elements, NASA Tech. Note, D-1350, 1962.
92*. M u s e n P., B a i l i e A. E., On the Motion of a 24-Hour Satellite, Journ. Geophys. Res., **67**, 3, 1962.

93*. N e w t o n R. R., Variables That Are Determinate for Any Orbit, Amer. Rocket. Soc. Journ., **31**, 364—366, 1961.

94*. O'K e e f e J. A., B a t c h l o r D. C., Perturbations of a Close Satellite by the Equatorial Ellipticity of the Earth, Astron. Journ., **62**, 183—185, 1957.

95*. O'K e e f e J. A., E c k e l s A., S q u i r e s R. K., The Gravitational Field of the Earth, Astron. Journ., **64**, 245—253, 1959.

96*. P e t t y C. M., B r e a k w e l l J. V., Satellite Orbits about a Planet with Rotation Symmetry, Journ. Franklin Inst., **270**, 259—282, 1960.

97*. P o r i t s k y H., Motion of a Satellite around an Oblate Earth, Astron. Journ., **67**, 212—216, 1962.

98*. P o r t e r J. G., A Comparative Study of Perturbation Methods, Astron. Journ., **63**, 405—406, 1958.

99*. С а р ы ч е в В. А., The Influence of the Earth's Oblateness on the Rotation of an Artificial Satellite, RAE-Library Translation, 959, 1961.

100*. С е д о в Л. И., Dynamic Effects on the Motion of Artificial Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 76—83, 1960.

101*. S e h n a l L., The Perturbations of the Orbit of the Stationary Satellite of the Earth, Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia, **11**, 4, 1960.

102*. S e h n a l L., The Influence of the Equatorial Ellipticity of the Earth's Gravitational Field on the Motion of a Close Satellite, Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia, **11**, 3, 1960.

103*. S p i t z e r L., Perturbations of a Satellite Orbit, Journ. British Interplanet. Soc., 9, 131—137, 1950.

104*. S t e r n e T. E., Celestial Mechanics of Artificial Satellites, Sky and Telescope, **17**, 1, 1957.

105*. S t e r n e T. E., Development of Some General Theories of the Orbits of Artificial Earth Satellites, Astron. Journ., **63**, 424—426, 1958.

106*. S t e r n e T. E., The Gravitational Orbit of a Satellite of an Oblate Planet, Astron. Journ., **63**, 28—40, 1958.

107*. S t r u b l e R. A., The Geometry of the Orbits of Artificial Satellites, Tech. Memorandum No. ERD 106/4, North Carolina State College, 1960.

108*. S z e b e h e l y V. G., The Generalized Inverse Problem of the Orbit Computation, Space Research II, H. C. Van de Hulst, C. de Jager, A. F. Moore, eds., Interscience Publ., Inc., New York, 1961.

109*. Т а р а т ы н о в а Г. П., Über die bewegung von künstlichen Satelliten im nicht-zentralen Schwerefeld der Erde, Fortschrifte der Physik, 2, Sonderband, Berlin, 1959, S. 55—64.

110*. V i n t i J. P., New Approach in the Theory of Satellite Orbits, Phys. Rev. Letters, **3**, 1, 1959.

111*. V i n t i J. P., New Method of Solution of Unretarded Satellite Orbits, Journ. Res. Nat. Bureau of Standards-B, **63B**, 2, 1959.

112*. V i n t i J. P., Theory of the Orbit of an Artificial Satellite with Use of Spheroidal Coordinates, Astron. Journ., **65**, 353—354, 1960.

113*. V i n t i J. P., Satellite Frequencies with a New Gravitational Potential, Bull. Amer. Phys. Soc., 5, 8—9, 1960.

114*. V i n t i J. P., Theory of an Accurate Intermediary Orbit for Satellite Astronomy, Journ. Res., Nat. Bureau of Standards-B, **65B**, 3, 1961.

115*. V i n t i J. P., Formulae for an Accurate Intermediary Orbit of an Artificial Satellite, Astron. Journ, **66**, 514—516, 1961.

116*. V i n t i J. P., Intermediary Equatorial Orbits of an Artificial Satellite, Journ. Res., Nat. Bureau of Standards-B, **66B**, 1, 1962.

117*. W a r d G. N., On the Secular Variations of the Elements of Satellite Orbits, Proc. Roy. Soc., **A266**, 1324, 1962.

118*. Zadunaisky P. E., Relative Positions of the Sun and Perigee of an Artificial Earth Satellite, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 40R, 1960.

В период подготовки данной книги к изданию были опубликованы труды нескольких симпозиумов, на которые имеются ссылки. Это следующие издания:

119*. The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Veis G., ed., Interscience Publishers, 1963. (Proc. 1st Internat. Symp. on the Use of Artificial Satellites in Geodesy, Washington, D. C., April 26—28, 1962, sponsored by the Committee on Space Research — COSPAR, and International Union of Geodesy and Geophysics — IUGG.) (Русский перевод: Геодезическое использование искусственных спутников Земли, под ред. Г. Вейса, изд-во «Недра», М., 1966.)

120*. Space Research III, Priester W., ed., Interscience Publishers, New York, 1963. (Proc. 3rd Internat. Space Science Symp., Washington, D.C., May 2—8, 1962, sponsored by the Committee on Space Research — COSPAR, and the U.S. National Academy of Sciences.)

121*. Dynamics of Satellites, Roy M., ed., Academic Press, Inc. New York, 1963. (Proc. Symp. on Dynamics of Satellites, Paris, May 28—30, 1962, sponsored by the International Union of Theoretical and Applied Mechanics — IUTAM.)

2.3. НАБЛЮДЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Под наблюдениями искусственных спутников подразумевается определение их положений в пространстве в некоторой системе координат в заданный момент времени. Чтобы ограничить круг вопросов, в этом разделе рассматриваются только те методы наблюдений, которые используются для геодезических целей. Поэтому методы наблюдений межпланетных станций и управляемых космических кораблей исключены.

Различают визуальный, фотографический, фотоэлектрический и электронный методы наблюдений ИСЗ. Они могут либо использоваться независимо, либо дополнять друг друга. Примером независимых методов является большинство электронных методов слежения, которые дают непрерывную информацию об орбите, необходимую для решения динамических задач. Примером совместных методов могут служить визуальный и электронный методы, когда они используются для получения предварительных данных для фотографических наблюдений — основного средства определения точных параметров орбиты для решения геометрических задач.

Цель автора заключается не в том, чтобы описать все действующие системы наблюдений и детали их работы, а в том, чтобы изложить основы методов, использовавшихся главным образом в США, и дать общее представление о вычислениях, необходимых для нахождения точных координат спутников.

2.3.1. Визуальные методы наблюдений ИСЗ

Главной целью визуальных методов является получение приближенных данных о спутниках для негеодезических целей или предварительных данных о новых спутниках для продолжения их наблюдений. Роль этих наблюдений особенно важна для так называемых пассивных спутников, т. е. спутников, или не имеющих радиопередатчиков, или имеющих передатчики, вышедшие из строя по каким-либо причинам.

При этих наблюдениях применяются преимущественно небольшие телескопы, бинокуляры, теодолиты или кинотеодолиты, используемые вместе с дополнительными приборами для регистрации времени, такими, как печатающий или пишущий хронограф, по возможности проверяемыми по радиосигналам времени.

Наиболее эффективными системами для визуальных наблюдений являются системы Смитсонианской астрофизической обсерватории в Кембридже (Массачусетс) и система СССР, станции которой созданы при различных высших учебных заведениях. Кроме этих двух систем, объединяющих около 170 станций, действует еще около 50 станций наблюдений в различных странах, таких, как Австралия, Болгария, Китай, Чехословакия, Англия, Финляндия, Франция, Германия, Греция, Голландия, Италия, Польша, Румыния, Швеция. Ниже описаны две главные системы визуальных наблюдений — американская и советская, а также наиболее эффективный кинотеодолитный метод. Для ознакомления с работами, ведущимися в некоторых других упомянутых странах, читатели отсылаются к статьям Ярнефельта [61], Масевич [79] и Долл'Олмо [38], опубликованным в 1961 г., и к статье Циховича [30], опубликованной в 1962 г. Положения большинства американских и иностранных станций приведены у Мешо [83].

2.3.1.1. Программа Мунуотч

Система визуальных наблюдений спутников, предложенная Смитсонианской астрофизической обсерваторией в июле 1956 г. в журнале Sky and Telescope, известна под названием системы Мунуотч (лунная вахта.— *Перев.*). Ее сеть включает (на 1 января 1962 г.) 95 станций наблюдений, на которых работает около двух тысяч добровольцев. Около половины станций расположено в США, а вторая половина — в 18 других странах.

Эти станции в основном снабжены монокулярами с 6—8-кратным увеличением, апертурой 45—55 *мм* и полем зрения 10—12° Предельная звездная величина для этих телескопов равна 8^m для звезд и несколько меньше для спутников. Приблизительно половина станций имеет телескопы с 20-кратным увеличением и апертурой 120 *мм*. Эти телескопы позволяют различать звезды до 11^m при поле зрения в 2°,4.

Кроме того, все станции снабжены небольшими телескопами с малым увеличением и большим полем зрения для поиска спутников. Большинство станций дополнительно получило от обсерваторий во временное пользование более мощные инструменты. Время фиксируется в основном секундомерами, которые проверяют по радиосигналам точного времени, либо с помощью магнитофона, на ленте которого сигналы времени налагаются на сигналы, подаваемые наблюдателем, либо с помощью печатающих и пишущих хронографов, используемых обычным образом.

Наблюдатели на каждой станции располагаются по линии север — юг (рис. 2.9), а их инструменты устанавливаются в меридиане места наблюдения с частичным перекрытием полей зрения, образуя так называемый оптический барьер. Когда спутник

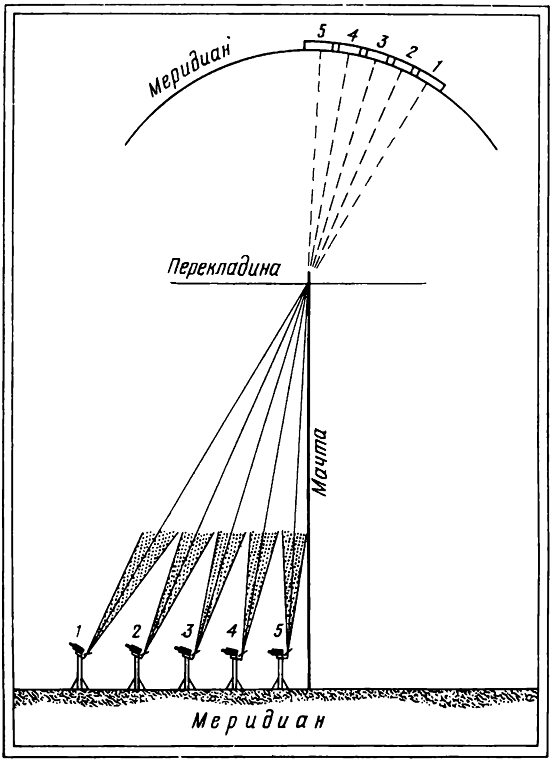


Рис. 2.9. Организация наблюдений по программе Мунуотч. Инструменты наблюдателей устанавливаются вдоль меридиана станции и наводятся на точку пересечения мачты с перекладиной. В верхней части чертежа показано, как перекрываются 12-градусные поля зрения инструментов.

обнаружен, регистрируют время и высоту его прохождения через меридиан.

Программа Мунуотч имеет целью определение координат ИСЗ с точностью $0^\circ{,}1$ по положению и $0^s{,}05$ по времени. Точность наблюдений около 20% станций значительно выше. В основном же точность колеблется от $0^\circ{,}1$ до $1^\circ{,}0$ по положению и от $0^s{,}1$ до $1^s{,}0$ по времени. Обычно наблюдаются спутники до 11^m.

Многие станции проводят наблюдения два или три раза в неделю, другие реже. Данные о положении спутника, его яркости, направлении движения и угловой скорости отсылаются в Кембридж авиапочтой или по телеграфу. Результаты большей части наблюдений периодически публикуются обсерваторией (Catalogue of Satellite Observations) и используются как предварительные данные для наведения прецизионных фотокамер, которые будут описаны ниже. С начала действия программы Мунуотч (октябрь 1957 г.) сделано более 45 000 наблюдений 30 000 прохождений ИСЗ, в том числе несколько наблюдений, единственных в своем роде. Сетью станций были получены первые наблюдения спутника $1958\beta_1$, ракеты-носителя спутника Авангард 1 и вновь находился спутник 1958ε (Эксплорер 4) после того, как его дважды теряли. Важные наблюдения были сделаны при падении спутника 1957β (второй советский спутник) в апреле 1958 г. и во время разрушения спутника $1960\varepsilon_1$ (четвертый советский спутник) * в сентябре 1962 г. в окрестностях озера Мичиган.

Для дальнейшей информации о программе Мунуотч читатель отсылается к статье Хениза, опубликованной в 1960 г. [54], и десятитомному изданию Moonwatch News Letters, опубликованному центром Мунуотч, или к Bulletin for Visual Observes of Satellites, время от времени публикуемому в журнале Sky and Telescope с июля 1956 г.

2.3.1.2. Визуальные наблюдения ИСЗ в СССР

С октября 1957 г. в Советском Союзе работает сеть станций наблюдений, очень похожая на сеть Мунуотч. Эта сеть состоит приблизительно из 75 станций, организованных при институтах и университетах (на 1 апреля 1966 г. действовало 62 станции.— *Перев.*). С октября 1957 г. по апрель 1961 г. на них было сделано около 70 000 наблюдений 22 000 прохождений ИСЗ. Примерно 80% из них приходится на советские спутники. Инструменты подобны тем, которые применяются в программе Мунуотч. Обычно используются телескопы с 6-кратным увеличением, диаметром объектива 50 *мм* и полем зрения 11° (трубки АТ-1.— *Перев.*), которые монтируются на экваториальных и азимутальных установках.

Считается, что точность таких наблюдений ИСЗ составляет $0^s,1$—$0^s,3$ по времени и $0°,2$—$0°,3$ по положению. Результаты наблюдений публикуются в бюллетене «Результаты наблюдений советских искусственных спутников Земли», периодически издаваемом Астрономическим советом АН СССР с 1958 г. [15, 16].

2.3.1.3. Визуальные наблюдения ИСЗ специальными теодолитами

Для наблюдений ИСЗ с успехом могут быть использованы обычные точные теодолиты, такие, как Вильд Т-3 или Керн DKM-3

* Ракета первого советского космического корабля-спутника.— *Прим. перев.*

в сочетании с приборами для регистрации времени. При наблюдениях изображение спутника совмещают с пересечением нитей и записывают время вместе с отсчетами по вертикальному и горизонтальному кругам. Недостатком этого способа наблюдений является потеря времени на записи, необходимость выведения на середину пузырька уровня при вертикальном круге при отсчете по нему и т. д. Однако при достаточном опыте можно за одно прохождение спутника сделать несколько наблюдений.

Чтобы сократить интервал между наблюдениями и сделать запись более надежной и независимой от личных ошибок, применяют различные записывающие устройства — механические или фотографические. Типичным примером инструментов этой группы является прецизионный теодолит Аскания типа TPR (рис. 2.10). Этот теодолит облегчает проведение обычных операций и позволяет сосредоточиться только на наведении на цель. Показания кругов и уровня фотографируются путем нажатия на кнопку. Это делается так быстро, что следующее наблюдение можно проводить уже через $^1/_5$ *сек*. На снимках размером 24×24 *мм* (рис. 2.11) получаются изображения двух диаметрально противоположных секторов вертикального и горизонтального кругов с делениями, изображения уровня алидады, циферблата хронометра и таблички, на которой может быть сделана запись.

Ломаная труба имеет фокусное расстояние 500 *мм*, диаметр объектива 63 *мм*, окуляр с 63-кратным увеличением; имеются также окуляры с 40- и 80-кратным увеличением. Непосредственно по кругам можно снимать отсчеты с точностью $0'',2$.

Имеется более совершенный вариант теодолита TPR, специально предназначенный для наблюдений спутников (рис. 2.12). Эта модель состоит из основного инструмента, подставки, двух труб-искателей и двух приводов для быстрого вращения инструмента. Теодолит устанавливается на подставке, около которой находится устройство с приводами для изменения азимута и высоты трубы. На панели этого устройства расположены кнопки и рычаги управления прибором. Кнопки, регулирующие скорость, дают возможность изменять ее от максимального отрицательного значения до максимального положительного. Средние кнопки управления служат для поворотов трубы по азимуту и по высоте, которые производятся как обычные наведения микрометренным винтом. Расположение кнопок таково, что все движения (для вращения и наведения трубы) могут производиться одним или двумя наблюдателями по желанию. Точность работы этой системы зависит от мастерства наблюдателя при наведении и от устройства, применяемого для отсчитывания времени. Опытные наблюдатели могут достичь точности до нескольких минут

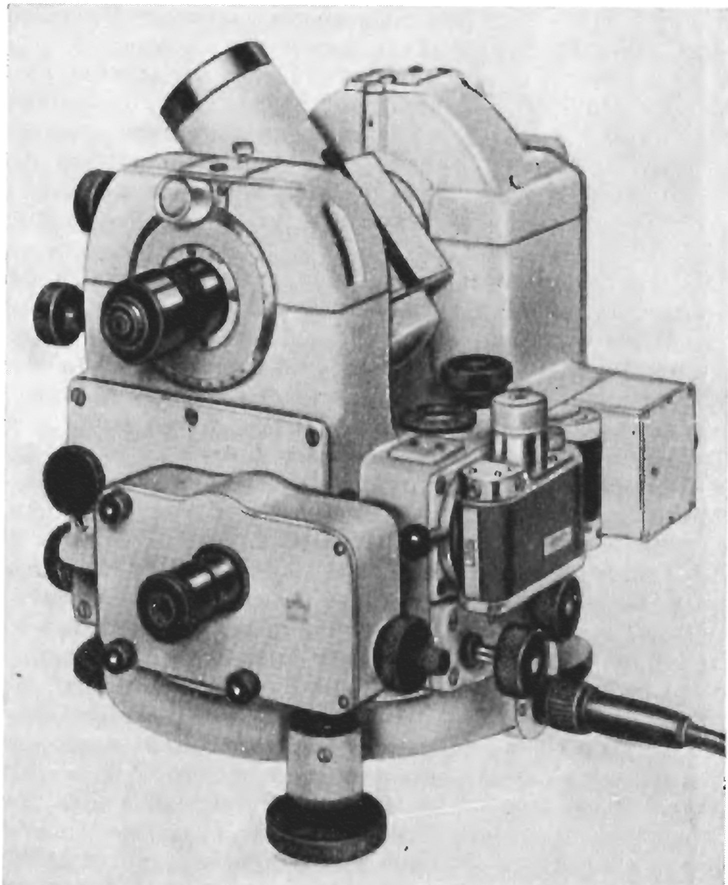
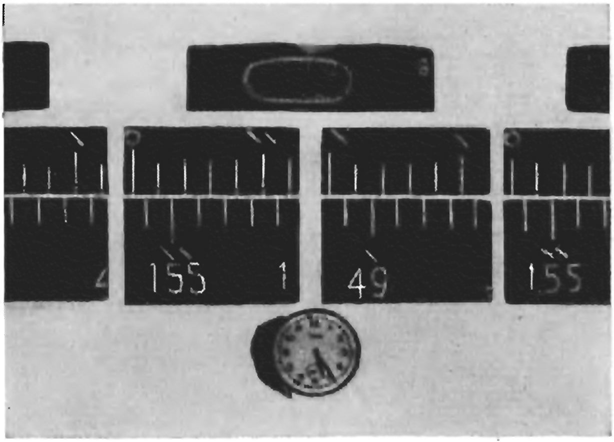


Рис. 2.10. Прецизионный теодолит Аскания.

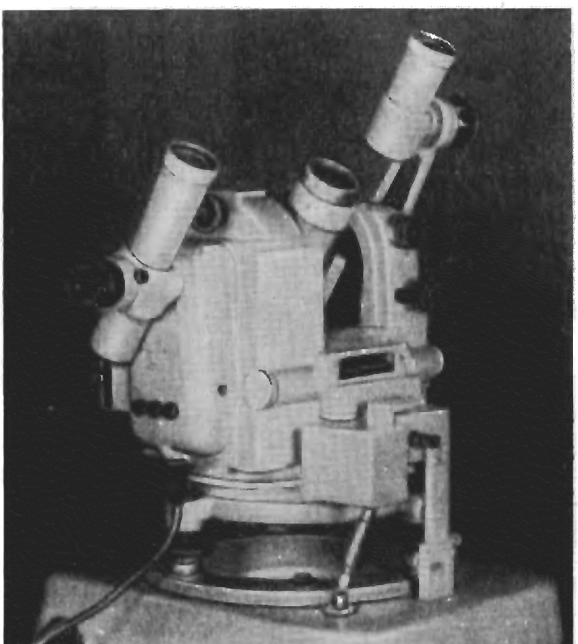
дуги по положению и до $0^s,01$ по времени при условии, что используется хронограф, проверяемый по радиосигналам времени.

Еще большая точность может быть достигнута при использовании более совершенной модели теодолита — кинотеодолита. Этот инструмент по точности намного превосходит описанный выше, однако его точность еще не отвечает требованиям геометрической геодезии. Он с успехом может быть использован для определения элементов орбит, исследования верхних слоев атмосферы или для определения параметров высокого порядка в разложении функции потенциала гравитационного поля Земли.

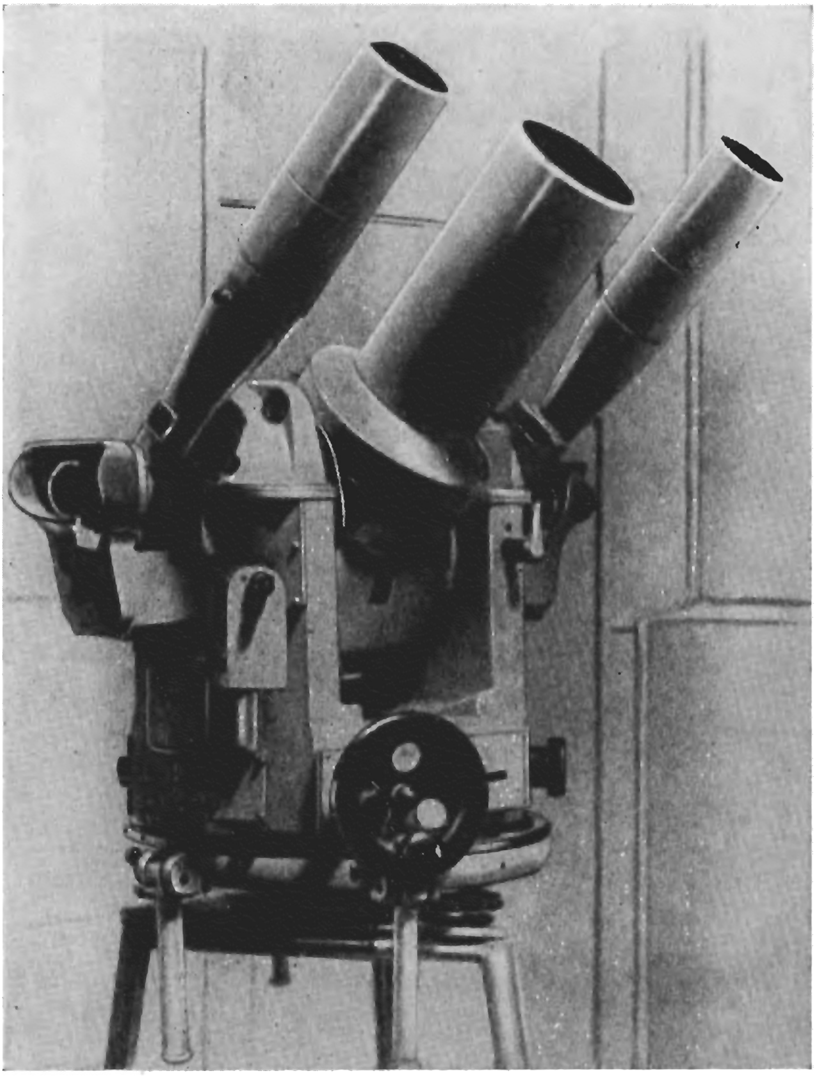
Кинотеодолитом управляют два наблюдателя, один следит за ИСЗ по азимуту, другой — по высоте. Встроенная камера



Р и с. 2.11. Фотографическая регистрация отсчетов кругов и моментов времени.



Р и с. 2.12. Прецизионный теодолит Аскания с дополнительным оборудованием для наблюдения ИСЗ.



Р и с. 2.13. Кинотеодолит Аскания.

со вспышкой периодически фотографирует шкалы; таким образом регистрируются горизонтальные и вертикальные углы. В то же самое время спутник и сетка нитей фотографируются установленным на теодолите длиннофокусным объективом. Цель этой операции — учет ошибок наведения. Смещение изображения спутника на фотографии дает возможность вводить поправки в измеренные углы. Фотографирование производится под контролем точного прибора для регистрации времени со скоростью около 5 экспозиций в секунду. Таким образом, за одно прохождение спутника можно сделать несколько сотен отсчетов.

На рис. 2.13 показан кинотеодолит Аскания. Имеется и другой тип прибора, который отличается электрическим управлением движения по азимуту и по высоте (с контролем скорости вращения). Инструменты обоих этих типов имеют 4 сменных объектива с фокусными расстояниями от 300 до 3000 *мм*, относительными отверстиями от 1 : 4,5 до 1 : 12,5 и полями зрения от $4^\circ\!.5 \times 6^\circ\!.5$ до $28' \times 42'$. Трубки-искатели для каждого наблюдателя устанавливаются по обеим сторонам трубы, чтобы повысить эффективность наблюдений. Поскольку первоначально инструмент был спроектирован для изучения действий авиации и определения траекторий самолетов, а не для наблюдений ИСЗ, он имеет один недостаток — относительно низкую светосилу. Для него предельная звездная величина спутников равна $3^m\!.5$—$4^m\!.5$, поэтому им можно наблюдать с фотографированием только наиболее яркие спутники, такие, как второй и третий советские спутники или Эхо 1. Этот тип кинотеодолита использовался Британским институтом аэронавигации для наблюдения ряда советских спутников на пяти станциях, расположенных между широтами 51 и 55° в Англии. При хороших условиях достигалась точность 20″ по положению и ошибка меньше 20 *мсек* во времени. Этот инструмент намного превосходит приборы, использовавшиеся в программе Мунуотч или в других подобных программах. По существу, он должен был бы рассматриваться в следующем разделе, где описываются точные фотографические инструменты. Однако так как его точность не отвечает требованиям геодезии, то его лучше относить к инструментам для визуальных, а не для фотографических наблюдений.

Более подробную информацию о наблюдениях с кинотеодолитом можно найти в статьях Берта [29] и Томаса [109, 110].

2.3.2. Фотографические методы наблюдений ИСЗ

В настоящем разделе описываются методы, в которых положение спутника определяется по его фотографическому изображению, сделанному на фоне звезд. Применяемые инструменты можно разделить на две группы в соответствии с их использованием на постоянных или передвижных станциях. К первой группе относятся преимущественно тяжелые нетранспортабельные инструменты, специально предназначенные для наблюдений спутников, такие, как камеры Бейкер — Нанн, или обычное оборудование астрономических обсерваторий. Вторую группу представляют инструменты типа баллистической камеры, либо модифицированной, либо специально сконструированной для наблюдений ИСЗ.

Положения большинства станций, участвующих в фотографических наблюдениях спутников, приведены Мешо [83].

2.3.2.1. Наблюдения со стационарными камерами

Система Бейкер — Нанн

Наиболее совершенной системой для оптического наблюдения ИСЗ в США является система Смитсонианской астрофизической обсерватории. Эта система использует специально построенную камеру, спроектированную Бейкером и Нанном. Инструмент представляет модифицированный телескоп системы Супер-Шмидт (относительное отверстие 1 : 1), имеющий три оси вращения: горизонтальную, вертикальную и ось слежения, вокруг которой вращается камера, сопровождая спутник (рис. 2.14). Камера позволяет следить за движением ИСЗ вдоль любой дуги большого круга с регулируемой скоростью от 0 до 7000″ *сек*$^{-1}$. Фокусное расстояние камеры равно 500 *мм*, а поле зрения 5° × 30°. Фотографирование производят на пленку шириной около 56 *мм*, свернутую в рулоны по 290 *м*. После экспонирования пленка перематывается по длине на 30 *см*, и следующий неэкспонированный участок пленки натягивается на сферическую поверхность (рис. 2.15). На каждом кадре размером 56 *мм* × 300 *мм* получается изображение спутника на фоне звезд и момент средней экспозиции, определяемый с точностью до 0,0001 *сек* (рис. 2.16). За одно прохождение спутника можно получить 30—40 и более снимков. Моменты экспозиции, продолжительность которой может изменяться от 0,2 до 3,2 *сек*, записываются на пленку с вторичных часов, управляемых прецизионными кварцевыми часами Нормана. В конечном итоге планируется заменить кварцевые часы более точными атомными часами.

Гибкая система управления камеры Бейкер — Нанн позволяет выполнять несколько видов операций:

1. При *слежении с неподвижной камерой* звезды во время экспонирования получаются на снимке в виде очень коротких черточек, а быстро движущийся спутник оставляет след длиной

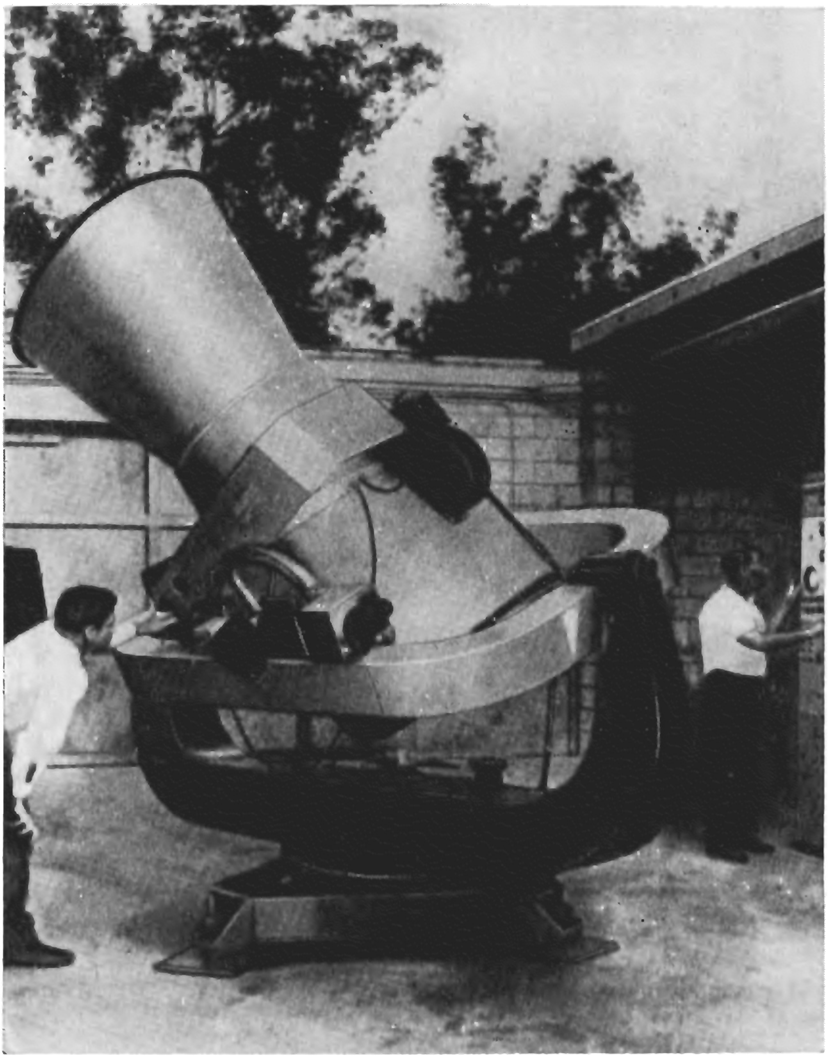
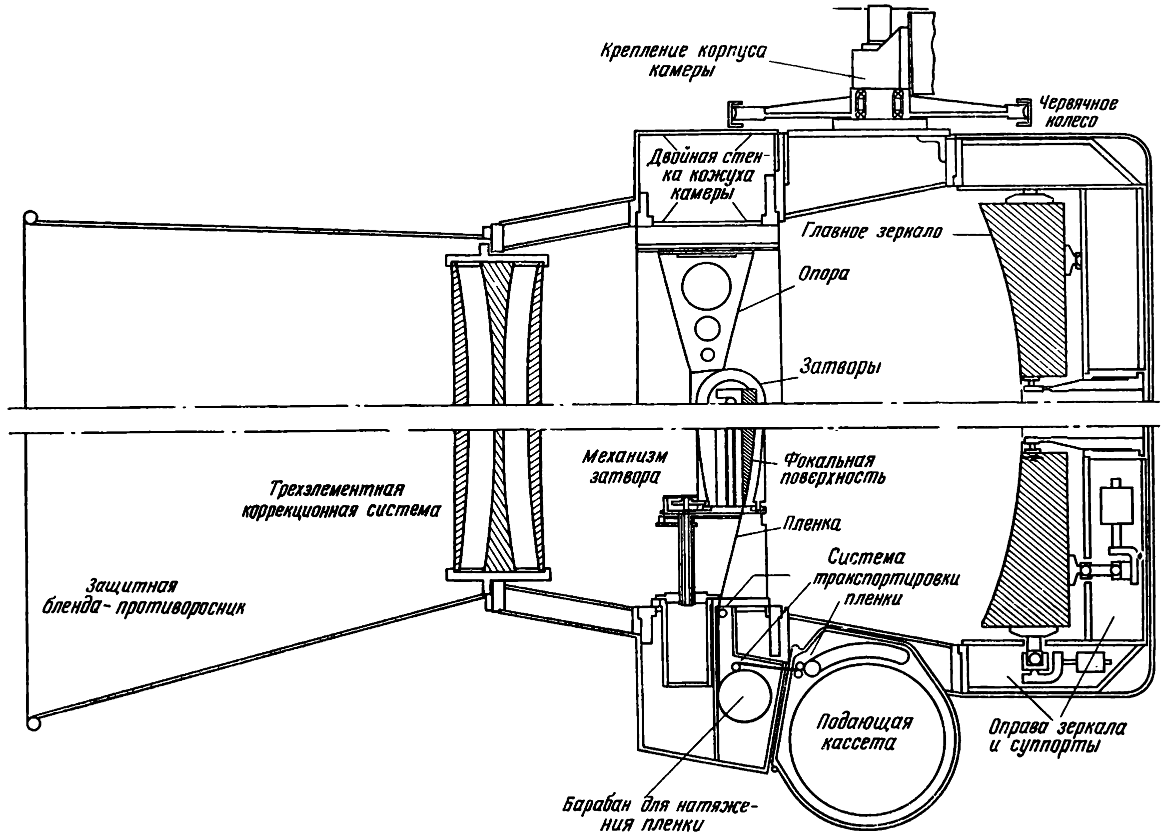


Рис. 2.14. Камера Бейкер — Нанн для слежения за спутниками.



Р и с. 2.15. Камера Бейкер — Нанн в двух взаимно перпендикулярных разрезах. Показаны механизмы затвора и подачи пленки.

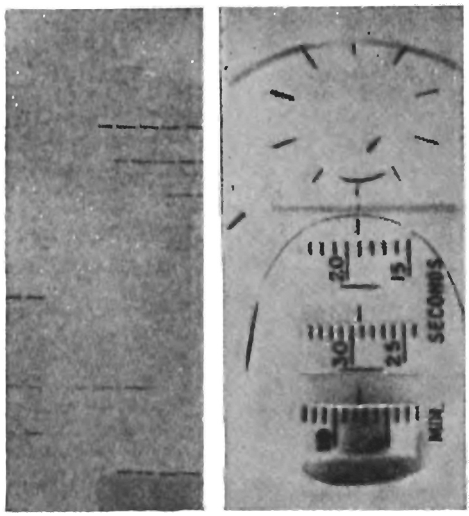


Рис. 2.16. Запись времени на снимке, полученном камерой Бейкер — Нанн. Отсчет времени фиксируется с указанием минут, секунд, десятых, сотых и тысячных долей секунды.

в несколько сантиметров (рис. 2.17). Продолжительность экспозиции невелика. Вращающийся барабан затвора 5 раз прерывает экспозицию, разделяя след ИСЗ на 6 отрезков короткими разрывами. В момент третьего разрыва на пленку впечатывается момент экспозиции. Изображением положения спутника в этот момент является центр среднего (третьего) промежутка. Такая методика применима только к достаточно ярким спутникам, которые получаются на снимке при быстром относительном перемещении. Предельная звездная величина спутника, движущегося со средней скоростью $0^\circ{,}1$ *сек*$^{-1}$, приблизительно равна $8^m{,}5$.

2. При *непрерывном слежении* камера равномерно движется в соответствии с предвычисленной скоростью спутника. Если эта предвычисленная скорость равна истинной скорости движения спутника, то его изображение на снимке получится в виде точки (рис. 2.18). Однако в большинстве случаев, вследствие того, что предвычисленная скорость не совсем точна и угловая скорость спутника неодинакова на различных высотах, его изображение будет растянуто. Изображения же звезд получаются в виде длинных штрихов, прерывающихся при закрытии затвора. Преимущество этой методики заключается в увеличении времени экспозиции для изображения спутника. Предельная звездная величина, получаемая при работе этим способом, примерно на 5^m больше, чем при работе с неподвижной камерой. Этим способом на рас-

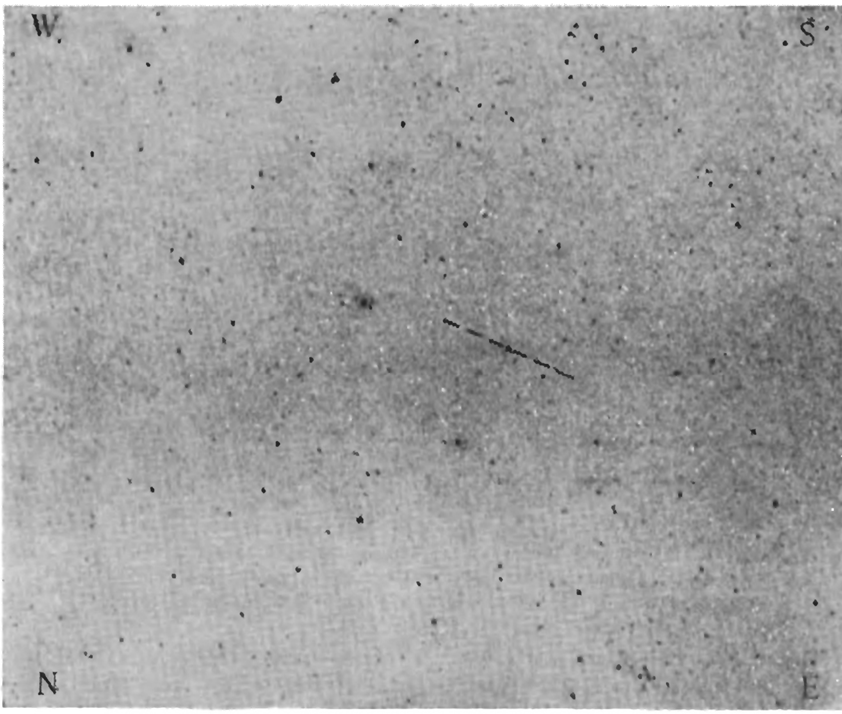


Рис. 2.17. Часть фотоснимка, полученного неподвижной камерой Бейкер — Нанн. Эта фотография спутника Дискаверер 7 (1959к) сделана на станции фотографических наблюдений спутников в Вумере (Австралия) примерно в $13^h43^m57^s$ всемирного времени 10 ноября 1959 г. В центре снимка — спутник, двигавшийся с юго-востока на северо-запад.

стоянии 5000 *км* был сфотографирован спутник Авангард 1, представлявший сферу диаметром 16 *см*.

3. При *слежении с переменным движением камеры* сочетаются оба метода, упомянутые выше. Вначале камера делает регулярные экспозиции, производя слежение за спутником; изображение спутника в это время будет получаться в виде точки, а звезд — в виде штрихов. Вторая экспозиция делается на этом же кадре при неподвижном положении камеры, тогда звезды изображаются небольшими штрихами, а спутник — длинным прерывистым следом. Во время первой экспозиции будет фиксироваться слабый спутник, а во время второй — слабые звезды. Такая методика полезна, когда слабый спутник проходит около группы слабых звезд.

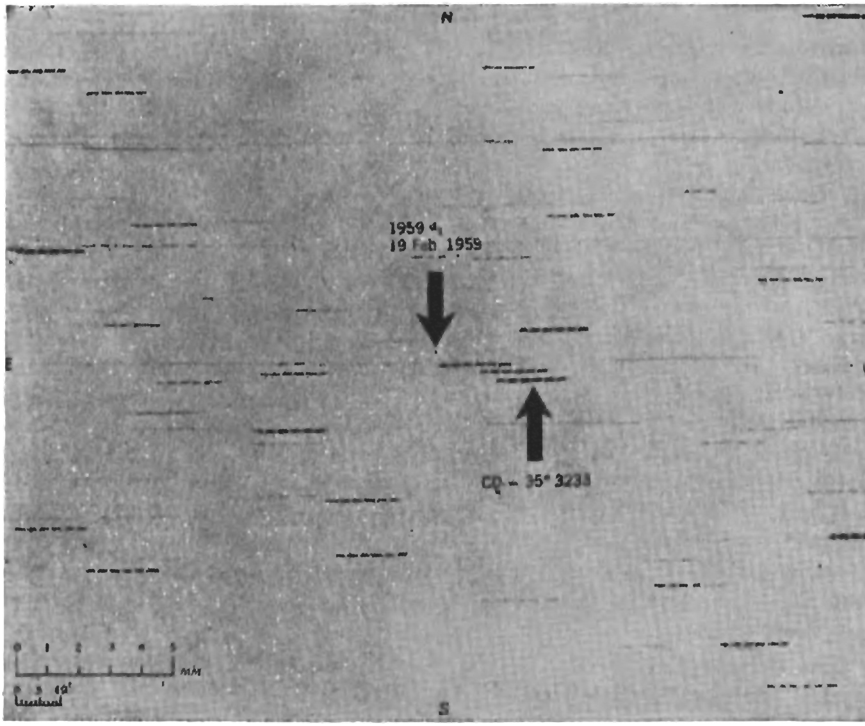


Рис. 2.18. Часть фотоснимка, полученного камерой Бейкер — Нанн, следящей за спутником.

4. При *слежении с продолжительной экспозицией* затвор оставляют открытым на несколько секунд, в это время камера следует за спутником. Этот метод, который можно комбинировать с другими, может помочь при отождествлении слабых спутников. Проявление и предварительная обработка одного кадра для каждого ряда наблюдений выполняются на станциях наблюдения. Цель предварительных вычислений — как можно скорее дать координаты ИСЗ невысокой точности. Прямое восхождение и склонение определяются путем проектирования снимка на звездную карту (Боннского или Кордовского обозрения) и интерполирования изображения спутника. Точность этого способа предварительных вычислений около 2′ по положению и $0^s,1$ по времени. Результаты передаются в центр в Кембридже, где они используются для прогнозирования. Используя результаты предсказаний, которые Кембриджский центр подготавливает и высылает на станции, наблюдатели могут наводить камеру и вести ее за спутником по его быстро изменяющейся орбите.

В отделе обработки фотографий в Кембридже, куда поступают снимки после предварительной обработки, вначале отбирают кадры, наиболее подходящие для точных измерений. Каждый снимок ориентируют по звездному атласу и по специальным звездным картам отождествляют опорные звезды. Эти карты, составленные в обсерватории, содержат звезды, взятые из различных каталогов, и охватывают область от северного полюса до склонения —30°. Обычно на снимке выбирают 5—6 опорных звезд в круге радиусом 20 *мм*. Использование такой малой части снимка устраняет ошибки, возникающие из-за неравномерного сжатия пленки или из-за растяжения во время экспозиции, когда она прижимается к сферической фокальной поверхности. После отождествления опорных звезд с помощью двухвинтового компаратора измеряются прямоугольные координаты x, y этих звезд и спутника (рис. 2.19). Измерения производят в двух противоположных направлениях с точностью до 1 *мк*, что соответствует $0'',5$. Компараторы связаны с перфораторами, которые выдают готовые перфокарты для электронно-счетной машины IBM. Для ввода в стандартную программу вычислений, используемую электронно-вычислительным устройством, применяются перфокарты, содержащие данные измерений прямоугольных координат спутника и опорных звезд. Экваториальные координаты опорных звезд на эпоху 1950,0, исправленные за собственное движение и за запаздывание затвора, также перфорируются на картах. Процесс отождествления опорных звезд и отыскания их экваториальных координат на эпоху 1950,0 выполняется по стандартной программе. Эта программа автоматической обработки основана на методе определения линейных постоянных пластинки, описанном в разд. 2.4.2.1. В результате обработки получаются видимое топоцентрическое прямое восхождение и склонение спутника в момент экспозиции в системе среднего экватора и весеннего равноденствия на эпоху 1950,0.

Прежде чем использовать записанное время, его прочитывают для каждого снимка до ближайшей миллисекунды по циферблату с делениями в 0,01 *сек* и до 0,1 *мсек* с помощью миниатюрного осциллоскопа (рис. 2.16). Для приведения времени фотографирования к применяемой системе атомного времени A1 вводят следующие поправки:

1) за изменение затвором времени наблюдения спутника, если его изображение находится не в центре кадра;

2) за приведение показаний вторичных часов к показаниям первичных часов;

3) за приведение показаний первичных часов к стандартным радиосигналам времени и поправки за распространение радиоволн и задержку в приемнике;

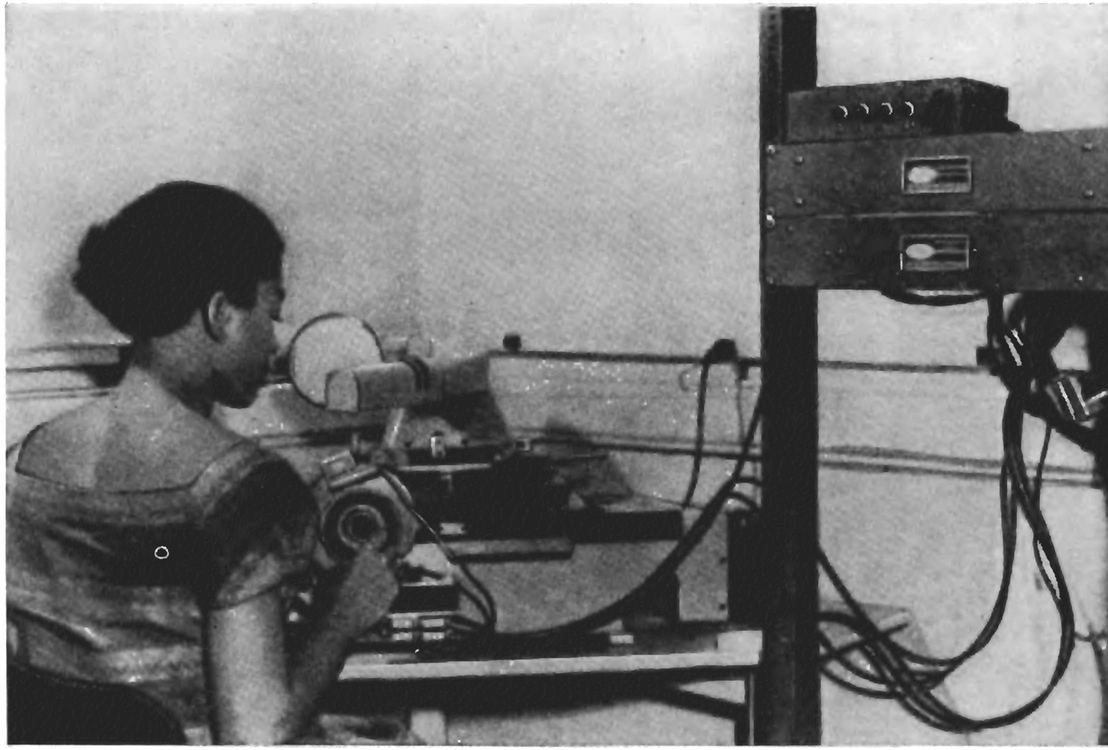


Рис. 2.19. Координационно-измерительная машина.

4) за приведение радиосигналов времени к стандарту станции WWV (поправка за сводные моменты.— *Перев.*), который затем приводится к системе атомного времени A1. Эти поправки основаны на данных, публикуемых Морской обсерваторией США.

Средняя точность наблюдений камерой Бейкер — Нанн около 4″ по положению и $0^s,002$ по времени, хотя камера способна давать вдвое более высокую точность и по положению и по времени.

Результаты наблюдений публикуются в Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Reports и в Catalogue of Precisely Reduced Observations.

На август 1962 г. было обработано около 22 000 наблюдений. Каждый месяц обрабатывают 1500 наблюдений. Другой раздел Smithsonian Astrophysical Observatory, Catalogue of Satellite Observations, содержит полевые обработанные наблюдения и данные других наблюдений (Мунуотч и т. д.), полученные обсерваторией.

Сеть станций Бейкер — Нанн состоит из 12 камер, установленных в следующих пунктах:

Вилла-Долорес, Аргентина,
Вумера, Австралия,
Кюрасао, Малые Антильские о-ва,
Найни-Тал, Индия,
Шираз, Иран,
Токио, Япония,
Арекипа, Перу,
Олифантсфонтейн, Южно-Африканский Союз,
Сан-Фернандо, Испания,
Юпитер, штат Флорида,
Мауи, Гавайские о-ва,
Орган-Пасс, Нью-Мексико.

Станции расположены в поясе между 32° ю. ш. и 36° с. ш. вокруг всего земного шара. Геодезические координаты этих станций опубликованы Вейсом [114], Мешо [83] и др. Каждая станция может успешно фотографировать в среднем около 200 прохождений за месяц. В дополнение к этим станциям, одна из которых показана на рис. 2.20, ВВС США руководят еще пятью станциями с камерами Бейкер — Нанн в Калифорнии, Канаде, Чили, Норвегии и Массачусетсе. Координаты этих станций также опубликованы в [83].

Дополнительные данные о программе Бейкер — Нанн можно найти в статьях Хениза [51] и Вейса и Уиппла [115]. Метод вычислений описан Ласовским [70] и Уэстоном [118]. Результаты некоторых исследований о точности системы Бейкер — Нанн опубликованы Ласовским [71].

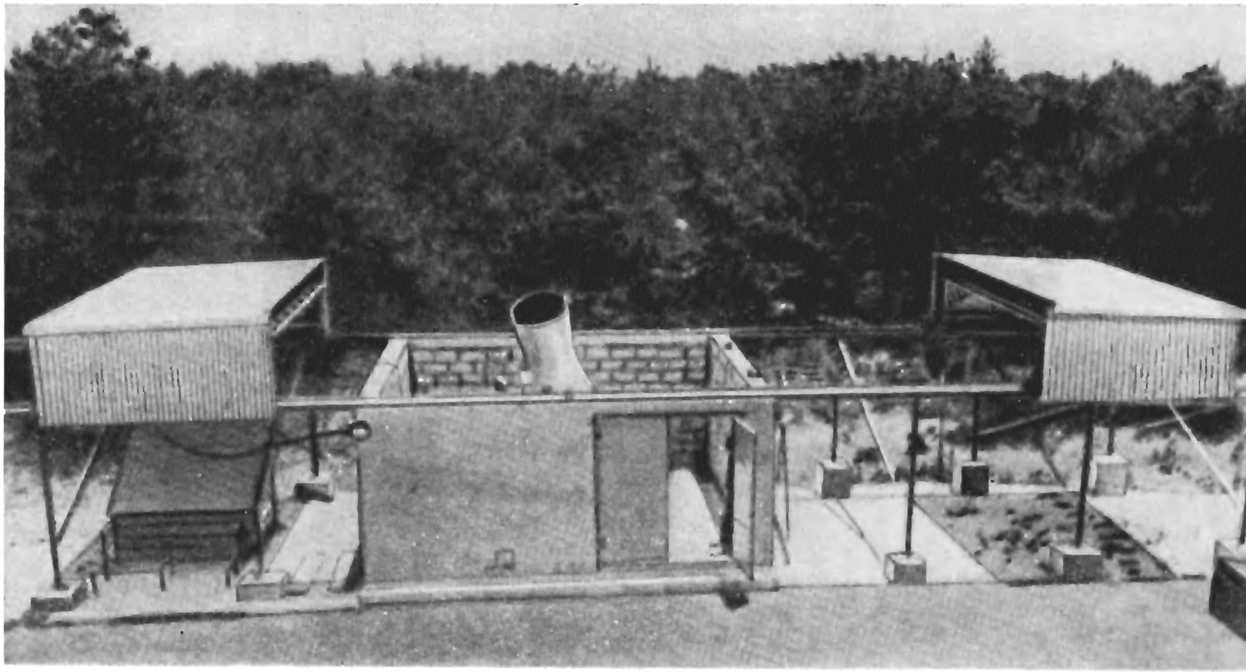


Рис. 2.20. Вид станции Бейкер — Нанн.

Модифицирование астрономических телескопов

Существующие астрономические телескопы, имеющиеся во многих странах на различных астрономических обсерваториях, можно приспособить для фотографических наблюдений ИСЗ. Опыт астрономов по использованию этих длиннофокусных инструментов должен явиться наиболее эффективным средством для значительного улучшения точности фотографических наблюдений. Прискорбно, что в настоящее время большинство этих инструментов нельзя использовать для точных наблюдений, потому что они не оборудованы соответствующими приспособлениями для регистрации времени. Системы затворов этих телескопов, иногда управляемые вручную, обычно еще слишком несовершенны, чтобы дать удовлетворительную точность фиксирования времени. Для преодоления этой трудности за последние пять лет было предложено несколько приспособлений для регистрации времени, которые можно использовать с существующими астрономическими телескопами.

В Морской обсерватории США создана и испытана Марковицем экспериментальная камера с двойным движением для наблюдения спутников. Фотопластинка в камере приводится в движение со скоростью суточного вращения звезд, а поворачивающаяся плоско-параллельная стеклянная пластинка толщиной 12 *мм* находится в центре поля зрения, куда проецируется изображение спутника. Путем движения фотопластинки и поворачивающейся стеклянной пластинки изображения звезд и спутника удерживают неподвижными на пластинке, так что они получаются отчетливыми.

Эпохой наблюдения является тот момент, когда поворачивающаяся пластинка параллельна неподвижной пластинке такой же толщины, которая находится во внешней части поля зрения. Предполагаемая ошибка в координатах спутника относительно звезд равна $1'',5$, а точность во времени $0^s,001$. Эта камера найдет применение в будущем при фотографировании далеких, слабых и медленно движущихся спутников. Когда движение спутника будет достаточно медленным, чтобы можно было получать суммарную экспозицию до 5^s и больше, можно будет достичь точности около $0'',5$. Тот же принцип двойного движения использован в лунной камере Марковица, которая описана в разд. 2.3.5 *.

В Алма-Атинской обсерватории менисковый телескоп модифицирован путем установки колеблющейся стеклянной пластинки перед корректирующей линзой телескопа. Колебательные движения ее происходят вокруг оси, параллельной движению спутника.

* Лунная камера Марковица описана также в книге «Телескопы» под редакцией Дж. Койпера и Б. Миддлхерст, М., ИЛ, 1963, гл. 7.— *Прим. ред.*

Период колебаний равен 0,01—0,02 *сек*. Моменты крайних положений пластинки записываются осциллографом с одновременной регистрацией сигналов времени. Колеблющаяся пластинка разрывает след спутника. Места разрывов изображения определяют положение спутника относительно звезд в соответствующие моменты.

Приспособления подобного типа созданы и испытаны на нескольких других обсерваториях Советского Союза: в Пулково, на обсерваториях Энгельгардта (Казань) и Рижского университета. Описание этих камер читатель может найти в статьях Масевич [79] и Масевич и Лозинского [80].

2.3.2.2. Наблюдения с подвижными камерами

Большинство подвижных фотографических камер первоначально было запроектировано для получения данных о траекториях снарядов, поэтому их называют баллистическими камерами. В сущности они являются триангуляционными интрументами и используются преимущественно для определения пространственного положения снаряда на его траектории в заданный момент. Для этой цели одновременно используют две или более камеры, положения которых известны. Одновременные экспозиции обычно получают либо с использованием системы затворов, работающих синхронно, либо с помощью вспышек, связанных со снарядами. Положения вспышек определяют на фоне звезд таким же образом, что и при наблюдении неподвижными камерами. Теоретически фиксирование времени здесь не является необходимым, так как все камеры снимают вспышки, производимые в заранее известные моменты времени. Эти же камеры можно использовать для слежения за оптически активными спутниками, т. е. за спутниками, оборудованными лампами-вспышками. Такой метод наблюдений используют для *звездной* (космической.— *Перев.*) *триангуляции*, о которой говорится в разд. 2.5.1.5. Для пассивных спутников, которые светят только отраженным светом Солнца, след ИСЗ на пластинке должен прерываться специальной системой затвора, который в то же время регистрирует моменты изображений точек или разрывов следов, подобно камере Бейкер — Нанн.

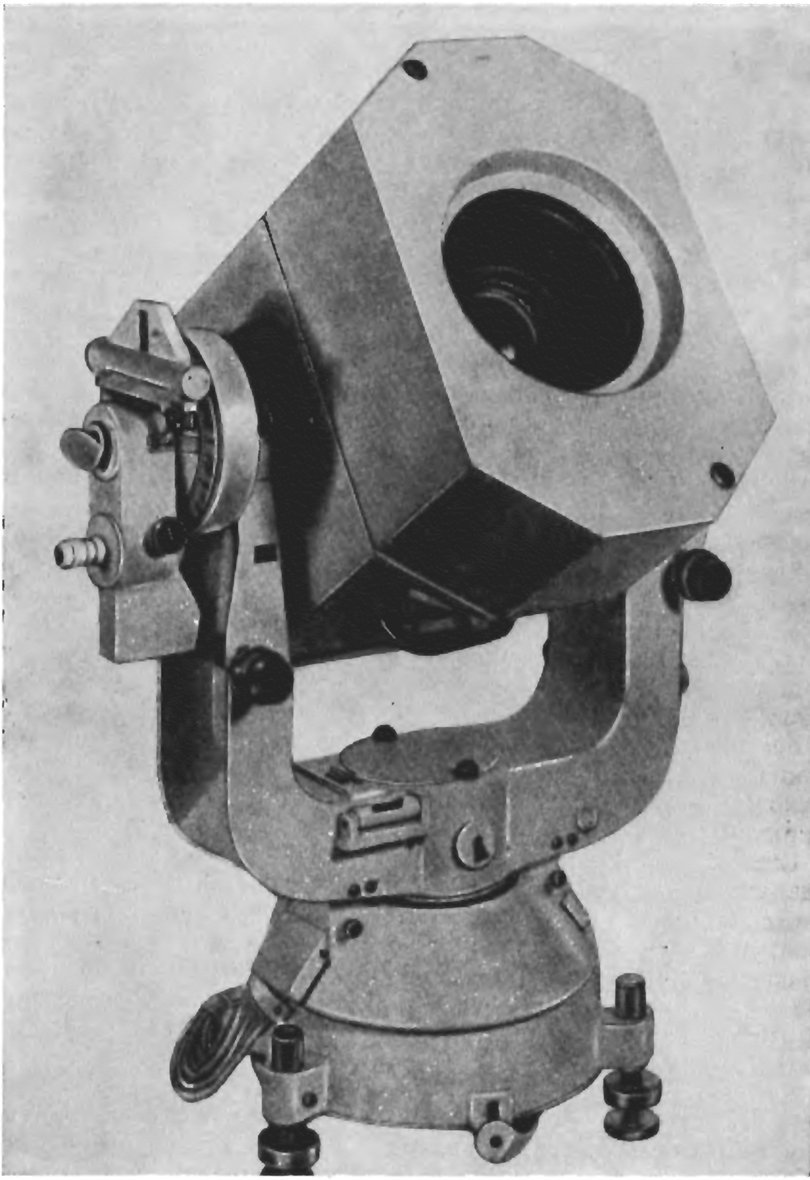
Существует несколько различных баллистических камер, из которых в США наибольшее значение имеют камеры Вильд ВС-4, PC-1000 и PC-600 (изготовленные фирмой «Инструмент корпорейшн оф Флорида»).

Баллистическая камера ВС-4 выпущена в Швейцарии фирмой «Вильд Хеербругг лимитед» и по существу состоит из модифицированной аэрофотокамеры Вильд RC-5, смонтированной на основе универсального теодолита Вильд Т4 (рис. 2.21). В инструменте имеются три различных объектива: Авиогон ($f = 115$ *мм*), Авиотар ($f = 210$ *мм*) и Астротар ($f = 305$ *мм*). Объектив Астротар рекомендуется для наблюдений за спутниками. Его апертура равна 117 *мм*; имеется ирисовая диафрагма, которую можно закрывать до $f/32$. Фотоэкспонирование производится на прецизионные стеклянные пластинки размером $215 \times 90 \times 6$ *мм* с эффективным форматом кадра 180×180 *мм*, соответствующим полю зрения $33° \times 33°$. Камеру используют в фиксированном положении, ее начальное ориентирование по азимуту и по высоте производят с точностью около $10''$.

Для оптически активных (вспыхивающих) спутников наблюдения с баллистической камерой заключаются в следующем. Незадолго перед фотографированием вспышек выполняют калибровку камеры. После этого затвор камеры остается закрытым до того момента, пока ожидаемые по программе вспышки не появятся недалеко от поля зрения. В этот момент затвор открывается и остается открытым до окончания серии вспышек. Сразу после этого вновь выполняется калибровка камеры. Эти калибровки необходимы для определения ориентации и стабильности камеры в течение периода наблюдений. При работе с Астротаром получаются хорошие изображения звезд до 9^m, с Авиотаром — до 8^m и с Авиогоном — до 7^m. Проявленная пластинка содержит изображения серии вспышек на фоне множества звезд. Ввиду того что изображения звезд сильно отличаются друг от друга по размерам и по плотности потемнения, не составляет большого труда выбрать в качестве контрольных звезд те, у которых фотографические характеристики близки к характеристикам изображений вспышек. Если это учитывается при выборе опорных звезд, то существенно упрощается проблема личных ошибок при измерениях; в этом случае ошибки будут одинаковыми при измерении изображений вспыхивающей лампы и используемых опорных точек.

По телеметрическому сигналу от фотоэлемента, установленного на спутнике, можно определить время каждой вспышки с точностью порядка $0^s,001$. Преимущество таких активных спутников заключается еще и в том, что их можно наблюдать в тени Земли; их недостатком, конечно, является установка на спутнике дополнительной аппаратуры. Баллистические камеры широко применяются в качестве стандарта при калибровке других оптических и электронных приборов для слежения на ракетных полигонах Атлантического и Тихого океанов и на нескольких военно-воздушных базах.

Чтобы иметь возможность наблюдать оптическими методами пассивные спутники, которых в настоящее время большинство

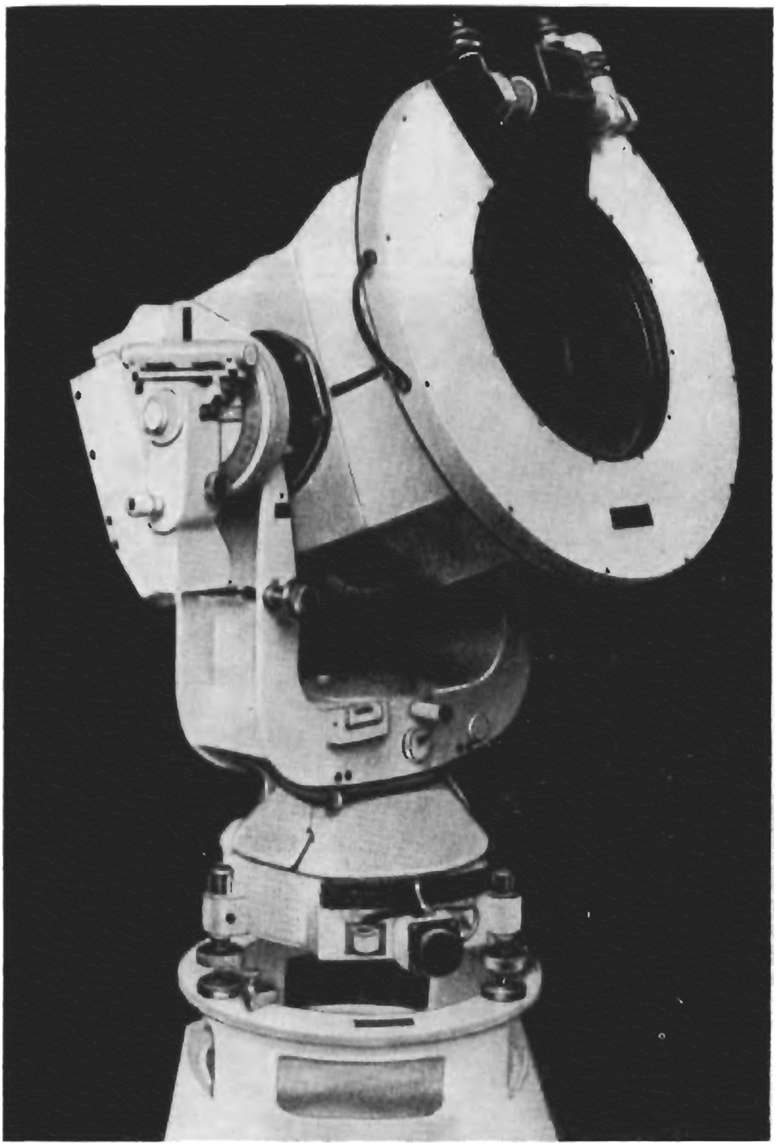


Р и с. 2.21. Баллистическая камера Вильд ВС-4.

(единственное исключение составляет спутник Анна, запущенный 31 октября 1962 г.), Береговая и геодезическая служба США и Лаборатория баллистических исследований сконструировали и испытали модифицированный вариант камеры ВС-4. Как сообщил Тейлор на собрании Американского геофизического союза в апреле 1962 г., модификация в основном заключается в создании электронного затвора для регистрации времени и системы синхронизации. В новом инструменте между линзами рядом с плоскостью ирисовой диафрагмы помещаются три вращающихся диска, используемые для прерывания следа спутника. Два из них представляют собой быстро вращающийся затвор (двухдисковый обтюратор.— *Перев.*), а третий диск используется для уменьшения времени экспозиции. Они приводятся во вращение высокоточной системой передач. Диски экспозиций могут вращаться со скоростями 10, 5 или 2,5 оборота в секунду, что соответствует экспозициям $^1/_{60}$, $^1/_{30}$, $^1/_{15}$ *сек*. Третий диск синхронизован с ними для уменьшения времени экспозиции в 2 или 5 раз. Дальнейшее уменьшение продолжительности экспозиции и кодирование следа спутника выполняются вспомогательным закрывающим затвором, установленным перед объективом камеры (рис. 2.22). Он представляет собой затвор лепесткового ирисового типа, который можно запрограммировать для уменьшения времени экспозиции в 2, 4 или 16 раз. Вспомогательный затвор используется преимущественно для прерывания следов звезд до и после получения изображения спутника. Эта информация нужна для целей калибровки. При фотографировании звезд дисковые затворы автоматически устанавливаются в среднем открытом положении.

Система синхронизации (рис. 2.23) обеспечивает работу отдельно действующих систем обоих затворов во время наблюдений, синхронизуя дисковые затворы для прерывания следа спутника, автоматически устанавливая дисковый затвор в открытом положении для прерывания следов звезд, впечатывая контрольные метки, показания часов камеры и счетчика и производя подробную запись наблюдений на девяти каналах бумажной ленты самописца.

Что касается точности системы, то, поскольку на каждой фотопластинке получается свыше 300 изображений спутника, возможен статистический анализ на гораздо большей части орбиты, чем позволяют вспыхивающие спутники. Если принимать размер изображения равным 20—30 *мк*, что вполне реально для центра снимка, то предварительная оценка показывает, что точность по времени составляет выше $0^s,001$, а по положению — около 2″ На рис. 2.24 показан снимок спутника Эхо 1, полученный модифицированной камерой ВС-4.



Р и с. 2.22. Модифицированная баллистическая камера Вильд ВС-4 со вспомогательной насадкой-затвором.

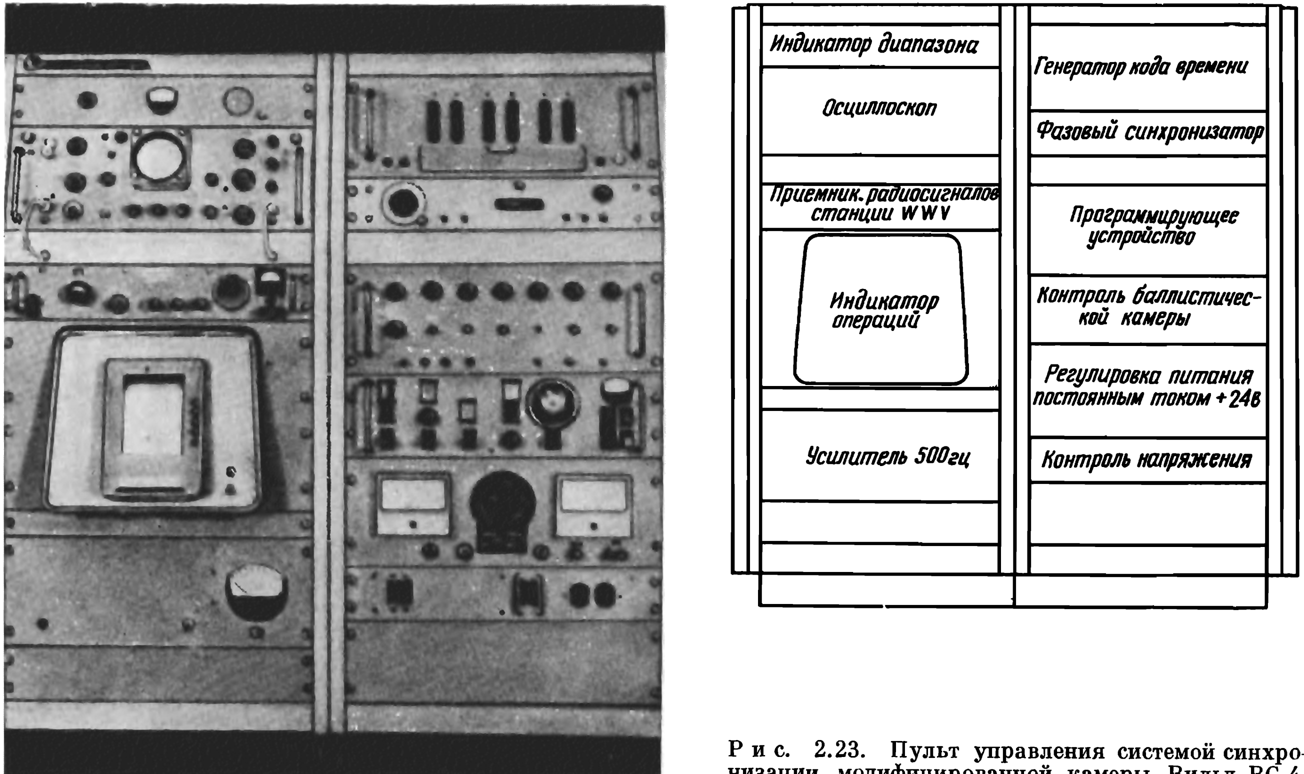


Рис. 2.23. Пульт управления системой синхронизации модифицированной камеры Вильд ВС-4.

Баллистическую камеру РС-1000 используют так же, как и установку ВС-4. Эта камера, показанная на рис. 2.25, имеет фокусное расстояние 1000 *мм*, апертуру 200 *мм* для объектива со светосилой 1 : 5 и с полем зрения 10° × 10° (максимум 14°). Формат снимка тот же самый, что и у камеры ВС-4: 180 × 180 *мм* на стандартной стеклянной пластинке размером 190 × 215 × × 6 *мм*. Камера имеет лепестковый затвор, действующий импульсами, продолжительность экспозиций $^{1}/_{8}$ *сек*, частота экспозиций —

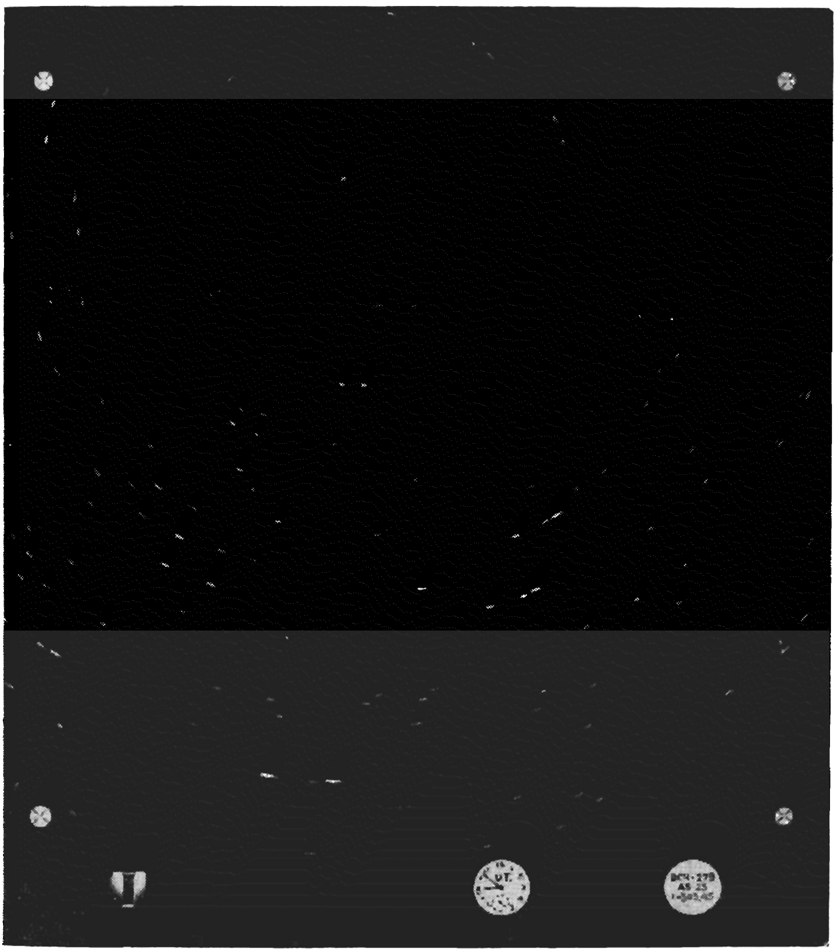
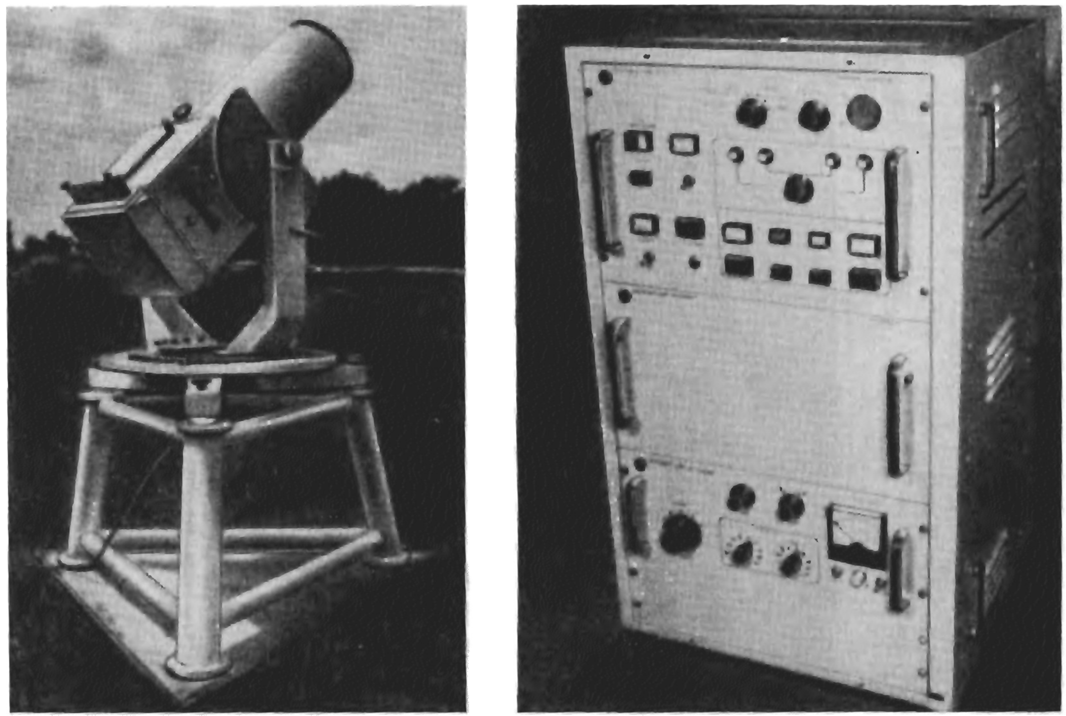


Рис. 2.24. Стеклянная пластинка с фотографией прохождения спутника Эхо 1, полученная на модифицированной камере Вильд ВС-4.

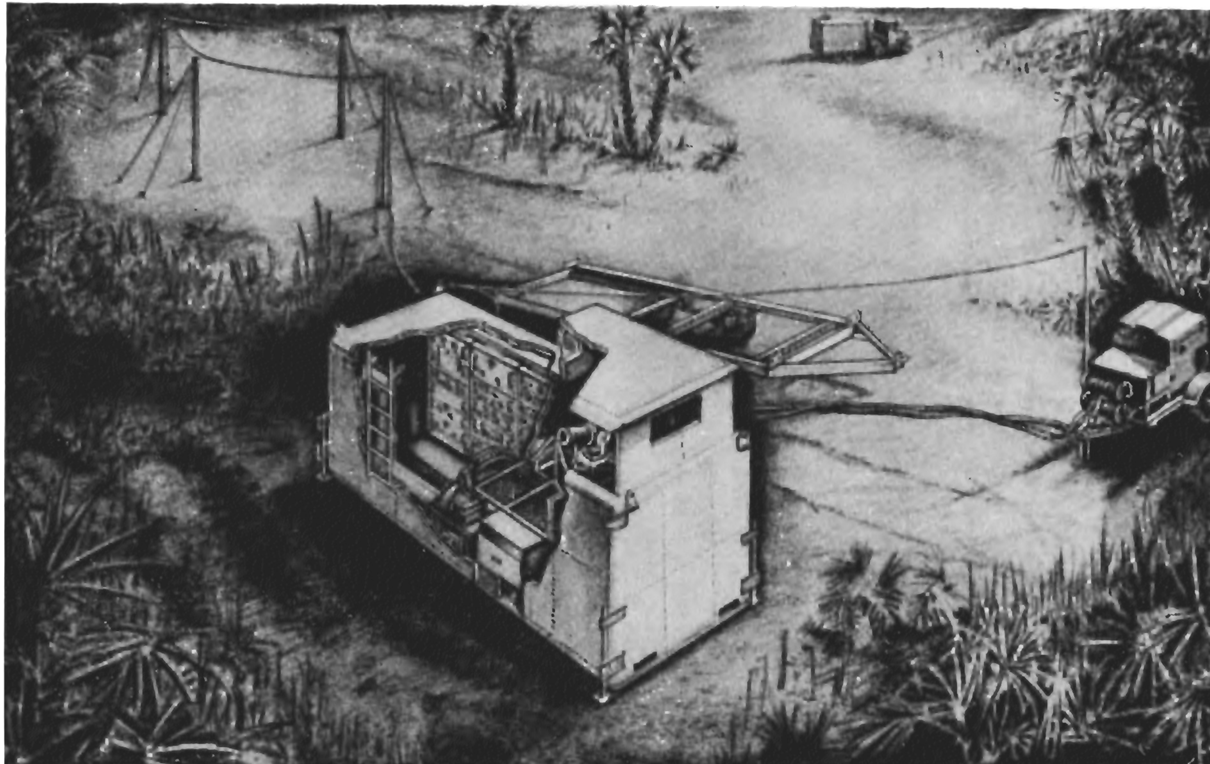


Р и с. 2.25. Баллистическая камера PC-1000 и пульт управления.

5 раз в секунду. Функции регулятора затвора и программирующего устройства здесь те же самые, что и в камере ВС-4. Результат также получается на бумажной ленте. Установка РС-1000 выбрана Службой аэрофотосъемки и картографии ВВС США в качестве основной камеры для наблюдений активных или пассивных спутников и для космической триангуляции. Некоторые из камер полевых передвижных установок, смонтированных на прицепах к тягачам, полностью укомплектованы и автономны (рис. 2.26). Кроме самой камеры, они включают системы связи и определения времени, источник энергии и записывающее оборудование. Они также дают возможность производить измерения снимков и их обработку. Действительная точность системы пока неизвестна, но она должна быть такого же порядка, как и точность установки ВС-4. В настоящее время в США действуют около 30 камер типа ВС-4 и РС-1000.

В Советском Союзе на 26 станциях для фотографирования ярких спутников используется модифицированный вариант аэрофотосъемочной камеры НАФА-3с/25. Эта камера имеет объектив Уран-9 с фокусным расстоянием 250 *мм*, апертурой 100 *мм* и полем зрения $30^\circ \times 50^\circ$. Камера снабжена электронной системой затвора с ручным управлением. Моменты закрытия и открытия фиксируются с помощью хронографа, который одновременно регистрирует радиосигналы времени. Фотографирование производят при закрепленном положении камеры несколькими короткими экспозициями продолжительностью 0,2—0,5 *сек*. Съемка ведется на пленку, на которой получается изображение спутника в виде пунктира с длиной штрихов около 2 *мм* на фоне изображений звезд, которые практически являются точками. Центр каждого штриха спутника соответствует арифметическому среднему из моментов открытия и закрытия затвора, записанных на хронографе. Считается, что точность наблюдений равна $5''$ по положению и 0,002 *сек* по времени. Подробности можно найти в статье Масевич [79].

В различных странах действует много других типов передвижных камер. Примеры специальных методов наблюдений, применявшихся в различных странах, читатель может найти в статьях Розино и Маммано [102], де Ягера [60], Ричардса [98] и Хевитта [57]. В первой статье описывается модифицированный вариант аэрофотокамеры К-37, использовавшейся с магнитофоном. Во второй содержится отчет об эксперименте с малыми камерами Шмидта, а в статье Ричардса поясняется его эксперимент с вращающейся малой камерой в физическом отделении колледжа Уэльского университета. При движении пленки в камере со скоростью на 5—10% меньше угловой скорости спутника в кульминации, яркость его изображения повышается на 2—4 звездные вели-



Р и с. 2.26. Полевая передвижная установка камеры РС-1000.

чины. Точность этих трех установок значительно меньше, чем у описанных выше в этом разделе. Камера Хевитта представляется более точной.

2.3.3. Фотоэлектрические методы наблюдений ИСЗ

В физическом отделении Лондонского университета усовершенствована и испытана фотоэлектрическая установка для слежения за спутниками, описанная Боуэном и Ньютоном [28]. Эта установка в основном состоит из М-образной прорези, расположенной между телефотообъективом, имеющим светосилу 1 : 8 и фокусное расстояние 1220 *мм*, и трубой фотоумножителя. Когда освещенный Солнцем спутник пересекает поле зрения, то его изображение проходит через щель и фотоумножитель производит серию импульсов. Эти импульсы попадают на усилитель и затем записываются на магнитофонную ленту на фоне сигналов времени. В течение процесса наблюдений инструмент, который устанавливается на корпусе кинотеодолита Аскания, остается в неподвижном положении. Ориентирование инструмента производится по изображениям звезд, фотографируемым на пленку, которая в случае необходимости заряжается в кассету. Если нужна меньшая точность, то можно определить положение оси с помощью отсчетов по горизонтальному и вертикальному кругам алидадной части теодолита Аскания. Авторы утверждают, что при одном наблюдении угловые величины получаются с точностью до $1''$, а время — до 0,001 *сек*. О более раннем варианте фотоэлектрического устройства сообщил Уилмор [120].

Несколько иной способ наблюдения спутников ярче 5^m предложил Цубокава из Института географической съемки в Токио, Япония. Его инструмент представляет телескопическую камеру с апертурой от 100 до 150 *мм* и фокусным расстоянием от 600 до 1000 *мм*. Камера смонтирована на экваториальной установке и приводится во вращение в соответствии со скоростью звезд синхронным электромотором, питаемым от кварцевого генератора, который также вырабатывает стандартные сигналы для фиксации времени на ленте. Звезды изображаются на фотопластинке в виде точек. Перед фотопластинкой имеется установка из девяти оптических ножей с идеально гладкими сторонами. На каждой стороне ножа находится трубка фотоумножителя. Когда спутник пересекает поле зрения, то свет его вначале отражается только от одной грани ножа и попадает в трубку фотоумножителя, расположенную с этой же стороны. Достигнув лезвия ножа, свет разделяется и попадает в обе трубки. Затем, когда свет от спутника движется дальше, он отражается от другой грани ножа и попадает только во вторую трубку. Это явление повторяется на каждом ноже в поле зрения. Разность между сигналами на выходе двух трубок усиливается и записывается в форме аппроксимирующей синусоиды импульсов. Точки, в которых эта кривая пересекает среднюю линию, соответствуют моментам, когда световой луч проходит через лезвие ножа. В результате получают запись импульсов, наложенных на сигналы времени, и фотопластинку, на которой спутник оставляет продолжительный след с разрывами, соответствующими пересечениям ножей. Положения центров разрывов определяются с помощью фона звезд, а моменты времени берутся по записи осциллографа.

Теоретическая точность установки равна $1''$ по положению и 0,001 *сек* по времени для одного наблюдения, дающего одну фотопластинку и одну осциллограмму (9 отчетов). Подробности можно найти в статье Цубокавы [112]. Другой инструмент описан Шкловским [104].

2.3.4. Электронные методы наблюдений ИСЗ

Существует много различных электронных систем для наблюдений спутников. Для большинства из них нужен активный спутник, т. е. спутник, несущий передатчик, который генерирует радиоволны (предпочтительно на высоких частотах для уменьшения ионосферной рефракции). Передающие устройства спутников можно разделить на три группы в соответствии с принципами их действия: работающие по принципу интерферометра, использующие эффект Допплера и измеряющие расстояния. То обстоятельство, что спутник должен быть активным, является большим недостатком этих методов, так как, если спутник перестанет передавать сигналы, система не сможет работать. Единственный электронный метод, в котором передающее устройство находится на земле, а спутник используется только как отражатель энергии,— это радиолокационный метод.

Электронные методы особенно полезны в раннем периоде существования спутника, когда имеется мало данных о его траектории. Передатчик обнаруживает его присутствие на большой площади, поэтому местоположение спутника можно определить без предварительных данных о приближенной орбите. В дополнение к этому преимуществу такие системы могут действовать практически при любых погодных условиях как днем, так и ночью. Это их огромное преимущество по сравнению с оптическими системами слежения, которые могут работать лишь тогда, когда спутник освещен Солнцем (или производит вспышки) и только при ясном небе. С другой стороны, точность различных электронных методов наблюдений ИСЗ в настоящее время в общем ниже, чем точность фотографических методов. При особых геометрических, орбитальных и наблюдательных условиях с некоторой существующей точной аппаратурой или при ее усовершенствовании можно достичь точности, сравнимой с точностью оптических методов.

Здесь излагаются принципы действия интерференционной, допплеровской и радиодальномерной аппаратуры и кратко описываются инструменты, используемые различными организациями США. Эти системы могут быть использованы или независимо, или, поскольку они дают различные параметры (расстояние, скорость или направление на спутник), в разных сочетаниях как дополняющие друг друга. Радиолокационная аппаратура здесь не описывается вследствие ее ограниченного использования для геодезических целей.

2.3.4.1. Применение интерферометров

Ниже кратко описывается в применении к слежению за спутниками принцип работы интерферометра, хорошо известный радиоастрономам и оптикам. Как говорит само название, интерферометр использует картину интерференции сигналов, принимаемых на две антенны. Расстояние между антеннами, связанными фидерными линиями, очень мало по сравнению с расстоянием до спутника. Средние точки фидеров подсоединены к гибридной схеме и к приемнику, который действует как счетное или записывающее устройство.

Расположение их показано на рис. 2.27. Мы предполагаем, что спутник S находится на расстоянии, которое значительно больше расстояния между антеннами. Если принять, что расстояние $SP = SA_1$, то отрезок A_1P будет примерно перпендикулярен SA_2. Разность фаз, которая фиксируется фазометром, пропорциональна расстоянию PA_2, а $\cos\alpha$ равен отношению PA_2/A_1A_2.

Теперь предположим, что расстояние PA_2 равно целому числу длин волн. Тогда напряжения, поступающие из антенн на гибридную схему, будут в одной фазе, и счетчик покажет максимальный выход напряжения. Если же расстояние PA_2 равно нечетному числу полуволн, то напряжения в антеннах из-за несовпадения по фазе будут гаситься в гибридном узле, и в этом случае выходное напряжение будет минимальным.

Если спутник движется вдоль антенны, то расстояние PA_2 будет изменяться, и выходное напряжение в приемнике будет колебаться от максимума до минимума по синусоидальной кривой. Число максимумов и минимумов можно увеличить, удлинив базисное расстояние A_1A_2. Для базисной линии, в 50 раз большей, чем длина волны, минимум будет получаться примерно при перемещении ИСЗ на 1°.

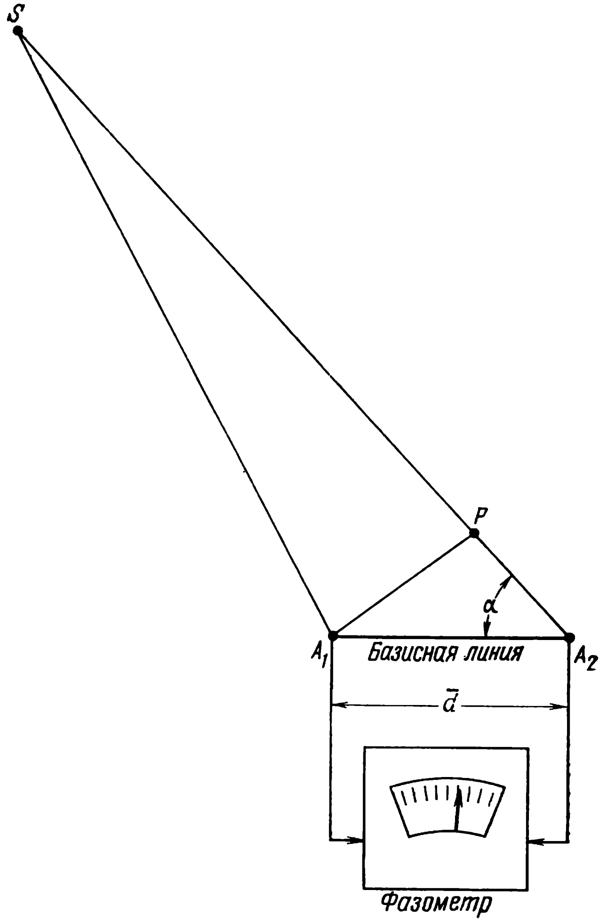


Рис. 2.27. Принцип работы интерферометра.

Точнее, если расстояние PA_2, выраженное разностью фаз, есть θ, то

$$\theta = k + a, \tag{2.92}$$

где k — число полных циклов, которое интерферометр не фиксирует. Оно должно быть определено либо с помощью второго интерферометра с парой антенн, расположенных намного ближе друг к другу, который дает грубое значение, либо при помощи приближенных элементов орбиты, полученных из некоторого другого источника. Величина a является дробной частью цикла; она считывается с фазометра или записывается им.

Если длина волны радиосигнала равна λ, то косинус направления входящего сигнала определяют по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\theta\lambda}{d}. \tag{2.93}$$

Другой направляющий косинус можно определить с помощью таких же антенн, установленных под прямым углом к первой паре. Таким образом, при прохождении ИСЗ определяют направление линии, соединяющей спутник и середину базиса. Для вычисления орбиты необходима дополнительная информация, а именно расстояние до спутника, получаемое из ряда наблюдений, или направление на ИСЗ с других интерферометров, расположенных в иных местах.

В США основными наблюдательными системами, основанными на этом принципе, являются системы Минитрек Прайм и Минитрек Марк II, разработанные Морской научно-исследовательской лабораторией (Минитрек — Minimum Weight Tracking — система слежения минимального веса.— *Перев.*).

Система Минитрек Прайм предназначалась для точного слежения за спутниками Авангард, которые были запущены в течение Международного геофизического года. Для выполнения этой задачи было создано 11 однотипных станций, образующих барьер через Американский континент почти в направлении с севера на юг. Расширенная система Минитрек Прайм сейчас состоит из 14 станций и управляется НАСА (Национальным комитетом по аэронавтике и исследованию космического пространства). Эти станции расположены в следующих пунктах:

Антофагаста, Чили,
Блоссом-Пойнт, штат Мэриленд,
Колледж, Аляска,
Ист-Гранд-Форкс, штат Миннесота,
Форт-Майерс, Флорида,
Голдстоун, Калифорния,
Иоганнесбург, Южная Африка,
Лима, Перу,
Кито, Эквадор,
Росман, штат Северная Каролина,
Сант-Яго, Чили,
Сент-Джонс, Ньюфаундленд,
Уинкфилд, Англия,
Вумера, Австралия,
Фар-Ист (должна быть построена в 1963 г.).

Планировка типовой станции Минитрек Прайм показана на рис. 2.28. Она ориентирована с севера на юг. Характеристики антенн обеспечивают веерную диаграмму направленности протяженностью по 50° к северу и к югу от зенита и по 5° к востоку и западу от меридиана. Всего необходимо восемь антенн. Антенны на концах базисных линий, расположенных с севера на юг и с запада на восток, обеспечивают измерения точной разности фаз, т. е. члена a в формуле (2.92). Базис этих точных антенн примерно равен 55 длинам волн. Для определения члена k в формуле (2.92) используются две установки разрешающих антенн,

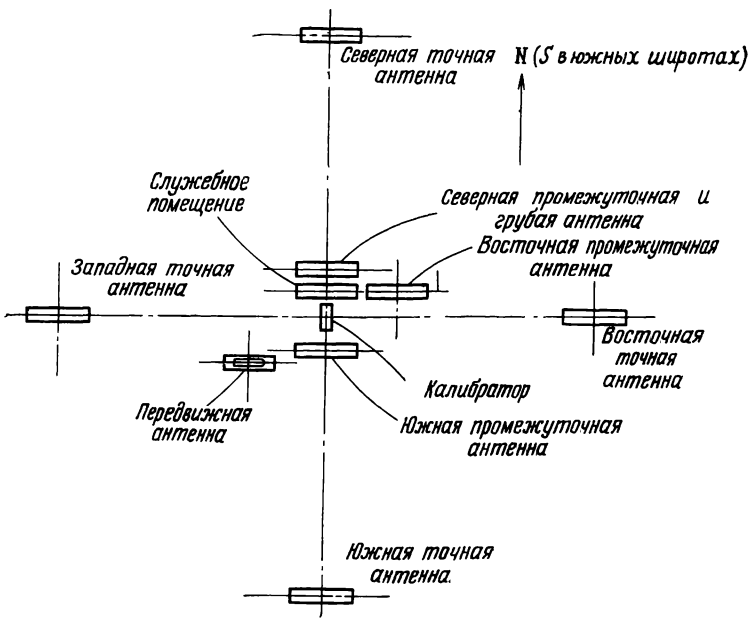


Рис. 2.28. Схема станции системы Минитрек Прайм.

расположенных с севера на юг: пара промежуточных антенн с расстоянием между ними в 7 длин волн и пара грубых антенн с расстоянием в 1,318 длины волны. Для устранения многозначности k в сравнительно узком восточно-западном секторе необходима только одна дополнительная пара антенн с расстоянием между ними в 7 длин волн. На рис. 2.29 показана часть системы антенн.

В прошлом в этой системе использовался передатчик на частоте 108 *Мгц*, затем он был заменен передатчиком на частоте 136 *Мгц*. Данные измерений разности фаз a записываются в цифровой форме, данные промежуточных и грубых измерений — в аналоговой форме. Записанные данные передаются по теле-

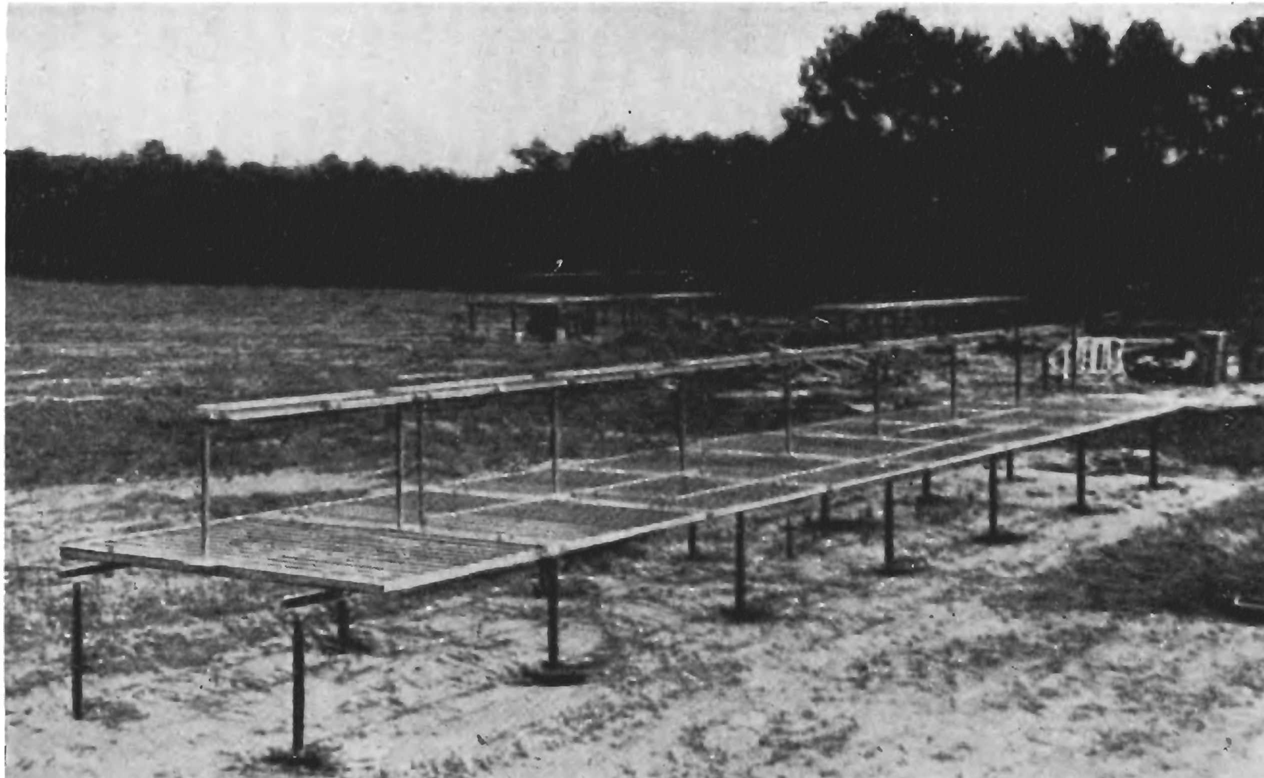


Рис. 2.29. Антенны станции системы Минитрек Прайм.

тайпу в Годдардовский центр космических полетов НАСА в Гринбелт (штат Мэриленд), где их используют для определения и анализа орбит. Регистрация времени, обеспечиваемая стабилизированным генератором, синхронизованным с радиосигналами станции WWV, имеет точность от 1 до 2 *мсек*.

Точность системы определяют в процессе калибровки. Главная задача калибровки — определение действительной ориентации лучей антенн относительно антенных решеток на земле. В общем случае на расположение системы будет влиять ряд независимых источников ошибок, несмотря на высокую точность разбивочных и строительных работ при постройке антенных установок. Факторы, которые могут вносить неточности в эту систему, включают ошибки в азимуте, длине и наклоне линий базисов, ошибки в определении положений центров антенн и сдвиг фаз сигнала, который происходит до измерения разности фаз между принимаемыми волнами. Общее влияние этих источников ошибок можно определить путем слежения по диаграмме направленности антенны за радиоисточником с точно известным положением.

Для оптической калибровки используется приспособление, включающее специальную камеру, которая устанавливается в центре системы антенн. Во время точных наблюдений на наземной станции наблюдают и одновременно фотографируют высоколетящий самолет (на высоте около 6000 *м*), несущий передатчик Минитрек и лампу-вспышку, управляемую по радио. Последующее измерение на фотопластинке изображения лампы на звездном фоне в соответствии со временем позволяет определить положение самолета с точностью около 2″. Калибровка обычно выполняется дважды в год. Из периодических калибровок можно вывести средние систематические ошибки, возникающие в результате смещения фаз в антеннах и проводах. По исследованиям Берберта [26], средняя точность системы составляет около 20″. Добавляя к этому 2″ — ошибку в положени вспышки при калибровке и внутреннюю ошибку системы, мы можем заключить, что точность направления на спутник, определенного с одной станции, будет порядка 30″. Однако ясно, что точность, достигаемая отдельной станцией, и точность орбиты, т. е. эфемеридных данных,— совершенно разные вещи. Последняя, помимо ошибок отдельных станций, зависит еще и от точности, с которой известны геоцентрические координаты станций, от атмосферной рефракции и т. д. В настоящее время разности результатов такой системы с эфемеридными данными равны 100″—150″ для высоких спутников и еще больше для низких.

Подробности об этом способе можно найти в статьях Менгела [84—86] и Берберта [26].

Система Минитрек Марк II является упрощенным вариантом системы Минитрек Прайм и используется Картографической службой Армии США главным образом для целей геодезии, а не для определения орбит. Параметры орбит спутников получаются из других источников, таких, как наблюдения системой Минитрек Прайм. По этим параметрам могут быть предсказаны и затем зафиксированы с помощью пары антенн положения спутника для случаев, соответствующих разности сигналов по фазе от 0 до 180°.

Эти предвычисленные направления сравнивают с наблюденными, и из таких сравнений можно вычислить поправки к координатам наблюдателя. Из этого следует, что так как приближенное положение спутника a priori известно, то не нужны никакие антенны, устраняющие неоднозначность величины k, как в системе Минитрек Прайм, и поэтому измерительная аппаратура намного проще. Типичная станция Минитрек Марк II имеет две или три базисные антенны с азимутами соответственно 0 и 90° или 30, 90 и 330°. Рабочие частоты равны 108, 136, 162 и 216 *Мгц* (вероятно, они будут доведены до 400 *Мгц*). Для определенных частот запроектированы различные пары антенн, установленные на концах базисных линий. Пары антенн разделены расстояниями в 304,88; 242,11; 203,25 и 152,44 *м*, что примерно соответствует 110 длинам волн. Планировка станции с двумя базисными линиями показана на рис. 2.30. Как можно заметить, здесь имеются только точные антенны, а промежуточные и грубые антенны отсутствуют.

Момент прохождения записывается при помощи точного прибора для измерения времени, который состоит из генератора времени системы Лоран, схемы счета импульсов, генератора-усилителя в 60 *гц* и приемника для сравнения с сигналами станций WWV и WWVH. Это устройство может состоять также из некоторого другого стандартного оборудования, которое регистрирует время до миллисекунд. Для обеспечения непрерывной записи на бумажной или магнитной ленте во время слежения за спутником используют шестиканальный рекордер или магнитофон.

В настоящее время на этих станциях ежедневно наблюдается около 12 прохождений спутников. Станции системы Минитрек Марк II находятся на островах Лусон (Филиппины) и Мауи (Гавайские о-ва) и в Херндоне (штат Виргиния). Четыре другие станции (Квайялейн, Уэйк, Гуам и Самоа) начали действовать в 1958—1961 гг.

Внутренняя точность системы для отдельного наблюдения равна примерно 20″ по направлению и $\pm$ 0,001 *сек* по времени. Калибровку инструментов можно производить по наблюдениям радиозвезды (точечного источника радиоизлучения.— *Перев.*), но,

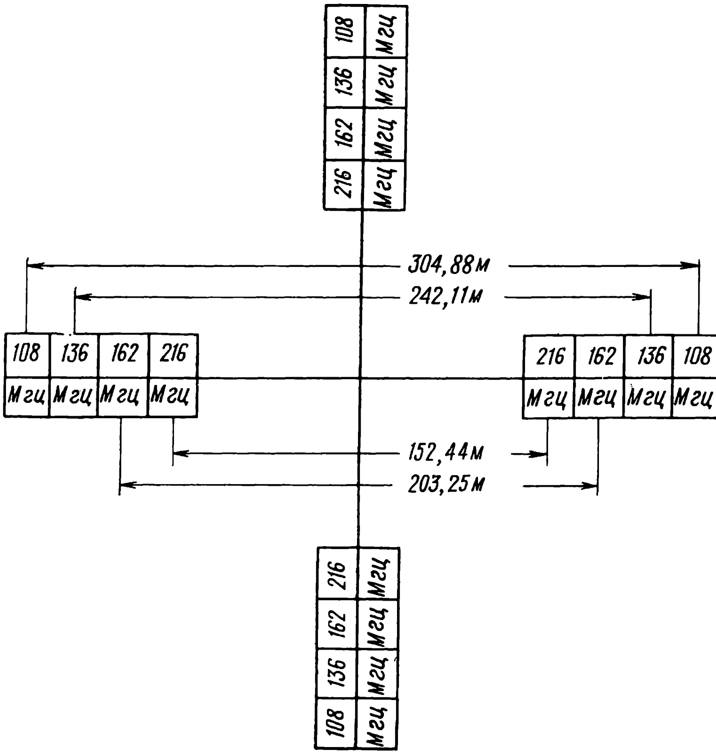


Рис. 2.30. Схема станции системы Минитрек Марк II. Расстояния даются между центрами антенн.

поскольку ее положение известно с ошибкой около ± 170″, полная ошибка получается порядка ± 200″ за счет ошибок в элементах орбиты (± 100″) и в методике калибровки (± 25″). При этом ошибка в положении наблюдателя в метрах соответствует высоте спутника в километрах; например, высоте 100 *км* соответствует ошибка 100 *м*. Если калибровку производят по самолету, как было описано выше, то полная ошибка может быть уменьшена вдвое, а если приближенная орбита известна из наблюдений с точностью ± 20″, то полная ошибка может быть уменьшена в 5 раз, в результате чего точность в ± 100 *м* в положении наблюдателя может быть достигнута по наблюдениям спутника, летящего на высоте 500 *км* и выше.

Более подробную информацию о системе Минитрек Марк II можно найти в статьях Истона [43] и Кана [62].

2.3.4.2. Использование эффекта Допплера

Принцип слежения за спутником с применением эффекта Допплера заключается в том, что пока передатчик спутника посылает непрерывные немодулированные колебания на фиксированной частоте, сигнал, принимаемый на Земле, изменяет свою частоту вследствие изменения скорости спутника относительно станции наблюдений. Принимаемая частота является функцией частоты передатчика, скорости распространения радиоволн и быстроты изменения расстояния между спутником и наблюдателем, т. е. лучевой скорости спутника.

Эту скорость можно вычислить, если регистрировать частоту сигналов спутника при его приближении или удалении. Предположив, что во время наибольшего сближения лучевая скорость равна нулю, можно найти минимальное расстояние и относительную скорость ИСЗ. Ниже приводится простой анализ этого эффекта, сделанный Томасом [110].

Принимаемая и передаваемая частоты F и F_0 связаны зависимостью

$$F = F_0 \left[1 + \frac{(r^*)'}{c} \right], \tag{2.94}$$

где c — скорость света, $(r^*)'$ — лучевая скорость ИСЗ, а r^* — расстояние между наблюдателем и спутником. Если зарегистрирована частота F, то лучевую скорость можно вычислить по формуле

$$(r^*)' = \frac{c\,(F - F_0)}{F_0}. \tag{2.95}$$

В момент наибольшего сближения ИСЗ радиальная скорость равна нулю, поскольку относительная скорость $(s^*)'$ [см. уравнение (2.35)] предполагается перпендикулярной к лучу зрения (рис. 2.31). Спустя t *сек* спутник будет находиться от точки наибольшего сближения на расстоянии $(s^*)'t = vt$, где $v = (s^*)'$, а его расстояние от наблюдателя равно

$$r^* = \sqrt{(r_0^*)' + v^2 t^2}, \tag{2.96}$$

где r_0^* — минимальное расстояние, как показано на рис. 2.31. Дифференцируя это уравнение и возводя результат в квадрат, получаем

$$[r^* (r^*)']^2 = v^4 t^2.$$

После подстановки сюда r^* из уравнения (2.96) имеем

$$\left[\frac{t}{(r^*)'} \right]^2 = \frac{t^2}{v^2} + \frac{r_0^*}{v^4}. \tag{2.97}$$

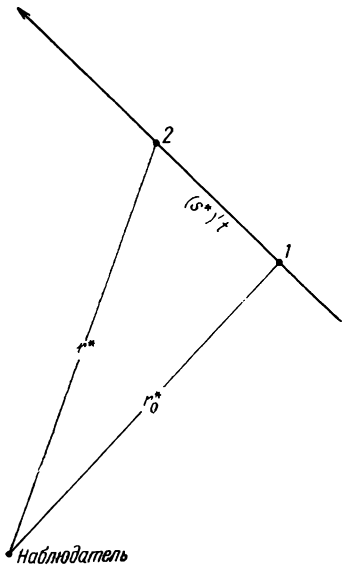


Рис. 2.31. Принцип Допплера.

Умножая обе части этого уравнения на $(c/F_0)^2$, находим

$$\frac{t^2}{\left[\frac{(r^*)'\,F_0}{c}\right]^2}=\left(\frac{c}{F_0}\right)^2\frac{t^2}{v^2}+\left(\frac{c}{F_0}\right)^2\frac{d_0}{v^4}. \tag{2.98}$$

Из уравнения (2.95) видно, что

$$\frac{(r^*)'\,F_0}{c}=F-F_0=\Delta F,$$

где ΔF является измеренной величиной. Поскольку момент наблюдения t также известен, левую часть уравнения (2.98) можно считать косвенным результатом одного наблюдения. В правой части уравнения (2.98) величину

$$\left(\frac{c}{F_0}\right)^2\frac{1}{v^2}$$

из первого члена и весь второй член можно для наблюдаемой части орбиты считать постоянными, поскольку ее можно принимать за круговую. Поэтому неизвестным в уравнении является величина t^2. Если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &y=\left(\frac{t}{\Delta F}\right)^2, \qquad m=\left(\frac{c}{F_0}\right)^2\frac{1}{v^2},\\ &x=t^2, \qquad h=\left(\frac{c}{F_0}\right)^2\left(\frac{r_0^*}{v^4}\right)^2, \end{aligned} \tag{2.99a}$$

то уравнение (2.98) примет вид:

$$y = h + mx. \qquad (2.99б)$$

Это уравнение прямой линии. Можно видеть, что график величины y в функции x, т. е. величины $(t/\Delta F)^2$ в функции t^2, дает значения m (угол наклона) и h (отрезок, отсекаемый на оси y). Последние в свою очередь с помощью уравнения (2.99а) дают минимальное расстояние r_0^* и относительную скорость v. Точность этих параметров зависит, кроме инструментальных ошибок (смещения фаз и т. д.), от знания частоты передатчика F_0 (стандартной частоты) и скорости c распространения радиоволн в ионосфере и тропосфере. Первоначальную частоту передатчика и время наибольшего сближения устанавливают по симметрии кривой зависимости частоты от времени. Наблюдаемая частота вносится в таблицу или на график зависимости величины $(r^*)'$ от t, причем $(r^*)'$ вычисляется по формуле (2.95), а t измеряется от установленного момента наибольшего сближения. Затем по способу наименьших квадратов производят уточнение линии, определяемой уравнением (2.99), для чего изменяют момент наибольшего сближения, пока средняя квадратическая ошибка не будет минимальной. Период обращения можно найти по наблюдениям последующих прохождений на одной и той же станции, исправляя разность моментов за смещение наблюдателя относительно орбиты спутника вследствие вращения Земли.

Поэтому из наблюдений на одной станции можно определить период обращения спутника, момент и расстояние наибольшего сближения и относительную скорость. Орбиту можно вычислить по наблюдениям на трех или более станциях с известными координатами или на одной станции по одновременным наблюдениям по методу интерференции и по методу Допплера. В этом случае определяют расстояние, направление и относительную скорость, от которых зависят параметры орбиты. Естественно, что если известны параметры орбиты, то по тем же наблюдениям можно определить координаты точки наблюдений для целей геодезии и навигации. Поскольку эта система сильно зависит от стабильности частоты, в вычисления должна быть включена поправка для приведения к стандартной частоте как отдельное неизвестное для каждого прохождения.

Американскими системами слежения, использующими эффект Допплера, являются системы Транзит и Доплок. Система Транзит, разработанная Морской лабораторией вооружений и Университетом Джона Гопкинса, предназначается в основном для навигации, но спутники этой системы можно использовать и для целей динамической геодезии, так как у них планируются идеальные параметры орбит. Программа рассчитана на действие двух согласованных, одновременно принимающих систем, одной системы, передающей информацию на спутник, и двух принимающих систем для движущихся кораблей для определения координат с точностью 2 *км* (при менее точном оборудовании) и в пределах 200 *м* (при точном приемном оборудовании). Проектом предусматривается передача спутником не только сигналов с очень стабильной немодулированной частотой, но, кроме того, его мгновенных орбитальных координат с интервалами 1 *мин*. На спутнике также должны находиться точные часы для передачи сигналов всемирного времени. Для осуществления этого Военно-морской флот США использует во время работ по исследованию и усовершенствованию системы цепь станций слежения, в которую входит около 35 постоянных и 10 передвижных станций, расположенных по всему земному шару. Эти станции снабжают центральный вычислительный центр информацией; в свою очередь он передает на спутники данные о поправках в элементы орбиты для ретрансляции их на движущиеся корабли. Окончательная действующая навигационная система будет требовать станций слежения не по всей Земле, а только в Северной Америке. Спутник всегда будет передавать самые точные данные с максимально возможным числом точных значащих цифр.

Точное приемное оборудование использует с максимальной точностью параметры, передаваемые со спутника. В дополнение к очень чувствительному приемнику на борту корабля необходимо иметь приборы для контроля частоты, быстродействующую электронную машину и другое оборудование. При работе с меньшей точностью, когда используется не весь объем точных данных со спутника, электронная машина не требуется, достаточно иметь логарифмическую линейку или арифмометр.

Работы по усовершенствованию системы проводятся в четыре стадии. Первая стадия — изучение возможностей. Во второй стадии проводится оценка технических данных конструкций. Третья стадия служит для создания прототипов действующих спутников. Четвертой и окончательной будет действующая система спутников Транзит. Ожидают, что окончательная система будет состоять из четырех полностью оборудованных спутников: двух — с наклонениями орбит в 67°,5 и двух — с наклонениями в 22°,5, с орбитами, разнесенными на 180°. Запланированные орбиты круговые, с высотой около 1000 *км*. Если бы удалось получить такие орбиты, то в любом месте земной поверхности были бы возможны наблюдения ИСЗ через каждые 90 *мин*. Чтобы сделать охват более полным, можно добавить два спутника: один на полярной, другой на экваториальной орбите.

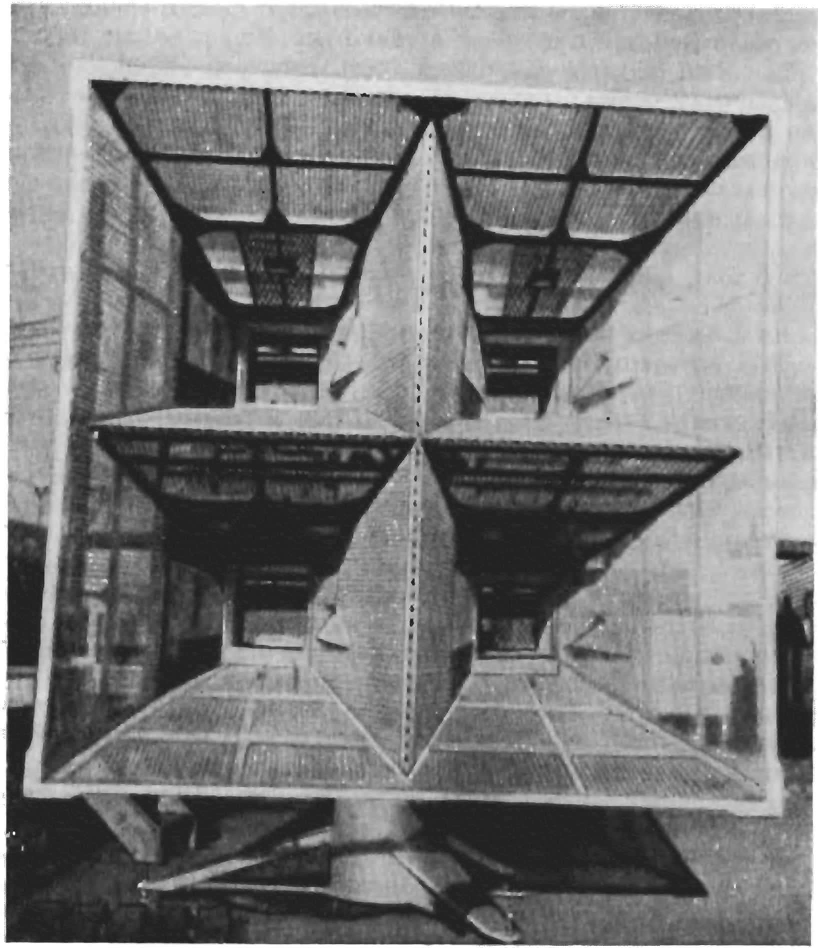
Образцы спутников Транзит 1В, 2А, 3В, 4А и 4В, запущенные с 13 апреля 1960 г., давали, кроме возможности навигационного использования, очень полезную информацию о гравитационном поле Земли. Они вели передачи на четырех частотах: 54 и 324 *Мгц*, задаваемых одним генератором, и 162 и 216 *Мгц*, задаваемых другим. Первый спутник конечной стадии был запущен в декабре 1962 г.

Дополнительные сведения о принципе Допплера можно найти в статьях [34, 45, 64, 93, 109, 110, 117]. Методы анализа описаны в статьях [49, 68]. Система Доплок описана в [42].

2.3.4.3. Измерение расстояний до ИСЗ

Как было показано выше, электронные системы слежения за ИСЗ основаны на соотношении фаз принятой и сравниваемой стандартной частоты. В интерферометрии используется *разность фаз* сигналов от спутника, принимаемых в один и тот же момент на двух разнесенных антеннах на земле. В допплеровском методе используется *разность скорости изменения* фазы принимаемой частоты и стандартной частоты на наземной станции. Измерение расстояний основано на следующем физическом принципе: модуляция электромагнитных волн, распространяющихся в пространстве, подвергается *фазовому сдвигу*, пропорциональному расстоянию, пройденному волнами, и частоте модуляции. Расстояния измеряются от наземных станций, которые передают сигнал, модулированный по фазе. Этот сигнал принимается импульсным приемо-передатчиком спутника, который ретранслирует сигнал как фазовую модуляцию с измененной несущей частотой. Наземные станции принимают сигнал, и фазовый сдвиг модуляции измеряется электронным сервофазометром, который выдает на ленту цифровые данные о расстоянии.

Системой, использующей этот принцип для геодезических целей в Америке, является система Секор (Sequential Collation of Range — последовательное сопоставление расстояний.— *Перев.*). Оборудование, изготовленное фирмой «Кюбик корпорейшн», используется Военно-картографической службой. Как сообщил Хенриксен, эта система состоит из приемо-передатчика на спутнике и четырех наземных станций. Каждая станция состоит из двух блоков с оборудованием, агрегата антенн и силовой установки. Каждый блок опознается по характеру оборудования, которое он содержит. В радиочастотном блоке находятся все передающие и приемные устройства и консоль управления антенной. Блок информации содержит оборудование для ручного управления и записи информации, а также консоль первичного контроля оборудования, измеряющего расстояния. Антенна, состоящая из четырех рупоров с диаграммой направленности в 13°, устанавливается на подставке, позволяющей изменять направление излуче-



Р и с. 2.32. Антенна системы Секор.

ния (рис. 2.32). Антенна, являющаяся центром станции, располагается обычно над опорной точкой, закрепленной на местности.

Операции четырех наземных станций заключаются в следующем. Одна из них является ведущей, это первая станция для наблюдения ИСЗ при его приближении. Другие станции запроектированы как ведомые (1, 2 и 3). Различие между ведущей и ведомой станциями заключается в том, что первая из них подает командный сигнал на импульсный приемо-передатчик спутника, откуда этот сигнал затем передается на все станции, которые записывают получаемую информацию. Ведомые станции могут запрашивать спутник, но эти запросы не записываются. Для запроса и для приема требуется 12,5 *мсек*. Общий комплекс одной операции требует 50 *мсек*, так что полное определение расстояния, отсчитываемого от ИСЗ до каждой станции, производится через 50 *мсек*. За 7-минутное прохождение получается в общем 8400 наблюдений на каждой из четырех станций, или в целом около 33 000 наблюдений.

Что касается применяемых частот, то частота передатчика 421 *Мгц* модулируется длинными волнами с четырьмя различными рабочими частотами. Они выбраны так, чтобы обеспечить длины волн 0,512; 8,19; 130,374 и 1042,995 *км*. Модулированный радиосигнал посылается к небольшому импульсному приемо-передатчику импульсами продолжительностью 12 *мсек* с промежутками в 48 *мсек*. На маяке модулирующие частоты отделяются от несущей, накладываются без изменения по фазе и по частоте на две новые частоты, одна из которых вдвое больше второй (224,5 и 449 *Мгц*), и транслируются на наземные станции.

Возвратившийся сигнал вновь отделяется от модулирующих частот, отдельные модулирующие частоты разделяются, и их фазы сравниваются с фазами излученных частот. Разность фаз пропорциональна полному расстоянию, пройденному сигналом, а половина разности фаз пропорциональна расстоянию до маяка.

Поскольку волны выходят в одной фазе, единственная неоднозначность, остающаяся после синтеза результатов, возникает из-за того, что расстояние может быть кратно числу 1,043 *км*. Но в любом случае из других источников расстояние всегда известно точнее, чем до 1 *км*, поэтому эта неопределенность не имеет практического значения. Две частоты колебаний, возвратившихся от спутника, используются для вывода поправок за атмосферную рефракцию. Сравнение двух расстояний, полученных по двум различным частотам, позволяет устранить влияние главных членов атмосферной рефракции.

Геометрия решения очень проста. Расстояния, одновременно измеренные каждой из четырех систем, определяют воображаемую поверхность сферы, на которой должен находиться спутник. Три такие поверхности определяют положение спутника, четыре поверхности дают в результате невязки. Наличие невязок является признаком инструментальных ошибок, если известны координаты станций, или ошибок в координатах при известных инструментальных ошибках.

Системы, измеряющие расстояния, не настолько чувствительны к стабильности частоты, как допплеровские системы, но они в большей степени зависят от скорости распространения волн в пустоте. Эта величина в настоящее время, как принято на 2-й Генеральной ассамблее МГГС в Хельсинки, равна 299 792,5 $\pm$ 0,4 *км/сек*.

Статистический анализ многих измерений системы Секор, проведенных на станциях с точно известными координатами (в одной геодезической системе), мог бы дать поправки к скорости света, приведенной выше, или к другим величинам, которые невозможно учесть во время работы, таким, как инструментальные задержки и фазовый сдвиг, постоянные атмосферного влияния и т. д.

Что касается точности, то пробные измерения показали, что при измерении расстояний достижима точность $\pm$ 30 *м*. Ожидается, что конечная точность будет $\pm$ 10 *м*.

Геодезическая система Секор с четырьмя станциями (Остин в Техасе, Лас-Крус в Нью-Мексико, Туин в Оклахоме и Боулдер в Колорадо) вступит в строй в ближайщем будущем.

Для дальнейшей информации о системе Секор читатель отсылается к статьям Калли [37] и Хенриксена [55, 56].

Другие типы дальномерных устройств, в которых предпочтительнее используется импульсная техника, а не непрерывное излучение, описана у Девиссона [41], Лииса [72] и Маррея [90].

2.3.4.4. Комбинированные методы наблюдений ИСЗ

Электронные методы слежения, описанные выше, можно также применять в сочетании друг с другом. Ниже коротко описаны наиболее существенные усовершенствования, сделанные в этом направлении.

Лабораторией реактивных двигателей Калифорнийского технологического института разработана система сравнения фаз Микролок. В этой системе, как описано в нескольких статьях Рихтера [99, 100], используется принцип интерферометра в комбинации с эффектом Допплера. Система дает точность по направлению около 200″.

Система Азуза сочетает принципы интерферометра и электронного способа измерения расстояний. Она работает на частоте 5000 *Мгц* и имеет точную базисную линию в 300 длин волн. Ее абсолютная точность при определении косинуса направления оценивается в $\pm$ 0,00003, а в расстоянии $\pm$ 10 *м*. В течение последних девяти лет эта система использовалась для точного определения траекторий ракет.

Новым достижением является система Мистрам (Missile Trajectory Measurement — измерение траекторий снарядов.— *Перев.*), созданная «Дженерал электрик компани». По описанию Мюллена и Вудса [89], она работает на частоте 10 000 *Мгц* и имеет точную и грубую базисные линии длиной соответственно 30 и 3 *км*. Главные параметры, определяемые системой,— это расстояние, скорость изменения расстояния, разность расстояний и скорость изменения разности расстояний. Эти величины используются для вычисления положения и скорости спутника. Предвычисленная точность системы по расстоянию $\pm$ 3 *м*, а в скорости $\pm$ 3 *см/сек*.

Предполагается также использовать систему Рендж энд Рендж Рейт (система измерения расстояния и скорости изменения расстояния.— *Перев.*) (см. [116]).

2.3.5. Фотографические наблюдения Луны

Точное положение Луны, как и положение спутника, определяют путем ее фотографирования на фоне звезд. Обычная камера, присоединенная к какому-либо телескопу, не может быть использована для этой цели, потому что Луна намного ярче и движется быстрее, чем окружающие звезды. На полученном снимке было бы видно либо передержанное изображение движущейся Луны на фоне звезд (при большой экспозиции и движении камеры со скоростью звезд), либо резкое изображение Луны без каких-либо звезд, за исключением самых ярких (при короткой экспозиции и гидировании камеры по Луне). В прошлом было сделано несколько попыток решить эту проблему. Вероятно, лучшим из предложенных приборов, нашедшим применение в мировом масштабе в течение Международного геофизического года, является камера, спроектированная Марковицем, директором Службы времени Морской обсерватории США *. В его *камере с двойным движением* Луна удерживается неподвижно относительно звезд в течение экспозиции 10 или 20 *сек*; в этот период Луна и звезды экспонируются одновременно. Эта камера, показанная на рис. 2.33, может быть установлена на визуальных или фотографических рефракторах с апертурой около 200 *мм* и фокусным расстоянием от 2000 до 6000 *мм*.

Принцип действия камеры заключается в том, что пока фотопластинка в неподвижной камере перемещается со скоростью звезд в направлении их движения, плотный фильтр толщиной 1,8 *мм*, равный по размеру изображению Луны, поворачивается на наклонном рычаге и удерживает изображение Луны неподвижным относительно звезд. В то же время фильтр уменьшает яркость ее света, чтобы обеспечить достаточно длинную экспозицию для получения изображения слабых звезд (примерно до 9^m) без передержки изображения Луны. Эпохой наблюдения является тот момент, когда фильтр параллелен фотопластинке, так как в это время Луна не смещается относительно звезд.

Рамка с фотопластинкой перемещается синхронным мотором и микрометром, которые видны в левой части рис. 2.33. Чтобы

* Следует назвать также пулковскую камеру А. А. Михайлова.— *Прим. ред.*

работать с надлежащей скоростью, которая зависит от склонения Луны, возможна регулировка скорости движения. Второй синхронный мотор и микрометр, видимые на верхней части камеры, приводят в движение наклонный рычаг, который поворачивает фильтр. Скорость наклона можно регулировать так, чтобы уравнять скорость движения Луны относительно звезд. Платформу, несущую наклонный рычаг, также можно поворачивать, чтобы ось наклона была перпендикулярна видимому пути Луны относительно звезд. Регистрация времени производится с помощью хронографа, на ленте которого делаются отпечатки контактом, установленным на рычаге. Между последующими экспозициями камера поворачивается на 180°, а пластинки измеряются в паре

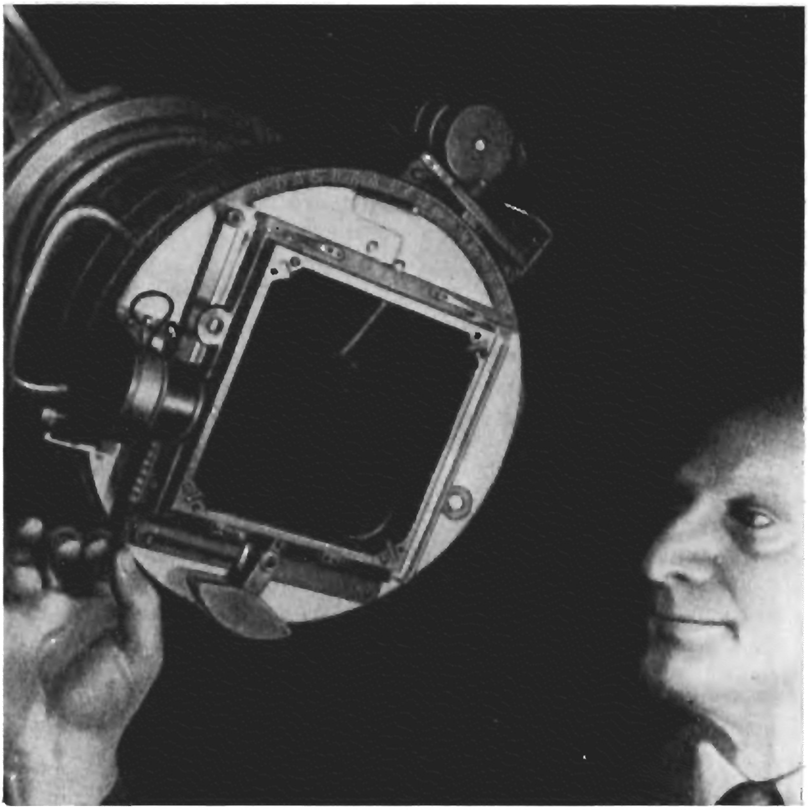
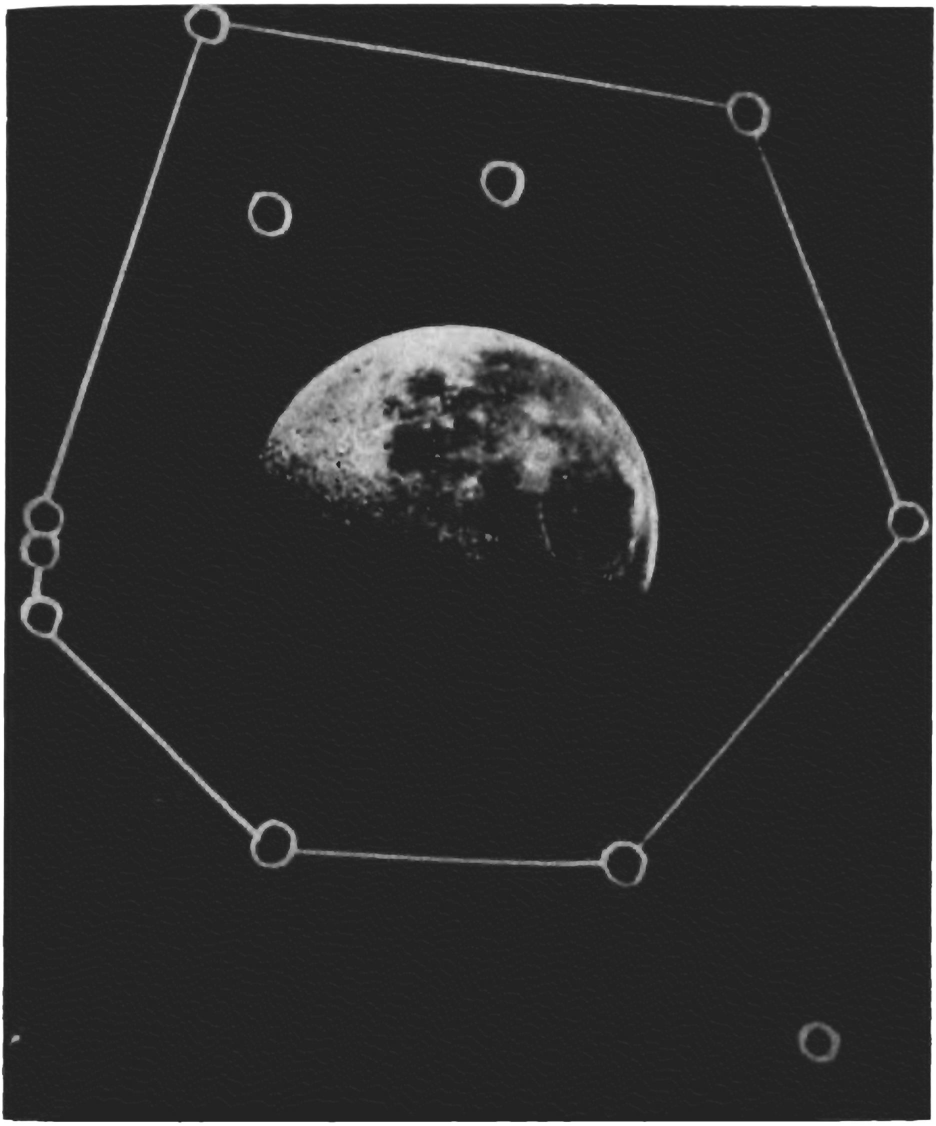


Рис. 2.33. Камера с двойным движением для определения положения Луны относительно звезд и ее изобретатель У. Марковиц, директор Службы времени Морской обсерватории США.



Р и с. 2.34. Фотография, полученная с помощью лунной камеры Марковица. Звезды расположены в кружках, вычерченных от руки. Звезды слишком слабы и не видны на фотографии; их положения измеряют на пластинке-оригинале в Морской обсерватории и по ним находят положение Луны. В лунной камере изображения Луны и звезды удерживаются неподвижными относительно друг друга в течение 20-секундной одновременной экспозиции.

на измерительной машине, непосредственно связанной с перфоратором. Обработка снимков поясняется в разд. 2.4.2.2. Вероятная ошибка в положении Луны, вычисленном по пластинкам, полученным в разные ночи в течение одной лунации *, равна примерно $\pm 0'',021$, если нет систематических ошибок. Систематические ошибки можно значительно уменьшить определенной стандартной методикой работы, поэтому Марковиц считает, что ошибку в положении можно довести до $\pm 0'',03$, что соответствует ± 55 *м* по геодезической линии. Если результаты получены из ряда лунаций, то вероятная ошибка для одной ночи увеличивается примерно на 50%.

На рис. 2.34 показана фотография, полученная лунной камерой Марковица. Звезды, использовавшиеся для вычислений, обведены кружками, проведенными от руки, и они так малы, что не видны на рисунке. Более темный диск вокруг Луны объясняется действием фильтра.

Кроме применения в геодезии, камера Марковица преимущественно предназначается для определения разностей эфемеридного и всемирного времени (см. следующий раздел), для определения изменений скорости вращения Земли и для сравнения вычисленных и наблюденных координат Луны, для получения поправок в постоянные лунной теории.

Первая камера с двойным движением была введена в действие в 1952 г. в Морской обсерватории. В течение Международного геофизического года было создано 20 таких камер. Подробности о камере приводятся в статьях Марковица, опубликованных в 1954 и 1960 гг. [73, 76].

2.3.6. Определение времени

Для слежения за спутниками требуются две системы времени. Геоцентрическое движение спутника и данные его эфемерид выражаются как функция эфемеридного времени (ET). На практике оно заменяется атомным временем (AT). Соотношение между ET и AT для некоторых часов выражается формулой

$$\mathrm{AT} - \mathrm{ET} = a + bt + ct^2,$$

где t — время. Член a зависит от начального отсчета часов, коэффициент b — от относительного хода по сравнению с атомным стандартом, он может быть сведен к нулю. Коэффициент c является космической постоянной, величина которой может быть порядка 0,001 *сек* за год. Атомное время можно непосредственно узнавать в Морской обсерватории, оно выводится на основе работы

* Период от новолуния до новолуния.— *Прим. ред.*

ее атомного (цезиевого) генератора и около восьми других генераторов, действующих на различных международных службах времени. Атомное время А1 можно сравнивать с ЕТ по разностям координат Луны из эфемерид, в которых ЕТ является аргументом, и координат Луны в некоторые моменты времени А1, определенные с помощью пассажного инструмента, с помощью покрытий или с помощью лунной камеры Марковица, описанной в разд. 2.3.5.

Наблюденные координаты спутника, видимые из точки на поверхности Земли, зависят также от геоцентрических координат наблюдателя, т. е. от положения Земли при вращении ее вокруг оси. Чтобы получить эти координаты, нужно знать всемирное время в форме UT1, где

$$\mathrm{UT1} = \mathrm{UT0} + \Delta\lambda.$$

Здесь UT0 — наблюденное всемирное время, а $\Delta\lambda$ — предварительная разность между средней долготой обсерватории и ее мгновенным значением. Эта разность связана с относительным движением полюса. Она основана на экстраполированных предварительных координатах мгновенного полюса Земли, вычисляемых Международной службой широт на основе широтных наблюдений на 17 обсерваториях мира. Всемирное время UT1 известно с вероятной ошибкой $\pm 0{,}003$ *сек*. Окончательные данные о движении полюса публикуются с запозданием почти на год. Гринвичская обсерватория и Морская обсерватория США еженедельно публикуют идентичные поправки относительно А1 и UT1 для подаваемых ими сигналов времени.

Для полноты упомянем третий вид всемирного времени UT2. Это время получают из UT, исправляя его за сезонные вариации скорости вращения Земли. Оно определяется средним угловым движением Земли (UT1 определяется истинным угловым движением Земли), свободным от периодических колебаний, но еще подверженным влиянию непериодических и вековых вариаций. На практике время UT2 получают из UT1, добавляя к нему предвычисленные экстраполированные величины сезонных изменений. В итоге для времени UT2 используются окончательные поправки за движение полюса и за сезонные вариации, но оно еще дает заметные уклонения от систем равномерного времени ЕТ или АТ. Долгосрочные расхождения UT2 можно определять посредством лунной камеры, подобной той, которая описана выше, с той разницей, что определение времени наблюдения Луны охотнее производят в системе UT2, чем в системе А1. Краткосрочные расхождения времени UT2 можно изучать, сравнивая ход времени UT2 с частотой атомного стандарта. Окончательные разности $\Delta T = \mathrm{ET} - \mathrm{UT2}$ с точностью до 0,01 *сек* публикуются в эфемеридах примерно через пять лет. Предвычисленные величины ΔT, основанные на неполных данных наблюдений, выдаются заранее до 0,1 *сек*. Экстраполированные величины ΔT даются до целых секунд.

Как было показано при описании оптической и электронной систем слежения, в настоящее время требуется точность определения времени около 1 *мсек*. Ожидается, что дальнейшее усовершенствование систем наблюдений не потребует точности выше 0,5 *мсек* для оптических методов и 0,1 *мсек* для электронных методов. Морская обсерватория США в сотрудничестве с Морской научно-исследовательской лабораторией проводит исследования в этой области, чтобы удовлетворить сегодняшние и завтрашние требования. Особенно перспективным представляется использование очень низких частот и применение для этой цели системы Лоран-С.

Сигналы времени, передаваемые на высокой и на очень низкой частотах, могут быть использованы для синхронизации часов с ошибкой около 0,001 *сек* на расстоянии до 8000 *км*. Эта ошибка включает неточность предвычисления времени распространения радиоволн и вариации этого времени ото дня ко дню. В настоящее время существует координированный план передачи радиосигналов точного времени между Аргентиной, Австралией, Канадой, Японией, Южной Африкой, Швейцарией, Великобританией и США. В результате этой координации станции наблюдения, расположенные в любой части мира, могут быть синхронизированы с точностью $\pm$ 0,001 *сек* путем использования координированных передач без введения поправок сигналов времени.

В прошлом сигналы времени транслировались главным образом на высоких частотах (станции MSF, Англия; WWV, США; WWVH, Гавайи). Вероятные ошибки сигналов этих станций не превышают 0,001 *сек*. Очень низкие частоты вошли в употребление совсем недавно. Их преимущества заключаются в высокой фазовой стабильности, отсутствии затухания и большой площади распространения.

Передача сигналов точного времени и эталонных частот осуществляется на частоте 18 *кгц* радиостанцией NBA Военно-морского флота США, расположенной в зоне Панамского канала. Время и частота контролируются из Морской обсерватории в Вашингтоне, округ Колумбия. Согласно данным Марковица, эксперименты с NBA показали, что фаза очень низких частот уходит в 24-часовом цикле примерно на 2 *мксек*. Время распространения можно вычислить для расстояний до 9000 *км* с погрешностью около $\pm$ 0,5 *мсек*, используя эффективную скорость 292 000 *км/сек*.

Радиосигналы времени также транслируются дважды в сутки радиостанцией GBR в Регби (Англия) на частоте 16 *кгц*. Вероятная ошибка в приеме сигналов станции GBR, определенная визуально по осциллоскопу на Морской обсерватории, равна 0,4 *мсек*. Вероятная ошибка для сигналов NBA, определенная визуально в Вашингтоне, равна 0,2 *мсек*, а при использовании фотографической методики, разработанной в Морской научно-исследовательской лаборатории, 0,1 *мсек*. С учетом всех ошибок часы на приемной станции, расположенной на расстоянии в несколько тысяч километров от передатчика очень низкой частоты, можно синхронизовать с ошибкой, меньшей 1 *мсек*. Важное преимущество очень низких частот заключается в том, что путем применения фазового компаратора частоту можно легко калибровать с точностью до 10^{-10}, что соответствует 10 *мксек* в сутки. Используя импульсные и фазовые характеристики очень низких частот, можно сохранить синхронизацию станций с высокой точностью, даже если сигналы контролируются не каждый день. Стабильность частоты станции NBA ото дня ко дню равна примерно 10^{-11}.

Другой метод синхронизации времени, разрабатываемый сейчас, заключается в использовании низкой частоты. Такие сигналы подаются в настоящее время Восточной береговой системой Лоран-С Береговой охраны США. В этой навигационной системе импульсы подаются 20 раз в секунду и синхронизуются с главными часами Морской обсерватории с точностью до 10 *мксек*. Можно получить точность 1 *мксек*, используя непосредственно доступные поправки при расстояниях до 300 *км*. Расширение навигационной системы Лоран-С может обеспечить синхронизацию с точностью до 1 *мксек* во всем мире.

Более точную информацию об определении времени можно найти в перечисленных статьях Марковица, которые были использованы в этом разделе, у Клеменса [31—33], у Райса [97] и в Explanatory Supplement, chap. 15 [92].

БИБЛИОГРАФИЯ К РАЗД. 2.3

1. Астапович И. С., Визуальные наблюдения искусственных спутников Земли, Гос. изд. техн. теор. лит., М., 1957.
2. Воскресенский Л. Л., Плотников В. С., Соболев Е. Ф., Некоторые вопросы привязки момента фотографирования по времени при определении координат искусственных спутников Земли по методу опорных звезд, Изв. вузов МВО, Геодезия и аэрофотосъемка, **1**, 81—90, 1963.
3. Гиндин Е. З., Лейкин Г. А., Лозинский А. М., Краткий отчет Астрономического совета АН СССР о визуальных и фотографических наблюдениях ИСЗ за 1957—1959 гг., Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **16**, 1960.
4. Гурштейн А. А., О наблюдениях искусственных спутников Земли, Труды МИИГАиК, **40**, 103—113, 1960.

5. Жонголович И. Д., Амелин В. М., Сабанина Т. Б., Об определении эфемериды искусственного спутника Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 5, 1—45, 1959.
6. Клименко И. Е., Фоменко Б. Д., Некоторые вопросы методики наблюдения ИСЗ, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **16**, 8—10, 1959.
7. Крылов А. Г., Опыт фотографических наблюдений ИСЗ на камере НАФА-3с/25, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **29**, 1962.
8. Крылов А. Г., Юревич В. А., Синхронные фотографические наблюдения искусственных спутников Земли в экспедиционных условиях, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ,. **39**, 12—15, 1962.
9. Лийгант М., Кахуск Р., Следящая камера для наблюдения искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **29**, 1962.
10. Лозинский А. М., О возможностях фотографических наблюдений ИСЗ, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **30**, 1962.
11. Лозинский А. М., Беленко В. М., Опыт фотографирования вспышки импульсной лампы на фоне звездного неба, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **39**, 1964.
12. Никитин П., Искусственные спутники Земли, Оборонгиз, М., 1958.
13. Петров В., Искусственный спутник Земли, Оборонгиз, М., 1958.
14. Прилепин М. Г., Геодезические связи на большие расстояния (обзор методов), Отдел НТИ ВНИИ экономики минер. сырья и геологоразв. работ, Изд-во Госуд. геол. комит. СССР, М., 1965.
15. Результаты наблюдений советских искусственных спутников Земли, 1—14, 1958; 18—46, 1959—1961; 49—62, 1962.
16. Результаты наблюдений американских искусственных спутников Земли, 1—15, 1961—1962.
17. Результаты фотографических наблюдений ИСЗ, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ., **1—2**, 1958; **4**, 1959; **6—7**, 1959; **9—10**, 1959—1960; 8, **10**, **11**, **14—17**, 1960; **25**, **26**, **28**, **29**, **30**, 1962; **32**, **33**, **34**, 1963.
18. Смирнов Г. Д., Навигационные спутники, Военгиз, М., 1963.
19. Фесенков В. Г., О наблюдении искусственных спутников при вхождении в земную тень, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **39**, 1962.
20. Фираго Б. А., Визуально-фотографический способ наблюдения ИСЗ, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **10**, 1959.
21. Щеголев Д. Е., Масевич А. Г., Афанасьев В. Г., Синхронные наблюдения искусственного спутника Земли «Эхо-1» для геодезических целей, Докл. АН СССР, **7**, 74—77, 1964.
22. Шкловский И. С., Щеглов П. В., Оптические наблюдения искусственных спутников Земли, Успехи физ. наук, **64**, 3, 1958.
23. Шпицберг И. П., Таблицы для определения условий видимости космических объектов, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **9**(19), 1—66, 1960.
24. Штернфельд А., Искусственные спутники, Гостехиздат, 1-е изд., М., 1956; 2-е изд., М., 1958.
25. Астрономический совет АН СССР, Результаты наблюдений советских искусственных спутников, № 1—42, 1958—1961.
26. Berbert J. H., Effect of Tracking Accuracy Requirements on Design of Minitrack Satellite Tracking System, IRE Trans. on Instrumentation, 1—9, 2, 1960.
27. Berbert J. H., Oosterhout J. D., Engels P. D., Habib E. J., Minitrack Calibration System, Photo. Sci. Eng., **7**, 2, 1963.
28. Bowen P. J., Newton A. C., The Development of a Photoelectric Satellite Tracker, Space Research II, 1961.

29. B u r t E. G. C., Satellite Tracking: Its Methods and Purpose, Endeavour, **17**, 216—222, 1958; Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Report, GW25.
30. C i c h o w i c z L., Quelques aspects du service d'observation des satellites artificiel en Pologne, Lecture at COSPAR-AGU Symposium: The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Washington, D.C., April 26—28, 1962.
31. C l e m e n c e G. M., Standards of Time and Frequency, Science, **123**, 567—573, 1956.
32. C l e m e n c e G. M., Astronomical Time, Rev. Modern Phys., **29**, 1, 1957.
33. C l e m e n c e G. M., The Practical Use of Ephemeris Time, Sky and Telescope, **19**, 148—149, 1960.
34. C o h e n C. J., Geodetic Results from the Transit Satellite, Symposium: Geodesy in the Space Age, The Ohio State University, Columbus, Ohio, Feb. 6—8, 1961, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., **15**, 1961.
35. C o h e n C. J., K e m p e r W. A., Errors of Prediction of a Satellite Orbit Due to Noise in Doppler Observations, U.S. Nav. Weap. Lab. Rep. 1723, 1961.
36. C o r n f o r d E. C., Comparison of Orbital Theory with Observations Made in the United Kingdom on the Russian Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 151—174, 1960.
37. C u l l e y F. L., The SECOR System, Symposium: Geodesy in the Space Age, The Ohio State University, Columbus, Ohio, Feb. 6—8, 1961, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., **15**, 1961.
38. D a l l'O l m o U., Obervations of Soviet Artificial Satellites, Space Research II, 1961.
39. D a v i s R. J., Timing Satellite Observations, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 14, 1958.
40. D a v i s R. J., S t r o m S. E., S t r o m K. E., A Method of Analysis for Lens and Mirror Systems, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 56, 1961.
41. D a v i s s o n R. J., Precision of Compensated Tracking System, Hermes Electronic Co. Report, № HEI M-810, Air Force Cambridge Res. Lab., Tech. Report, 59—356, 1959.
42. D e B e y L. G., Tracking in Space by DOPLOC, Inst. Radio Eng. Trans. Milit. Electronics, MIL-4, 332—335, 1960.
43. E a s t o n R. L., The Minitrack Mark II Radio Tracking System, Ann. Intern. Geophys. Year, **6**, 384—410, 1958.
44. F o r d R. R., S c h m a d e b e c k L. F., Initial Investigation of Monopole Antenna Systems for Use on Spherical Metal Satellites, NASA Tech. Note D-1077, 1962.
45. G u i e r W. H., The Tracking of Satellites by Doppler Methods, Space Research I, 1960.
46. G u i e r W. H., W e i f f e n b a c h G. C., Theoretical Analysis of Doppler Radio Signals from Earth Satellites, Johns Hopkins University Applied Physics Lab., Bumblebee Ser. Rep. 276, 1958.
47. G u i e r W. H., W e i f f e n b a c h G. C., A Satellite Doppler Navigation System, Inst. Radio Eng. Proc., **48**, 507—516, 1960.
48. H a b i b E. J., M c K e n d r e e B. W., Jr., H a r r i s D. W., Instruction Manual for Minitrack Optical Tracking System, NASA Washington, D.C., 1960.
49. H a m p t o n D. E., The Analysis of Doppler from Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 486—501, 1961.
50. H a r r i s D. W., B e r b e r t J. H., H a b i b E. J., M c K e n d r e e B. W., MOTS, The Minitrack Optical Tracking System, Photo. Sci. Eng., **7**, 2, 1963.

51. H e n i z e K. G., The Baker-Nunn Satellite Tracking Camera, Sky and Telescope, **16**, 3, 1957.
52. H e n i z e K. G., The Network of Precision Photographic Satellite Tracking Stations, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., **11**, 1958.
53. H e n i z e K. G., Status of the Photographic Satellite Tracking System, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Special Rep., 14, 1958.
54. H e n i z e K. G., Tracking Artificial Satellites and Space Vehicles, Advances in Space Science, F.I. Ordway ed., vol. 2, Academic Press, 1960, pp. 117—142.
55. H e n r i k s e n S. W., SECOR — An Instrument for Measuring Very Long Distances, Journ. Geophys. Res., **65**, 8, 1960.
56. H e n r i k s e n S. W., SECOR Distance Measurement, 9th Pan-American Consultation on Cartography, Pan-American Inst. of Geography and History, 1961.
57. H e w i t t J., A Camera for Recording Satellite Positions with High Accuracy, Space Research I, 1960.
58. H y n e k J. A., On the Accuracy of Satellite Tracking, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., **7**, 1957.
59. H y n e k J. A., Satellites, Amer. Geophys. Union Monograph, 4, 1959.
60. de J a g e r C., Satellite Photography by Means of Small Schmidt Cameras, Space Research II, 1961.
61. J ä r n e f e l t G., On the Satellite Observation Work Done in Finland, Amer. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A, III, 1961.
62. K a h n W. D., Calibration of Minitrack Mark II, Astron. Journ., **62**, 396—399, 1957.
63. K e m p e r W. A., Satellite Trajectory and Orbit Calculations from Minitrack Triangulation, Naval Proving Ground Report, No. 1633, 1958.
64. K e r s h n e r R. B., The Transit Program, Astronautics, **5**, 6, 1960.
65. K e r r O. E., K e a r n s W. J., M c I l v e n n a J. F., R e y n o l d s G. E., S h o d i n L. F., Satellite Tracking, Air Force Cambridge Res. Lab., Electromagnetic Radiation Lab., 1102, Bedford, Mass., 1961.
66. K i r m s e r P. G., W a k a b a y a s h i I., Triangulation — A Precise Method for Satellite Tracking, Journ. Franklin Inst., November, 1959.
67. K l a s s P. J., Geodetic Beacon Planned for Transit 1B, Aviation Week, April 25, 1960.
68. К о т е л ь н и к о в В. А., Д у б р о в и н В. М., М о р о з о в В. А., Р ж и г а О. Н., Ш а х о в с к о й А. М., Using the Doppler Effect to Determine the Orbital Parameters of Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 880—891, 1961.
69. de L a n g e O. E., Project Echo-Satellite-Tracking Radar, NASA Tech. Note, D-1135, 1961.
70. L a s s o v s z k y K., The Catalogue of Precise Satellite Positions, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 41, 1960.
71. L a s s o v s z k y K., On the accuracy of Measurements Made upon Films Photographed by Baker-Nunn Satellite Tracking Cameras, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 74, 1961.
72. L e e s A. B., The Geodetic Use of Artificial Sarellites, Systems Lab. Corp., Air Force Cambridge Res. Lab., Tech. Rep. 59-276, 2 vols., 1959.
73. M a r k o w i t z W., Photographic Determination of the Moon's Position, and Applications to the Measure of Time, Rotation of the Earth, and Geodesy, Astron. Journ., **59**, 69—73, 1954.
74. M a r k o w i t z W., The Dual Rate Satellite Camera, Journ. Geophys. Res., **64**, 8, 1959.
75. M a r k o w i t z W., Astronomical and Atomic Times, U.S. Naval Obs. Circ., March 9, 1959.

76. M a r k o w i t z W., The Photographic Zenith Tube and the Dual Rate Moon-Position Camera, Stars and Stellar Systems, **1**, G.P. Kuiper and B.M. Middlehurst, eds., University of Chicago Press, 1960, pp. 88—114.
77. M a r k o w i t z W., Accurate Timing of Artificial Satellite Observations on a World Wide Scale, Symposium: Geodesy in the Space Age, Feb. 6—8, 1961, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., **15**, 1961.
78. M a r k o w i t z W., Timing of Artificial Satellite Observations for Geodetic Purposes, COSPAR AGU Symposium, On the Use of Artificial Satellites for Geodesy, Washington, D.C., April 26—28, 1962.
79. М а с е в и ч А. Г., Results of Optical Observations of the Soviet Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 833—847, 1961.
80. М а с е в и ч А. Г., Л о з и н с к и й А. М., Photographic Observations of Artificial Earth Satellites, Vistas in Astronomy, A. Beer, ed. **4**, Pergamon Press, 1961.
81. М а с е в и ч А. Г., Tracking of Artificial Satellites in the USSR, Space Research II, 1961.
82. M a s s e y H. S. W., Artificial Satellites, Vistas in Astronomy, A. Beer, ed., **4**, Pergamon Press, 1961.
83. M e c h a u D. V., List of Coordinates of Stations Engaged in the Observation of Artificial Earth Satellites, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., **69**, 1961.
84. M e n g e l J. T., Tracking the Earth Satellite and Data Transmission by Radio, Inst. Radio Eng. Proc., **44**, 755—760, 1956.
85. M e n g e l J. T., Minitrack Details: Satellite Tracking Based on Phase Comparison, Aviation Age, March, 1957.
86. M e n g e l J. T., Minitrack System Design Criteria, Electrical Eng., **76**, 662—672, 1957.
87. M e n g e l J. T., H e r g e t P., Tracking Satellites by Radio, Scientific American, January, 1958.
88. M e r r i l l H. J., Satellite Tracking by Electronic Optical Instrumentation, Scientific Uses of Earth Satellites, J.A. Van Allen, ed., University of Michigan Press, 1956. (Русский перевод: Научное использование искусств. спутников Земли, под ред. Дж. ван Аллена, М., ИЛ, 1960.)
89. M u l l e n E. B., W o o d s C. R., Precision Radio Tracking of Space Vehicles, Space Research II, 1961.
90. M u r r a y B. C., The Artificial Earth Satellite — A New Geodetic Tool, Amer. Rocket Soc. Journ., **31**, 7, 1961.
91. NASA, Minitrack System Training Manual, Washington, D.C., 1958.
92. Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, H.M. Stationery Office, London, 1961.
93. N e w t o n R. R., Geodetic Measurements by Analysis of the Doppler Frequency Received from a Satellite, Space Research I, 1960.
94. P a e t z o l d H. K., Research on the Practice and Improvement of Methods of Observing Artificial Earth Satellite, Tech. Rep. No. 1, Contract AF 61 (052) 314, 1961, Inst. Geophysics and Meteorology, Univ. Cologne, Germany.
95. P e t e r s o n C. M., Communications Center of the Optical Satellite Tracking Program, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 18, 1958.
96. P i c k e r i n g W. H., The United States Satellite Tracking Program, Ann. Intern. Geophys. Year, **6**, 345—359, 1958.
97. R i c e D. A. , Ephemeris Time and Universal Time, Surveying and Mapping, **19**, 3, 1959.

98. Richards D. A., Optical Tracking of Satellites Using a Rotating Camera, Space Research II, 1961.
99. Richter H. L., Jr., The Microlock Radio-Tracking System, Ann. Intern. Geophys. Year, **6**, 410—417, 1958.
100. Richter H. L., Sampson W. F., Stevens R., Microlock: A Minimum Weight Radio Instrumentation System for a Satellite, Vistas in Astronautics, M. Alperin and M. Sterer, eds., Pergamon Press, New York, 1958.
101. Rosenberg P., Earth Satellite Photogrammetry, Photogrammetric Eng., **24**, 353—360, 1958.
102. Rosino L., Mammano A., Photographic Observations of Artificial Satellites at the Astrophysical Observatory of Asiago, Space Research II, 1961.
103. Schmid H., An Integrated Ballistic Camera System, Ballistic Res. Lab. Aberdeen Proving Ground, Md., 1959.
104. Шкловский И. С., Optical Observation Methods for Artificial Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 848—854, 1961.
105. Catalogue of Satellite Observations C-1 through C-30, Smithsonian Inst. Astrophys. Obs., Res. Space. Sci. Special Rep., 24, 26, 28, 28A, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 42, 43, 44, 47, 48, 49, 54, 55, 57, 58, 66, 67, 68, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 1959—1962.
106. Cataloque of Precisely Reduced Observations P-1 through P-7, Smithsonian Inst. Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 82, 85, 91, 95, 102, 104, 106, 1960—1962.
107. Satellite Orbital Data, E-1, Smithsonian Inst. Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 92, 1962.
108. Taylor E. A., Optical Tracking System for Space Geodesy, Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962.
109. Thomas P. D., Use of Near Earth Satellite Orbits for Geodetic Information, Tech. Bull., 11, U.S. Coast and Geod. Servey, 1960.
110. Thomas P. D., Use of Artificial Satellites for Navigation and Oceanographic Surveys, Tech. Bull., 12, U.S. Coast and Geod. Servey, 1960.
111. Tonsey R., Visibility of Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **6**, 359-364, 1958.
112. Tsubokawa I., A Precise Satellite Tracking Camera with a Photoelectric Timing Device, Space Research II, 1961.
113. U.S. Naval Res. Lab., Minitrack System Training Manual, 1958.
114. Veis G., The Position of the Baker-Nunn Stations, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 59, 1961.
115. Veis G., Whipple F. L., Experience in Precision Optical Tracking of Satellites for Geodesy, Space Research II, 1961.
116. Vonbun F. O., Analysis of the Range and Range Rate Tracking System, NASA Tech. Note D-1178, February, 1962.
117. Weiffenbach G. C., Measurement of the Doppler Shift of Radio Transmissions from a Satellite, Inst. Radio Eng. Proc., 48, 750—754, 1960.
118. Weston E., Preliminary Time Reduction for the Determination of Precise Satellite Positions, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Report, 41, 1960.
119. Whipple F. L., Hynek J. A., Volunteer Visual Observation Program-Project Moonwatch, Ann. Intern. Geophys. Year, **6**, 364—383, 1958.
120. Wilmore A. P., A New Method of Tracking Artificial Satellites, Nature, October 11, 1958.
121. Wilson R. H., Jr., Optical and Electronic Tracking, Amer. Geophys. Union Monograph, 4, 1959.

122. Zirker J., Whipple F., Davis R., Time Available for the Optical Observations of an Earth Satellite, Scientific Uses of Earth Satellites, J.A. Van Allen, ed., Univ. Michigan Press, 1956. (Русский перевод: Научное использование искусств. спутников Земли, под ред. Дж. ван Аллена, М., ИЛ, 1960.)

В период подготовки книги к изданию вышли в свет труды различных симпозиумов, на которые сделаны ссылки. Это следующие книги:

123. The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Veis G., ed., Interscience Publishers, Proceedings of the first international symposium on the use of artificial satellites in geodesy, Washington, D.C., April 26—28, 1962, sponsored by the Committee on Space Research — COSPAR, and the International Union of Geodesy and Geophysics — IUGG, 1963.
124. Institute of the Aerospace Sciences, Proceedings of the IAS Symposium on Tracking and Command of Aerospace Vehicles, San Francisco, California, February 19—21, 1962, Institute of the Aerospace Sciences, New York, 1963.

2.4. ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

В этом разделе описывается обработка результатов, полученных непосредственно из наблюдений. Основное внимание уделено обработке фотографических наблюдений, являющихся в настоящее время самыми точными и потому имеющими наибольшее значение для геодезии.

Сама обработка обычно состоит в исправлении наблюденных топоцентрических координат спутника относительно данной станции за рефракцию (оптическую или электронную), за аберрацию и за другие возможные источники малых ошибок. Обычно при использовании для геодезических целей топоцентрические координаты, полученные после этих операций, сравнивают с предвычисленными топоцентрическими координатами, и на этом обработка заканчивается. Для эфемеридных целей, однако, необходимо знать геоцентрические координаты спутника в некоторой средней небесной системе координат в определенную эпоху, например 1950,0. Поэтому нужно вводить другие поправки, такие, как геоцентрический параллакс, нутация, прецессия и т. д.

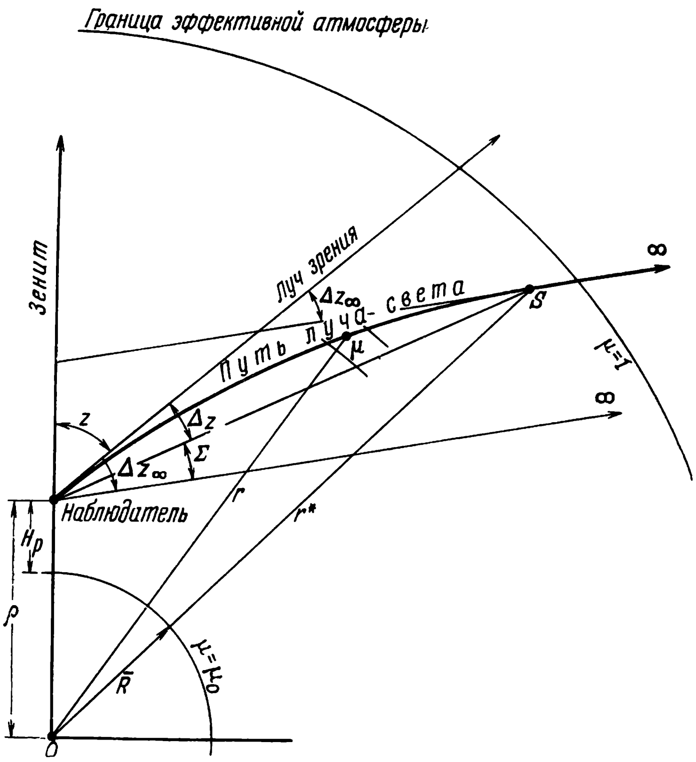
В нашем описании мы ограничимся этапами, необходимыми для получения видимых топоцентрических координат, за исключением фотографических наблюдений. Перевод координат из видимой топоцентрической системы в некоторую среднюю геоцентрическую систему для данной эпохи может быть сделан с помощью методов сферической астрономии (см. Explanatory Supplement, chap. 2 and 5).

2.4.1. Обработка визуальных наблюдений

При визуальных наблюдениях обычно определяют высоту и азимут спутника в момент наблюдения. Перевод в видимые топоцентрические координаты состоит в введении поправок за оптическую рефракцию и за аберрацию, вызываемую движением спутника по отношению к наблюдателю. Для вычисления этих поправок необходимо знать приближенную орбиту ИСЗ и положение наблюдения.

2.4.1.1. Влияние атмосферной рефракции

Как известно из сферической астрономии, влияние атмосферной рефракции на наблюденную высоту заключается в том, что объект кажется выше, чем он есть на самом деле (рис. 2.35). Влия-



Р и с. 2.35. Атмосферная рефракция.

ние всей атмосферы, принимаемой за сферическую, на высоту выражается следующим интегралом [44, p. 64]:

$$\Delta z_\infty = \bar{R} n_0 \sin z \int_1^{n_0} \frac{dn}{n\,(r^2 n^2 - \bar{R}^2 n_0^2 \sin^2 z)^{1/2}}, \qquad (2.100)$$

где $\bar{R}$ — средний радиус Земли; n_0 — коэффициент преломления в слое, ближайшем к земле; n — то же для слоя, расположенного на расстоянии r от центра Земли; z — зенитное расстояние. Поправка Δz_∞ называется *астрономической рефракцией*, так как ее применяют для астрономических наблюдений объектов, находящихся за пределами атмосферы. Поскольку наши знания о физическом состоянии атмосферы недостаточны для определения соотношения между двумя переменными n и r, то этот интеграл вычисляется приближенными методами, обычно разложением в ряд [21, 27, 39. 40, 45, 47 и др.]. Сходимость рядов определяет верхний предел z, для которого формула еще пригодна. Главные члены этих рядов равны

$$\Delta z_\infty = A_1 \operatorname{tg} z\,(1 - A_2 \sec^2 z + A_3 \sec^4 z - A_4 \sec^6 z + \ldots)$$

или

$$\Delta z_\infty = B_1 \operatorname{tg} z - B_2 \operatorname{tg}^3 z + B_3 \operatorname{tg}^5 z - B_4 \operatorname{tg}^7 z + \ldots,$$

где A_i, B_i — коэффициенты, зависящие от физического состояния атмосферы. Если ограничиться вариантом формул с двумя первыми членами, то это дает удовлетворительные результаты для средних зенитных расстояний, скажем до 75°. Для нормальных атмосферных условий (давление 760 *мм рт. ст.* и температура 10° С) средняя астрономическая рефракция равна [44, p. 68]:

$$\Delta z_\infty^m = 58'',294 \operatorname{tg} z - 0'',0668 \operatorname{tg}^3 z. \qquad (2.101)$$

Обычно можно использовать таблицы, которые дают Δz как функцию z [32, table V]. Если атмосферные условия отличаются от нормальных, то истинную рефракцию можно вычислить по формуле

$$\Delta z_\infty = \Delta z_\infty^m C_B C_T, \qquad (2.102)$$

где коэффициенты C_B и C_T зависят от барометрического давления и температуры; они также табулируются [32, tables VI, VII].

Если объект наблюдений находится в пределах атмосферы (S на рис. 2.35), то рефракция вычисляется по формуле

$$\Delta z = \Delta z_\infty - \Sigma. \qquad (2.103)$$

Для вычисления *дифференциальной рефракции* Σ опубликовано несколько различных решений [20, 22, 31, 33, 41, 42, 45 и др.]. Наиболее современная формула дается у Шмида [42]:

$$\Sigma = \frac{\rho s \Delta z_\infty}{r^* \left[1 - \dfrac{r^* \operatorname{tg} z}{12\,500\,000}\right] - H_p}, \qquad (2.104)$$

где $\rho = \bar{R} + H_p$ — расстояние наблюдателя от центра Земли, $s = RT_0/\bar{R}$, R — абсолютная газовая постоянная (29,2745) и $T_0 = 273{,}16°$ K. Если мы возьмем $\bar{R}$ = 6 370 000 *м*, то s = 0,001255.

Для умеренных зенитных расстояний ($z < 75°$) формулу (2.104) можно упростить следующим образом:

$$\Sigma'' = C_B C_T \frac{2{,}2476}{r^* - H_p} \operatorname{tg} z \operatorname{cosec} 1'', \qquad (2.105)$$

где C_B и C_T — коэффициенты уравнения (2.102), причем $C_B = 1$ при давлении 760 *мм рт. ст.*, а $C_T = 1$ при температуре 10° С.

Табл. 2.3 дает значения Δz^m, вычисленные по (2.103) и по (2.104), для зенитных расстояний от 0 до 75° с интервалом в 15° и при r^*, равных 100, 300, 1000 *км*, ρ и 10ρ при нормальном состоянии атмосферы, и значения Δz^m_∞, вычисленные по формуле (2.101).

В табл. 2.4 даются для сравнения коэффициенты C_T и C_B.

Таблица 2.3

z	Δz^m					Δz^m_∞
	100 *км*	300 *км*	1000 *км*	ρ	10ρ	
0°	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00
15	14,38	15,21	15,49	15,60	15,62	15,62
30	30,97	32,75	33,38	33,60	33,65	32,65
45	53,55	56,64	57,72	58,13	58,21	58,22
60	92,42	97,77	99,66	100,42	100,62	100,62
75	195,12	208,88	211,26	213,37	213,99	214,09

Таблица 2.4

Поправочные коффициенты для учета давления и температуры воздуха при вычислении рефракции

Давление B, *мм рт. ст.*	C_B	Температура T, °С	C_T
560	0,737	—30	1,164
580	0,763	—20	1,118
600	0,790	—10	1,076
620	0,816	0	1,036
640	0,842	+10	1,000
660	0,869	+20	0,996
680	0,895	+30	0,934
700	0,921	+40	0,905
720	0,947	+50	0,878
740	0,974		
760	1,000		
780	1,026		
800	1,052		

Из таблицы можно сделать вывод, что для визуальных наблюдений, где максимальная ожидаемая точность по положению составляет около 20″, следует учитывать астрономическую рефракцию, за исключением, вероятно, объектов, у которых $r^* < 100$ *км* и $z > 60°$, для которых должна вычисляться поправка Σ по формуле (2.104).

Поправки Δz_∞ или Δz всегда положительны, т. е. они увеличивают наблюденное зенитное расстояние или уменьшают высоту.

Если из наблюдений получают прямое восхождение и склонение, то поправки к ним за атмосферную рефракцию имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_r &= -\Delta z \sec\delta^* \sin C, \\ \Delta\delta_r &= -\Delta z \cos C, \end{aligned} \tag{2.106}$$

где δ^* — наблюденное склонение, а C — параллактический угол (угол при объекте наблюдений в сферическом треугольнике полюс — объект — зенит). Поправки должны прибавляться к наблюденным величинам. Если объект находится в меридиане ($C = 0$), то прямое восхождение не изменяется и поправка за рефракцию вводится целиком в склонение. Параллактический угол можно вычислить по формуле

$$\cos C = \frac{\sin\varphi' - \sin\delta^* \cos z}{\cos\delta^* \sin z}.$$

2.4.1.2. Влияние аберрации

Поскольку спутник движется довольно быстро относительно наблюдателя, то луч света отклоняется вследствие аберрации. Основное уравнение смещения [44, р. 179] имеет вид

$$\Delta'' = \frac{(s^*)'}{c} \sin\theta \operatorname{cosec} 1'', \tag{2.107}$$

где $(s^*)'$ — относительная скорость объекта, c — скорость света, а θ — направление на объект, измеренное от направления относительной скорости. Применяя это уравнение к компонентам скорости, определяемым уравнениями (2.35), мы получаем смещения в трех взаимно перпендикулярных направлениях X, Y и Z:

$$\begin{aligned} \Delta''_X &= \frac{X' - \xi'}{c} \sin(Xr) \operatorname{cosec} 1'', \\ \Delta''_Y &= \frac{Y' - \eta'}{c} \sin(Yr) \operatorname{cosec} 1'', \\ \Delta''_Z &= \frac{Z'}{c} \sin(Zr) \operatorname{cosec} 1'', \end{aligned}$$

где направления (Xr), (Yr), (Zr) определяются по формулам

$$\cos(Xr) = \cos\delta^* \cos\alpha^*,$$
$$\cos(Yr) = \cos\delta^* \sin\alpha^*,$$
$$\cos(Zr) = \sin\delta^*.$$

Переход от смещений Δ_X, Δ_Y и Δ_Z к поправкам к прямому восхождению и склонению можно осуществить, дифференцируя уравнения (2.29) и принимая, что $dX^* = r^*\Delta_X$, $dY^* = r^*\Delta_Y$ и $dZ^* = r^*\Delta_Z$. В результате получим

$$\begin{aligned}\Delta\alpha''_{\text{a}} &= \frac{-\operatorname{cosec} 1''}{c\cos\delta^*}[(X'-\xi')\sin(Xr)\sin\alpha^* - \\ &\quad -(Y'-\eta')\sin(Yr)\cos\alpha^*],\\ \Delta\delta''_{\text{a}} &= \frac{-\operatorname{cosec} 1''}{c}[(X'-\xi')\sin(Xr)\sin\delta^*\cos\alpha^* + \\ &\quad +(Y'-\eta')\sin(Yr)\sin\delta^*\sin\alpha^* - Z'\cos^2\delta^*].\end{aligned} \tag{2.108a}$$

Поправки к высоте и азимуту можно получить, преобразуя поправки $\Delta\delta$ и $\Delta\alpha\cos\delta$ в поправки $\Delta\bar{a}_{\text{a}}$ и $\Delta\bar{A}\cos\bar{a}_{\text{a}}$ поворотом системы прямоугольных координат на параллактический угол C. Обе эти системы поправок расположены в плоскости, перпендикулярной лучу зрения, который пересекает эту плоскость в начале координат. Формулы перехода имеют следующий вид:

$$\Delta\bar{a}_{\text{a}} = \Delta\delta_{\text{a}}\cos C - \Delta\alpha_{\text{a}}\cos\delta^*\sin C,$$
$$\Delta\bar{A}_{\text{a}}\cos\bar{a} = \Delta\delta_{\text{a}}\sin C + \Delta\alpha_{\text{a}}\cos\delta^*\cos C.$$

Для спутников Земли поправки за аберрацию редко превышают несколько секунд дуги (4—6″), поэтому при визуальных наблюдениях ими можно пренебречь.

2.4.2. Обработка фотографических наблюдений

В результате фотографических наблюдений мы получаем фотопластинки или пленки, на которых видно изображение спутника на фоне звезд. В настоящем разделе описан метод определения направления на спутник в момент наблюдения по направлениям на окружающие звезды. В случае искусственного спутника направление относится к центру изображения, в то время как для Луны — к ее центру. Поскольку центр Луны невозможно опознать на фотографии, то для нее требуется несколько отличный процесс обработки снимков.

2.4.2.1. Определение направления на ИСЗ

При условии отсутствия инструментальных ошибок фотографическая пластинка перпендикулярна оптической оси инструмента и параллельна воображаемой плоскости, которая касается небесной сферы единичного радиуса в точке $\bar{o}$ пересечения ее с оптической осью камеры. Пусть на касательной плоскости имеется система координат $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ и ее начало совпадает с точкой пересечения $\bar{o}$. Ось $\bar{\eta}$ направлена на проекцию северного полюса небесной сферы, т. е. увеличение $\bar{\eta}$ соответствует увеличению склонения, а ось $\bar{\xi}$, перпендикулярная оси $\bar{\eta}$, положительна в направлении увеличения прямого восхождения, т. е. направлена на восток (рис. 2.36). Проекция этой системы через объектив на фотопластинку называется *идеальной* (*стандартной*) *системой координат* ξ, η, а значения ξ и η являются *идеальными* (*стандартными*) координатами. Идеальные координаты точки P небесной сферы (прямое восхождение α и склонение δ) можно вычислить по следующим формулам [44, p. 283—284]:

$$\begin{aligned} \xi = k\bar{\xi} &= \frac{\operatorname{ctg}\delta \sin(\alpha-\alpha_0)}{\operatorname{ctg}\delta\cos(\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0+\sin\delta_0}, \\ \eta = k\bar{\eta} &= \frac{\cos\delta_0-\operatorname{ctg}\delta\cos(\alpha-\alpha_0)\sin\delta_0}{\operatorname{ctg}\delta\cos(\alpha-\alpha_0)\cos\delta_0+\sin\delta_0}, \end{aligned} \tag{2.108}$$

в которых k — фокусное расстояние камеры, а α_0, δ_0 — прямое восхождение и склонение точки o. Эти формулы соответствуют гномонической проекции единичной сферы.

Если пленка протягивается по сферической опорной поверхности, как в камере Бейкер — Нанн, то гномоническая проекция сохраняется только на очень ограниченной площади в окрестности начала координат. Возникающие ошибки можно в некоторой степени устранить, используя азимутальное равнопромежуточное преобразование, в случае которого идеальные координаты равны:

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{\psi}\,\frac{\sin(\alpha-\alpha_0)\cos\delta}{\sin\bar{\psi}}, \\ \eta &= \bar{\psi}\,\frac{\sin\delta-\sin\delta_0\cos\bar{\psi}}{\cos\delta_0\sin\bar{\psi}}, \end{aligned} \tag{2.109}$$

где

$$\cos\bar{\psi} = \sin\delta\sin\delta_0+\cos\delta\cos\delta_0\cos(\alpha-\alpha_0).$$

На практике направление на начало идеальных координат неизвестно, т. е. оно не опознается на фотопленке, поэтому используются приближенные координаты начала. Ошибки, возникающие

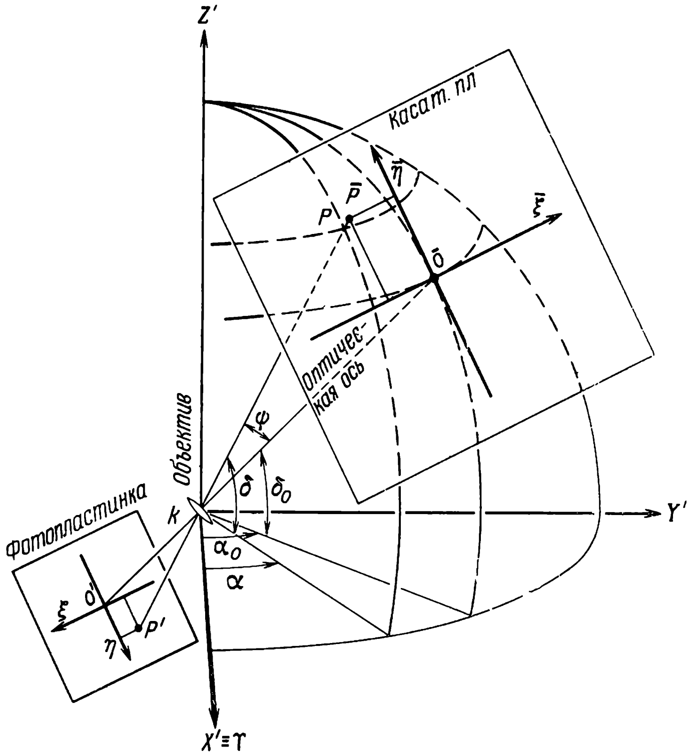


Рис. 2.36. Система стандартных (идеальных) координат

от этого, устраняются методом обработки, в котором используются идеальные координаты. Есть несколько возможностей определить приближенные значения α_0 и δ_0. Можно предположить, что геометрический центр пластинки, определенный по координатным меткам, совпадает с началом координат, или что началом координат является геометрический центр опорных звезд, используемых в вычислениях, или что одна из звезд в районе геометрического центра совпадает с ним. В первом случае координаты α_0, δ_0 можно определить линейной интерполяцией между соседними звездами. Во втором случае $\alpha_0 = \Sigma\alpha_i/n$, а $\delta_0 = \Sigma\delta_i/n$, где α_i и δ_i — координаты n использовавшихся звезд. В третьем случае координатами начала служат координаты выбранной звезды.

При измерении изображений с помощью координационно-измерительной машины с двумя направляющими (см. рис. 2.19) вводится новая координатная система x, y. Начало этой системы совпадает с началом идеальных координат, а оси x и y параллельны направлениям, в которых движется микроскоп измерительной машины при вращении винтов. Измеренными координатами любой точки на пластинке (или на пленке) являются величины

$$\begin{aligned} x &= X - X_0, \\ y &= Y - Y_0, \end{aligned} \tag{2.110}$$

где X, Y, X_0, Y_0 — отсчеты по двум микрометрам машины при наведении микроскопа на произвольную точку и на выбранное начало координат.

Связь между идеальными и измеренными координатами можно осуществить аффинным преобразованием. Необходим именно этот тип преобразования, так как ожидается, что в масштабе имеются искажения, неодинаковые в разных направлениях. Эти смещения зависят от различных источников ошибок, которыми являются ошибки в центрировании и ориентировании системы идеальных координат, неперпендикулярность осей x и y и оптической оси по отношению к фотопластинке, астрономическая рефракция и аберрация. Все эти смещения в значительной мере учитываются, если применяются уравнения линейного преобразования вида

$$\begin{aligned} \xi &= Ax + By + E, \\ \eta &= Cx + Dy + F. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Здесь коэффициенты A, B, C, D, E, F называются *постоянными пластинки* и представляют следующие величины:

$$\begin{aligned} A &= k_\xi \cos\gamma, & B &= k_\eta \sin\gamma, \\ C &= k_\xi \sin\gamma, & D &= -k_\eta \cos\gamma, \\ E &= \xi_0, & F &= \eta_0, \end{aligned}$$

где k_ξ, k_η — масштабы по направлениям ξ и η, γ — угол между осями ξ и x, отсчитываемый от оси ξ по часовой стрелке, ξ_0 и η_0 — идеальные координаты истинного начала.

Формулы (2.111) решают проблему с достаточной точностью, если зенитное расстояние не больше 60° и смещения, вызываемые рефракцией, можно считать линейными. Если зенитное расстояние больше 60°, то нужно учитывать члены второго или, возможно, даже третьего порядка; в этом случае нужно использовать следующие формулы перехода (см. [28]):

$$\begin{aligned} \xi &= a + bx + cy + dxy + ex^2 + f(x^2 + y^2)x, \\ \eta &= g + hx + iy + jxy + ky^2 + l(x^2 + y^2)y. \end{aligned} \tag{2.112}$$

Постоянные пластинки определяются по опорным звездам путем вычисления их идеальных координат ξ, η по формулам (2.108) или (2.109), измерения координат x, y на пластинке и подстановки их в уравнения (2.111) или (2.112). Как видно, для решения необходимо не менее трех звезд, поскольку формулы (2.111) содержат шесть неизвестных постоянных пластинки. При использовании уравнений (2.112) необходимо не менее шести звезд. На пластинке обычно берут больше звезд, чем необходимо, и постоянные пластинки определяют по методу наименьших квадратов. Для уравнений (2.111) решения имеют следующий вид:

$$A=\frac{Qp-Rr}{T},\quad B=\frac{Pr-Rp}{T},\quad C=\frac{Qs-Rq}{T},$$
$$D=\frac{Pq-Rs}{T},\quad E=\frac{[\xi]}{n},\quad F=\frac{[\eta]}{n}, \tag{2.113}$$

где

$$p=[(X-X_0)(\xi-\xi_0)],\qquad q=[(Y-Y_0)(\eta-\eta_0)],$$
$$r=[(Y-Y_0)(\xi-\xi_0)],\qquad s=[(X-X_0)(\eta-\eta_0)],$$
$$P=[(X-X_0)^2],\qquad Q=[(Y-Y_0)^2],$$
$$R=[(X-X_0)(Y-Y_0)],\qquad T=PQ-R^2.$$

Квадратные скобки обозначают суммирование величин, относящихся ко всем опорным звездам.

Идеальные координаты изображения спутника ξ^* и η^* можно вычислить по формулам (2.111), используя постоянные пластинки, определенные описанным способом по опорным звездам, и измеренные координаты спутника.

Направление на спутник (α^*, δ^*) выводится из формул (2.108):

$$\operatorname{tg}(\alpha^*-\alpha_0)=\frac{\xi^*}{\cos\delta_0-\eta^*\sin\delta_0},$$
$$\operatorname{tg}\delta^*=\frac{(\sin\delta_0+\eta^*\cos\delta_0)\cos(\alpha^*-\alpha_0)}{\cos\delta_0-\eta^*\sin\delta_0}. \tag{2.114}$$

В табл. 2.5 приводится пример вычислений координат ИСЗ. Поскольку постоянные фотопластинки получаются по опорным звездам, они включают влияние атмосферной рефракции Δz_∞, определяемое формулой (2.100) или (2.101). Значит, направление на спутник, определяемое по формуле (2.114), включает влияние всей атмосферы, а не части ее, характеризуемой формулой (2.103). Поэтому в результаты, полученные по формулам (2.114), нужно ввести поправку Σ, называемую дифференциальной рефракцией. Ее можно вычислить по формулам (2.104) или (2.105). Дифференциальные поправки в экваториальные координаты в соответствии с формулами (2.106) равны

$$\Delta\alpha_r=\Sigma\sec\delta^*\sin C,$$
$$\Delta\delta_r=\Sigma\cos C. \tag{2.115}$$

Таблица 2.5

Вычисление экваториальных координат спутника по фотографической пластинке

Момент наблюдения: август 25.0774535, 1958, U T

Приближенные координаты: $\varphi = 38°33''.9$ N

$\lambda = 90°25''.5$ W

H = 63.784 *м*

Фокусное расстояние камеры 311.66 *мм*

Звезда	№ по катал. Босса	Прямое восхожд.	Склонение	X	Y	$x=X-X_0$	$y=Y-Y_0$
1	19428	$14^h\ 22^m\ 02^s.2994$	+41° 02' 09''.1446	60.4910	45.7711	-5.7742	+0.8134
2	19320	14 17 13.0946	38 57 42.5604	69.6317	54.0542	+3.3665	+9.0965
3	19225	14 12 42.7228	41 43 01.8724	67,6740	38.4797	+1.4088	-6.4780
4	19124	14 08 17.2595	40 58 38.4310	73.4747	40.1880	+7.2095	-4,7697
5	19414	14 21 49.9457	39 31 17.4283	63.9537	53.2307	-2.3115	+8.2730
6	19322	14 17 17.4187	42 12 01.9742	62.3659	38.0226	-3.8993	-6.9351
Среднее		14 16 33.7901	40 44 08.5684	66.2652	44.9577		
Спутник				68.6078	48.6072	+2.3426	+3,6495

По этим данным из уравнения (2.108) вычисляются стандартные координаты звезд:

	$311.66\times\bar{\xi}$	$311.66\times\bar{\eta}$
1	+5.616602180	+1.676782734
2	+0.693002317	-9.651529777
3	-0.909829081	+5.361103341
4	-8.497551116	+1.414961445
5	+5.528992968	-6.565193637
6	+0.732758139	+7.970477097

Из уравнений (2.113):

$p = +0.3609933 \qquad P = +\ 119.1839$

$q = +0.7620462 \qquad Q = +\ 264.6606$

$r = -0.3766627 \qquad R = -\ \ 9.6677$

$s = +0.1293843 \qquad T = +31449.82$

Постоянные пластинки:

$\xi_0 = +0.00008769$

$\eta_0 = +0.00011048$

$A = +2922.091\times10^{-6}$

$B = -1316.451\times10^{-6}$

$C = +1323.065\times10^{-6}$

$D = +2927.663\times10^{-6}$

Из уравнений (2.111) получаем координаты спутника:

$\xi^* = -0.0019533309$

$\eta^* = -0.0136734278$

Из (2.114) получаем экваториальные координаты:

$\alpha^* = 213°.994810$

$\delta^* = 39°.952241$

В табл. 2.6 показаны изменения величины Σ при нормальных условиях в зависимости от зенитного расстояния и расстояния от наблюдателя до спутника, основанные на формуле (2.104) и рис. 2.35.

Таблица 2.6

Дифференциальная рефракция Σ

z \ r^*	100 *км*	300 *км*	1000 *км*	ρ	10ρ
0°	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00	0″,00
15	1 ,24	0 ,41	0 ,13	0 ,02	0 ,00
30	2 ,68	0 ,90	0 ,27	0 ,05	0 ,00
45	4 ,67	1 ,58	0 ,57	0 ,09	0 ,01
60	8 ,20	2 ,85	0 ,96	0 ,20	0 ,02
75	18 ,97	7 ,21	2 ,83	0 ,72	0 ,10

Из данных таблицы и точности фотографического метода по положению ($\pm$ 2″) можно сделать вывод, что дифференциальная рефракция пренебрежимо мала при высотах спутников более 300 *км* и зенитных расстояниях меньше 60°.

Более неприятное влияние атмосферы на фотографические наблюдения оказывает нерегулярное *мерцание*, возникающее вследствие атмосферной турбулентности. Мерцание вызывает быстрые колебания изображения относительно его истинного положения. Оно усредняется при больших экспозициях, но опасно при фотографировании вспышек. Мерцание сказывается как на прямом восхождении, так и на склонении и носит случайный характер; в отличие от обычной рефракции оно не равняется нулю в зените. Его можно уменьшить, применяя камеры с большой апертурой и умеренным фокусным расстоянием.

Считают, что обоснованную оценку влияния мерцания для апертур $d > 100$ *мм* и высот $a > 10°$ дает следующая формула:

$$dx\,(\textit{мк}) = dy\,(\textit{мк}) = \frac{kc}{d}\sqrt{\operatorname{cosec} a},$$

где dx и dy — стандартные уклонения компонент координат на пластинке от эффекта мерцания, k — фокусное расстояние в миллиметрах, c — постоянная, зависящая от астрономической видимости. Если d выражается в миллиметрах, то величина c может меняться примерно от 0,05 *мк* при хорошей видимости до 0,30 *мк* при плохой видимости. При промежуточном значении $c = 0{,}15$ *мк* и $a = 10^\circ$ формула дает в результате $dx = dy = 1{,}5$ *мк* для камеры с фокусным расстоянием 1200 *мм* и апертурой 300 *мм* [49].

Кроме дифференциальной рефракции, в экваториальные координаты ИСЗ нужно вводить поправку за дифференциальную аберрацию из-за движения спутника относительно наблюдателя, поскольку ее влияние не учитывается постоянными пластинки. Эту поправку можно вычислить по формуле (2.108 а), но компоненты скорости (в скобках) можно определить по измерениям на самой пластинке. Если скорости изменения прямого восхождения и склонения спутника на пластинке равны $(\alpha^*)'$ и $(\delta^*)'$, то поправки за дифференциальную аберрацию вычисляются так [45, p. 116]:

$$\Delta\alpha_a = (\alpha^*)' \frac{r^*}{c \cos \delta^*}, \qquad \Delta\delta_a = (\delta^*)' \frac{r^*}{c}.$$

Небесная система координат, к которой относятся вычисленные координаты спутника после введения всех поправок, является той же системой, в которой даются координаты опорных звезд (должна применяться система FK4). В этом отношении имеется несколько возможностей. Во-первых, теоретически проще всего использовать видимые координаты опорных звезд в момент наблюдения, как это обычно делается в астрономии (Explanatory Supplement, chap. 5). В этом случае полученное топоцентрическое направление на спутник является истинным (свободным от рефракции и аберрации) и может быть приведено к системе средних координат на любую эпоху после введения поправок за нутацию и прецессию. Во-вторых, удобнее использовать истинные координаты опорных звезд в момент наблюдения и вводить поправки за годичную и суточную аберрацию (Explanatory Supplement, pp. 49, 151) непосредственно в координаты ИСЗ, уже исправленные за дифференциальную рефракцию и дифференциальную аберрацию. В результате опять же получается истинное топоцентрическое направление. Наконец, самое простое решение, наиболее удобное для эфемеридных целей,— это использовать средние положения опорных звезд на данную эпоху, например 1950,0, исправленные по возможности за собственное движение. После введения в наблюденные координаты спутника поправок за годичную, суточную и дифференциальную аберрации, а также за дифференциальную рефракцию они будут приведены к системе средних координат той же эпохи. Из этой системы можно получить истинные направления, которые должны сравниваться с предвычисленными направлениями при геодезическом применении ИСЗ с помощью обычных методов обработки, используемых в астрономии.

2.4.2.2. Определение направления на Луну

Как видно на рис. 2.34, изображение Луны представляет собой большой, неравномерно освещенный диск, окруженный опорными звездами. Направление на его геометрический центр определяется точно так же, как описано в предыдущем разделе. Затруднение заключается в том, что, поскольку центр Луны нельзя найти на пластинке, его координаты невозможно непосредственно измерить, но их можно вычислить по измерениям, сделанным на диске Луны. В методе, разработанном Марковицем, используется около 10 опорных звезд и 30 или 40 точек на краю Луны, координаты X и Y которых измеряются на измерительной машине. Для определения центра и радиуса вероятнейшей окружности, которая наилучшим образом подходит к краю Луны, делается несколько предварительных измерений. Затем вычисляются координаты точек через 6° вдоль ее края. При измерении точек края диска Луны один винт устанавливается на вычисленном значении одной координаты, скажем Y, а другой передвигает нить до пересечения с краем в точке с абсциссой X. Таким образом мы получаем дифференциальную поправку к радиусу по формуле $dr = (X/r)dX$, поскольку $dY = 0$. Поправки комбинируются в группы, которые образуют 10 или 12 *нормальных точек*. Если используется координационно-измерительная машина с точной вращающейся платформой, то поправки dr можно определять без предварительного вычисления. Определение постоянных пластинки дает возможность вводить поправки во все члены первого порядка, включая и дифференциальную рефракцию первого порядка. Эти поправки вводятся в координаты нормальных точек, а положение центра наиболее подходящей окружности определяется по методу наименьших кадратов.

Направление на Луну, определенное этим методом, сравнивается с направлением, вычисленным по лунным эфемеридам после введения в них поправок за параллакс (Explanatory Supplement, pp. 60—62). Дальнейшие подробности читатель может найти у Вейса [45, pp. 153—155] и у Марковица [37, p. 112—113] *.

2.4.3. Обработка электронных наблюдений

На результатах наблюдений, полученных любым из ранее описанных электронных методов, сказывается влияние атмосферы и относительного движения спутника. Влияние атмосферы, назы-

---

* См. также работы [7, 11] в библиографии к части 1 (стр. 123).— *Прим. ред.*

ваемое *электронной рефракцией*, вносит ощутимые изменения как в разность фаз, измеренную на двух антеннах интерферометра, так и в скорость изменения фазы между моментами передаваемых и принимаемых сигналов в дальномерных системах измерения расстояний.

Определение этих эффектов, возникающих из-за рефракции радиоволн, является очень сложной проблемой. Изменения в результатах наблюдений существенно зависят от зенитного расстояния, передаваемой частоты, изменений коэффициента рефракции и постоянства скорости распространения электромагнитных волн.

Спутники, передающие сигналы на высоких частотах, в меньшей степени подвержены эффектам рефракции, чем спутники, работающие на более низких частотах. Например, во время приема сигналов двух первых советских спутников на частотах 20 и 40 *Мгц* часто получались различные оценки в положении спутника (за исключением их прохождений около зенита, когда траектории радиоволн и оптических лучей почти совпадали). С этой точки зрения выгоднее частоты 108 *Мгц* и выше, используемые на американских ИСЗ.

Коэффициент рефракции можно определить достаточно точно в тропосфере, где он зависит только от давления воздуха, влажности и температуры. В ионосфере коэффициент рефракции является функцией электронной концентрации, заряда и массы электронов, диэлектрической постоянной и применяемой частоты. Изменение электронной концентрации, т. е. числа электронов в единице объема, в значительной мере зависит от ионизующей радиации Солнца, которая в свою очередь является функцией его активности и относительного положения. Максимальная концентрация электронов наблюдается на высотах 250—450 *км*.

Чтобы учесть различную скорость распространения радиоволн, следует сделать некоторые предположения о состоянии среды, в которой они распространяются. Скорость распространения постоянна только в вакууме.

Детальный разбор упомянутой выше проблемы не входит в рамки настоящей книги, и поэтому читатель отсылается к библиографии [19, 23, 29, 30, 34, 35, 36, 43 и др.]. Обзорная работа опубликована Каулой в Advances in Geophysics, 9, 262—266 ([110] в библиогр. к разд. 2.2, на стр. 210). Из нее следует, что для геодезических применений должны использоваться далекие спутники (с высотой порядка 1000 *км*), ведущие передачи на высоких частотах (100—1000 *Мгц*), так как в этом случае влияние электронной рефракции мало — порядка 0,1%.

БИБЛИОГРАФИЯ К РАЗД. 2.4

1. Амелин В. М., Опыт обработки наблюдений искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 39, 3—7, 1962.
2. Баженов Г. М., Определение орбиты искусственного спутника Земли по трем наблюдениям, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 10, 757—765, 1961.
3. Батраков Ю. В., Некоторые результаты обработки оптических наблюдений искусственных спутников Земли в Институте теоретической астрономии АН СССР, Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 7, 503—510, 1960.
4. Боричко Е., Определение высоты искусственного спутника по одному наблюдению небесных координат и их производных во времени, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **27**, 31—36, 1962.
5. Брыков А. В., Оценка влияния корреляции между измерениями на точность результатов обработки, Иск. спутн. Земли, **16**, 124—135, 1963.
6. Жонголович И. Д., Системы координат, употребляемые при изучении движения искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **31**, 3—9, 1962.
7. Жонголович И. Д., Сборник таблиц и номограмм для обработки наблюдений искусственных спутников Земли, М.— Л., Изд-во АН СССР, 1960.
8. Кленицкий Б. М., Устинов Г. А., Вычисление экваториальных топоцентрических координат ИСЗ, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 39, 10—12, 1962.
9. Котельников В. А., Дубошин В. М., Морозов В. А., Ржига О. Н., Шаховской А. М., Использование эффекта Допплера для определения параметров орбиты искусственных спутников Земли, Иск. спутн. Земли, **1**, 44—49, 1958.
10. Медведева Л. Н., Фираго Б. А., О вычислении расстояний до искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **32**, 7—16, 1, 1963.
11. Пал А., Об одном критерии идентификации искусственных спутников Земли, Набл. иск. спутн. Земли, **2**, 115—118, 1963.
12. Прилепин М. Т., Геодезические связи на большие расстояния. (Обзор методов), Отдел НТИ ВНИИ экономики минер. сырья и геологоразв. работ, Изд-во Госуд. геол. комит. СССР, М., 1965.
13. Фираго Б. А., Определение топо- и геоцентрического расстояния спутника и его высоты над поверхностью Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **10**, 1959.
14. Цоскова А., Обработка фотографических наблюдений искусственных спутников с использованием электронной цифровой машины «Стрела-4», Астрон. цирк., **192**, 9—10, 1958.
15. Чихаренко А. Л., Филипчева С. А., О повышении точности обработки снимков ИСЗ, полученных с малоформатной камерой, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **35**, 13—20, 1963.
16. Щеголев Д. Е., Киселев А. А., Фираго Б. А., Инструкция по определению координат искусственного спутника Земли (ИСЗ) по фотографическим снимкам, полученным на камерах «НАФА-3с/25-С», Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **13**, 1960.
17. Angus-Leppan P. V., A Study of Refraction in the Lower Atmosphere, Emp. Svey. Review, **26**, 120, 1961.
18. Berbert J. H., Star Catalogues on Punched Cards and Magnetic Tape, NASA Tech. Note D-1153, 1961.

19. B e r n i n g W. W., Electron Densities in the Ionosphere from Radio Doppler Tracking of Artificial Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 570—578, 1961.
20. B r o w n D. C., A Treatment of Analytical Photogrammetry, RCA Data Reduction Tech. Rep., 39, 1957.
21. B r o w n D. C., Optical Refraction with Emphasis on Corrections for Points Outside the Atmosphere, Amer. Rocket Soc. Journ., **31**, 549—550, 1961.
22. C a s e J. B., Atmospheric Refraction for Satellite Photography, Autometric Corp. Report, 56-8B-1, 1962.
23. D a v i s s o n R. J., Precision of Compensated Tracking Systems, Hermes Electronic Co. Rept. No. HEI M-810, AFCRC-Tech. Report-59-356, 1959.
24. E i c h h o r n H., Astrometric Investigation of a Baker-Nunn Camera, Van Vleck Obs., Middletown, Conn., Report on Contract AF 19 (604)-7330, 1962.
25. E i c h h o r n H., The Relationship between Standard Coordinates of Stars and the Measured Coordinates of Their Images, Appl. Optics, January 1963.
26. E i c h h o r n H., W i l l i a m s C. A., Investigations on Photographic Astrometric Technique, Van Vleck Obs., Middletown, Conn., Report on Contract AF 19 (604)-7300, 1962.
27. G a r f i n k e l B., An Investigation in the Theory of Astronomical Refraction, Astron. Journ., **50**, 8, 1944.
28. G o o d W. E., B e r b e r t J. H., O o s t e r h o u t J.D., Reduction of the Minitrack Astrographic Plates, Photographic Science and Eng., Nov.-Dec. 1962.
29. H a m p t o n D. E., The Analysis of Doppler Records from Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 486—501, 1961.
30. H o f f m a n W. C., Studies of Ionospheric Radiophysics by Means of Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **6**, 202—219, 1958.
31. H o l l a n d A. C., Effects of Atmospheric Rerfaction on Angles Measured from a Satellite, Journ. Geophys. Res., **66**, 12, 1961.
32. H o s k i n s o n A. J., D u e r k s e n J. A., Manual of Geodetic Astronomy, U.S. Coast and Geodetic Survey, Spec. Publ., 237, 1952.
33. J o n e s B. L., Photogrammetric Refraction Angle: Satellite Viewed from Earth, Journ. Geophys. Res., **66**, 4, 1961.
34. К а з а н ц е в А. Н., Absorption of Radiowaves in the Ionosphere and F_2 Layer Structure According to Data of Field Intensity Measurement of Radio Signals of Artificial Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 559—565, 1961.
35. K e l s o J. M., Doppler Shifts and Faraday Rotation of Radio Signals in a Time Varying, Inhomogeneous Ionosphere, Part 1, Single Signal Case, Journ. Geophys. Res., **65**, 12, 1960.
36. L a w r e n c e R. S., W a r w i c k J. W., The Use of Interferometer Observations of Satellites for Measurement of Irregular Ionospheric Refraction, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 566—569, 1961.
37. M a r k o w i t z W., The Photographic Zenith Tube and the Dual Rate Moon-Position Camera, Stars and Stellar Systems, G. Kuiper and B. Middlehurst, eds., **1**, University of Chicago Press, 1960.
38. Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, H.M. Stationery Office, London, 1961.
39. N e w c o m b S., A Compendium of Spherical Astronomy, The Macmillan Co., New York, 1906; переиздано Dover Publ., New York, 1960.

40. O t e r m a L., Computing the Refraction for the Väisälä Astronomical Method of Triangulation, Astron. Opt. Inst. Univ. Turku, Informo, 20, Turku, Finland, 1960.
41. S c h m i d H. H., A General Analytical Solution to the Problem of Photogrammetry, Ballistic Res. Lab. Report, 1065, 1959.
42. S c h m i d H. H., The Influence of Atmospheric Refraction on Directions Measured to and from a Satellite, GIMRADA Res. Rep., 10, 1963.
43. S i r y J. W., Study of the Upper Ionosphere by Means of Minitrack and Optical Observations of Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **6**, 431—438, 1958.
44. S m a r t W. M., Text-Book on Spherical Astronomy, Fourth Edition, Cambridge Univ. Press, 1960.
45. V e i s G., Geodetic Uses of Artificial Satellites, Smithsonian Contrib. Astrophys., 3, 9, 1960.
46. V o n b u n F. O., Correction for Atmospheric Refraction at the NASA Minitrack Stations, NASA Tech. Note, D-1448, 1962.
47. W i l l i s J. E., A Determination of Astronomical Refraction from Physical Data, Trans. Amer. Geophys. Union, 324—336, 1941.

В период подготовки книги к изданию вышли в свет следующие интересные статьи, относящиеся к этому разделу:

48. B a l d i n i A. A., Formulas for Computing Atmospheric Refraction for Objects Inside or Outside the Atmosphere — GIMRADA Research Note, 8, 1963.
49. B r o w n D. C., Notes on the Reduction of Stellar Plates for Determination of Directions of Flashing Light Beacons, The Use of Artificial Satellites in Geodesy, Veis G., ed., Interscience Publ., New York, 1963.
50. E i c h h o r n H., W i l l i a m s C. A., On the Systematic Accuracy of Photographic Astrometric Data, Astron. Journ., **68**, 4, 1963.
51. J e f f e r y s W. H., On Computational Technique for Photographic Astrometry with Overlapping Plates, Astron. Journ., **68**, 4, 1963.
52. L a w r e n c e M. W., Calibration of PC-1000 Cameras by Means of Star Photography, Ballistic Research Lab. Memo, 1468, 1963.
53. S c o t t F. P., Estimates of the Accuracy of Positions Taken from Photographic Star Catalogs, Present and Future, The Use of Artificial Satellites in Geodesy, Veis. G., ed., Interscience Publ., New York, 1963.

2.5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСЗ И ЛУНЫ В ГЕОДЕЗИИ

Задачи, для решения которых в геодезии обычно используются спутники, подразделяют на геометрические и динамические.

Использование спутников для *геометрических задач* основано на сравнении предвычисленных координат спутника, зависящих от принятых параметров орбиты и принятых координат наблюдателя, с наблюденными координатами. Путем таких сравнений, если они выполнены в достаточном количестве, получают поправки как элементов орбиты, так и координат наблюдателя, что, таким образом, позволяет одновременно определять орбиту спутника и координаты наблюдателя.

Возможны и более простые случаи, когда, например, элементы орбиты известны или когда они не требуются; оба случая рассматриваются здесь довольно подробно. В результате геодезического использования спутников получается сеть пунктов наблюдений, координаты которых относятся по возможности к одним и тем же геоцентрическим геодезическим данным. При помощи этого метода можно связать между собой системы триангуляции, основанные на различных исходных данных, или привести их к одной, наиболее подходящей геоцентрической системе.

При использовании спутников для *динамических задач* по наблюдениям возмущений элементов орбиты определяются коэффициенты сферических гармоник разложения потенциала тяготения Земли. По этим непосредственно определяемым коэффициентам могут быть получены различные косвенные, но важные для геодезии результаты, такие, как форма земного эллипсоида, местные ондуляции геоида, местные аномалии ускорения силы тяжести на поверхности Земли и т. д. Они также позволяют определить гравитационную постоянную, которая с помощью применения третьего закона Кеплера может дать информацию об экваториальном радиусе Земли.

2.5.1. Геометрическое использование спутников

2.5.1.1. Астрономические, геодезические и геоцентрические координаты

Положение наблюдателя на поверхности Земли может быть определено с помощью его астрономических или геодезических координат. Геодезические координаты можно относить к референц-эллипсоиду с произвольными ориентацией и положением или к эллипсоиду, ориентация которого пока произвольна, но центр совпадает с центром тяжести Земли. Такие геодезические координаты называются *геоцентрическими геодезическими координатами* (не путайте с обычно применяемыми геоцентрическими координатами).

Можно дать следующее определение астрономических координат: *астрономическая широта* — это угол между отвесной линией (местной вертикалью) в пункте наблюдений и мгновенным земным экватором (положительна в северном полушарии). *Астрономическая долгота* — угол между отвесной линией и плоскостью, параллельной мгновенной плоскости гринвичского меридиана (эта плоскость содержит вертикаль Гринвича и параллельна мгновенной оси вращения Земли). Она измеряется в плоскости мгновенного экватора и считается положительной к востоку. Принято также определять астрономическую широту как угол между отвесной линией в пункте наблюдений в точке ее пересечения с геоидом (т. е. нормалью к геоиду) и средним земным экватором. Аналогично астрономическая долгота есть угол между этой нормалью к геоиду и средней плоскостью меридиана Гринвича (содержащей нормаль к геоиду в Гринвиче и параллельной средней оси вращения Земли), измеряемый в средней плоскости экватора.

Переход от наблюденных астрономических координат к этим *стандартным астрономическим координатам* может быть осуществлен путем введения поправок за направление нормали к геоиду и за движение полюса, которые определяются Международной службой широты [74, pp. 256—257; 113, pp. 138—141]. Таким образом, приведенная астрономическая широта Φ и долгота Λ (в СССР φ и λ.— *Перев.*) относятся к геоиду и к средней оси вращения Земли. Высота наблюдателя над геоидом, измеряемая вдоль нормали к геоиду, представляет *ортометрическую высоту*, получаемую путем геометрического нивелирования и маршрутных измерений силы тяжести [41, pp. 247—298; 111; 112], и обозначается h (в СССР H.— *Перев.*). Величины Φ, Λ и h определяют положение наблюдателя относительно геоида и средней оси вращения Земли.

Геодезические координаты определяются следующим образом. *Геодезическая широта* — это угол между нормалью к эллипсоиду в точке проекции наблюдателя на геоид и плоскостью экватора референц-эллипсоида, плоскость которого считается перпендикулярной к средней оси вращения Земли (положительна в северном полушарии). *Геодезическая долгота* — угол между нормалью к эллипсоиду и плоскостью гринвичского меридиана (которая содержит нормаль к эллипсоиду в Гринвиче и параллельна средней оси вращения Земли), измеряемый в плоскости экватора эллипсоида и считаемый положительным к востоку. Геодезические широты и долготы обозначаются соответственно φ и λ (в СССР

B и *L*.—*Перев.*). Высота наблюдателя над референц-эллипсоидом, измеряемая вдоль нормали к эллипсоиду, обозначается через H (в СССР $H' = H + h$.— *Перев.*) (рис. 2.37).

Геодезические координаты, определяемые с помощью триангуляции или трилатерации и относящиеся к земной поверхности, редуцируются на эллипсоид [45, pp. 61—62, 73—76, 94—101] и уравновешиваются путем использования уравнения Лапласа $(\overline{A} - \overline{\alpha}) = (\Lambda - \lambda) \sin \varphi$, где $\overline{A}$ и $\overline{\alpha}$ (в СССР α и A.— *Перев.*) соответственно астрономический и геодезический азимуты, для контроля угловых измерений в сети [45, pp. 69—73].

Положение референц-эллипсоида относительно сети триангуляции определяется с помощью геодезических координат исходного пункта триангуляции φ_0, λ_0 и H_0 или с помощью разностей астрономических и геодезических координат:

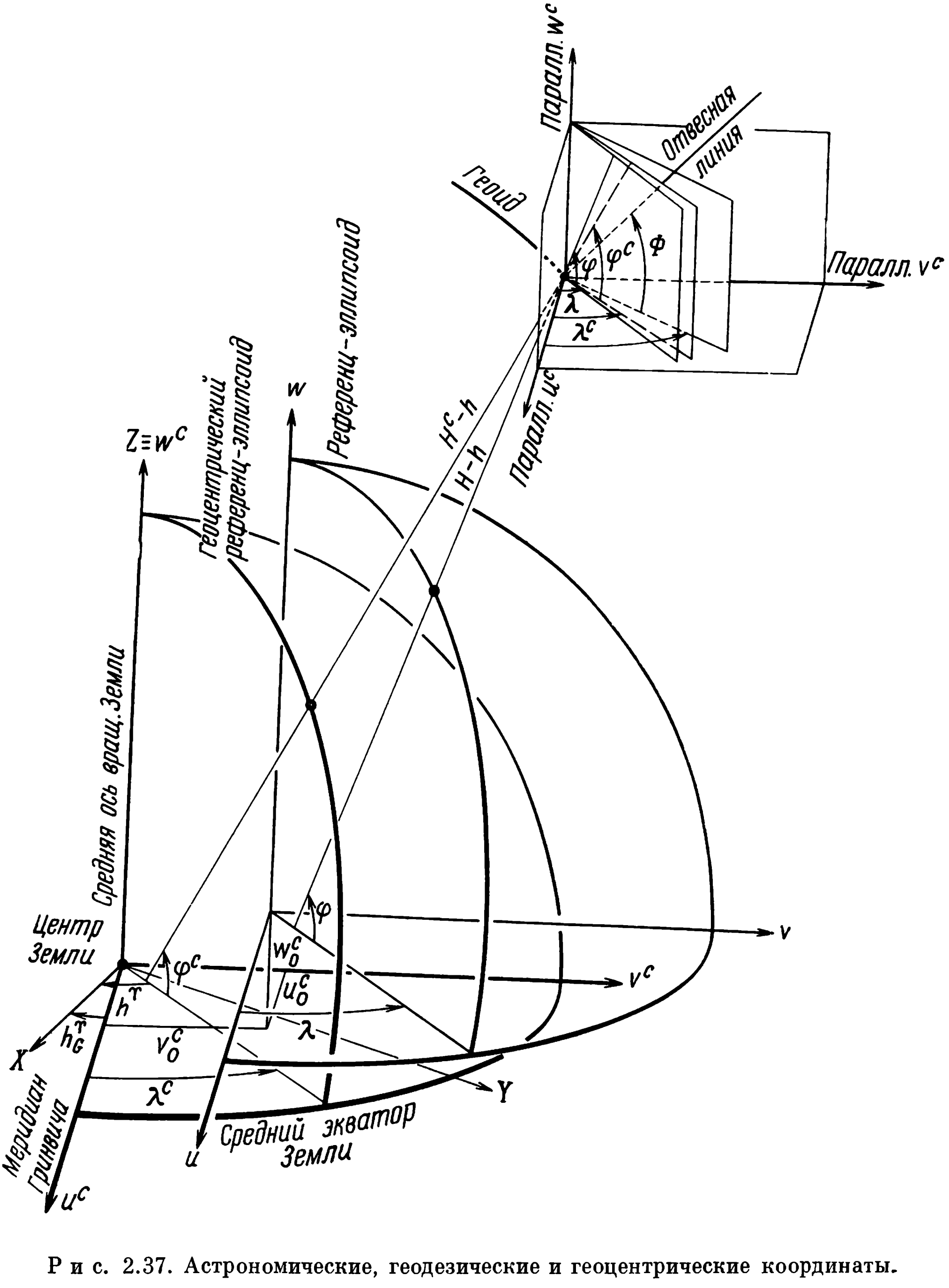
$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0 &= \Phi_0 - \varphi_0, \\ \Delta\Lambda_0 &= \Lambda_0 - \lambda_0, \\ \Delta h_0 &= H_0 - h_0. \end{aligned} \tag{2.116}$$

Нужно заметить, что высоты H и h измеряются вдоль различных направлений (соответственно вдоль нормали к эллипсоиду и нормали к геоиду), поэтому, вообще говоря, они не могут быть непосредственно связаны. Однако для практических целей влиянием различия этих направлений можно пренебречь. Величины $\Delta\Phi_0$, $\Delta\Lambda_0$ и Δh_0 вместе с параметрами эллипсоида a_e и f определяют размеры, форму и ориентацию референц-эллипсоида (a_e — большая полуось, f — сжатие) (в СССР a и α.— *Перев.*). Ориентация эллипсоида относительно геоида определяется условием, что его малая ось параллельна средней оси вращения Земли. Путем измерения астрономического азимута на исходном пункте и применения уравнения Лапласа [45, p. 72] получается соответствующий геодезический азимут (азимут Лапласа.— *Перев.*). В настоящем обсуждении ориентация не играет какой-либо роли и поэтому не разбирается подробнее. Мы будем просто принимать, что имеет место параллельность осей, что точность астрономического азимута на исходном пункте достаточна и что условие Лапласа выполняется.

Геоцентрические геодезические координаты обозначаются φ^c, λ^c и H^c (рис. 2.37). Таким образом, геоцентрические геодезические данные определяются через $\Delta\Phi_0^c$, $\Delta\Lambda_0^c$, Δh_0^c, a_e и f, где

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_0^c &= \Phi_0 - \varphi_0^c, \\ \Delta\Lambda_0^c &= \Lambda_0 - \lambda_0^c, \\ \Delta h_0^c &= H_0^c - h_0, \end{aligned} \tag{2.117}$$

а индекс нуль относится к исходному пункту.



Р и с. 2.37. Астрономические, геодезические и геоцентрические координаты.

Геодезические прямоугольные (пространственные.— *Перев.*) координаты наблюдателя u, v и w (рис. 2.37) (в СССР X, Y и Z.— *Перев.*) могут быть вычислены по формулам

$$\begin{aligned} u &= (N+H)\cos\varphi\cos\lambda, \\ v &= (N+H)\cos\varphi\sin\lambda, \\ w &= [N(1-e^2)+H]\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Ось u лежит в плоскости геодезического меридиана Гринвича, ось w параллельна средней оси вращения Земли. В формулах (1.68) N — радиус кривизны первого вертикала, вычисляемый по формуле

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Геоцентрические прямоугольные координаты наблюдателя u^c, v^c, w^c могут быть вычислены по формулам (1.68) путем подстановки в них φ^c, λ^c и H^c вместо φ, λ и H.

Переход от геодезических прямоугольных координат наблюдателя к геоцентрическим координатам может быть осуществлен путем вычисления геоцентрических координат центра референц-эллипсоида и прибавления их к геодезическим координатам наблюдателя. Геоцентрические координаты центра эллипсоида с достаточной точностью можно вычислить по формулам [158, р. 101].

$$\begin{aligned} u_0^c &= \delta\Phi_0 M_0\sin\varphi_0\cos\lambda_0 + \delta\Lambda_0 N_0\cos\varphi_0\sin\lambda_0 + \delta h_0\cos\varphi_0\cos\lambda_0, \\ v_0^c &= \delta\Phi_0 M_0\sin\varphi_0\sin\lambda_0 - \delta\Lambda_0 N_0\cos\varphi_0\cos\lambda_0 + \delta h_0\cos\varphi_0\sin\lambda_0, \\ w_0^c &= -\delta\Phi_0 M_0\cos\varphi_0 + \delta h_0\sin\varphi_0, \end{aligned} \tag{2.118}$$

где

$$\begin{aligned} \delta\Phi_0 &= \Delta\Phi_0^c - \Delta\Phi_0 = \varphi_0 - \varphi_0^c, \\ \delta\Lambda_0 &= \Delta\Lambda_0^c - \Delta\Lambda_0 = \lambda_0 - \lambda_0^c, \\ \delta h_0 &= \Delta h_0^c - \Delta h_0 = H_0^c - H_0 \end{aligned}$$

и $M = a_e(1-e^2)/(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}$ — радиус кривизны меридиана. Индекс нуль относится к исходному пункту сети триангуляции. В соответствии с этим геоцентрические координаты наблюдателя будут равны

$$\begin{aligned} u^c &= u_0^c + u, \\ v^c &= v_0^c + v, \\ w^c &= w_0^c + w. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Из уравнений (2.118) видно, что перенос центра референц-эллипсоида в центр Земли эквивалентен замене исходных величин $\Delta\Phi_0$, $\Delta\Lambda_0$ и Δh_0 соответственно на $\Delta\Phi_0^c$, $\Delta\Lambda_0^c$ и Δh_0^c.

Влияние величин $\delta\Phi_0$, $\delta\Lambda_0$ и δh_0, т. е. переноса в центр Земли, на геодезические координаты наблюдателя φ, λ и H определяется формулами [150, part 1]:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= A_1\delta\Phi_0 + A_2\delta\Lambda_0 + A_3\frac{\delta h_0}{a_e}, \\ \Delta\lambda_1 &= B_1\delta\Phi_0 + B_2\delta\Lambda_0 + B_3\frac{\delta h_0}{a_e}, \\ \frac{\Delta H_1}{a_e} &= C_1\delta\Phi_0 + C_2\delta\Lambda_0 + C_3\frac{\delta h_0}{a_e}. \end{aligned} \tag{2.120}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_1 &= -\left(\frac{W}{W_0}\right)^3 [\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)], \\ A_2 &= \frac{W^3}{W_0(1-e^2)}\sin\varphi\cos\varphi_0\sin(\lambda-\lambda_0), \\ A_3 &= \frac{W^3}{1-e^2}[\cos\varphi\sin\varphi_0 - \sin\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)], \\ B_1 &= -\frac{W(1-e^2)}{W_0^3}\sec\varphi\sin\varphi_0\sin(\lambda-\lambda_0), \\ B_2 &= -\frac{W}{W_0}\sec\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0), \\ B_3 &= -W\sec\varphi\cos\varphi_0\sin(\lambda-\lambda_0), \\ C_1 &= -\frac{1-e^2}{W_0^3}[\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0)], \\ C_2 &= -\frac{1}{W_0}\cos\varphi\cos\varphi_0\sin(\lambda-\lambda_0), \\ C_3 &= \sin\varphi\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos(\lambda-\lambda_0), \end{aligned}$$

где $W = (1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2} = a_e/N$, а величины с индексом нуль относятся к исходному пункту.

Если по каким-либо причинам мы изменим размеры и форму референц-эллипсоида на $\delta a_e = a_e^{\text{нов}} - a_e^{\text{стар}}$ и $\delta f = f^{\text{нов}} - f^{\text{стар}}$ без изменения положения центра эллипсоида, то от этого геодезические координаты наблюдателя изменятся на следующие величины [110, p. 15]:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_2 &= A_4\delta f + A_5\frac{\delta a_e}{a_e}, \\ \Delta\lambda_2 &= B_4\delta f + B_5\frac{\delta a_e}{a_e}, \\ \frac{\Delta H_2}{a_e} &= C_4\delta f + C_5\frac{\delta a_e}{a_e}. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Здесь

$$A_4 = \frac{1+W^2}{(1-e^2)^{1/2}} \sin\varphi\cos\varphi,$$

$$A_5 = \frac{W^2}{1-e^2} e^2 \sin\varphi\cos\varphi,$$

$$B_4 = B_5 = 0,$$

$$C_4 = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{W} \sin^2\varphi,$$

$$C_5 = -W$$

Геоцентрические координаты наблюдателя на новом референц-эллипсоиде получатся так:

$$\varphi^c = \varphi + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2,$$
$$\lambda^c = \lambda + \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2,$$
$$H^c = H + \Delta H_1 + \Delta H_2.$$

Полные приращения координат можно также представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi^c - \varphi = A_1\delta\Phi_0 + A_2\delta\Lambda_0 + A_3\frac{\delta h_0}{a_e} + A_4\delta f + A_5\frac{\delta a_e}{a_e}, \\ \Delta\lambda &= \lambda^c - \lambda = B_1\delta\Phi_0 + B_2\delta\Lambda_0 + B_3\frac{\delta h_0}{a_e} + B_4\delta f + B_5\frac{\delta a_e}{a_e}, \qquad (2.122) \\ \frac{\Delta H}{a_e} &= \frac{H^c - H}{a_e} = C_1\delta\Phi_0 + C_2\delta\Lambda_0 + C_3\frac{\delta h_0}{a_e} + C_4\delta f + C_5\frac{\delta a_e}{a_e}, \end{aligned}$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) те же, что и в уравнениях (2.120) и (2.121), и зависят только от параметров референц-эллипсоида и от координат наблюдателя и исходного пункта.

Величины $\Delta\Phi_0$ и $\Delta\Lambda_0 \cos\varphi_0$ — обычные компоненты *уклонения отвесной линии* соответственно в плоскости меридиана и первого вертикала исходного пункта, причем в геодезической системе координат эти величины ($\Delta\Phi_0$, $\Delta\Lambda_0\cos\varphi_0$) являются *астрономо-геодезическими уклонениями отвеса*. В геоцентрической системе ($\Delta\Phi_0^c$, $\Delta\Lambda_0^c\cos\varphi_0^c$) они представляют *абсолютные уклонения отвеса* или, поскольку они могут быть определены методами геодезической гравиметрии, *гравиметрические уклонения отвеса*. Таким образом, величины, входящие в формулы (2.122), т. е. $\delta\Phi_0$ и $\delta\Lambda_0\cos\varphi_0$, представляют разности между абсолютными и астрономо-геодезическими уклонениями отвеса.

Что же касается высот, то разность высот над эллипсоидом и над геоидом ($\Delta h_0 = H_0 - h_0$) представляет ондуляцию (отступление.— *Перев.*) геоида, которая относится либо к геодезическому (Δh_0), либо к геоцентрическому референц-эллипсоиду (Δh_0^c).

Влияние изменений геодезических координат на прямоугольные координаты u, v, w может быть учтено с помощью дифференциальных формул (1.68). С достаточной степенью точности можно записать, что

$$\begin{aligned}
\delta u_1 &= -N \sin\varphi \cos\lambda \Delta\varphi - N \cos\varphi \sin\lambda \Delta\lambda + \cos\varphi \cos\lambda \Delta H,\\
\delta v_1 &= -N \sin\varphi \sin\lambda \Delta\varphi + N \cos\varphi \cos\lambda \Delta\lambda + \cos\varphi \sin\lambda \Delta H,\\
\delta w_1 &= N \cos\varphi \Delta\varphi + \sin\varphi \Delta H.
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Поскольку изменения размеров и формы референц-эллипсоида, очевидно, не влияют на прямоугольные (геоцентрические.—*Перев.*) координаты пунктов на поверхности Земли, то, подставляя $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ и $\Delta H/a_e$ из (2.120) в (2.123), мы получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\delta u_1 &= \bar{A}_1 \delta\Phi_0 + \bar{A}_2 \delta\Lambda_0 + \bar{A}_3 \frac{\delta h_0}{a_e},\\
\delta v_1 &= \bar{B}_1 \delta\Phi_0 + \bar{B}_2 \delta\Lambda_0 + \bar{B}_3 \frac{\delta h_0}{a_e},\\
\delta w_1 &= \bar{C} \delta\Phi_0 + \bar{C}_2 \delta\Lambda_0 + \bar{C}_3 \frac{\delta h_0}{a_e},
\end{aligned} \tag{2.124}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{A}_i &= -A_i N \sin\varphi \cos\lambda - B_i N \cos\varphi \sin\lambda + C_i a_e \cos\varphi \cos\lambda,\\
\bar{B}_i &= -A_i N \sin\varphi \sin\lambda + B_i N \cos\varphi \cos\lambda + C_i a_e \cos\varphi \sin\lambda,\\
\bar{C}_i &= A_i N \cos\varphi + C_i a_e \sin\varphi.
\end{aligned}$$

После подстановки в эти выражения величин A_i, B_i, C_i ($i = 1 - 3$) из (2.120) коэффициенты $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$ и $\bar{C}_i$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\bar{A}_1 = M_0 \sin\varphi_0 \cos\lambda_0, && \bar{A}_2 = N_0 \cos\varphi_0 \sin\lambda_0, && \bar{A}_3 = a_e \cos\varphi_0 \cos\lambda_0,\\
&\bar{B}_1 = M_0 \sin\varphi_0 \sin\lambda_0, && \bar{B}_2 = -N_0 \cos\varphi_0 \cos\lambda_0, && \bar{B}_3 = a_e \cos\varphi_0 \sin\lambda_0,\\
&\bar{C}_1 = -M_0 \cos\varphi_0, && \bar{C}_2 = 0, && \bar{C}_3 = a_e \sin\varphi_0,
\end{aligned}$$

где индекс нуль относится к исходному пункту.

Сравнивая эти коэффициенты с коэффициентами уравнений (2.124) и (2.118), мы можем установить, что сдвиг начала координат в центр Земли изменяет прямоугольные координаты любого пункта на земной поверхности на постоянные величины:

$$\delta u_1 = u_e^c, \quad \delta v_1 = v_e^c, \quad \delta w_1 = w_e^c,$$

где u_e^c, v_e^c и w_e^c имеют тот же самый смысл, что и в формулах (2.118).

Перенос в центр Земли и ожидаемые изменения в размерах и форме референц-эллипсоида не влияют на справедливость уравнений Лапласа, поэтому изменения углов в триангуляционной сети будут по-прежнему определяться этими уравнениями и нового уравновешивания сети не потребуется. Но, с другой стороны, может появиться *ошибка масштаба*, которая может быть вызвана применением разных эталонов длины при измерении базисов в различных системах триангуляции. Эта ошибка масштаба будет влиять на прямоугольные координаты наблюдателя по направлениям координатных осей примерно пропорционально его удалению от исходного пункта. Кроме этой ошибки масштаба, имеют место эффекты, вызываемые ошибками астрономического азимута или долготы исходного пункта, которые через уравнение Лапласа влияют на исходный геодезический азимут, т. е. на ориентацию эллипсоида.

Эти малые возможные эффекты могут изменить прямоугольные координаты на следующие величины:

$$\begin{aligned} \delta u_2 &= \bar{A}_4 \delta \bar{A}_0 + \bar{A}_5 \varepsilon, \\ \delta v_2 &= \bar{B}_4 \delta A_0 + \bar{B}_5 \varepsilon, \\ \delta w_2 &= \bar{C}_4 \delta \bar{A}_0 + \bar{C}_5 \varepsilon, \end{aligned} \tag{2.125}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_4 &= (v - v_0) \sin \varphi_0 - (w - w_0) \cos \varphi_0 \sin \lambda_0, \\ \bar{A}_5 &= u - u_0, \\ \bar{B}_4 &= -(u - u_0) \sin \varphi_0 + (w - w_0) \cos \varphi_0 \cos \lambda_0, \\ \bar{B}_5 &= v - v_0, \\ \bar{C}_4 &= (u - u_0) \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 - (v - v_0) \cos \varphi_0 \cos \lambda_0, \\ \bar{C}_5 &= w - w_0 \end{aligned}$$

и $\delta \bar{A}_0$ — возможная ошибка исходного азимута.

Комбинируя уравнения (2.124) и (2.125), мы получим изменения прямоугольных геодезических координат наблюдателя, вызываемые перемещением центра референц-эллипсоида в центр Земли ($\delta\Phi_0$, $\delta\Lambda_0$, δh_0), возможной ошибкой ориентации, как, например, ошибкой азимута ($\delta \bar{A}_0$), и ошибкой масштаба, вызываемой различием эталонов длины, используемых при измерениях базисных сторон в различных триангуляционных системах.

Формулы для полных изменений координат имеют вид

$$\begin{aligned} \delta u &= \overline{A}_1\delta\Phi_0+\overline{A}_2\delta\Lambda_0+\overline{A}_3\frac{\delta h_0}{a_e}+\overline{A}_4\delta\overline{A}_0+\overline{A}_5\varepsilon, \\ \delta v &= \overline{B}_1\delta\Phi_0+\overline{B}_2\delta\Lambda_0+\overline{B}_3\frac{\delta h_0}{a_e}+\overline{B}_4\delta\overline{A}_0+\overline{B}_5\varepsilon, \\ \delta w &= \overline{C}_1\delta\Phi_0+\overline{C}_2\delta\Lambda_0+\overline{C}_3\frac{\delta h_0}{a_e}+\overline{C}_4\delta\overline{A}_0+\overline{C}_5\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.126}$$

где коэффициенты $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i$, $\overline{C}_i$ при $i = 1, 2, 3$ те же, что и в уравнениях (2.124), а при $i = 4$ и 5 — те же, что в уравнениях (2.125).

2.5.1.2. Определение геоцентрических координат наблюдателя, если орбита ИСЗ известна

Описываемый ниже метод предложен Марковицем и специально предназначен для Луны и для спутников, орбиты которых точно известны. Точная орбита спутника обычно публикуется через несколько месяцев после наблюдения. Если вычисления координат наблюдателя откладываются до того времени, когда будут опубликованы эфемериды спутника, то этот метод также применим и для искусственных спутников Земли. При его описании мы ограничимся тем случаем, когда наблюдаются только направления на спутник.

В геоцентрической небесной системе координат X, Y, Z (описанной в разд. 2.2.1.2 и показанной на рис. 2.4) координаты наблюдателя определяются из уравнений (2.26):

$$\begin{aligned} \xi &= \rho\cos\varphi'\cos h^{\Upsilon}, \\ \eta &= \rho\cos\varphi'\sin h^{\Upsilon}, \\ \zeta &= \rho\sin\varphi', \end{aligned} \tag{2.26}$$

где ρ — геоцентрический радиус-вектор наблюдателя, φ' — геоцентрическая широта и h^{Υ} — часовой угол точки весеннего равноденствия, соответствующий геоцентрическому геодезическому меридиану наблюдателя (см. рис. 2.37). Значение h^{Υ} отличается от местного звездного времени на величину $\Delta\Lambda = \Lambda - \lambda$, выраженную в единицах времени.

Геоцентрические прямоугольные координаты наблюдателя можно записать так:

$$\begin{aligned} u &= \rho\cos\varphi'\cos\lambda, \\ v &= \rho\cos\varphi'\sin\lambda, \\ w &= \rho\sin\varphi'. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Здесь и в следующих разделах индексы c у геоцентрических координат опущены, потому что мы имеем дело лишь с геоцентрическими координатами, если иное специально не оговорено.

Преобразование координат наблюдателя ξ, η, ζ и u, v, w может быть осуществлено с помощью простого поворота вокруг оси $w = Z$ на часовой угол h_G^{Υ} точки весеннего равноденствия, соответствующий гринвичскому геодезическому меридиану (см. рис. 2.37):

$$\begin{aligned} \xi &= u\cos h_G^{\Upsilon} - v\sin h_G^{\Upsilon},\\ \eta &= u\sin h_G^{\Upsilon} + v\cos h_G^{\Upsilon},\\ \zeta &= w, \end{aligned} \tag{2.127}$$

где $h_G^{\Upsilon} = h^{\Upsilon} - \lambda$.

Координаты спутника в системе X, Y, Z выражаются первыми членами уравнений (2.24), в которых геоцентрический радиус r в случае наблюдений Луны может быть выражен через $\operatorname{cosec}\pi$, где π — эфемеридный параллакс Луны.

Топоцентрические координаты спутника выражаются формулами (2.27), где координаты X, Y, Z получаются по формулам (2.24), а ξ, η, ζ — по формулам (2.127). Умножив первые два уравнения (2.24) на $\sin\alpha^*$ и на $-\cos\alpha^*$ и сложив, получим в результате первое уравнение (2.128). Умножив все три уравнения соответственно на $\cos\alpha^*$, $\sin\alpha^*$ и $-\operatorname{ctg}\delta^*$ и сложив, получим второе уравнение (2.128)

$$\begin{aligned} -u\sin t_G^* - v\cos t_G^* &= r\cos\delta\sin(\alpha^*-\alpha),\\ u\cos t_G^* - v\sin t_G^* - w\cos\delta^* &= r\cos\delta\cos(\alpha^*-\alpha) - r\sin\delta\operatorname{ctg}\delta^*, \end{aligned} \tag{2.128}$$

где $t_G^* = h_G^{\Upsilon} - \alpha^*$.

Одно наблюдение (т. е. пара значений α^* и δ^*) дает два уравнения, связывающие три неизвестных u, v и w с геоцентрическими координатами объекта наблюдений (α, δ, r), которые вычисляются для момента времени $h^{\Upsilon} = \theta - \Delta\Lambda$, или же $h_G^{\Upsilon} = \theta - \Delta\Lambda - \lambda$, где θ — местное звездное время наблюдений. Два или более наблюдений позволяют решить уравнения (2.128) и найти неизвестные.

С помощью уравнений (2.27) можно также разработать второй, дифференциальный метод, который удобнее для численных расчетов, так как числа, с которыми мы в нем оперируем, меньше. В этом методе необходимо знать приближенные геоцентрические координаты, и в результате получаются поправки к приближенным координатам. Если геодезические координаты известны и используются в качестве приближенных геоцентрических координат, то поправки получаются идентичными тем, которые дают уравнения (2.126). Используя первые два уравнения (2.27), умножая их соответственно на $-\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и складывая результаты, мы получим первое уравнение (2.129). Умножая те же уравнения соответственно на $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и на $-\operatorname{ctg}\delta$ и складывая, мы придем ко второму уравнению (2.129):

$$\begin{aligned} r^*\cos\delta^*\sin(\alpha^*-\alpha) &= -u\sin t_G - v\cos t_G, \\ r^*\cos\delta^*\cos(\alpha^*-\alpha) &= -u\cos t_G + v\sin t_G + r\cos\delta, \end{aligned} \tag{2.129}$$

где $t_G = h_G^{\Upsilon} - \alpha$. Деля первое уравнение (2.129) на второе и третье уравнение (2.28) на второе (2.129), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha^*-\alpha) &= \frac{-u\sin t_G - v\cos t_G}{-u\cos t_G + v\sin t_G + r\cos\delta}, \\ \operatorname{tg}(\delta)^* &= \frac{\cos(\alpha^*-\alpha)(r\sin\delta - w)}{-u\cos t_G + v\sin t_G + r\cos\delta}. \end{aligned} \tag{2.130}$$

Кроме того, эти уравнения могут быть использованы для вычисления топоцентрического прямого восхождения α^* и склонения δ^* наблюдателя, если u, v, w, α, δ, r и t_G известны.

Освобождаясь в уравнениях (2.130) от знаменателей и дифференцируя их с учетом того, что переменными являются только u, v, w, α^* и δ^*, мы получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a_1\delta u + a_2\delta v &= a_3\delta\alpha^*, \\ b_1\delta u + b_2\delta v + b_3\delta w &= b_4\delta\alpha^* + b_5\delta\delta^*. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= -\sin t_G + \operatorname{tg}(\alpha^*-\alpha)\cos t_G, \\ a_2 &= -\operatorname{tg}(\alpha^*-\alpha)\sin t_G - \cos t_G, \\ a_3 &= \sec^2(\alpha^*-\alpha)(r\cos\delta - u\cos t_G + v\sin t_G), \\ b_1 &= \operatorname{tg}\delta^*\cos t_G, \\ b_2 &= -\operatorname{tg}\delta^*\sin t_G, \\ b_3 &= -\cos(\alpha^*-\alpha), \\ b_4 &= \sin(\alpha^*-\alpha)(r\sin\delta - w), \\ b_5 &= \sec^2\delta\,(r\cos\delta - u\cos t_G + v\sin t_G). \end{aligned}$$

Правые части уравнений (2.131) содержат разности прямых восхождений и склонений (наблюденные минус предвычисленные) $\delta\alpha^*$ и $\delta\delta^*$. Предвычисление координат ИСЗ для момента наблюдений производится путем использования уравнений (2.24)—

(2.29) с приближенными координатами наблюдателя. Левые части уравнений (2.131) содержат неизвестные поправки δu, δv и δw к приближенным координатам. Коэффициенты a_1, b_1 могут быть вычислены с достаточной точностью по приближенным данным, однако если первое приближение сделано очень плохо, то может потребоваться несколько приближений. Для определения трех неизвестных нужно иметь два или более наблюдений.

Поправки к принятой широте, долготе и азимуту могут быть вычислены по поправкам δu, δv, δw путем обращения уравнений (2.123).

Ниже приводится пример вычислений, составленный по Aeronautical Chart and Information Center (ACIC) Technical Report, № 86, pp. 38—43.

Пример

1. Прямой метод решения

Исходные данные

Наблюдение 1	Наблюдение 2
$\alpha = 17^h28^m53^s,333$	$\alpha = 6^h06^m33^s$
$\delta = 40°24'09''$	$\delta = 43°32'42''$
$r = 1,146815$ а.е.	$r = 1,126957$ а.е.
$\alpha^* = 14^h15^m58^s,75$	$\alpha^* = 9^h06^m00^s,02$
$\delta^* = 39°57'08'',07$	$\delta^* = 72°38'24'',21$
$h_G^{\Upsilon} = 24^h02^m50^s,79$	$h_G^{\Upsilon} = 11^h58^m09^s,47$

Из таблиц получено:

Наблюдение 1	Наблюдение 2
$t_G^* = 9^h46^m52^s,04$	$t_G^* = 2^h52^m09^s,45$
$\sin t_G^* = 0,548777237$	$\sin t_G^* = 0,682500802$
$\cos t_G^* = -0,835968627$	$\cos t_G^* = 0,730884844$
$\sin \delta = 0,648153129$	$\sin \delta = 0,688924071$
$\cos \delta = 0,761510027$	$\cos \delta = 0,724833515$
$(\alpha^* - \alpha) = -3^h12^m53^s,583$	$(\alpha^* - \alpha) = 2^h59^m27^s,02$
$\sin(\alpha^* = \alpha) = -0,745795003$	$\sin(\alpha^* - \alpha) = 0,705408843$
$\cos(\alpha^* - \alpha) = 0,666175513$	$\cos(\alpha^* - \alpha) = 0,708800652$
$\operatorname{ctg} \delta^* = 1,193772997$	$\operatorname{ctg} \delta^* = 0,312613361$

С этими данными из уравнений (2.128) получаем

$$
\begin{aligned}
-0{,}548777237u + 0{,}835968627v \qquad\qquad\qquad\quad &= -0{,}651311071,\\
-0{,}835968627u - 0{,}548777237v - 1{,}193772997\,w &= -0{,}305566988,\\
-0{,}682500802u - 0{,}730884844v \qquad\qquad\qquad\quad &= 0{,}576217590,\\
0{,}730884844u - 0{,}682500802v - 0{,}312613361w &= 0{,}336279009.
\end{aligned}
$$

Решения этих уравнений:

$$u = 0{,}005833871a_e;\quad v = -0{,}782937022a_e;\quad w = 0{,}619969093a_e$$

(где a_e — экваториальный радиус Земли).
Геоцентрические координаты пункта:

$$\varphi = 38°33'45'',78; \qquad \lambda = -90°25'36'',91.$$

2. Дифференциальный метод решения

В дополнение к исходным данным, приведенным выше, даются приближенные координаты наблюдателя:

$$
\begin{aligned}
u &= -0{,}005750000;\\
v &= -0{,}789900000;\\
w &= 0{,}619950000.
\end{aligned}
$$

Из таблиц получено

Наблюдение 1	Наблюдение 2
$t_G = 6^h33^m57^s,457$	$t_G = 5^h51^m36^s,47$
$\sin t_G = 0{,}989043181$	$\sin t_G = 0{,}999329646$
$\cos t_G = -0{,}147626508$	$\cos t_G = 0{,}036609552$
$\cos\delta = 0{,}761510027$	$\cos\delta = 0{,}724833515$
$\sin\delta = 0{,}648153129$	$\sin\delta = 0{,}688924071$
$(\alpha^*-\alpha) = -3^h12^m54^s,583$	$(\alpha^*-\alpha) = 2^h59^m27^s,02$
$\sin(\alpha^*-\alpha) = -0{,}745795003$	$\sin(\alpha^*-\alpha) = 0{,}705408843$
$\cos(\alpha^*-\alpha) = 0{,}666175513$	$\cos(\alpha^*-\alpha) = 0{,}808800652$
$\operatorname{tg}(\alpha^*-\alpha) = -1{,}119517287$	$\operatorname{tg}(\alpha^*-\alpha) = 0{,}99521472$
$\sec^2(\alpha^*-\alpha) = 2{,}253318953$	$\sec^2(\alpha^*-\alpha) = 1{,}99045235$
$\operatorname{tg}\delta^* = 0{,}83768021$	$\operatorname{tg}\delta^* = 3{,}19883964$
$\sec^2\delta^* = 1{,}70170814$	$\sec^2\delta^* = 11{,}23257504$

Вычисление α^* и δ^* для наблюдения 1 по формулам (2.130) дает

$$\operatorname{tg}(\alpha^* - \alpha) = \frac{-0,110923180}{0,091217061} = -1,216035458;$$

$$\alpha^* = 211°39'15'',128; \quad \delta\alpha^* = 0,040851016 \text{ рад};$$

$$\cos(\alpha^* - \alpha) = 0,635161721; \quad \operatorname{tg}\delta^* = 0,858991162;$$

$$\delta^* = 40°39'44'',234; \quad \delta\delta^* = -0,012392632 \text{ рад}.$$

Для наблюдения 2 точно так же получаем

$$\alpha^* = 143°00'46'',755; \quad \delta\alpha^* = 0,113571622 \text{ рад};$$

$$\delta^* = 74°09'55'',108; \quad \delta\delta^* = -0,26620623 \text{ рад}.$$

Коэффициенты уравнений (2.131) для наблюдения 1:

$$a_1 = -0,823772754; \quad a_2 = 1,254877447;$$

$$a_3 = 0,205541131 + 0,332649558\,\delta u + 2,228629851\,\delta v;$$

$$b_1 = -0,12363802; \quad b_2 = -0,828501888;$$

$$b_3 = -0,666175513;$$

$$b_4 = -0,092002565 + 0,745795020\,\delta w;$$

$$b_5 = 0,155224808 + 0,251217183\,\delta u + 1,683062847\,\delta v.$$

Коэффициенты для наблюдения 2:

$$a_1 = -0,962895280; \quad a_2 = -1,031157127;$$

$$a_3 = 0,055127990 - 0,072869565\,\delta u + 1,989118050\,\delta v;$$

$$b_1 = 0,117108086; \quad b_2 = -3,196695254;$$

$$b_3 = -0,708800652;$$

$$b_4 = 0,110352609 - 0,705408840\,\delta w;$$

$$b_5 = 0,311099780 - 0,411219518\,\delta u + 11,225045283\,\delta v.$$

Уравнения (2.131) имеют здесь следующий вид:

$$-0,837361828\,\delta u + 1,163835657\,\delta v = 0,008396564;$$

$$-0,120550559\,\delta u - 0,807644309\,\delta v - 0,696641996\,\delta w = -0,005682042;$$

$$-0,971178482\,\delta u - 0,805050853\,\delta v = -0,006266490;$$

$$0,106161166\,\delta u - 2,897877564\,\delta v - 0,788985620\,\delta w = -0,020825633.$$

Решение этих уравнений дает следующие поправки к приближенным координатам:

$\delta u = 0{,}000297675a_e$; $\delta v = 0{,}007365036a_e$; $\delta w = -0{,}000536223a_e$.

Прибавляя их алгебраически к принятым приближенным координатам, мы получаем $u = -0{,}005452325a_e$; $v = -0{,}782534863a_e$; $w = 0{,}619413777a_e$. Используя эти величины в качестве приближенных координат u, v и w, во втором приближении мы получим следующие поправки и координаты:

$$\delta u = -0{,}000379847a_e;\ \delta v = -0{,}000402620a_e;\ \delta w = 0{,}000553518a_e;$$
$$u = -0{,}005832172a_e;\quad v = -0{,}782937484a_e;\quad w = 0{,}619967295a_e;$$

Третье приближение дает следующие значения:

$$\delta u = 0{,}000000064a_e;\quad \delta v = 0{,}000001631a_e;\quad \delta w = 0{,}000001543a_e;$$
$$u = -0{,}005832108a_e;\quad v = -0{,}782935853a_e;\quad w = 0{,}619968838a_e.$$

Геоцентрические координаты наблюдателя:

$$\varphi = 38°33'45'',89;\qquad \lambda = -90°25'36'',44.$$

2.5.1.3. Влияние ошибок принятых данных на предвычисленные топоцентрические координаты спутника (уравнения погрешностей)

Если орбита спутника известна лишь приближенно или неизвестна вообще, то решение, изложенное выше, непригодно. Прежде чем искать решение для этого случая, мы исследуем влияние ошибок принятых данных, включая параметры орбиты, на предвычисленные топоцентрические координаты спутника (направление и расстояние).

Согласно третьему закону Кеплера (2.22), после дифференцирования мы получим

$$\delta\bar{n} = -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}}{a}\,\delta a. \tag{2.132}$$

Уравнение (2.20) дает выражение

$$\overline{M} = \overline{M}_0 + \bar{n}\,(t - T_0),$$

которое после дифференцирования приводит к формуле

$$\delta\overline{M} = \delta\overline{M}_0 + (t - T_0)\,\delta\bar{n}$$

или после подстановки $\delta\bar{n}$ из (2.132) — к формуле

$$\delta\overline{M} = \delta\overline{M}_0 + \frac{3\bar{n}\,(t - T_0)}{2a}\,\delta a. \tag{2.133}$$

Уравнение Кеплера (2.14) после дифференцирования приводится к выражению

$$\delta\overline{M}=\delta E\,(1-e\cos E)-\delta e\sin E.$$

Отсюда после подстановки $r/a=1-e\cos E$ [см. уравнение (2.12)] получается

$$\delta E=\delta\overline{M}\frac{a}{r}+\delta e\,\frac{a}{r}\sin E.$$

Вместе с (2.133) это дает

$$\delta E=\frac{a}{r}\,\delta M_0-\frac{3\bar{n}\,(t-T_0)}{2r}\,\delta a+\frac{a}{r}\,\sin E\,\delta e. \tag{2.134}$$

Уравнения (2.11) после дифференцирования принимают вид

$$\delta x=\frac{x}{a}\,\delta a-a\sin E\delta E-a\delta e,$$

$$\delta y=\frac{y}{a}\,\delta a+b\cos E\delta E-\frac{a^2e\sin E}{b}\,\delta e.$$

Подставив сюда δE из (2.134), мы получим

$$\begin{aligned}\delta x&=-\frac{a^2}{r}\sin E\delta\overline{M}_0+\left[\frac{x}{a}-\frac{3a\bar{n}\,(t-T_0)}{2r}\sin E\right]\delta a-\\&\qquad-\left(\frac{a^2}{r}\sin^2 E+a\right)\delta e,\\ \delta y&=\frac{ab}{r}\cos E\delta M_0+\left[\frac{y}{a}-\frac{3b\bar{n}\,(t-T_0)}{2r}\cos E\right]\delta a+\\&\qquad+\left(\frac{ab}{r}\sin E\cos E-\frac{a^2e}{b}\sin E\right)\delta e.\end{aligned} \tag{2.135}$$

Это изменения плоских эллиптических координат x, y, вызываемые изменениями элементов орбиты M_0, a и e.

Чтобы оценить изменения геоцентрических пространственных небесных прямоугольных координат, вызываемые изменениями элементов орбиты, мы должны дифференцировать первое из уравнений (2.25). Обозначая направляющие косинусы (xX), (yY) и т. д., мы получаем

$$\begin{aligned}\delta(xX)&=(yX)\,\delta\omega-(xY)\,\delta\Omega+(xZ)\sin\Omega\,\delta i,\\ \delta(xY)&=(yY)\,\delta\omega+(xX)\,\delta\Omega-(xZ)\cos\Omega\delta i,\\ \delta(xZ)&=(yZ)\,\delta\omega\qquad\qquad+\sin\omega\cos i\delta i,\\ \delta(yX)&=-(xX)\,\delta\omega-(yY)\,\delta\Omega+(yZ)\sin\Omega\delta i,\\ \delta(yY)&=-(xY)\,\delta\omega+(yX)\,\delta\Omega-(yZ)\cos\Omega\delta i,\\ \delta(yZ)&=-(xZ)\,\delta\omega\qquad\qquad+\cos\omega\cos i\delta i.\end{aligned} \tag{2.136}$$

Из уравнений (2.24) находим изменения координат X, Y, Z:

$$\begin{aligned} \delta X &= (xX)\,\delta x + (yX)\,\delta y + x\delta\,(xX) + y\delta\,(yX), \\ \delta Y &= (xY)\,\delta x + (yY)\,\delta y + x\delta\,(xY) + y\delta\,(yY), \\ \delta Z &= (xZ)\,\delta x + (yZ)\,\delta y + x\delta\,(xZ) + y\delta\,(yZ). \end{aligned} \tag{2.137}$$

Из анализа уравнений (2.135) и (2.136) можно видеть, что поправки, выражаемые формулами (2.137), зависят от элементов $\overline{M}_0$, a, e, Ω, ω и i.

Поправки топоцентрических небесных прямоугольных координат спутника могут быть вычислены путем дифференцирования уравнений (2.26) или (2.127), если используются геоцентрические прямоугольные земные координаты. Из последних выражений мы получим

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \cos h_G^{\Upsilon}\,\delta u - \sin h_G^{\Upsilon}\,\delta v, \\ \delta\eta &= \sin h_G^{\Upsilon}\,\delta u + \cos h_G^{\Upsilon}\,\delta v, \\ \delta\zeta &= \delta w. \end{aligned} \tag{2.138}$$

Поправки топоцентрических координат могут быть найдены с помощью формул (2.27):

$$\begin{aligned} \delta X^* &= \delta X - \delta\xi, \\ \delta Y^* &= \delta Y - \delta\eta, \\ \delta Z^* &= \delta Z - \delta\zeta, \end{aligned} \tag{2.139}$$

где δX, δY и δZ получаются из формул (2.137) и $\delta\xi$, $\delta\eta$ и $\delta\zeta$ — из (2.138). Можно доказать, что эти поправки зависят от изменений M_0, a, e, Ω, ω, i, u, v и w.

Наконец, из формул (2.28), (2.29) и (2.139) мы можем вывести поправки топоцентрических координат спутника α^*, δ^* и расстояния r^*:

$$\begin{aligned} r^*\delta r^* &= X^*\delta X + Y^*\delta Y^* + Z^*\delta Z^*, \\ r^*\cos\delta^*\delta\alpha^* &= -\delta X^*\sin\alpha^* + \delta Y^*\cos\alpha^*, \\ r^*\delta\delta^* &= -\delta X^*\sin\delta^*\cos\alpha^* - \delta Y^*\sin\delta^*\sin\alpha^* + \delta Z^*\cos\delta^*. \end{aligned} \tag{2.140}$$

Подставляя уравнения (2.135) и (2.136) в (2.137), полученные результаты вместе с (2.138) в (2.139) и, наконец, результаты этой подстановки в (2.140), мы получим после приведения коэффициентов следующие соотношения между различными поправками координат:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha^* &= [\alpha^* a]\,\delta a + [\alpha^* e]\,\delta e + [\alpha^* \Omega]\,\delta\Omega + [\alpha^* i]\,\delta i + \\
&+ [\alpha^* \omega]\,\delta\omega + [\alpha^* \overline{M}_0]\,\delta\overline{M}_0 + [\alpha^* u]\,\delta u + \\
&+ [\alpha^* v]\,\delta v + [\alpha^* w]\,\delta w, \\
\delta\delta^* &= [\delta^* a]\,\delta a + [\delta^* e]\,\delta e + [\delta^* \Omega]\,\delta\Omega + [\delta^* i]\,\delta i + \\
&+ [\delta^* \omega]\,\delta\omega + [\delta^* \overline{M}_0]\,\delta\overline{M}_0 + [\delta^* u]\,\delta u + \\
&+ [\delta^* v]\,\delta v + [\delta^* w]\,\delta w, \\
\delta r^* &= [r^* a]\,\delta a + [r^* e]\,\delta e + [r^* \Omega]\,\delta\Omega + [r^* i]\,\delta i + \\
&+ [r^* \omega]\,\delta\omega + [r^* \overline{M}_0]\,\delta M_0 + [r^* u]\,\delta u + \\
&+ [r^* v]\,\delta v + [r^* w]\,\delta w,
\end{aligned} \tag{2.141}$$

где, например, символ $[\alpha^* a]$ означает $\partial\alpha^*/\partial a$. Эта производная вычисляется путем приведения всех коэффициентов при δa в уравнениях (2.135)—(2.140). Все 27 коэффициентов имеют следующий вид:

$$[\alpha^* a] = \frac{\sec\delta^*}{r^*}(-\bar{A}\sin t_G^* - \bar{B}\cos t_G^*),$$

$$[\alpha^* e] = \frac{\sec\delta^*}{r^*}(-\bar{D}\sin t_G^* - \bar{E}\cos t_G^*),$$

$$[\alpha^* \Omega] = \frac{\bar{A}r}{r^*}\sec\delta^*(-\sin t_G \sin t_G^* + \cos t_G \cos t_G^*),$$

$$[\alpha^* i] = \frac{r}{r^*}\sec\delta^*(-G\sin t_G^* - H\cos t_G^*),$$

$$[\alpha^* \omega] = \frac{r}{r^*}\sec\delta^*(-E\sin t_G^* - F\cos t_G^*),$$

$$[\alpha^* \overline{M}_0] = \frac{\sec\delta^*}{r^*}[-(CE - D\cos t_G)\sin t_G^* - (CF - D\sin t_G)\cos t_G^*,$$

$$[\alpha^* u] = \frac{-1}{r}\sec\delta^*\sin t_G^*,$$

$$[\alpha^* v] = \frac{-1}{r^*}\sec\delta^*\cos t_G^*,$$

$$[\alpha^* w] = 0,$$

$$[\delta^* a] = \frac{1}{r^*}(\bar{A}\sin\delta^*\cos t_G^* - \bar{B}\sin\delta^*\sin t_G^* + \bar{C}\cos\delta^*),$$

$$[\delta^* e] = \frac{1}{r^*}(\bar{D}\sin\delta^*\cos t_G^* - \bar{E}\sin\delta^*\sin t_G^* + \bar{F}\cos\delta^*),$$

$$[\delta^* \Omega] = Ar\,\frac{\sin\delta^*}{r^*}(-\sin t_G\cos t_G^* + \cos t_G\sin t_G^*),$$

$$[\delta^* i] = \frac{r}{r^*}\left[(G\cos t_G^* - H\sin t_G^*)\sin\delta^* + \cos i \sin\bar{v}\cos\delta^*\right],$$

$$[\delta^*\omega] = \frac{r}{r^*}\left[(E\cos t_G^* - F\sin t_G^*)\sin\delta^* + \sin i\cos\bar{v}\cos\delta^*\right],$$

$$[\delta^*\overline{M}_0] = \frac{1}{r^*}\Big\{\left[(CE - D\cos t_G)\cos t_G^* - (CF + D\sin t_G)\sin t_G^*\right]\sin\delta^* +$$
$$+ \left(C\cos\bar{v} + \frac{D}{A}\sin\bar{v}\right)\sin i\cos\delta^*\Big\},$$

$$[\delta^* u] = \frac{1}{r^*}\sin\delta^*\cos t_G^*,$$

$$[\delta^* v] = \frac{-1}{r^*}\sin\delta^*\sin t_G^*,$$

$$[\delta^* w] = \frac{-1}{r^*}\cos\delta^*,$$

$$[r^* a] = -(\bar{A}\cos t_G^* - \bar{B}\sin t_G^*)\cos\delta^* + \bar{C}\sin\delta^*,$$

$$[r^* e] = -(\bar{D}\cos t_G^* - \bar{E}\sin t_G^*)\cos\delta^* + \bar{F}\sin\delta^*,$$

$$[r^*\Omega] = Ar\cos\delta^*(-\cos t_G\sin t_G^* + \sin t_G\cos t_G^*),$$

$$[r^* i] = -r\left[(G\cos t_G^* + H\sin t_G^*)\cos\delta^* - \cos i\sin\bar{v}\sin\delta^*\right],$$

$$[r^*\omega] = -r\left[(E\cos t_G^* - F\sin t_G^*)\cos\delta^* - \sin i\cos\bar{v}\sin\delta^*\right],$$

$$[r^*\overline{M}_0] = \left[(CE - D\cos t_G^*) + (CF + D\sin t_G)\sin t_G^*\right]\cos\delta^* +$$
$$+ \left(C\cos\bar{v} + \frac{D}{A}\sin\bar{v}\right)\sin i\sin\delta^*,$$

$$[r^* u] = -\cos\delta^*\cos t_G^*,$$

$$[r^* v] = \cos\delta^*\sin t_G^*,$$

$$[r^* w] = -\sin\delta^*.$$

В этих коэффициентах символы от A до H и от $\bar{A}$ до $\bar{F}$ имеют следующие значения:

$$A = \cos\bar{v}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\bar{v}\cos^2 i} = \cos\delta,$$

$$B = \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r},$$

$$C = \frac{a\sin f}{\sin E},$$

$$D = A\frac{a^2 e\sin E}{r},$$

$$E = \frac{\sin i}{2A}(\sin 2\bar{v}\sin i\cos t_G - 2\operatorname{ctg} i\sin t_G),$$

$$F=\frac{\sin i}{2A}(-\sin 2\bar{v}\sin i\sin t_G-2\operatorname{ctg} i\cos t_G),$$

$$G=\frac{\sin\bar{v}}{2A}(\sin 2i\sin\bar{v}\cos t_G+2\sin i\cos\bar{v}\sin t_G),$$

$$H=\frac{\sin\bar{v}}{2A}(-\sin 2i\sin\bar{v}\sin t_G+2\sin i\cos\bar{v}\cos t_G),$$

$$\bar{A}=-\left\{CE(t-T_0)+\left[\frac{2Ar}{3\bar{n}}-D(t-T_0)\right]\cos t_G\right\}\frac{3}{2}\frac{\bar{n}}{a},$$

$$\bar{B}=-\left\{CF(t-T_0)-\left[\frac{2}{3}\frac{Ar}{\bar{n}}-D(t-T_0)\right]\sin t_G\right\}\frac{3}{2}\frac{n}{a},$$

$$\bar{C}=-\left\{C(t-T_0)\cos\bar{v}-\left[\frac{2}{2}\frac{r}{\bar{n}}-\frac{D}{A}(t-T_0)\right]\sin\bar{v}\right\}\sin i\frac{3}{2}\frac{\bar{n}}{a},$$

$$\bar{D}=BEr\sin f+(aA\cos E-D\sin E)\cos t_G,$$

$$\bar{E}=BFr\sin f-(aA\cos E-D\sin E)\sin t_G,$$

$$\bar{F}=\left[Br\sin f\cos\bar{v}-\left(a\cos E-\frac{D}{A}\sin E\right)\sin\bar{v}\right]\sin i,$$

где $\bar{v}=f+\omega$, $t_G=h_G^{\Upsilon}-\alpha$ и $t_G^*=h_G^{\Upsilon}-\alpha^*$. Величина $h_G^{\Upsilon}=\theta-\Delta\Lambda$, где θ — местное звездное время, а $\Delta\Lambda$ поясняется в разд. 2.5.1.1.

Пример

В качестве примера составления уравнений погрешностей мы используем следующие данные для спутника:

1. Геодезические координаты наблюдателя:

$$\varphi=12°15'03'',$$
$$\lambda=-68°56'14''.$$

2. Момент наблюдений 18 декабря 1960 г.

$$t=23^{h}51^{m}47^{s},04\ \mathrm{UT},$$
$$h_G^{\Upsilon}=274°28'05''.$$

3. Элементы орбиты и координаты спутника:

$f=54°59'42''$,	$\bar{M}=45°56'04''$, $E=50°22'55''$,
$r=6{,}9944627\cdot 10^6$ *м*,	$e=0{,}10094346$,
$a=7{,}4756584\cdot 10^6$ *м*,	$\Omega=205°52'55''$,
$i=33°12'28''$,	$\omega=111°23'01''$,

$$T_0 = 23^h38^m06^s{,}27\ \mathrm{UT}\ \ 18\ \text{декабря}\ 1960\ \text{г.};$$
$$\bar{n} = 0{,}97677\ \textit{рад}/10^3\ \textit{сек},$$
$$\alpha = 14°25'15'', \qquad \delta = 7°24'39'',$$
$$\alpha^* = 355°49'12'', \qquad \delta^* = -30°51'13''.$$

С этими данными уравнения погрешностей будут иметь вид:

$$\delta\alpha^* = -1{,}06019\,\delta a + 11{,}367\,\delta e + 8{,}8622\,\delta\Omega + 1{,}0526\,\delta i +$$
$$+ 7{,}7486\,\delta\omega + 9{,}0712\,\delta\bar{M}_0 - 1{,}348109\,\delta u - 0{,}006778\,\delta v,$$
$$\delta\delta^* = 1{,}40395\,\delta a - 10{,}680\,\delta e - 1{,}3131\,\delta\Omega + 1{,}1011\,\delta i - 4{,}5438\,\delta\omega -$$
$$- 4{,}7378\,\delta\bar{M}_0 - 0{,}002984\,\delta u + 0{,}593530\,\delta v + 0{,}993554\,\delta w,$$
$$\delta r^* = 0{,}49335\,\delta a - 2{,}0059\,\delta e - 1{,}8993\,\delta\Omega - 1{,}0948\,\delta i + 0{,}68729\,\delta\omega +$$
$$+ 1{,}2413\,\delta\bar{M}_0 - 0{,}004316\,\delta u + 0{,}858469\,\delta v + 0{,}512846\,\delta w.$$

В этих уравнениях в качестве единиц используются мегаметры (10^6 *м*), килосекунды (10^3 *сек*) и радианы (*рад*).

Как было упомянуто в конце разд. 2.2.1.5, если гравитационная постоянная k^2M не считается точной, то орбита определяется по семи, а не по шести параметрам, и поэтому в уравнения (2.141) также должны включаться члены, вызываемые изменениями в $\bar{n}$. Члены, которые должны быть добавлены, — это

$$[\alpha^*\bar{n}]\,\delta\bar{n}, \qquad [\delta^*\bar{n}]\,\delta\bar{n}, \qquad [r^*\bar{n}]\,\delta\bar{n}.$$

Их коэффициенты могут быть вычислены так [см. уравнение (2.132)]:

$$[\alpha^*\bar{n}] = -\frac{2}{3}\,\frac{a}{\bar{n}}\,[\alpha^* a],$$
$$[\delta^*\bar{n}] = -\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{\bar{n}}\,[\delta^* a],$$
$$[r^*\bar{n}] = -\frac{2}{3}\,\frac{a}{\bar{n}}\,[r^* a].$$

С исходными данными, использованными в приведенном выше примере, эти три дополнительные поправки будут следующие:

$$\delta\alpha^* = 5{,}4094\,\delta\bar{n}, \quad \delta\delta^* = -7{,}1634\,\delta\bar{n}, \quad \delta r^* = -2{,}5172\,\delta\bar{n}.$$

Уравнения (2.141) связывают изменения в топоцентрическом прямом восхождении, склонении и расстоянии ИСЗ с изменениями шести элементов орбиты и геодезических координат наблюдателя. Изменения высоты, азимута или направляющих косинусов углов, образованных вектором с осями север-юг и восток-запад, могут быть выведены соответственно с помощью уравнений (2.30) и (2.32). Эти случаи включают визуальные, фотографические, фотоэлектрические, дальномерные и интерференционные наблюдения. Уравнения (2.141) используются как основа для выводов в следующем разделе.

2.5.1.4. Определение геоцентрических координат наблюдателя, если элементы орбиты известны приближенно (возможность определения ошибок в принятых исходных данных)

Если рассматривать уравнения (2.141) как уравнения погрешностей, левые части которых представляют разности наблюденных и предвычисленных данных, то можно видеть, что их правые части содержат шесть неизвестных поправок к принятым элементам орбиты и три поправки к геодезическим координатам наблюдателя δu, δv и δw. При анализе уравнений (2.126) можно установить, что эти три поправки координат δu, δv и δw могут быть преобразованы в пять неизвестных, определяющих сдвиги и ориентацию референц-эллипсоида и возможную ошибку масштаба триангуляции. Фактически уравнения (2.141) содержат всего 11 неизвестных.

Эти уравнения погрешностей можно использовать для улучшения орбиты, а также для определения поправок к координатам наблюдателя и, кроме того, к геодезическим данным. Здесь обсуждение ограничивается случаем, когда наблюдаются только направления и каждое наблюдение дает составляющие направления, если специально не оговорены исключения из этого правила.

Как мы раньше уже упоминали, левые части уравнений погрешностей могут быть определены путем сравнения предвычисленных и наблюденных направлений. Предварительные направления вычисляются для моментов наблюдений по принятым мгновенным элементам орбиты и принятым геоцентрическим координатам наблюдателя, как описано в разд. 2.2.1.3. Что касается наблюдений, то в идеальном случае они должны быть выполнены через короткие и по возможности равные интервалы времени, потому что это облегчает анализ. Если наблюдения выполнены через неравные интервалы времени, то можно применить точную интерполяцию. Наблюдения должны быть приведены к пунктам, как показано в разд. 2.4.

Чтобы улучшить элементы орбиты, мы должны вначале, *на первом этапе*, предположить, что геоцентрические координаты наблюдателя известны, так что уравнения наблюдений (погрешностей.— *Перев.*) содержат лишь шесть неизвестных поправок к мгновенным элементам орбиты. Далее предположим (в случаях 1—3, описываемых ниже), что имеется соответствующая общая теория движения ИСЗ по орбите и что с достаточной точностью известны физические параметры (гравитационные постоянные, плотность атмосферы и т. д.), необходимые для применения теории. Эти последние предположения в данное время, по-видимому, подтверждаются. Последующие операции будут в основном зависеть от распределения имеющихся наблюдений вдоль орбиты. Здесь возможны различные решения, но все они основаны на использовании приближенных оскулирующих элементов орбиты на заданную эпоху T.

1. Наиболее общий случай будет иметь место тогда, когда наблюдения распределены вдоль орбиты совершенно случайно и интервал времени, используемый при анализе, не имеет значения. В этом случае для получения элементов орбиты для момента наблюдения t принятые на начальную эпоху T оскулирующие элементы орбиты должны быть исправлены с учетом векового, долго- и короткопериодических изменений для интервала $t - T$, как показано в разд. 2.2.2. Отдельные предвычисленные значения сравниваются с наблюдениями и дают поправки к приближенным элементам орбиты на эпоху T. Необходимо иметь три или более наблюдений. Если одновременно также измеряются и расстояния до ИСЗ, то как минимум достаточно иметь два наблюдения.

2. Если наблюдения хорошо распределены по истинной аномалии и исследуется один или более *полных* периодов обращения, то поскольку в этом случае короткопериодические возмущения в среднем исключаются, то принятые на эпоху T оскулирующие элементы приводятся ко времени наблюдений t путем учета только вековых и долгопериодических изменений.

3. Если имеются хорошо распределённые наблюдения ИСЗ для одного или более периодов полных оборотов линии апсид (как минимум около 20 дней в случае $i = 0°$ и около 90 дней в случае $i = 90°$), то в этом случае принятые начальные элементы орбиты должны быть исправлены лишь за вековые возмущения, так как долгопериодические возмущения усреднятся. Если же наблюдения распределены по истинной аномалии недостаточно хорошо, то тогда также должны быть учтены и короткопериодические члены.

4. Другой подход к решению задачи — это исправление принятых исходных элементов орбиты за вековые и долгопериодические возмущения с помощью эмпирических формул, описанных в разд. 2.2.3, например выражений (2.91). Коэффициенты P, S, E и H (или поправки к их принятым значениям) в уравнениях погрешностей должны здесь считаться неизвестными. Таким образом, неизвестные, которые должны быть получены,— это поправки к оскулирующим элементам орбиты на эпоху T и коэффициенты

P, S, E и H (или их поправки). Естественно, что если долго- или короткопериодические возмущения или те и другие вместе исключены в ходе анализа путем выбора надлежащей продолжительности и распределения наблюдений, то число неизвестных может быть значительно уменьшено. Если, например, для представления вековых и долгопериодических вариаций элементов орбиты применяются уравнения (2.91), то общее число неизвестных будет 26, в том числе 6 поправок начальных элементов орбиты и 20 поправок коэффициентов. Естественно, что короткопериодические возмущения должны быть исключены из наблюдений до их анализа.

Так как вполне возможно, что при использовании одного из четырех описанных выше методов число неизвестных будет меньше, чем число имеющихся уравнений, то их надо решать путем уравновешивания по способу наименьших квадратов.

На втором этапе мы принимаем, что элементы орбиты известны и надо вычислить поправки к принятым геоцентрическим координатам наблюдателя. Известными считаются элементы орбиты, которые определены на первом этапе. Что же касается наблюдателей, то мы принимаем, что их приближенные координаты, использованные как известные величины на первом этапе,— это геодезические координаты, вычисляемые из сетей триангуляции или трилатерации, отнесенных к одним и тем же данным, и что ошибки координат в их собственной системе пренебрежимо малы. На втором этапе должны быть получены обусловленные этим предположением поправки, вызываемые перемещением референц-эллипсоида к центру Земли, его ориентацией и возможной ошибкой масштаба, т. е. всего пять поправок [см. уравнения (2.141) и (2.126)]. Их решение зависит от распределения пунктов наблюдений. Здесь возможны два случая, которые следует рассмотреть.

1. Если все пункты относятся к одной и той же геодезической сети, то неизвестных будет пять. Чтобы решение было возможным, нужно иметь три или более наблюдений на одном или нескольких пунктах. Однако число неизвестных может быть уменьшено. Прежде всего можно исключить из уравнений погрешностей малую поправку за масштаб, так как маловероятно, что в этом методе она может быть определена с достаточной точностью. Далее, в надежной системе триангуляции мы можем принять, что астрономический азимут и долгота в исходном пункте достаточно точны и поэтому референц-эллипсоид правильно ориентирован относительно геоида, что исключает поправки за ориентацию. Таким образом, число неизвестных уменьшается до трех, и для определения переноса центра эллипсоида в центр Земли достаточно иметь два или более наблюдений на одном или нескольких пунктах. Но перенос центра эллипсоида в центр Земли может быть сделан лишь в том случае, если наблюдения хорошо распределены

вдоль всей орбиты. Если же в обработку включается лишь малая часть орбиты, то смещение будет получено относительно фокуса эллипса, наилучшим образом представляющего охваченную наблюдениями часть орбиты, который не обязательно будет совпадать с центром Земли. Этот эффект может быть учтен путем вычисления сдвига по наблюдениям, выполненным на различных участках орбиты или на различных орбитах.

2. Если все пункты определены в различных геодезических системах, астрономические координаты всех исходных пунктов отнесены к геоиду и к средней оси вращения Земли, а ошибки ориентации и масштаба отсутствуют, т. е. все системы точнейшим образом определены, то число неизвестных будет $3d$, где d — число используемых систем.

Если мы хотим получить какую-либо определенную геодезическую систему, то число неизвестных, определяющих смещение, по-прежнему будет $3d$, но окончательные геодезические координаты пунктов должны быть исправлены за переход к размерам и форме принятого геоцентрического референц-эллипсоида с помощью уравнений (2.121). Здесь опять нужно заметить, что если наблюдения сосредоточены на коротком участке орбиты, то получится смещение не по отношению к центру Земли, а по отношению к фокусу наилучшим образом подходящего эллипса, и поэтому, даже если относительные положения систем будут известны, общая геоцентрическая система не будет получена.

Если имеются сомнения в точности ориентации или масштаба какой-либо из систем, то рекомендуется сохранить соответствующие поправочные члены в уравнениях погрешностей. Даже если мы не можем надеяться получить хорошие поправки для этих величин из уравновешивания, их влияние может быть определено путем анализа.

Чтобы получить окончательное решение, можно использовать первый и второй этапы в различное время и попеременно, т. е. сначала считать пункты фиксированными и вычислять поправки к принятой орбите, а затем, принимая исправленную орбиту за фиксированную, вычислять поправки к координатам станций. Затем, используя новые координаты наблюдателей, вновь вычислять поправки к орбитам и т. д.

Совместное вычисление путем уравновешивания неизвестных обоих видов также возможно, но из-за большого числа неизвестных такие вычисления нельзя признать рентабельными. Из изложенного следует, что точность определения орбит ИСЗ и положений наблюдателя зависит: от относительного положения пунктов и спутников во время наблюдений, от распределения наблюдений вдоль орбиты, от точности элементов орбиты (если они определяются отдельно), от правильности используемой теории орбит и, естественно, как обычно, от точности определения координат и моментов времени наблюдений.

Для более детального ознакомления с проблемой читатель отсылается к работам Вейса [158, pp. 122—128, 135—145] и Каулы [88, pp. 241—252]. По вопросам различных методов анализа доплеровских измерений см. статьи Хемптона [70] и Котельникова и др. [95]. Приближенный метод анализа радионаблюдений любого типа описан Гаррисом и Джастровым [71]. Об анализе интерференционных измерений см. статью Сайри [134].

2.5.1.5. Определение геоцентрических координат наблюдателя, если орбита ИСЗ неизвестна (космическая триангуляция)

В этом варианте спутник используется для триангуляции или трилатерации исключительно как марка в пространстве, положение которой определяется по методу одновременных засечек по меньшей мере с трех (шести) известных пунктов, если измеряются только направления (расстояния), или по меньшей мере с двух станций, если измеряются направления и расстояния [см. уравнения (2.141)]. Если спутник наблюдается более чем с минимального числа известных пунктов, то его координаты могут быть вычислены путем уравновешивания по методу наименьших квадратов. Координаты неизвестного пункта (пунктов) могут быть определены из одновременных засечек ИСЗ. Минимально достаточно одного наблюдения ИСЗ, если измеряются направления и расстояния, но если измеряются только направления (расстояния), то необходимо по меньшей мере два (три) наблюдения.

Все наблюдения с известных и неизвестных пунктов должны быть выполнены одновременно, что может быть достигнуто, например, в случае фотографических наблюдений, с помощью радиосинхронизованных систем затворов или еще проще с помощью вспыхивающих спутников, таких как Анна. Одновременность должна относиться к моменту, когда свет (или радиосигнал) излучается со спутника. Фиксация времени необходима только для определения постоянных фотопластинки по звездам сравнения, если наблюдения выполняются фотографическими методами.

Поскольку орбита ИСЗ при этом не играет роли, то данный метод может быть использован также и для неорбитальных объектов, таких как вспыхивающие источники света, устанавливаемые на ракетах, самолетах или воздушных шарах.

Метод, предложенный Вяйсяля (он назвал его астрономической триангуляцией), привлекает в настоящее время большое внимание. Это объясняется его очевидными преимуществами по сравнению с классической триангуляцией, такими как исключение основной части влияния рефракции путем использования относительно больших высот целей и большая дальность действия. В дополнение к применениям, описанным выше, он используется также для калибровки электронных систем слежения за ракетами, для определения азимутов в сетях Хиран путем наблюдения световых вспышек на самолете, пересекающем линию и т. д.

За исключением того факта, что в фотографическом методе вспышки на спутниках фотографируются на фоне звезд и поэтому их направления определяются так, как описано в разд. 2.4.1, этот метод не имеет большого отношения к спутниковой геодезии. По этой причине теория обработки и уравновешивания для этого метода пространственной триангуляции здесь не приводится, и читатель вновь отсылается к весьма обширной литературе [38, 39, 47—54, 68, 69, 100, 102, 131, 139—141, 145, 147, 148, 149 (pp. 129—135), 153 и др.].

2.5.2. Динамическое использование спутников

2.5.2.1. Потенциал силы тяжести

Потенциал силы тяжести представляет собой сумму потенциала силы притяжения и потенциала центробежной силы. Он обозначается через W, так что

$$W = V + V', \tag{2.142}$$

где потенциал силы притяжения V может быть получен по формуле (2.55), тогда как потенциал центробежной силы определяется [74, p. 34] как

$$V' = \frac{\omega_e^2 r^2}{2} \sin^2 \beta = \frac{\omega_e^2 r^2}{2} (1 - \mu^2),$$

где обозначения соответствуют рис. 2.6; $\mu = \cos \beta = \sin \varphi'$, как в уравнении (2.55), и ω_e — угловая скорость вращения Земли. Подставляя V' и (2.55) в (2.142), мы получаем геопотенциальную функцию

$$W = \frac{k^2 M}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^n \left[J_n P_n (u) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm} \cos m\lambda' + \right.\right.$$
$$\left.\left. + K_{nm} \sin m\lambda') \, P_{nm} (\mu) \right] + \frac{\omega_e^2 r^3}{2k^2 M} (1 - \mu^2) \right\}, \tag{2.143}$$

или

$$W = \frac{k^2 M}{a_e} \left\{ \frac{a_e}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{n+1} \left[J_n P_n (\mu) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm} \cos m\lambda' + \right.\right.$$
$$\left.\left. + K_{nm} \sin m\lambda') \, P_{nm} (\mu) \right] + \frac{q}{2} \left(\frac{r}{a_e} \right)^2 (1 - \mu^2) \right\}, \tag{2.144}$$

где

$$q = \frac{\omega_e^2 a_e^3}{k^2 M}.$$

Эквипотенциальная (уровенная.— *Перев.*) поверхность $W = \text{const}$ называется *поверхностью геопотенциала* (или геопом). Уровенная поверхность, которая совпадает с невозмущенным средним уровнем океанов, является поверхностью геоида ($W = W_g$); она обычно используется в геодезии как теоретическая поверхность Земли.

В простейшем случае, когда предполагается, что Земля обладает осевой симметрией, уравнение (2.144) можно упростить так:

$$W = \frac{k^2 M}{a_e} \left\{ \frac{a_e}{r} - \left[\left(\frac{a_e}{r} \right)^3 J_2 P_2 (\mu) + \left(\frac{a_e}{r} \right)^4 J_3 P_3 (\mu) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{a_e}{r} \right)^5 J_4 P_4 (\mu) + \ldots \right] + \frac{q}{2} \left(\frac{r}{a_e} \right)^2 (1 - \mu^2) \right\}.$$

Если мы просуммируем члены лишь до $n = 4$ или $n = 6$, то мы получим потенциал силы тяжести для нормализованной Земли, или, как его называют, *потенциал нормальной силы тяжести*, или *сферопотенциальную функцию*, обозначаемую через U. Таким образом,

$$U_4 = \frac{k^2 M}{a_e} \left\{ \frac{a_e}{r} - \left[\left(\frac{a_e}{r} \right)^3 J_2 P_2 (\mu) + \left(\frac{a_e}{r} \right)^4 J_3 P_3 (\mu) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{a_e}{r} \right)^5 J_4 P_4 (\mu) \right] + \frac{q}{2} \left(\frac{r}{a_e} \right)^2 (1 - \mu^2) \right\}, \qquad (2.145)$$

где индекс 4 у U показывает, что мы суммируем члены лишь до $n = 4$.

Эквипотенциальная поверхность $U = \text{const}$ называется *сферопотенциальной поверхностью* или *сферопом* (поверхностью уровенного сфероида.— *Перев.*). Сферопотенциальная поверхность, которая имеет ту же постоянную, что и геоид, т. е. для которой $U = W_g$, представляет поверхность *нормального сфероида*. Сфероп, объем которого совпадает с объемом геоида, может быть назван *земным сферопом* (земным сфероидом.— *Перев.*). Можно показать, что если пренебрегать членами сжатия выше второй степени, то поверхность сфероида совпадает с поверхностью эллипсоида вращения.

Разность геопотенциала и сферопотенциала (т. е. действительного и нормального потенциалов Земли.— *Перев.*) представляет *возмущающий потенциал*. Он обозначается через T и определяется так:

$$T_4 = W - U_4 = -\frac{k^2 M}{a_e} \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \times$$

$$\times \left[J_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm} \cos m\lambda' + K_{nm} \sin m\lambda') P_{nm}(\mu) \right], \quad (2.146)$$

где знак * показывает суммирование членов, не входящих ни в формулу (2.145), ни в формулу (2.146), т. е. суммирование членов, оставшихся после вычитания U_4 из W.

2.5.2.2. Сжатие земного сфероида *

Как мы отмечали раньше, формы сферопов очень похожи на форму соответствующих эллипсоидов, поэтому для некоторых геометрических исследований вместо них могут быть использованы эллипсоиды. Выбранный эллипсоид может совпадать со сферопом на экваторе и на полюсах, т. е. в этом случае их сжатия будут одинаковы, или они могут совпадать на широте 45°; в этом случае эллипсоид называется *уровенным эллипсоидом*.

Радиус кривизны любого меридионального сечения эллипсоида вращения выражается так [40, pp. 450—452]:

$$M = a_e \left[1 - f \cos^2 \beta - \frac{3}{2} f^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta - 0(f^3) \right].$$

Для сфероида с такими же значениями экваториального радиуса и сжатия он имеет вид

$$M_s = a_e \left[1 - f \cos^2 \beta - \left(\frac{5}{2} qf - 2f^2 - \frac{35}{8} J_4 \right) \sin^2 \beta \cos^2 \beta - 0(f^3) \right].$$

Разность их будет равна

$$M - M_s = a_e \left(\frac{5}{8} fq - \frac{7}{8} f^2 - \frac{35}{32} J_4 \right) \sin^2 2\beta + 0(f^3).$$

Она достигает максимальной величины при $\beta = \varphi' = 45°$.

Если обозначить отношение $(M - M_s)_{\max}/a_e$ через $\bar{k}$, то

$$\bar{k} = \frac{5}{8} fq - \frac{7}{8} f^2 - \frac{35}{32} J_4 + 0(f^3). \quad (2.147)$$

Для уровенного эллипсоида $\bar{k} = 0$.

---

* Нормального сфероида.— *Прим. перев.*

Для экватора ($\beta=90^\circ$, $a_e=r$), согласно уравнениям (2.145) и (2.43), мы получаем

$$U_{4e}=\frac{k^2M}{a_e}\left(1+\frac{1}{2}J_2-\frac{3}{8}J_4+\frac{q}{2}\right).$$

Для полюсов ($\beta=0^\circ$ или 180°; $r=b=a_e(1-f)$) находим

$$U_{4p}=\frac{k^2M}{a_e(1-f)}\left[1-\frac{1}{(1-f)^2}J_2\mp\frac{1}{(1-f)^3}J_3-\frac{1}{(1-f)^4}J_4\right],$$

где верхний знак члена, содержащего J_3, относится к северному полюсу ($\beta=0^\circ$), а нижний знак — к южному полюсу ($\beta=180^\circ$).

На поверхности сферопа потенциал имеет постоянное значение, поэтому

$$U_{4e}=U_{4p},$$

так что при $(1-f)^{-2}=1+2f+4f^2$ и $(1-f)^{-3}\approx(1-f)^{-4}\approx 1$ мы получим уравнение

$$\left(1+\frac{1}{2}J_2-\frac{3}{8}J_4+\frac{q}{2}\right)(1-f)=1-(1+2f+4f^2)J_2\mp J_3-J_4,$$

из которого, пренебрегая членами порядка J_4f, J_2f^2, мы получаем

$$f=\left[\frac{q}{2}(1-f)+\frac{3}{2}J_2f\right]+\frac{3}{2}J_2\pm J_3+\frac{5}{8}J_4+0(f^3). \quad (2.148)$$

Первый член этой формулы может быть вычислен по имеющимся значениям f, q и J_2, т. е. если $q=0{,}003461401$ ($k^2M = 3{,}986036\cdot10^{20}$ *см*^{3}/*сек*^{2}, $\omega_e^2=0{,}5317494\cdot10^{-8}$ *сек*$^{-2}$, $a_e = 6{,}37816\cdot10^8$ *см*), $f=1/298{,}3$, $J_2=0{,}00108250$, то уравнение (2.148) дает

$$f=0{,}001730342+\frac{3}{2}J_2\pm J_3+\frac{5}{8}J_4, \quad (2.148\text{a})$$

где опять верхний знак при J_3 относится к северному полушарию.

Сжатие, определяемое по формуле (2.148), относится к земному сфероиду, или к эллипсоиду вращения с тем же сжатием.

Если мы определяем сжатие соответствующего уровенного эллипсоида, то его можно найти по формуле (2.148) со значением J_4, взятым из уравнения (2.147), когда $\bar{k}=0$. Отсюда

$$J_4=\frac{4}{7}fq-\frac{4}{5}f^2.$$

Тогда по формуле (2.148) для уровенного эллипсоида получаем

$$f=\left[\frac{q}{2}(1-f)+\frac{5}{14}fq-\frac{1}{2}f^2+\frac{3}{2}J_2f\right]+\frac{3}{2}J_2+J_3+0(f^3), \quad (2.149)$$

что при параметрах, использованных выше, дает

$$f = 0{,}001728867 + \frac{3}{2} J_2 \pm J_3. \tag{2.149a}$$

Например, если $J_2 = 1082{,}48 \cdot 10^{-6}$; $J_3 = -2{,}562 \cdot 10^{-6}$ и $J_4 = -1{,}84 \cdot 10^{-6}$ [99], то по формуле (2.148 а) сжатие северного полушария сфероида или соответствующего эллипсоида получается 1/298,48. Сжатие южного полушария будет 1/298,02 и среднее значение, т. е. сжатие, для которого $J_3 = 0$, получается 1/298,25. Уравнение (2.149а) дает для сжатия уровенного эллипсоида (при $J_3 = 0$) значение 1/298,28.

По формулам (2.147) и (2.149) можно вычислить коэффициенты гармоник, соответствующие параметрам уровенного эллипсоида (при $J_3 = 0$):

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{2}{3} f - \frac{q}{3} + \frac{3}{7} qf - \frac{1}{3} f^2 + 0(f^3), \\ J_4 &= \frac{4}{7} fq - \frac{4}{5} f^2 + 0(f^3). \end{aligned} \tag{2.150}$$

Например, с параметрами Международного эллипсоида ($f = 1/297$; $q = 0{,}00346151$) мы получаем $J_2 = 1092{,}04 \cdot 10^{-6}$ и $J_4 = -2{,}412 \cdot 10^{-6}$.

Гармонические коэффициенты, соответствующие параметрам регулярного эллипсоида (совпадающего с нормальным сфероидом лишь на экваторе и на полюсах), имеют вид:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{2}{3} f - \frac{q}{3} + \frac{3}{7} qf - \frac{1}{3} f^2 + \frac{8}{21} \bar{k} + 0(f^3), \\ J_4 &= \frac{4}{7} fq - \frac{4}{5} f^2 - \frac{32}{35} \bar{k} + 0(f^3). \end{aligned} \tag{2.150a}$$

Выражения с использованием членов до J_6 порядка f^3 можно найти в статье Кука [64, p. 211]. Значения этих членов имеют порядок 1/5000.

2.5.2.3. Нормальное ускорение силы тяжести на земном сфероиде

Нормальное ускорение силы тяжести, обозначаемое через γ, может быть вычислено с помощью потенциальной функции U путем ее дифференцирования по нормали к сфероиду. Допустимым приближением будет дифференцирование по радиусу-вектору, так как на Земле максимальный угол между направлением радиуса-вектора и нормалью равен приблизительно 12′. Это вызовет ошибку в нормальном ускорении силы тяжести порядка 1/200000, которая пренебрежимо мала.

Дифференцируя уравнение (2.49) по r, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{a_e^{n+1}}{r^{n+2}} Y_n(\mu, \lambda') =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{a_e^{n+1}}{r^{n+2}} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\lambda' + b_{nm}\sin m\lambda') P_{nm}(\mu) =$$

$$= -\frac{k^2M}{r^2}\left\{1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \left[J_nP_n(\mu) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm}\cos m\lambda' + K_{nm}\sin m\lambda') P_{nm}(\mu)\right]\right\},$$

где обозначения те же, что и в уравнениях (2.49)—(2.55).

Упрощая последнее уравнение для нормального силового поля ($J_{nm} = K_{mn} = 0$), используя члены лишь до $n=4$, принимая $J_3 = 0$ и прибавляя производную потенциала центробежной силы по r, мы получим

$$\gamma = -\frac{\partial U_4}{\partial r} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial V'}{\partial r}\right) = \frac{k^2M}{r^2}\left[1 - 3\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 J_2P_2(\mu) - \right.$$

$$\left. -5\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 J_4P_4(\mu) - q\left(\frac{r}{a_e}\right)^3(1-\mu^2)\right],$$

или, в форме уравнения (2.145),

$$\gamma = \frac{k^2M}{a_e^2}\left[\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 J_2P_2(\mu) - \right.$$

$$\left. -5\left(\frac{a_e}{r}\right)^6 J_4P_4(\mu) - q\frac{r}{a_e}(1-\mu^2)\right]. \quad (2.151)$$

Применяя это уравнение к экватору земного сфероида ($r = a_e$, $\beta = 90°$), мы найдем

$$\gamma_e = \frac{k^2M}{a_e^2}\left(1 + \frac{3}{2}J_2 - \frac{15}{8}J_4 - q\right). \quad (2.152)$$

Принимая параметры соответствующего эллипсоида, из уравнений (2.150) получим

$$\gamma_e = \frac{k^2 M}{a_e^2}\left(1 + f - \frac{3}{2} q - \frac{3}{7} qf + f^2 + \frac{16}{17}\bar{k}\right),$$

где $\bar{k}$ должно быть принято равным нулю, если используются параметры уровенного сфероида. Из уравнения, написанного выше, следует

$$\frac{k^2 M}{a_e^2} = \gamma_e\left(1 - f + \frac{3}{2} q + \frac{9}{4} q^2 - \frac{18}{17} fq - \frac{16}{17}\bar{k}\right). \qquad (2.153)$$

Подставляя уравнения (2.153), (2.150) и

$$\frac{a_e}{r} = 1 + f\cos^2\beta + \frac{3}{2} f^2\cos^2\beta - \frac{1}{2} f^2\cos^4\beta$$

(согласно [81, p. 136]) в уравнение (2.151) и учитывая, что

$$1 - \mu^2 = -\frac{2}{3} P_2(\mu) + \frac{2}{3},$$

мы получим для нормального ускорения силы тяжести

$$\gamma = B_0 + B_2 P_2(\mu) + B_4 P_4(\mu). \qquad (2.154а)$$

Здесь

$$B_0 = \gamma_e\left(1 + \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{5}\beta_2\right),$$

$$B_2 = \gamma_e\left(\frac{2}{3}\beta_1 + \frac{4}{7}\beta_2\right),$$

$$B_4 = \gamma_e\frac{8}{35}\beta_2,$$

где

$$\beta_1 = \frac{5}{2}\bar{q} - f + \frac{15}{4}\bar{q}^2 + \frac{1}{2} f^2 - \frac{27}{14}\bar{q} f,$$

$$\beta_2 = \frac{5}{2}\bar{q} f - \frac{1}{2} f^2,$$

$$\bar{q} = q(1 - f).$$

Как хорошо известно, можно также выразить нормальное ускорение силы тяжести с помощью обобщенной формулы Клеро [74, p. 52]

$$\gamma = \gamma_e(1 + \beta\sin^2\varphi - \varepsilon\sin^2 2\varphi), \qquad (2.154б)$$

где коэффициенты равны:

$$\beta=\beta_1+\beta_2=\frac{5}{2}\bar{q}-f+\frac{15}{4}\bar{q}^2-\frac{17}{14}\bar{q}f,$$

$$\varepsilon=\frac{1}{4}\beta_2=\frac{5}{8}\bar{q}f-\frac{1}{8}f^2.$$

Нормальное ускорение силы тяжести может быть, кроме того, выражено так:

$$\gamma=\gamma_e(1+\beta_1\sin^2\varphi+\beta_2\sin^4\varphi). \tag{2.154в}$$

Эти формулы с параметрами Международного эллипсоида ($f = 1/297$, $q = 0{,}00\,344\,986$, $\gamma_e = 987{,}049$ *см/сек*^{2}) дают следующую систему уравнений:

$$\gamma=[979\,770{,}0+3446{,}0P_2(\mu)+5{,}2P_4(\mu)]\,10^{-3}\ \text{см/сек}^2,$$
$$\gamma=978{,}049\,(1+0{,}0052883\sin^2\varphi-0{,}0000058\sin^2 2\varphi), \tag{2.155}$$
$$\gamma=978{,}049\,(1+0{,}0052651\sin^2\varphi+0{,}0000232\sin^4\varphi).$$

Путем дифференцирования формулы (2.154б) мы получим [115, p. 4] выражение

$$\delta\gamma=\delta\gamma_e-982\sin^2\varphi\delta f+0{,}000000013\sin^2\varphi\delta a_e,$$

где коэффициенты вычислены для Международного эллипсоида, так что разности $\delta\gamma$, $\delta\gamma_e$, δf и δa_e соответствуют данным уравнений (2.155). Величины $\delta\gamma$ и $\delta\gamma_e$ выражаются в *см/сек*^{2}, δa_e — в *см*. Из написанного выше уравнения видно, что главные факторы, влияющие на изменение γ, это изменения γ_e и f, тогда как от изменений a_e величина γ зависит слабо. Например, максимальные возможные уклонения от принятых международных значений приближенно равны $\delta\gamma_e = -0{,}007$ (что соответствует $\gamma_e = 978{,}042$ *см/сек*^{2}), $\delta f = -0{,}00001467$ (что соответствует сжатию $f = 1/298{,}3$) и $\delta a_e = -28800$ *см* (что соответствует $a_e = 6\,378\,100$ *м*). Вклад этих изменений $\delta\gamma_e$, δf_e и δa_e равен соответственно -7, $+14{,}4$ и $-0{,}4$ *мгал*, т. е. в сумме $+0{,}007$ *см/сек*^{2} (для $\varphi = 90°$).

Из изложенного выше можно видеть, что если определяется нормальное ускорение силы тяжести на земном сфероиде, то сжатие, которое должно быть использовано в уравнениях (2.154а—в), следует определять из (2.148). Поэтому оно может быть вычислено лишь при условии, что известны точные значения J_2 и J_4. Поскольку размеры земного сфероида неизвестны (мы не знаем объема геоида), то значения a_e и k^2M должны быть приняты заранее. По уравнениям (2.152) можно заключить, что если γ_e определяется каким-нибудь способом (по анализу гравитационных аномалий и т. д.), то k^2M может быть вычислено для некоторого принятого значения a_e или, наоборот, a_e может быть вычислено для некоторого принятого значения k^2M.

Например, если взять $\gamma_e = 978{,}045$ *см/сек*^{2} в Потсдамской системе [146] или с учетом вероятной абсолютной поправки Потсдамской системы ($-0{,}013$ *см/сек*^{2}), $\gamma_e = 978{,}032$ *см/сек*^{2} и $a_e = 6\,378\,160$ *м*, $J_2 = 1082{,}48 \cdot 10^{-6}$ и $J_4 = -1{,}84 \cdot 10^{-6}$, то уравнение (2.152) дает $k^2M = 3{,}986036 \cdot 10^{20}$ *см*^{3}/*сек*^{2}.

2.5.2.4. Аномалии ускорения силы тяжести

Аномалия ускорения силы тяжести Δg это разность между измеренным значением ускорения силы тяжести (g_0), приведенным к геоиду, и нормальным ускорением на сфероиде (γ), которое определяется формулами (2.154а—в). Аномалии силы тяжести вызываются массами, отличными от масс нормализованной Земли, и их возмущающая потенциальная функция выражается с помощью формулы (2.146). Влияние возмущающих масс на аномалии силы тяжести определяется основным уравнением геодезической гравиметрии [77, p. 42]:

$$\Delta g = g_0 - \gamma = -\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{r}\right). \tag{2.155a}$$

Из этого уравнения видно, что аномалии силы тяжести не могут быть просто представлены как производные возмущающей функции (первый член в (2.155а)); требуется также принимать во внимание второй член, чтобы учесть тот факт, что пункт, к которому относится значение ускорения силы тяжести γ, находится на геоиде, а не на сфероиде. Если возмущающие массы отсутствуют, то сфероид и геоид будут совпадать. Второй член в формуле (2.155а) обычно называют поправкой Брунса.

Оба члена в уравнении (2.155а) могут быть вычислены с помощью выражения (2.146). Первый член получается путем дифференцирования уравнения (2.146) по r:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{k^2M}{a_e^2} \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} (n+1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} \times$$
$$\times \left[J_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm} \cos m\lambda' + K_{nm} \sin m\lambda') P_{nm}(\mu) \right].$$

Второй член равен

$$2\frac{T}{r} = -\frac{k^2M}{a_e^2} \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} 2 \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} \times$$
$$\times \left[J_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm} \cos m\lambda' + K_{nm} \sin m\lambda') P_{nm}(\mu) \right].$$

Подставляя эти две величины в (2.155), получаем

$$\Delta g = -\frac{k^2M}{a_e^2} \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} (n-1) \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} \times \tag{2.156}$$

$$\times \left[J_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm} \cos m\lambda' + K_{nm} \sin m\lambda') P_{nm}(\mu) \right],$$

где символ $*$ опять показывает, что суммирование распространяется на все члены, возникающие вследствие разности $W - U_4$. Это фактически означает, что коэффициенты J_2 и J_4, приведенные выше, представляют разности коэффициентов поля тяжести Земли и коэффициентов нормального поля тяжести, которые вычисляются по параметрам земного сфероида (или некоторого соответствующего эллипсоида) с помощью формул (2.150). Уравнение (2.156) следует считать чисто формальным, потому что используемые в нем ряды расходятся на поверхности Земли.

Уравнение (2.156) может быть записано в следующей упрощенной форме:

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} [\bar{a}_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (\bar{a}_{nm} \cos m\lambda' + \bar{b}_{nm} \sin m\lambda') P_{nm}(\mu)], \tag{2.157}$$

где новые коэффициенты $\bar{a}_{nm}$, $\bar{b}_{nm}$ связаны с ранее использовавшимися коэффициентами так:

$$\bar{a}_{nm} = -\frac{k^2M}{a_e^2} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} (n-1) J_{nm},$$

$$\bar{b}_{nm} = -\frac{k^2M}{a_e} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+2} (n-1) K_{nm},$$

или, предполагая, что для геоида $(a_e/r)^{n+2} = 1$ (для $n \geqslant 2$), и сравнивая результаты с отношениями в (2.57), мы с точностью до членов порядка f^2 найдем:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{nm} &= -(n-1)\frac{k^2M}{a_e^2} J_{nm} = \frac{n-1}{a_e^{n+2}} A_{nm} = \\ &= (n-1)\frac{k^2M}{a_e^2} C_{nm} = \frac{n-1}{a_e} a_{nm}, \\ \bar{b}_{nm} &= -(n-1)\frac{k^2M}{a_e^2} K_{nm} = \frac{n-1}{a_e^{n+2}} B_{nm} = \\ &= (n-1)\frac{k^2M}{a_e^2} S_{nm} = \frac{(n-1)}{a_e} b_{nm}. \end{aligned} \tag{2.158}$$

Из уравнений (2.158) видно, что если коэффициенты земного гравитационного поля известны, то аномалии силы тяжести могут быть выражены с помощью формул (2.157). Вновь подчеркнем, что коэффициенты $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_4$ вычисляются по разностям между коэффициентами J_2 и J_4 (или A_2 и A_4 и т. д.) истинного нормального поля тяжести. Например, если коэффициенты истинного поля тяжести равны $J_2 = 1082{,}48 \cdot 10^{-6}$, $J_4 = -1{,}84 \cdot 10^{-6}$, а такие же коэффициенты для нормального поля тяжести, вычисленные по формулам (2.150), равны $J_2 = 1092{,}04 \cdot 10^{-6}$, $J_4 = 2{,}412 \cdot 10^{-6}$, то при $k^2M/a_e^2 = 979{,}8$ *см/сек²* второй и четвертый коэффициенты выражения для аномальной тяжести будут равны:

$$\bar{a}_2 = -979{,}8\,(1082{,}48 - 1092{,}04) \cdot 10^{-6} = 9{,}37 \cdot 10^{-3}\ \textit{см/сек}^2,$$

$$\bar{a}_4 = -3 \cdot 979{,}8\,(-1{,}84 + 2{,}41) \cdot 10^{-6} = -1{,}67 \cdot 10^{-3}\ \textit{см/сек}^2.$$

2.5.2.5. Ондуляции геоида

Ондуляцией, или отступлением, геоида в любой точке называется расстояние между геоидом и земным сфероидом. Разность потенциалов геоида и земного сфероида, обозначаемая T, выражается формулой (2.146), потому что, как было сказано в предыдущих разделах, геоид отступает от земного сфероида под влиянием возмущающих масс, потенциал которых равен T.

Возмущающий потенциал можно также записать в виде

$$T = \int_0^N g\,dN,$$

где g — ускорение силы тяжести, N — расстояние от сфероида до геоида, т. е. ондуляция геоида. В качестве хорошего приближения мы можем принять, что значение g в интервале между геоидом и земным сфероидом постоянно и что оно может быть заменено нормальным ускорением γ. В этом случае

$$N = \frac{T}{\gamma}.$$

С учетом выражения (2.146) получаем

$$N = -\frac{k^2M}{a_e\gamma} \sum_{n=2}^{\infty}{}^{*} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \times$$

$$\times \left[J_n P_n(\mu) + \sum_{m=1}^{n} (J_{nm}\cos m\lambda' + K_{nm}\sin m\lambda')\, P_{nm}(\mu)\right] \quad (2.159)$$

или в более простой форме

$$N=\sum_{n=2}^{\infty}{}^{*}\,[\overline{\overline{a}}_n P_n(\mu)+\sum_{m=1}^{n}(\overline{\overline{a}}_{nm}\cos m\lambda'+\overline{\overline{b}}_{nm}\sin m\lambda')\,P_{nm}(\mu)], \qquad (2.160)$$

где новые коэффициенты $\overline{\overline{a}}_{mm}$, $\overline{\overline{b}}_{nm}$ при допустимых упрощениях $(a_e/r)^{n+1}=1$ и $\gamma=\gamma_e$ выражаются через предыдущие коэффициенты так:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{a}}_{nm}&=-\frac{k^2M}{a_e\gamma_e}J_{nm}=\frac{1}{a_e^{n+1}\gamma_e}A_{nm}=\frac{k^2M}{a_e\gamma_e}C_{nm}=\\&=\frac{1}{\gamma_e}a_{nm}=\frac{a_e}{(n-1\ \gamma_e}\overline{a}_{nm}, \qquad (2.161)\\\overline{\overline{b}}_{nm}&=-\frac{k^2M}{a_e\gamma_e}K_{nm}=\frac{1}{a_e^{n+1}\gamma_e}B_{nm}=\frac{k^2M}{a_e\gamma_e}S_{nm}=\\&=\frac{1}{\gamma_e}b_{nm}=\frac{a_e}{(n-1)\gamma_e}\overline{b}_{nm}.\end{aligned}$$

Оба уравнения (2.159) и (2.160) следует считать чисто формальными, потому что эти ряды на поверхности Земли расходятся. Здесь опять подчеркивается важность символа $*$ при суммировании членов в (2.160).

Используя результаты примера, приведенного в конце предыдущего раздела ($\bar{a}_2=9{,}37\cdot10^{-5}$ *м/сек*^{2}; $a_4=-1{,}67\cdot10^{-5}$ *м/сек*^{2} и $a_e/\gamma_e=6{,}521\cdot10^5$ *сек*^{2}), можем вычислить второй и четвертый зональные коэффициенты ондуляции геоида:

$$\overline{\overline{a}}_2=6{,}521\cdot10^5\cdot9{,}37\cdot10^{-5}=61{,}1\ \text{м},$$
$$\overline{\overline{a}}_4=-\frac{1}{3}\cdot6{,}521\cdot10^5\cdot1{,}67\cdot10^{-5}=-3{,}6\ \text{м}.$$

2.5.2.6. Эллиптичность экватора

В разд. 2.5.2.2—2.5.2.5 мы принимали, что земной сфероид обладает осевой симметрией, т. е. что коэффициентами при долготных членах $J_{n.n}$ и K_{nm} в уравнениях (2.143) можно пренебречь. Мы, следовательно, принимали, что для наших целей земной сфероид может быть приближенно представлен с помощью эллипсоида вращения или уровенного эллипсоида.

В этом разделе, чтобы определить возможную эллиптичность экватора земного сфероида, мы исследуем случай, когда по-прежнему можно пренебречь коэффициентами K_{nm}, а из величин J_{nm} лишь теми, у которых n и $m>2$. Из уравнений (2.52) и (2.57) мы знаем, что в нашей прямоугольной инерциальной системе координат коэффициенты $J_1 = J_{11} = J_{21} = 0$, и поэтому выражение (2.143) превращается в следующее:

$$U = \frac{k^2M}{a_e}\left\{\frac{a_e}{r} - \left(\frac{a_e}{r}\right)^3 [J_2P_2(\mu) + J_{22}P_{22}(\mu)\cos 2\lambda'] + \right.$$
$$\left. + \frac{q}{2}\left(\frac{r}{a_e}\right)^2(1-\mu^2)\right\}. \qquad (2.162)$$

Здесь, согласно уравнению (2.51), обычный полином Лежандра $P_{22}(\mu)$ имеет вид

$$P_{22}(\mu) = (1-\mu^2)\frac{d^2P_2(\mu)}{d\mu^2} = \frac{3}{2}(3\mu^4 - 4\mu^2 + 1).$$

Гармонический коэффициент J_{22}, согласно формулам (2.52) и (2.57), равен

$$J_{22} = \frac{A-B}{4a_e^2M},$$

где A и B — главные моменты инерции относительно осей $\bar{u}$ и $\bar{v}$, показанных на рис. 2.6. Величины μ и λ' в (2.162) — экваториальные координаты относительно оси $\bar{u}$ ($\mu = \sin\varphi'$; $\lambda' = \lambda - \lambda_0$, где λ_0 — долгота оси $\bar{u}$, как показано на рис. 2.6).

Из приведенных выше уравнений видно, что земной сфероид уже не обладает осевой симметрией ($A \neq B$), так что его скорее можно представить трехосным эллипсоидом, чем эллипсоидом вращения. Обозначим полуоси трехосного эллипсоида, совпадающего с земным сфероидом в точках его пересечения с осями $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{w}$, через a_{e1}, a_{e2} и b соответственно ($a_{e1} > a_{e2} > b$). Сжатие земного сфероида (или трехосного эллипсоида) выражается так:

$$f = \frac{a_{e1} - b}{a_{e1}},$$

тогда как сжатие экватора равно

$$f_e = \frac{a_{e1} - a_{e2}}{a_{e1}}.$$

С помощью производных, подобных полученным в разд. 2.5.2.2 и 2.5.2.3, можно показать, что для трехосного эллипсоида уравнения, соответствующие уравнениям (2.150), (2.153) и (2.154б), при

$\bar{k} = 0$ будут иметь вид

$$J_2 = \frac{2}{3} f - \frac{q}{3} + \frac{3}{7} qf - \frac{1}{3} f^2 - \frac{1}{3} f_e + 0(f^3),$$
$$J_{22} = -\frac{f_e}{6} + 0(f^3), \qquad (2.163)$$

$$\frac{k^2 M}{a_{e1}^2} = \gamma_e \left(1 - f + \frac{3}{2} q + \frac{9}{4} q^2 - \frac{18}{17} fq - \frac{1}{2} f_e\right), \qquad (2.164)$$

$$\gamma = \gamma_e (1 + \bar{\beta} \sin^2 \varphi - \varepsilon \sin^2 2\varphi + \bar{\delta} \cos^2 \varphi \cos 2\lambda'), \qquad (2.165)$$

где γ_e определяется из формулы (2.164) и

$$\bar{\beta} = \frac{5}{2} \bar{q} - f + \frac{15}{4} \bar{q}^2 - \frac{17}{14} \bar{q} f + \frac{1}{2} f_e,$$
$$\bar{\delta} = \frac{1}{2} f_e.$$

Сравнивая уравнения (2.163) с уравнениями (2.150) и (2.149), можно вычислить полярное и экваториальное сжатия трехосного эллипсоида:

$$f = \left[\frac{q}{2}(1 - f) + \frac{5}{14} fq - \frac{1}{2} f^2 + \frac{3}{2} J_2 f\right] + \frac{3}{2} J_2 - 3J_{22} + 0(f^3),$$
$$f_e = -6J_{22}. \qquad (2.166)$$

Подставляя параметры, используемые в (2.148а), получим, что

$$f = 0{,}001728867 + \frac{3}{2} J_2 - 3J_{22},$$
$$f_e = -6J_{22}. \qquad (2.166\text{a})$$

Например, если $J_2 = 1082{,}48 \cdot 10^{-6}$ и $J_{22} = -1{,}00 \cdot 10^{-6}$, то уравнения (2.166а) дают

$$f = 0{,}003355587 = 1/298{,}01,$$
$$f_e = 0{,}000006000 = 1/166667.$$

Нужно заметить, что влияние J_{22} на полярное сжатие заметно больше. Сжатие трехосного эллипсоида отличается от сжатия эллипсоида вращения на единицу пятого десятичного знака при изменении J_{22} на $3 \cdot 10^{-6}$. Приведенная ниже таблица может служить для иллюстрации этого факта.

$J_{22}, 10^{-6}$	$1/f$	$1/f_e$
0	298,28	∞
— 2	297,74	83 333
— 4	297,21	41 667
— 6	296,68	27 778
— 8	296,16	20 833
—10	295,63	16 667

О коэффициентах, определяемых по наблюдениям силы тяжести, см. статью Хейсканена [73].

2.5.2.7. Определение коэффициентов зональных гармоник

Исследуя уравнения (2.70)—(2.72), можно видеть, что земные гравитационные возмущения могут быть записаны в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\Omega' &= U_2\overline{U}_{20}J_2 + U_3\overline{U}_{31}\sin\omega\, J_3 + U_4(\overline{U}_{40} + \overline{U}_{42}\cos 2\omega)\, J_4 + \\
&\quad + U_5(\overline{U}_{51}\sin\omega + \overline{U}_{53}\sin 3\omega)\, J_5 + \\
&\quad + U_6(\overline{U}_{60} + \overline{U}_{62}\cos 2\omega + \overline{U}_{64}\cos 4\omega)\, J_6 + \ldots, \qquad (2.167)\\
\omega' &= V_2\overline{V}_{20}J_2 + V_3\overline{V}_{31}\sin\omega\, J_3 + V_4(\overline{V}_{40} + \overline{V}_{42}\cos 2\omega)\, J_4 + \\
&\quad + V_5(\overline{V}_{51}\sin\omega + \overline{V}_{53}\sin 3\omega)\, J_5 + \\
&\quad + V_6(V_{60} + V_{62}\cos 2\omega + V_{64}\cos 4\omega)\, J_6 + \ldots, \\
\Delta i &= W_3\overline{W}_{31}\sin\omega\, J_3 + W_4\overline{W}_{42}\cos 2\omega\, J_4 + \\
&\quad + W_5(\overline{W}_{51}\sin\omega + \overline{W}_{53}\sin 3\omega)\, J_5 + \\
&\quad + W_6(\overline{W}_{62}\cos 2\omega + \overline{W}_{64}\cos 4\omega)\, J_6 + \ldots, \\
\Delta e &= -\frac{(1-e^2)\operatorname{tg} i}{e}\Delta i.
\end{aligned}$$

Как уже было отмечено, коэффициенты U_n, V_n, W_n и $\overline{U}_{nj}$, $\overline{V}_{nj}$, W_{nj} вычисляются по принятым средним элементам орбиты, так что уравнения (2.167) связывают возмущения Ω, ω, i и e непосредственно с коэффициентами зональных гармоник и одновременно с величиной аргумента ω. Эти уравнения могут служить уравнениями погрешностей для определения коэффициентов J_n, если возмущения ω известны.

Идеальным решением, вероятно, было бы применить все уравнения (2.167) ко всем доступным спутникам и определить коэффициенты из уравнительных вычислений. Важно использовать спутники с различными наклонениями; в противном случае условия будут неблагоприятными, так как коэффициенты $U_n\overline{U}_{nj}$, $V_n\overline{V}_{nj}$ и т. д. имеют почти одинаковую величину. Также важно, чтобы эксцентриситеты или наклонения не были слишком малы, потому что это ведет к неопределенности точек перигея или узлов, что в свою очередь затрудняет определение возмущений ω' и Ω'. Прежде чем использовать наблюденные возмущения в левых частях уравнений погрешностей, их надо исправить за короткопериодические и любые другие вариации от всех известных источников (см. разд. 2.2.2.4—2.2.2.6). Чтобы избежать членов, возникающих от взаимодействия различных возмущений (см. разд. 2.2.2.6), не следует использовать спутники, сильно подверженные влиянию плотности воздуха, лунно-солнечного притяжения и давления света.

На практике уравнения погрешностей редко используются для совместного уравновешивания. Обычно *коэффициенты зональных гармоник* четных степеней определяются по вековому движению аргумента перигея и прямого восхождения восходящего узла, т. е. из выражений вида

$$\Omega' = U_2\overline{U}_{20}J_2 + U_4\overline{U}_{40}J_4 + U_6\overline{U}_{60}J_6 + \ldots,$$
$$\omega' = V_2\overline{V}_{20}J_2 + V_4\overline{V}_{40}J_4 + V_6\overline{V}_{60}J_6 + \ldots .$$

Очевидно, что в этом случае коэффициенты U_n, V_n, $\overline{U}_{nj}$, $\overline{V}_{nj}$ должны быть определены по средним элементам, вычисленным по данным по крайней мере одного полного периода ω, а производные Ω', ω' — по значениям Ω и ω, взятым в начале и конце одного периода. Длина периода может быть определена приближенно с принятыми гармоническими коэффициентами по соотношению для ω'. Если наклонение орбиты таково, что перигей движется очень медленно и невозможно использовать наблюдения, охватывающие целый период, то уравнения погрешностей должны быть использованы в форме (2.167); иначе долгопериодические эффекты будут вести себя как вековые члены. В этом случае, естественно, члены $\sin\omega$, $\sin 3\omega$, $\cos 2\omega$ и т. д. практически постоянны.

Если, с другой стороны, большая ось орбиты поворачивается сравнительно быстро, то *коэффициенты зональных гармоник нечетных степеней* могут быть определены по амплитудам долгопериодических вариаций элементов орбиты. Эти вариации можно отделить от вековых вариаций и от долгопериодических эффектов гармоник четной степени по их различным периодам. Заметим, что в уравнениях (2.167) длины волн нечетных членов равны

2π, $^2/_3\pi$, $^2/_5\pi$, $^2/_7\pi$ и т. д., тогда как длины четных периодов равны ∞, π, $^1/_2\pi$, $^1/_3\pi$ и т. д. Амплитуды долгопериодических членов могут быть хорошо определены по наблюдениям, охватывающим по крайней мере один полный период ω. Вариации в этом случае могут быть вычислены путем интегрирования уравнений (2.167) за некоторый интервал времени $(t_2 - t_1)$, например

$$\Omega_2 - \Omega_1 = J_2 \int_{t_1}^{t_2} U_2 \overline{U}_{20}\, dt + J_3 \int_{t_1}^{t_2} U_3 \overline{U}_{31} \sin\omega\, dt + \ldots,$$

где интегралы берутся путем численного интегрирования с табулированными коэффициентами $U_2\overline{U}_{20}$, $U_3\overline{U}_{31} \sin\omega$ и т. д. Другие методы вычисления вариаций — это дифференцирование уравнений, получаемых для эмпирических орбит (см. уравнения (2.91) или (2.91а)), или численное дифференцирование различных табулированных элементов орбиты и т. д.

Что касается числа определяемых коэффициентов, то если имеется p независимых уравнений погрешностей, то в уравнениях могут быть приняты за неизвестные pJ_n коэффициентов, а другие члены высшей степени должны быть либо отброшены, либо заменены их приближенными значениями. Каждый спутник дает четыре уравнения вида (2.167), за исключением тех случаев, когда эксцентриситет или наклонение его орбиты так малы, что, как мы говорили выше, некоторые возмущения не могут наблюдаться. Мы вновь подчеркиваем необходимость выбора спутников с различными элементами, особенно по наклонению.

Точность коэффициентов, определяемых по этому методу, зависит от точности наблюдения средних параметров, используемых при вычислении коэффициентов U_n, V_n, $\overline{U}_{nj}$, $\overline{V}_{nj}$, и принятых значений гравитационной постоянной и экваториального радиуса. Средние элементы должны быть известны очень точно, особенно когда они используются в наибольших вековых членах. Влияние ошибок δe, δi и $\delta\overline{n}$ средних элементов на вековое движение узла равно (см., например, [99])

$$\delta\Omega' = \left(\frac{4e}{1-e^2}\,\delta e - \delta i \operatorname{tg} i + \frac{7}{3}\,\overline{n}\,\delta\overline{n}\right)\Omega'.$$

Аналогичное соотношение имеет место и для ω'.

Влияние ошибок гравитационной постоянной $\delta\,(k^2M)$ и экваториального радиуса δa_e на наибольшие зональные гармоники второй степени таково:

$$\delta J_2 = \left[\frac{2}{3}\,\frac{\delta\,(k^2M)}{k^2M} - 2\,\frac{\delta a_e}{a_e}\right] J_2.$$

Отсюда следует, что, сообщая результаты анализа, всегда надо приводить принятые значения постоянных k^2M и a_e.

За последние четыре года было сделано много попыток определить зональные гармоники земного гравитационного поля, используя различные спутники и возмущения [55, 56, 58, 61—64, 66, 80, 88, 89, 91—94, 96—99, 101, 107, 108, 117—121, 128, 137, 138, 157 и др.]. Некоторые из этих результатов приведены в табл. 2.7. В настоящее время рекомендуются значения Козаи [99], потому что они определены по точным орбитам 13 различных спутников. Его коэффициенты использованы в приведенных выше примерах. Они получены при значениях

$$k^2M = 3{,}986032 \cdot 10^{20}\ см^3/сек^2,$$
$$a_e = 6{,}378165 \cdot 10^8\ см.$$

Средние квадратические ошибки коэффициентов Козаи от J_2 до J_9 соответственно равны $\pm 0{,}04$; $\pm 0{,}007$; $\pm 0{,}09$; $\pm 0{,}007$; $\pm 0{,}09$; $\pm 0{,}01$; $\pm 0{,}07$ и $\pm 0{,}011 \cdot 10^{-6}$. В таблицах средние квадратические ошибки различных определений не приводятся.

Различия в результатах можно объяснить частично использованием различных движений ИСЗ, различных методов исключения других возмущений, расхождениями в принятых постоянных, различием типа, числа, распределения и точности наблюдений, интервалов времени и т. д.

2.5.2.8. Определение коэффициентов секториальных и тессеральных гармоник

Точное определение секториальных и тессеральных (мозаичных.— *Перев.*) членов гораздо сложнее, чем вычисление зональных гармоник. Это объясняется главным образом тем, что, поскольку амплитуды этих возмущений и их периоды малы, они могут быть определены по точным и хорошо распределенным наблюдениям, проведенным лишь в пределах одного периода возмущений. Фотографические наблюдения обеспечивают достаточную точность результатов, но из-за условий видимости они обычно плохо распределены на протяжении суток — интервала времени, который примерно соответствует периоду главных вариаций. С другой стороны, точность электронных наблюдений мала, но они хорошо распределяются по времени. Для высоты перигея 1000 *км* необходимо около одного наблюдения в час.

Уравнения погрешностей в их наиболее общей форме — это уравнения (2.68). По виду они подобны уравнениям (2.74), выведенным для J_{22}. Легко заметить, что, помимо гармонических

Таблица 2.7

Коэффициенты зональных гармоник

Год	Использованные спутники	Коэффициенты зональных гармоник, 10^6								Ссылка
		J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	
1958	1957β_1, 1958β_2	1082,90		—1,60						[80]
1959	1957β_1, 1958β_2, 1958ε	1083,00		—1,30		—0,10				[91]
1959	1958β_2,	1082,49	—2,39	—1,70	—0,30					[128]
1960	1960γ_2,		—2,30							[61]
1960	1957β_1, 1958β_2, 1959ι	1082,79		—1,40		0,90				[92]
1960	1957β_1, 1958δ_1, 1958δ_2	1089,30	—2,00	—4,10						[157]
1961	1958β_2, 1959η, 1959ι	1082,21	—2,29	—2,10	—0,23					[97,98]
1961	1958β_2, 1960γ_1, 1960ε_1	1082,66	—2,50	—1,72	0,25	0,73	—0,66	0,10		[108]
1961	1958β_2, 1960γ_1, 1960η_2		—2,42		—0,22		—0,27			[121]
1962	1957β_2, 1958β_2, 1958δ_1 1958δ_2, 1959α_1, 1959η 1959ι, 1960β_2, 1960γ_1 1960γ_2, 1960η_1, 1960ι_2 1961o_1	1082,48	—2,56	—184	—0,06	0,39	—0,47	0,02	0,12	[99]
1961	1958δ_2, 1959α_1, 1960γ_1	1083,15	—2,37	—1,40	—0,05	0,70				[137]
1962	1960β_2									[138]
1962	1960ι_2		—2,59	—1,65	—0,10	0,36	—0,39			[89]

Более современные значения коэффициентов, опубликованные во время подготовки этой книги к печати, приведены в [90].

коэффициентов, они также содержат в качестве неизвестного долготу λ_0 главной оси $\bar{u}$. Таким образом, их решение дает полную информацию об эллиптичности экватора. Замечания, сделанные в предыдущем разделе об использовании уравнений погрешностей, здесь полностью сохраняют силу.

Решения, полученные по фотографическим, интерференционным и допплеровским наблюдениям различными исследователями, сходятся лишь приблизительно [79, 83—89, 98, 119, 120]. В случае неравномерного распределения фотографических наблюдений это объясняется тем, что малые наблюденные амплитуды могут искажаться негеоцентрическим характером и несогласованностью координат наблюдателей, а при интерференционных наблюдениях — ошибками наведения антенн. Лучшие результаты ожидаются от применения имеющихся и проектируемых спутников со вспышками (таких, как Анна), которые будут наблюдаться хорошо распределенными допплеровскими, фотографическими и, возможно, другими системами.

Из-за упомянутых выше расхождений никакие численные результаты здесь не приводятся. Однако значения основных тессеральных и секториальных гармоник лежат, по-видимому, в следующих пределах, выраженных в единицах 10^{-6}:

$$-2<J_{22}<-1, \qquad 0<K_{22}<2,$$
$$-2<J_{31}<-1, \qquad -0{,}5<K_{31}<0{,}5,$$
$$-1<J_{41}<1, \qquad -0{,}5<K_{41}<0{,}5.$$

БИБЛИОГРАФИЯ К РАЗД. 2.5

1. Амелин В. М., Возможности установления связи между различными триангуляционными системами по наблюдениям ИСЗ, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 31, 9—15, 1962.
2. Батраков Ю. В., Сочилина А. С., Движение ракеты-носителя третьего советского спутника Земли (1958 δ_1) и величина сжатия Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **17**, 6—12, 1960.
3. Батраков Ю. В., Определения взаимного положения наблюдательных станций при помощи искусственных спутников, Астрон. ж., **42**, 1, 195—202, 1965.
4. Буткевич А. В., Об использовании наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ) для некоторых целей высшей геодезии, Труды НИИГАиК, **17**, 1960.
5. Буткевич А. В., Исследования по решению вычислительных задач сфероидической геодезии, изд-во «Недра», М., 1964.
6. Динеску А., Модель космической триангуляции на основании разновременных наблюдений искусственных спутников, Наблюд. иск. спутн. Земли, **2**, 26—41, 1963.

7. Ерпылев Н. П., Геодезическая сеть и искусственные спутники Земли (по материалам симпозиума «Создание Европейской геодезической сети с помощью искусственных спутников Земли»), Земля и Вселенная, **4**, 65—69, 1965.
8. Жонголович И. Д., Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним, Труды Инст. теорет. астрон. АН СССР, **3**, 1952.
9. Жонголович И. Д., Об определении размеров общего земного эллипсоида, Труды Инст. теорет. астрон. АН СССР, **6**, 1956.
10. Жонголович И. Д., Опыт определения некоторых параметров гравитационного поля Земли по результатам наблюдений спутников 1959 β_2, 1958 δ_1, 1958 δ_2, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 2, 1—24, 1960.
11. Жонголович И. Д., Обзор результатов определения параметров гравитационного поля Земли из наблюдений искусственных спутников, Наблюд. иск. спутн. Земли, 1 (1957—1962), 25—32 (1960).
12. Жонголович И. Д., Спутники Земли и геодезия, Астрон. ж., **38**, I, 115—124, 1961.
13. Жонголович И. Д., Системы координат, употребляемые при изучении движения искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **31**, 3—9, 1962.
14. Жонголович И. Д., Спутники Земли и геодезия, Астрон. ж., **41**, 1, 1964.
15. Изотов А. А., Форма и размеры Земли по современным данным, Труды ЦНИИГАиК, вып. 73, Геодезиздат, М., 1950.
16. Изотов А. А., К теории определения фигуры и размеров Земли по наблюдениям искусственных спутников Земли, Изв. вузов МВО, Геодезия и аэрофотосъемка, **3**, 3—12, 1965.
17. Кленицкий В. М., Устинов Г. А., Уравнивание пространственной космической триангуляции в системе прямоугольных геоцентрических координат, Геодезия и картография, **5**, 3—16, 1964.
18. Куликов Д. К., Батраков Ю. В., Метод улучшения орбит искусственных спутников Земли по наблюдениям с приближенными моментами, Бюлл. Инст. теорет. астрон. **7**, 7, 554—559, 1960.
19. Куликов К. А., Первые космонавты на Луне, изд-во «Наука», М., 1965.
20. Лавров Н. П., XIII Генеральная ассамблея МГГС и основные научные задачи современной геодезии, Геодезия и картография, **12**, 1963.
21. Лапинг К. А., Вычисление координат и высот по измеренным азимутам нормальных сечений и углам наклона хорд на двух исходных пунктах, Изв. вузов МВО, Геодезия и аэрофотосъемка, **1**, 1—8, 1962.
22. Падве В. А., Определение координат пункта из решения пространственной линейной засечки, Изв. вузов МВО, Геодезия и аэрофотосъемка, **6**, 17—26, 1964.
23. Панова Г. В., Фираго Б. А., Щеголев Д. Е., Синхронные наблюдения американского спутника «Эхо-1», Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **30**, 3—5, 1960.
24. Поповичи К., Определение геоцентрических координат спутников и наблюдательных станций по результатам почти одновременных наблюдений с нескольких станций, Набл. иск. спутн. Земли, 1 (1957—1962), 33—39 (1962).
25. Поповичи К., Определение координат центра масс Земли, Набл. иск. спутн. Земли, **2**, 42—44, 1963.
26. Прилепин М. Т., Геодезические связи на большие расстояния (обзор методов), Отдел НТИ Всес. НИИ экономики минер. сырья и геологоразв. работ, Изд. геол. комит. СССР, М., 1965.

27. Саляев С. А., Международный симпозиум по использованию искусственных спутников Земли в геодезии, Геодезия и картография, 5, 1965.
28. Урмаев М. С., Обработка результатов линейных измерений в системе криволинейных пространственных координат, Изв. вузов МВО, Геодезия и аэрофотосъемка, 6, 1964.
29. Устинов Т. А., Уравнивание пространственной космической триангуляции, Набл. иск. спутн. Земли, 2, 19—25, 1963.
30. Фештман Ю. М., Использование искусственных спутников Земли в геодезических целях, Геодезия и картография, 11, 64—77, 1964.
31. Фираго Б. А., Об использовании синхронных наблюдений спутников в космической геодезии, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 38, 1964.
32. Фираго Б. А., Определение топо- и геоцентрического расстояния спутника и его высоты над поверхностью Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 10, 11—16, 1959.
33. Хабибулин Ш. Т., Определение координат местоположения на Луне, Уч. зап. Казанского унив., 117, 9, 174—176, 1957.
34. Хабибулин Ш. Т., Лунная картография и селенографические координаты, сб. «Луна», Физматгиз, М., 1960.
35. Щеголев Д. Е., Геометрический способ обработки результатов наблюдений ИСЗ для целей космической триангуляции, Набл. иск. спутн. Земли, 1—40 (1957—1962), 40—45 (1962).
36. Шпицберг Н. П., Определение места корабля в море по наблюдениям искусственных спутников Земли, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 31, 16—34, 1962.
37. Aeronautical Chart and Information Center (ACIC), Determination of Ground Positions from Observations of Artificial Earth Satellites, ACIG Tech. Rep., 86, 1959.
38. Army Map Service, Flare Method of Determining Azimuth Between Two Non-intervisible Distant Points, Army Map Service, Tech. Rep., 10, 1959.
39. Atkinson R., Surveying by Astrometry of Rocket Flashes, Ann. Intern. Geophys. Year, 12, 201—206, 1960.
40. Baeschlin C. F., Lehrbuch der Geodäsia, Orell Füssli Verlag, Zürich, 1948.
41. Baeschlin C. F., Rapport Special sur le Nivellement et la Pesanteur, Bull. Géod., 57, 1960.
42. Bannister C. L., Automatic Fixed-Camera Orientation Procedures, NASA Tech. Note, D-607, 1961.
43. Bennet R. S., Satellites and Notes on Future Uses in Geodesy and Mapping, Notes of the Week, Army Map Service, Far East, Tokyo, 1959.
44. Blitzer L., Earth Oblateness in Terms of Satellite Orbital Periods, Science, 129, 329—330, 1959.
45. Bomford G., Geodesy, Oxford Univ. Press, London, 1952.
46. Brenner J. L., Fulton R., Sherman N., Symmetry of the Earth's Figure, Amer. Rocket Soc. Journ., 30, 278—279, 1960.
47. Brown D. C., A Treatment of Analytical Photogrammetry with Emphasis on Ballistic Camera Applications, RCA Data Reduction Tech. Rep., Patrick Air Force Bare, Florida, 39, 1957.
48. Brown D. C., A Solution of the General Problem of Multiple Station Analytical Stereotriangulation, RCA Data Reduction Tech. Rep., 43, 1958.
49. Brown D. C., Photogrammetric Flare Triangulation, RCA Data Reduction Tech. Rep., 46, 1958.
50. Brown D. C., Results in Geodetic Photogrammetry I, RCA Data Reduction Tech. Rep., 54, 1959.
51. Brown D. C., Results in Geodetic Photogrammetry II, RCA Data Reduction Tech. Rep., 65, 1960.

52. B r o w n D. C., Results in Geodetic Photogrammetry III, Photogrammetric Determination of Azimuth of Hiran Lines, Instrument Corp. of Florida, Scientific Rep., AFCRL-62-201, 1961.
53. B r o w n D. C., On the Potentialities of Geodetic Photogrammetry, Symposium: Geodesy in the Space Age, The Ohio State Univ., Columbus, Ohio, Feb. 6—8, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., 15, 1961.
54. B r o w n D. C., On Optical Refraction with Emphasis on Corrections for Points Outside the Atmosphere, Amer. Rocket Soc. Journ., **32**, 549—550, 1961.
55. B u c h a r E., Motion of the Nodal Line of the Second Russian Earth Satellite, and Flattening of the Earth, Nature, **182**, 198—199, 1958.
56. B u c h a r E., Determination of Some Parameters of the Gravity Field of the Earth from the Rotation of the Nodal Line of Artificial Satellites, XIIth General Assambley IUGG, Helsinki, 1960.
57. B u c h a r E., Determination of the Flattening of the Earth by Means of the Displacement of the Node of the Second Soviet Satellite (1957 β), Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 174—176, 1960.
58. B u c h a r E., Determination of Some Parameters of the Gravity Field of the Earth from the Rotation of the Nodal Lines of Artificial Satellites, Bull. Géod., 65, 1962.
59. B u r š a M., Theorie der Lösung der grundlegen geodätischen Aufgabe und der Bildung eines einheitlichen geodätischen Weltsystems auf Grund der Beobachtungen Künstlicher Erdsatelliten, Studia Geophysica et Geodetica, 5, 3, 1961.
60. C o h e n C. J., A Mathematical Model of the Gravity Field Surrounding the Earth, U.S. Navy Proving Ground Rep., 1514, 1957.
61. C o h e n C. J., A n d e r l e R. J., Verification of Earth's Pear Shape Gravitational Harmonic, Science. **132**, 807—808; 1960.
62. C o o k A. H., Determination of the Earth's Gravitational Potential from the Observations of Sputnik II (1957 β), Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., 1, 4, 1958.
63. C o o k A. H., Report on the Determination of the Earth's Gravitational Potential from Observations of Artificial Satellites, Intern. Gravity Commission of the Intern. Assoc. of Geodesy, Sept. 1959.
64. C o o k A. H., The External Gravity Field of a Rotating Spheroid to the Order of e^3, Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., **2**, 3, 1959.
65. C o o k A. H., Developments in Dynamical Geodesy, Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., **2**, 3, 1959.
66. C o o k A. H., The Comparison of the Earth's Gravitational Potential Derived from Satellite Observations with Gravity Observations on the Surface, Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., **5**, 1, 1961.
67. C o o k A. H., Geodetic Uses of Artificial Satellites, Geophysical Discussion of the Roy. Astron. Soc. March 24, Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., 5, 2, 1961.
68. C o r p a c i u s A. J., Astrogeodetic Flare Triangulation and Missile Space Location with Ballistic Camera Observations, RCA Syst. Anal. Tech. Mem., 21, Patrick AFB, Florida, (1961); Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962.
69. E i c h h o r n H. K., Flash Triangulation Without Timing, Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962.
70. H a m p t o n D. C., The Analysis of Doppler Records from Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 486—501, 1961.
71. H a r r i s I., J a s t r o w R., A Short Program for the Determination of Satellite Orbits, Proc. IRE, **47**, 5, 1959; Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 85—90, 1960.

72. Heiskanen W. A., The Latest Achievements of Physical Geodesy, Journ. Geophys. Res., **65**, 9, 1960.
73. Heiskanen W. A., Is the Earth a Triaxial Ellipsoid?, Journ. Geophys. Res., **67**, 1, 1962.
74. Heiskanen W. A., Vening Meinesz F. A., The Earth and Its Gravity Field, McGraw-Hill, New York — Toronto — London, 1958.
75. Henriksen S. W., The Use of Artificial Satellites in Datum Connection, XIIth General Assambles IUGG, Helsinki, 1960; Proc. Conference on Military Requirements for Geodesy, Aug. 6—7, 1959, AMS, Feb. 1960.
76. Hergenhahn G., Die Bestimmung der Erdgestalt mit Hilfe Künstlicher Satelliten, Zeit. f. Vermess. 9—10, 1960.
77. Hirvonen R. A., New Theory of the Gravimetric Geodesy, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ. 9, 1960, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. AIII, 56, 1960.
78. Izsak I. G., Orbit Determination from Simultaneous Doppler-Shift Measurements, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space. Sci. Special Rep., 38, 1960.
79. Izsak I. G., A Determination of the Ellipticity of the Earth's Equator from the Motion of Two Satellites, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 56, 1961; Space Research II, 1961; Astron. Journ., **66**, 226—229, 1961.
80. Jacchia L. G., The Earth's Gravitational Potential as Derived from Satellites 1957 β_1 and 1958 β_2, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space, Special Rep., 19, 1958; Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 176—180, 1960.
81. Jeffreys H., The Earth, Its Origin, History and Physical Constitution, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1959. (Русский перевод: Г. Джеффрис, Земля, ее происхождение, история и строение, М., ИЛ, 1960.)
82. Kahn W. D., Determination of Corrections to Mark II Minitrack Station Coordinates from Artificial Satellite Observations, Journ. Geophys. Res., 65, 3, 1960.
83. Kaula W. M., A Geoid and World Geodetic System Based on a Combination of Gravimetric, Astrogeodetic, and Satellite Data, Journ. Geophys. Res., **66**, 6, 1961.
84. Kaula W. M., Estimation of Longitudinal Variations in the Earth's Gravitational Field from Minitrack Observations, Journ. Astronaut. Sci., 8, 3, 1961.
85. Kaula W. M., Analysis of Satellite Observations for Longitudinal Variations of the Gravitational Field, Space Research II, 1961.
86. Kaula W. M., The Interaction Between Geodesy and the Space Sciences, Symposium on Geodesy in the Space Age, The Ohio State Univ., Columbus, Ohio, Feb. 6—8, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., 15, 1961.
87. Kaula W. M., Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, NASA Tech. Note D-572, 1961; Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., 5, 2, 1961.
88. Kaula W. M., Celestial Geodesy, NASA Tech. Note D-1155, 1962; Advances in Geophysics, 9, H. E. Landsberg and J. van Mieghem, eds., Academic Press, 1962. (Русский перевод: Каула В. М., Космическая геодезия, М., изд-во «Недра», 1965.)
89. Kaula W. M., COSPAR — IAG Symposium on the Use of Artificial Satellites for Geodesy, Bull. Géod., **65**, 1962.
90. Kaula W. M., Tesseral Harmonics of the Gravitational Field and Geodetic Datum Shifts Derived from Camera Observations of Satellites, Journ. Geophys. Res., **68**, 2, 1963.

91. King-Hele D. G., Determination of Air Density and the Earth's Gravitational Field from Orbits of Artificial Satellites, Proc. 10th Intern. Astronaut. Congr., London, Springer-Verlag, Vienna, 1959.
92. King-Hele D. G., Evaluation of the Second, Fourth, and Sixth Harmonics in the Earth's Gravitational Potential, Nature, **187**, 490—491, 1960.
93. King-Hele D. G., The Earth's Gravitational Potential, Deduced from the Orbits of Artificial Satellites, Geophys. Journ. Roy. Astron. Soc., **14**, 1961; Royal Aircraft Establishment (Farnborough) Tech. Note, GW 595, 1961.
94. King-Hele D. G., Merson R. H., A New Value of the Earth's Flattening, Derived from Measurements of Satellite Orbits, Nature, **183**, 881—882, 1959.
95. Котельников В. А., Дубровин В. М., Морозов В. А., Ржига О. Н., Шаховской А. М., Using the Doppler Effect to Determine the Orbital Parameters of Earth Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 880—891, 1961.
96. Kozai Y., The Earth's Gravitational Potential Derived from the Motion of Satellite 1958 β_2 Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 22, 1959.
97. Kozai Y., The Gravitational Field of the Earth Derived from Motions of Three Satellites, Astron. Journ., **66**, 8—10, 1961.
98. Kozai Y., Tesseral Harmonics of the Potential of the Earth as Derived from Satellite Motions, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 72, 1961.
99. Kozai Y., Numerical Results from Orbits, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 101, 1962.
100. Kukkamäki T. J., Stellar Triangulation, Bull. Géod., 54, 53—60, 1959.
101. Lecar M., Sorenson J., Eckels A., A Determination of the Coefficient J of the Second Harmonic in the Earth's Gravitational Potential from the Orbit of Satellite 1958 β_2 Journ. Geophys. Res., **64**, 2, 1959; Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 181—197, 1960.
102. Mancini A., Sheldon L. B., Kahler H., Long Line Azimuth Solution, Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962.
103. Markowitz W., Use in Geodesy of the Results of Lunar Observations and Eventual Observations on Artificial Satellites, Bull. Géod., **49**, 1958.
104. Markowitz W., Geocentric Coordinates from Lunar and Satellite Observations, Bull. Géod., 49, 1958.
105. Merson R. H., Techniques of Analyzing Terrestrial Radio and Optical Observations of Earth Satellites, Astronaut. Acta, 5, 26—39, 1959; Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Report, GW. 25, 1961.
106. Merson R. H., The Use of the Method of Differential Correction in Analyzing Radio Interferometer Observations, Presented at the Edinburgh Mathematical Congress, August, 1958, Royal Aircraft Establishment (Farnborough), Tech. Report., GW. 25, 1961.
107. Merson R. H., King-Hele D. G., Use of Artificial Satellites to Explore the Earth's Gravitational Field; Results from Sputnik 2 (1957 β), Nature, **182**, 640—641, 1958.
108. Michielsen H. F., The Odd Harmonics of the Earth's Gravitational Field, Adv. Astronaut. Sci., **6**, Plenum Press, 1961.
109. Mickelwait A. B., Rocketry, Amer. Geophys. Union Monograph 4, 53—57, 1959.

110. Молоденский М. С., Еремеев В. Р., Юркина М. И., Methods for Study of the External Gravitational Field and the Figure of the Earth, 1960, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1962.
111. Mueller I. I., Determination of the Mean Gravity Values for the Computation of Orthometric Heights Geofizikai Közlemények, Budapest, 5, 3, 1956.
112. Mueller I. I., A Suggestion for the Determination of the Orthometric Heights of the First Order Levelling Points, Acta Technica Hungarica, **23**, 1—3, 1959.
113. Mueller I. I., The Gradients of Gravity and Their Application in Geodesy, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, The Ohio State Univ., 1960.
114. Mueller I. I., The Determination of the Regional Part of the Vertical Gradient Anomaly by a Geodetic Method, Geofisica Pura e Applicata, Milano, **48**, 1—6, 1961.
115. Mueller I. I., Correction Tables for Computing Corrections to the Normal Gravity, Determined from the International Gravity Formula, Caused by Changes in α, a, and γ_e, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ. Report, 15, 1961.
116. Munk W. H., MacDonald J. F., Continentality and the Gravitational Field of the Earth, Journ. Geophys. Res., **65**, 7, 1960.
117. Newton R. R., Geodetic Measurements by Analysis of the Doppler Frequency Received from a Satellite, Space Research, I, 1960.
118. Newton R. R., Potential Geodetic Applications of the Transit Satellite, Journ. Geophys. Res., **66**, 8, 1961.
119. Newton R. R., Ellipticity of the Equator from the Motion of Transit 4A, Journ. Geophys. Res., **67**, 1, 1962.
120. Newton R. R., Non-Zonal Harmonics Deduced from the Motion of Transit 4A, COSPAR — AGU Meeting, April 1962, Washington, D.C., 1962.
121. Newton R. R., Hopfield H. S., Kline R. C., Odd Harmonics in the Earth's Gravitational Field, Nature, **190**, 617—618, 1961.
122. O'Keefe J. A., Geodesy Comes of Age with Vanguard, Astronautics, **2**, 1, 1957.
123. O'Keefe J. A., Oblateness of the Earth by Artificial Satellites, Harvard College Obs. Announcement Card, 1408, 1958.
124. O'Keefe J. A., Zonal Harmonics of the Earth's Gravitational Field and the Basic Hypotheses of Geodesy, Journ. Geophys. Res., **64**, 12, 1959.
125. O'Keefe J. A., A Preliminary Determination of the Oblateness of the Earth, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 176, 1961.
126. O'Keefe J. A., Discussion of Paper by W.A. Heiskanen, «The Latest Achievements of Physical Geodesy», Journ. Geophys. Res., **66**, 6, 1961.
127. O'Keefe J. A., Eckels A., Perturbations in the Eccentricity o 1958 β_2, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 198, 1960.
128. O'Keefe J. A., Eckels A., Squires R. K., The Gravitational Field of the Earth, Astron. Journ., **64**, 245—253, 1959.
129. O'Keefe J. A., Eckels A., Squires R. K., Pear-Shaped Component of the Geoid from the Motion of Vanguard I, Science, **129**, 565—566, 1959; Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 199—201, 1960.
130. O'Keefe J. A., Roman N., Yaplee B. A., Eckels A., Ellipsoid Parameters from Satellite Data, Amer. Geophys. Union Monograph, **4**, 1959.

131. Schmid H., Some Problems Connected with the Execution of Photogrammetric Multi-station Triangulation, Symposium on Geodesy in the Space Age, The Ohio State Univ. Columbus, Ohio, Feb. 6—8, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography,15, 1961.
132. Sigl R., Die Bedeutung Künstlicher Erdsatelliten für die Geodäsie. Zeit. f. Vermess., 8, 1961.
133. Singer S. F., Geophysical Research with Artificial Satellites, Advances in Geophysics, 3, H.E. Landsberg and J. van Mieghem, eds., Academic Press, 1956.
134. Siry J. W., The Vanguard Orbit Determination Program, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 91—104, 1960.
135. de Sitter W., On the Flattening and the Constitution of the Earth, Bull. Astron. Inst. Netherlands, **55**, 97—108, 1924.
136. Sletteback A. E., On the Possibility of Obtaining Geodetic Connections Between Two Distant Points on the Earth's Surface by Lunar Photography, Report on Project No. 378, Ohio State Univ. Res. Foundation, 1951.
137. Smith D. E., Determination of the Earth's Gravitational Potential from Satellite Orbits, Planet. Space Sci., 8, 43—48, 1961.
138. Smith D. E., An Evaluation of the Odd Harmonics in the Earth's Gravitational Field, Planet. Space Sci., 9, 93—94, 1962.
139. Sodano E. M., Determination of Laplace Azimuth Between Non-intervisible Distant Stations by Parachuted Flares and Light Crossings, Bull. Géod., 49, 1958.
140. Tavenner M. S., LARGOS: A Suggested Method of Stereotriangulation, Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962.
141. Tavenner M. S., Swenson P. B., Operational Concepts of Photogrammetric Determination of Azimuth over Intermediate Distances, Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962.
142. Thomas P. D., Use of Near Earth Satellite Orbits for Geodetic Information, U.S. Coast and Geod. Survey, Tech. Bull., 11, 1960.
143. Thomas P. D., Use of Artificial Satellites for Navigation and Oceanographic Surveys, U.S. Coast and Geod. Survey, Tech. Bull., 12, 1960.
144. Thomas P. D., The Dual Role of Geodesy in the Space Age, Symposium on Geodesy in the Space Age, The Ohio State Univ., Columbus, Ohio, Feb. 6—8, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Ohio State Univ., **15**, 1961.
145. Thomas P. D., Geodetic Positioning of the Hawaiian Islands, Surveying and Mapping, **22**, 1, 1962.
146. Uotila U., Theoretical Gravity Formula Corresponding to Current Gravity Holdings, Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962.
147. Väisälä Y., An Astronomical Method of Triangulation, Sitzungsber Finn. Akad. Wissensch, pp. 99—107, 1946.
148. Väisälä Y., Oterma L., Anwendung der Astronomische Triangulations Methode, Veröff. Finn. Geod. Inst., 53, 1960.
149. Veis G., Geodetic Uses of Artificial Satellites, Smithsonian Contrib. Astrophys., **3**, 9, 1960.
150. Vening Meinesz F. A., I. New Formulas for Systems of Deflection of the Plumb Line and Laplace's Theorem. II. Changes of Deflections of the Plumb Line Brought about by a Change of the Reference Ellipsoid, Bull. Géod., **15**, 1950.
151. Whipple F. L., Hynek J. A., The IGY Optical Satellite Tracking Program as a Source of Geodetic Information, Bull. Géod., 49, 1958.
152. Whitney C. A., Comment on the Paper Entitled «Symmetry of the Earth's Figure», Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Report, 46, 1960.

153. W i l l i a m s O. W., The Role of Rocket Flash Triangulation in World Geodesy, Symposium on Geodesy in the Space Age, The Ohio State Univ., Columbus, Ohio, Feb. 6—8, Publ. Inst. Geodesy, Photogrammetry and Cartography, **15**, 1961.
154. W i l l i a m s O. W., The Impact of Rocket-Flash Triangulation upon Geodesy, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. III, 1961.
155. W o o l l a r d G. P., Some Aspects of Geodesy, Science in Space, L.V. Berkner and H. Odishaw, eds., McGraw-Hill, 1961. (Русский перевод в сб. «Наука в космосе» под ред. Л. Беркнера и X. Одишоу, изд-во «Наука», М., 1964.)
156. См. [10].
157. Ж о н г о л о в и ч И. Д., Бюлл. Инст. теорет. астрон., **7**, 521—536, 1960.

В период подготовки книги к изданию вышли в свет труды различных симпозиумов, на которые сделаны ссылки. Это следующие книги:

158. The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Veis G., ed. Interscience Publishers (Proc. first intern. symp. on the use of artificial satellites in geodesy, Washington, D.C., April 26—28, 1962, sponsored by the Committee on Space research — COSPAR, ant the International Union of Geodesy and Geophysica — IUGG), 1963. (Русский перевод: В е й с Г., Геодезическое использование искусственных спутников Земли, под ред. Г. Вейса, изд-во «Недра», 1966.)
159. Dynamics of Satellites, Roy M., ed., Academic Press, Inc., New York, (proc. symp. on dynamics of satellites, Paris, May 28—30, 1962, sponsored by the International Union of Theoretical and Applied Mechanics — IUTAM), 1963.

Дополнительный список статей, относящихся к данному разделу (большинство из них опубликовано в период подготовки книги к изданию).

160. B a l d i n i A. A., Connection of Base Lines Using Star Field Photography and Developed Independently of Ellipsoidal Parameters, XIIIth General Assambly IUGG, Berkeley, Calif., 1963.
161. F i s c h e r I., Comments on Comparison and Combination of Satellite with Other Results, The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Veis G., ed., Interscience Publ., New York, 1963.
162. H e i s k a n e n W. A., Potentialities of Satellite Geodesy and Physical Geodesy, The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Veis G., ed., Interscience Publ., New York, 1963.
163. H i r o s e H., Note on Simultaneous Observations of Artificial Satellites for Geodetic Purposes, Space Research II, 1961.
164. H i r o s e H., Researches on the Geodetic Use of Artificial Satellites. I. Method of Simultaneous Observations, Journ. Geod. Soc. Japan, 8, 3—4, 1962.
165. H i r o s e H., A Simple Method of Triangulation with the Use of Artificial Satellites, The Use of Artificial Satellites in Geodesy, Veis G., ed. Interscience Publ., New York, 1963.
166. I z s a k I. G., Tesseral Harmonics in the Geopotential, Nature, **199**, 4889, 1963.
167. K a u l a W. M., Improved Geodetic Results from Camera Observations of Satellites, 44th Annual Meeting of AGU, Washington, D.C., Journ. Geophys. Res., 68, 18, 1963.
168. K a u l a W. M., Comparison and Combination of Satellite with Other Results for Geodetic Parameters, The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Veis G., ed., Interscience Publ., New York, 1963.

169. K a u l a W. M., Satellite Orbit Analyses for Geodetic Purposes, Dynamics of Satellites, Roy M., ed., Academic Press, New York, 1963.
170. K a u l a W. M., A Review of Geodetic Parameters, NASA Tech. Note D-1847, 1963.
171. K a u l a W. M., Determination of the Earth's Gravitational Field, Rev. Geophys., **1**, 4, 1963.
172. K o z a i Y., The Potential of the Earth Derived from Satellite Motions, Dynamics of Satellites, Roy M., ed., Academic Press, New York, 1963.
173. S o d a n o E. M., Optical Electronic Azimuth and Distance for Non-intervisible Distant Stations, XIIIth General Assembly of IUGG, Berkeley, Calif., 1963.
174. V e i s G., Precise Aspects of Terrestrial and Celestial Reference Frames, Smithsonian Astrophys. Obs, Res. Space Sci. Special Rep., 123, 1963.
175. V e i s G., The Determination of Absolute Directions in Space with Artificial Satellites, Smithsonian Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 133, 1963.
176. V e i s G., Geodetic Studies of the Smithsonian Astrophysical Observatory, XIIIth General Assembly on IUGG, Berkeley, Calif., 1963.

2.6. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СПУТНИКИ

2.6.1. Технические условия для геодезических спутников

Из предыдущих разделов следует, что спутник, запускаемый для геодезических целей, должен по возможности иметь следующие характеристики (см. библ. к разд. 2.5 [88, 142]):

1. Сферическую форму, чтобы сопротивление атмосферы было более или менее постоянным, поскольку эффективная площадь поперечного сечения сферы не меняется.

2. Высоту перигея как минимум порядка 700—1000 *км*, чтобы уменьшить влияние сопротивления атмосферы до пренебрежимо малой величины.

3. Максимальное наклонение орбиты, чтобы его наблюдения были возможны в высоких широтах. При наклонениях от 55 до 70° спутник будет доступен наблюдениям практически из любой точки населенной части Земли. Для исследования гравитационных эффектов необходимы спутники с различными наклонениями орбит.

4. Для геометрических задач — эксцентриситет 0,05 или меньше; при этом орбита будет почти круговой и расстояние до спутника будет сохраняться в точных пределах. Для динамических целей предпочтительнее бóльшие эксцентриситеты — порядка 0,2 (при этом движение перигея будет хорошо заметно), но в то же время не настолько большие, чтобы вызывать существенные возмущения большой полуоси орбиты под влиянием гармоник высшего порядка.

5. Сферически симметричное распределение массы инструментального оборудования внутри ИСЗ, чтобы исключить эффект либрации.

6. Лампу-вспышку или другое устройство для фотографических наблюдений, когда спутник движется в пределах области земной тени.

7. Радиомаяк и импульсный повторитель частоты, работающий на высокой частоте, для проведения ионосферных наблюдений, не отягощенных влиянием рефракции радиоволн.

8. Точные часы для передачи по радио сигналов времени синхронно со вспышками.

9. Порядок величин некоторых инструментальных характеристик спутников, наиболее подходящих для геодезических целей: мощность солнечных батарей около 25 *вт*; запасаемая энергия 1 000 000 *вт·сек*; коэффициент полезного действия аккумуляторов 0,35; импульс 1500 *вт·сек* в течение 0,001 *сек*; уход частоты не выше 10^{-8} за сутки; вращение спутника не выше одного оборота за 40 *мин*; отношение площади поперечного сечения к массе менее 0,08 *см²/г*; датчик положения, обеспечивающий точность до 1°.

Единственная спутниковая программа, предназначенная специально для геодезических целей в современных условиях,— это программа Анна; первый спутник, работающий по этой программе, был удачно запущен 31 октября 1962 г.

2.6.2. Проект Анна

Проект Анна — это геодезическая спутниковая программа, созданная в результате совместных усилий Армии, Военно-морского флота, Национального управления по аэронавтике и исследованию космического пространства и Военно-воздушных сил США (U. S. Army Navy, NASA, Air Force), от начальных букв которых произошло название проекта. Этот проект включает несколько спутников, первый из которых (Анна 1В) был запущен на почти круговую орбиту ($e = 0{,}025$) с наклонением около 50°,1 и высотой перигея 1080 *км*.

На спутнике Анна 1В было установлено оборудование трех основных типов [20].

1. Для определения расстояний радиометодом использовалась система Секор, описанная в разд. 2.3.4.3. Спутниковый приемник импульсного повторителя частоты работает непрерывно, а передатчик включается только по запросу с земли. Ограниченная мощность источников питания спутника позволяет проводить лишь 6—7 сеансов связи в сутки. Эта ограниченная мощность означает, что спутник может использоваться только одним наземным комплексом. Чтобы сделать оборудование спутника по возможности простым, наземные станции связаны между собой синхронной сетью очень низкой частоты и передают сигналы поочередно так, что сигналы с различных наземных станций принимаются на спутнике последовательно. Чрезвычайно сложное оборудование наземных станций в сочетании с ограниченной мощностью системы питания спутника исключает широкое использование этого спутника в научных целях.

2. Для оптического определения топоцентрических координат спутника используется четыре интенсивных ксеноновых источника света, которые по команде дают серию из пяти световых вспышек продолжительностью 1,2 *мсек* с интервалом 5,6 *сек*. Главное назначение оптического маяка состоит в том, что, когда он светит, его может наблюдать в области видимости неограниченное число наблюдателей со сравнительно простым оборудованием, что делает эту систему наиболее полезной для геодезистов. Одним из недостатков оптической системы является то, что расход энергии маяка очень велик; это ограничивает число серий вспышек до 20 или менее в сутки в зависимости от времени освещенности спутника Солнцем. Из-за этого ограничения мощности световые

вспышки не могут подаваться для разных станций в отдельности, но они запрограммированы так, чтобы польза для геодезии была максимальной. Расписание времени вспышек можно найти в Volunteer Satellite Tracking Program (824 Connecticut Avenue, Washington 6, D. C.). По официальным данным (на январь 1963 г.), спутник наблюдают 23 камеры PC-1000, 12 камер Вильд BC-4, 12 камер Бейкер — Нанн и 13 камер других типов.

3. Информация об изменении расстояния спутника получается путем наблюдения допплеровского смещения частот высокостабильных сигналов спутника. Для этой цели спутник непрерывно передает сигналы на четырех частотах. Две частоты (162 и 324 *Мгц*) предназначаются для геодезических измерений, а две другие (54 и 216 *Мгц*) — для изучения рефракции и на случай отказа передатчика основной частоты слежения. Все четыре частоты когерентны, так что слежение можно вести на любой паре частот. Мощность этих передатчиков мала, и они могут работать непрерывно. Это позволяет наблюдать спутник постоянно. Допплеровское смещение измеряют на всем земном шаре 45 станций системы Транзит (на январь 1963 г.).

Кристаллы (кварца.— *Перев.*), температура которых поддерживается постоянной, задают высокостабильную частоту передатчиков и одновременно управляют ходом часов на спутнике. Приблизительно каждые 90 *сек* со спутника подается сигнал времени в форме фазовой модуляции двух допплеровских сигналов. На основе непрерывного измерения ухода частоты кварца, определяемого допплеровскими следящими системами, можно исправлять момент передачи сигналов времени с точностью лучше 0,5 *мсек*. Те же спутниковые часы, по которым передаются сигналы времени, включают световые вспышки для оптического маяка, так что допплеровские и оптические наблюдения выполняются одновременно.

Малая память спутника, объемом в 22 слова по 16 бит * содержит дополнение, позволяющее отождествлять импульсы двух допплеровских сигналов, отмеряющие интервалы продолжительностью 5,6 *сек* и вызывающие серии вспышек света. Каждый такой импульс, вырабатываемый часами спутника, добавляется к каждому из первых 21 слов, и, когда такое слово передано, возбуждается серия световых вспышек.

Спутник ориентируется по магнитному полю Земли так, что полюс спутника, наблюдаемый с Земли, определяется геомагнитной широтой спутника. Имеются два маяка, направленные на северный полюс спутника, и два — на южный. В каждом слове памяти

* Бит — единица информации.— *Прим. перев.*

для определения моментов световых вспышек используется 15 из 16 бит, а 16-й бит вводится для указания, какой световой маяк должен быть включен, северный или южный. Последнее, 22-е слово памяти используется не для включения серии вспышек, а для целей телеметрии: оно содержит информацию о том, подавались ли световые сигналы так, как было запланировано.

В дополнение к системе геодезического оборудования на спутнике установлены различные приборы, которые служат для исследования окружающего космического пространства и для определения ориентации спутника.

Разрабатывается специальная калибровочная программа, в которой результаты измерений по двум программам (система Секор с самого начала оказалась непригодной) сравниваются между собой и с результатами наземной съемки. Это имеет большое значение для проверки того, что ни в оборудовании, ни в методах обработки данных нет никаких дефектов. Если же таковые имеются, то их следует устранить до того, как геодезическая программа будет осуществляться в международном масштабе.

2.6.3. Проектируемые геодезические спутники

Использование вспыхивающих спутников для геодезических целей имеет довольно длинную историю (см. [13, 14, 22, 23, 24, 30 и др.]). Кроме спутника Анна 1В, описанного в предыдущем разделе, разрабатывается система Скорпио (Satellite Calibrator of Ranges, Photographed in Orbit) — в основном для калибровки электронного оборудования типа Мистрам. Предлагается фотографировать на фоне звезд световые вспышки, производимые на низком спутнике. Путем сравнения наблюденных координат и скорости спутника с результатами измерений, выполняемых с помощью электронных следящих систем, можно определить параметры калибровки. Параметры орбиты подбираются таким образом, чтобы обеспечить наиболее полное выполнение геофизических и геодезических задач [21, 26].

Недостаток таких спутников состоит в том, что вес необходимого для вспышек оборудования составляет значительную часть нагрузки, а порча этого сложного оборудования полностью выводит спутник из строя. Кроме того, время использования вспыхивающих спутников ограничено продолжительностью действия светового маяка.

Чтобы устранить эти трудности и сделать спутник видимым, когда он движется в тени Земли, предлагается перенести источники света на землю к наблюдателю, чтобы спутник просто отражал свет. При этом все сложное оборудование находится на земле, где его можно исправить или отрегулировать, а вес спутника сводится к минимуму. Источник света на земле должен быть достаточно мощным, чтобы его свет мог дважды пройти через атмосферу (до спутника и обратно) и чтобы его можно было зарегистрировать на наземной станции.

Для реализации этой идеи было предложено несколько способов. О'Киф и Гольдберг [25] считают возможным использовать модифицированные армейские прожекторы и специальные отражатели на спутнике. Но, поскольку сила света убывает пропорционально квадрату расстояния, требуются источники света на земле огромной мощности; поэтому система такого маяка оказывается непрактичной.

Энергию можно использовать гораздо лучше, если ее сконцентрировать в один узкий световой пучок. Источник, способный давать такой луч вместо широкого рассеянного пучка света, называется лазером. Имеются лазеры различных типов, но в предложенных системах используется рубиновый оптический лазер [17, 26—28].

Рубиновый оптический лазер — это в сущности кристалл рубина, в который поступает энергия в результате разряда, импульсной ксеноновой лампы. Вследствие поглощения излучения бóльшая часть ионов хрома в кристалле переходит в возбужденное метастабильное состояние. Переход из метастабильного состояния с высокой энергией в первоначальное, основное состояние вызывается оптическим излучением надлежащей частоты, которое обычно содержится в спектре импульсной лампы. Излучение, возникающее в процессе этого перехода, выходит из кристалла в виде очень узкого высококогерентного светового пучка, параллельного оси кристалла. Для рубина оно имеет длину волны 6943 Å. При современном состоянии лазерной техники можно получить луч с коллимацией до 0°,5, а при использовании оптической фокусировки ширина луча может быть уменьшена до 1′ Сужение луча лазера ведет к тому, что координаты спутника должны быть известны с большой точностью, чтобы можно было предвычислить орбиту и точно навести лазер на спутник. Фотографическая камера должна быть расположена вблизи лазера в круге с радиусом, равным диаметру эффективной площади спутника. Эта круглая площадка, через которую проходит отраженный свет, будет смещена относительно лазера на расстояние, зависящее от удаленности спутника от станции. Этот эффект объясняется аберрацией, вызываемой движением спутника относительно Земли.

К отражающему спутнику предъявляется требование, чтобы интенсивность света, отраженного к земле, была достаточна для короткой экспозиции фотоэмульсии (во избежание размывания изображения). Для этого рекомендуется использовать призматические отражатели (тройные зеркала.—*Перев.*).

Призматический отражатель — это устройство, которое отражает падающий на него свет параллельно приходящему лучу. Отражатель состоит из трех плоских зеркал, скрепленных таким образом, чтобы плоскость каждого зеркала составляла угол 90° с плоскостями двух других зеркал. Поскольку луч падает на отражатель под произвольным углом, то свет будет отражаться по одному разу каждой поверхностью, и в результате трех отражений общее направление отраженного луча будет точно противоположно направлению падающего луча. (Исключение составляют углы падения, при которых падающий луч параллелен одной из плоскостей зеркал.)

Другой вариант — использование вместо зеркал тетраэдров из оптического стекла (трипель-призм.—*Перев.*), у которых три поверхности, расположенные под прямыми углами, образуют угол куба, а четвертая поверхность — основание пирамиды. Эти три поверхности покрываются серебром или алюминием и становятся отражателями. Свет падающего луча входит в тетраэдр через неамальгамированную поверхность основания и отражается так же, как при входе в призму. Свет будет при этом отражаться трижды (по разу от каждой поверхности) и в общем отразится так, что пройдет через поверхность основания параллельно входящему лучу.

Интенсивность отраженного света зависит от числа отражающих поверхностей, от поглощения и от точности выполнения 90°-ных углов. Размеры отдельных отражателей несущественны; они определяются только ограничениями в весе.

Эту систему предлагается использовать следующим образом. Спутник прослеживается посредством электронного оборудования; информация о слежении поступает в вычислительное устройство, которое рассчитывает направление на спутник с наземных пунктов, положения которых приближенно известны. Эта информация передается автоматически с вычислительного устройства к следящим установкам на наземных пунктах, которые наводят лазеры в нужных направлениях. Лазеры на различных наземных пунктах включаются по сигналу с центрального поста, вероятнее всего расположенного на одном из наземных пунктов. Для компенсации разности расстояний между отдельными пунктами и между пунктами и спутником требуется регулировка времени задержки порядка миллисекунд.

Система, описанная выше, лежит в основе предлагаемого проекта Ларгос (Laser Activated Reflecting Geodetic Satellite) ВВС США. Другая подобная система в настоящее время находится в стадии эксперимента и будет применяться на полярном ионосферном спутнике-маяке S-66. Кроме оптического отражателя, представляющего собой мозаику из плавленого кварца в форме углов куба, спутник будет нести маяки Минитрек и Транзит для электронного слежения. Лазер планируется использовать либо в сочетании с фотографической камерой для определения направления на спутник (как описано выше), либо как устройство для определения расстояния (в этом случае время прихода отраженного света регистрируется с помощью фотоумножителя и вычисляется время пробега импульсов света).

Преимущество отражающей системы перед вспыхивающим спутником состоит в том, что эффективное время использования спутника будет таким же, как и время его существования на орбите. Кроме того, уменьшение веса и требуемой энергетической мощности и простота электронного оборудования позволят использовать отражатели на многих спутниках, а не ограничиваться наблюдениями одного или двух спутников, оборудованных вспыхивающими источниками света.

Недостаток этого метода — сложность наземных систем связи, наведения и слежения. Однако при наличии усовершенствованных вычислительных программ и следящих установок достаточной точности проблема слежения может быть разрешена, что сделает лазерное слежение исключительно удобной системой для геодезической службы.

БИБЛИОГРАФИЯ К РАЗД. 2.6

1. Базыкин В. В., Искусственные спутники Земли и другие космические объекты, изд-во «Знание», М., 1966.
2. Белавин О. В., Зерова М. В., Современные средства радионавигации, изд-во «Советское радио», М., 1965.
3. Жонголович И. Д., Проект единой мировой космической триангуляции, Studia geoph. et geod., 9, 185—200, Praha, 1965.
4. Искусственные космические объекты (4 окт. 1957 — 1 янв. 1965 г.), Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **45**, 1965.
5. Краткие данные о советских искусственных спутниках Земли, космических кораблях-спутниках и о космических ракетах, Иск. спутн. Земли, **12**, 3—5, 1962.
6. Крошкин М. Г., Самарин В. Г., Рубинштейн Р. Б. (составители), Каталог данных по ракетам и спутникам, имеющихся в Мировом центре данных Б, Мировой центр Б, МГГ, М., 1963.
7. Лозинский А. М., Беленко В. М. и др., Опыт фотографирования вспышки импульсной лампы на фоне звездного неба, Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, **38**, 1964.
8. Международная библиография по ИСЗ, Bieletun polskich obserwacji sztucznych satelitów, 12, grudzien, Warszawa, 1964.

9. Разумов О. В., О возможностях геодезического использования стационарного искусственного спутника Земли, Изв. вузов МВО, Геодезия и аэрофотосъемка, 6, 1963.
10. Смирнов Г. Д., Навигационные спутники, М., Военгиз, 1963.
11. Чернышев В. Н., Лазеры в космосе, на земле и под водой, М., 1964.
12. Щеголев Д. Е., Масевич А. Г., Афанасьев В. Г., Синхронные наблюдения искусственных спутников Земли «Эхо-1» для геодезических целей, Докл. АН СССР, **7**, 74—77, 1964.
13. Brettler B. J., Geodetic Flashing Light System Study, Edgerton, Germeshausen and Grier, Rep. B-1966, 1959.
14. Гиндин Е. З., Лейкин Г. А., Лозинский А. М., Масевич А. Г., Use of Light Flashes to Determine the Position of Artificial Satellites, Ann. Intern. Geophys. Year, **12**, 854—857, 1961.
15. House of Representatives, U.S., Project Anna — Geodetic Satellite System, Hearings before the Subcommittee on Space Sciences of the Comm. on Science and Astronautics, May 14, 15, and 16, 1962, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1962.
16. Hynek J. A., On the Effects of Image Motion on the Accuracy of Measurement of a Flashing Satellite, Smithson. Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 33, 1960.
17. Johnson T. S., Plotkin H. N., A Laser Activated Tracking Experiment, NASA, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md. 1962.
18. Kallman H. K., Kellogg W. W., Scientific Use of an Artificial Earth Satellite, Rand Corp. Rep. RM-1500, 1955.
19. Kaula W. M., Celestial Geodesy, Advances in Geophysics, 9, H.E. Landsberg and J. van Mieghem, eds., Academic Press, New York and London, 1962.
20. Macomber M. M., Project ANNA, COSPAR — AGU Symposium: The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Washington, D.C., April 26—28, 1962.
21. Mancini A., Kahler H. R., Warner C. Project SCORPIO, Air Force Cambridge Res. Lab., 1962.
22. Murray B. C., Basic Parameters of a Geodetic Satellite System, Air Force Cambridge Res. Lab., 1959.
23. Murray B. C., The Artificial Earth Satellite, a New Geodetic Tool, Air Force Cambridge Res. Lab., 1960.
24. Murray B. C., Williams O. W., The Optimum Use of a Geodetic Satellite, Air Force Cambridge Res. Lab., 1960.
25. O'Keefe J. A., Goldberg B., Searchlight Tracking of Artificial Satellites, Memorandum, Army Map Service, 1956.
26. Sheldon L. L., Geodesy's Newest Dimension, ACSM-ASP Convention, St. Louis, Missouri, 1962; Air Force Cambridge Res. Lab., 1962.
27. Tavenner M. S., Largos: A Suggested Method for Stereotriangulation, Journ. Geophys. Res., **67**, 9, 1962; Air Force Cambridge Res. Lab., 1962.
28. Tavenner M. S., Anna — The Flashing Satellite, ACSM-ASP Convention, St. Louis, Missouri, 1962; Air Force Cambridge, Wes. Lab., 1962.
29. Thomas P. D., Use of Near Earth Satellite Oribits for Geodetic Information, U.S. Coast and Geodetic Survey, Tech. Bull., **11**, 1960.
30. Veis G., Whitney C. A., A Flashing Satellite for Geodetic Studies, Smithson. Astrophys. Obs., Res. Space Sci. Special Rep., 19, 1958.
31. Williams O. W., A Discussion of Observation Equipment and Technique for Observing Artificial Earth Satellites, Air Force Cambridge Res. Lab., 1958.

32. W i l l i a m s O. W., Is the Satellite an Optimum Geodetic Tool? Air Force Cambridge Res. Lab., 1959.
33. W i l l i a m s O. W., A Space Age Traveler, the Geodetic Satellite, Air Force Cambridge Res. Lab., 1960.
34. W i l s o n R. H., Jr., Monograms and Charts for Relating Orbital Data to Range, Elevation, and Sunlight for an Observation Point, Ann. Intern. Geophys. Year, 6, 188—201, 1958.

В период подготовки книги к изданию вышли в свет труды различных симпозиумов, на которые сделаны ссылки. Это следующие книги:

35. The Use of Artificial Satellites for Geodesy, Veis G., ed., Interscience Publishers, New York, 1963.
36. A Compendium of Papers in the Fields of Geodesy and Planetary Geometry Prepared at AFCRL During 1962, Williams O.W., ed., Air Force Cambridge Research Laboratories, Office of Aerospace Research, U.S. Air Force, L.G-Hanscom Field, Mass., 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода 5
Предисловие автора 8

Часть 1

Использование в геодезии солнечных затмений и покрытий звезд Луной 11

1.0. Обозначения в части 1 13

1.1. Введение 19
1.1.1. Определения 19
1.1.2. Два различных положения наблюдателя 19

1.2. Основы теории солнечных затмений 21
1.2.1. Предвычисление 21
1.2.2. Условие начала и конца затмения Солнца в данном пункте Земли 24

1.3. Предвычисление солнечного затмения для заданного пункта . . 36
1.3.1. Общий метод 36
1.3.2. Карты затмений 42
1.3.3. Метод American Ephemeris and Nautical Almanac и Astronomical Ephemeris 45
1.3.4. Поправка за атмосферную рефракцию 57

1.4. Предвычисление покрытий 60
1.4.1. Общий метод 60
1.4.2. Метод American Ephemeris and Nautical Almanac и Astronomical Ephemeris 68
1.4.3. Границы полосы покрытия 72
1.4.4. Предвычисление изогоны покрытия 74

1.5. Использование в геодезии покрытий звезд Лупой и солнечных затмений 77
1.5.1. Применение покрытий для определения координат в единой геодезической системе 78
1.5.2. Принципы использования, солнечных затмений для определения координат в единой геодезической системе 91
1.5.3. Использование покрытий при определении экваториального радиуса Земли и параллакса Луны 96

1.6. Наблюдения солнечных затмений и покрытий 100
1.6.1. Наблюдения солнечных затмений 100
1.6.2. Наблюдения покрытий 111

1.7. Анализ результатов и заключение 117
1.7.1. Основные причины, влияющие на точность результатов 117
1.7.2. Преимущества и недостатки наблюдения покрытий по сравнению с солнечными затмениями 121

Библиография к части 1 122

Часть 2

Применение ИСЗ в геодезии

2.0. Обозначения в части 2 131

2.1. Введение 138

2.2. Обзор теории движения близких искусственных спутников . . 141
2.2.1. Нормальные орбиты 141
2.2.2. Возмущенные промежуточные орбиты 162
2.2.3. Возмущенные эмпирические орбиты 204

Библиография к разд. 2.2. 205

2.3. Наблюдения искусственных спутников Земли 221
2.3.1. Визуальные методы наблюдений ИСЗ 221
2.3.2. Фотографические методы наблюдений ИСЗ 229
2.3.3. Фотоэлектрические методы наблюдений ИСЗ 251
2.3.4. Электронные методы наблюдений ИСЗ 252
2.3.5. Фотографические наблюдения Луны 269
2.3.6. Определение времени 272

Библиография к разд. 2.3 275

2.4. Обработка наблюдений 282
2.4.1. Обработка визуальных наблюдений 282
2.4.2. Обработка фотографических наблюдений 287
2.4.3. Обработка электронных наблюдений 295

Библиография к разд. 2.4 297

2.5. Использование ИСЗ и Луны в геодезии 300
2.5.1. Геометрическое использование спутников 300
2.5.2. Динамическое использование спутников 327

Библиография к разд. 2.5 346

2.6. Геодезические спутники 356
2.6.1. Технические условия для геодезических спутников 356
2.6.2. Проект Анна 357
2.6.3. Проектируемые геодезические спутники 359

Библиография к разд. 2.6 362

И. Меллер

ВВЕДЕНИЕ В СПУТНИКОВУЮ ГЕОДЕЗИЮ

Редактор *Р. Г. Золина*
Художник *Г. И. Юдицкий*
Художественный редактор *Н. А. Фильчагина*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*
Корректор *А. Ф. Рыбальченко*
Сдано в производство 22/II 1967 г.
Подписано к печати 22/VIII 1967 г.
Бумага тип. № 1 $60 \times 90^1/_{16} = 11{,}5$ бум. л.
23 печ. л.
Уч.-изд. л. 21,33. Изд. № 27/3907
Цена 1 р. 72 к. Темплан 1967 г. изд-ва «МИР»
пор. № 107. Зак. 859

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16
Главполиграфпрома Комитета
по печати при Совете
Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9