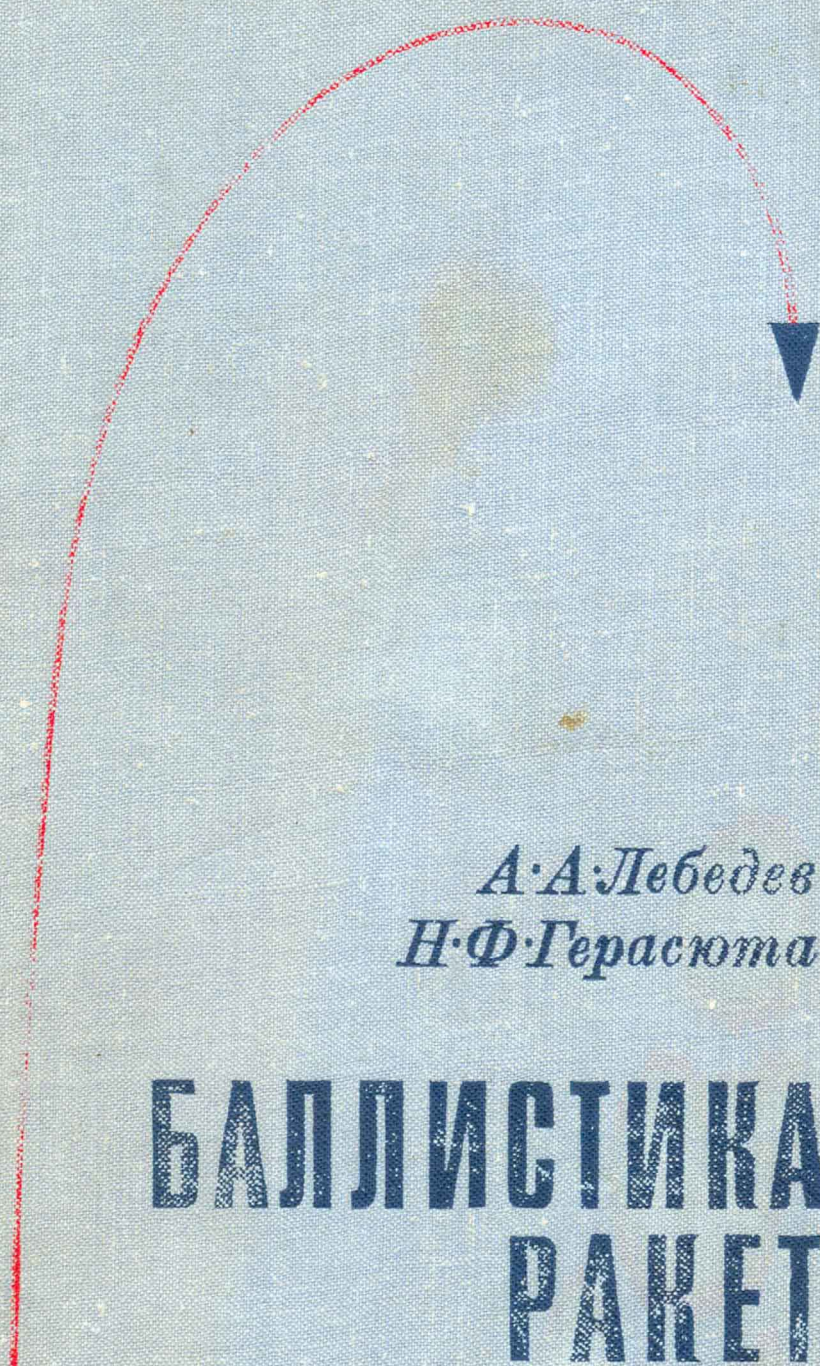




*А.А.Лебедев  
Н.Ф.Герасюта*

**БАЛЛИСТИКА  
РАКЕТ**

---

**Баллистика ракет**, Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф., «Машиностроение», 1970, стр. 244

Книга посвящена рассмотрению методов решения некоторых задач баллистики ракет дальнего действия. Большое внимание уделяется вопросам взаимодействия различных частей ракеты и системы управления, а также взаимообусловленному решению задач баллистики, динамики, управления и стрельбы, подчиненному требованию оптимизации основных характеристик ракеты — предельной дальности и точности стрельбы. Рассмотрены условия полета ракеты, особенности ракеты как управляемой механической системы, общие уравнения движения ракеты, установочные данные для стрельбы, предельная дальность, динамика старта и процессов разделения, динамика неуправляемой головной части, рассеивание ракет, выбор номинальной траектории.

Книга предназначена для инженеров и научных работников, занимающихся вопросами проектирования и исследования ракет и их систем управления. Она также будет полезна студентам старших курсов ВУЗов соответствующих специальностей.

Иллюстр 96. Табл. 9. Библ. 31 наименов.

---

Рецензент доктор физ.-мат. наук Г. С. Нариманов

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге рассматриваются некоторые задачи баллистики управляемых ракет дальнего действия. На выбор этих задач оказала влияние монография «Баллистика управляемых ракет дальнего действия» Р. Ф. Аппазова, С. С. Лаврова и В. П. Мишина. В настоящей книге авторы прежде всего пытались развить те разделы баллистики, которые в упомянутой монографии изложены кратко или вообще опущены.

Для практической деятельности инженеров, занимающихся проектированием любых изделий, характерна необходимость решения и согласования многочисленных взаимосвязанных задач и вопросов с целью обеспечения разнообразных и обычно противоречивых технических требований, предъявляемых к изделию. При этом решение любой задачи проектирования инженер, как правило, начинает с составления или обоснования рациональной математической модели изделия, достаточно сложной для того, чтобы получить правильный ответ на поставленный вопрос, и в то же время достаточно простой, чтобы затраты труда и времени на вычисления не были бы чрезмерно большими.

В связи с внедрением в инженерную практику современной вычислительной техники, позволяющей решать очень сложные технические задачи, возросло значение работ по составлению и обоснованию математических моделей и повысились затраты труда инженеров на эти виды работ. Учитывая сказанное, при изложении узловых задач баллистики (исследование движения ракеты на переходных участках траектории, исследование движения головной части, расчет рассеивания точек падения головных частей, выбор формы траектории ракеты, определение установочных данных для пуска ракеты, обеспечение предельной дальности стрельбы) авторы имели в виду:

- 1) показать особенности управляемой баллистической ракеты дальнего действия как очень сложного объекта динамического проектирования и показать связи между вопросами баллистики, динамики, управления, стрельбы, прочности, конструирования и эксплуатации;

2) рассмотреть математические модели, применяемые при решении различных задач баллистики, показать обусловленность учитываемых в модели связей от цели исследования и тактико-технических требований к ракете, а также показать необходимость учета многочисленных случайных возмущающих факторов.

Методы вычислений и результаты конкретных решений задач баллистики в книге не рассматриваются. Предполагается, что основным методом получения численных результатов являются вычисления при помощи ЦВМ.

Изложение перечисленных выше задач и вопросов проводится на примере баллистических ракет дальнего действия с ЖРД, тяга которых регулируется. Рассматривая ракеты дальнего действия, можно наиболее ярко показать влияние различных факторов на решение задач баллистики. Поскольку жидкостные ракеты с регулируемой тягой имеют сравнительно простую систему управления, существенно упрощаются многие взаимосвязи между различными вопросами динамического проектирования, что в свою очередь позволяет упростить изложение и изучение материала книги.

В своей работе над книгой авторы постоянно находили дружескую помощь со стороны многих товарищей, которым они выражают свою глубокую благодарность. Авторы признательны также рецензенту доктору физ.-мат. наук Г. С. Нариманову за ряд полезных замечаний, позволивших улучшить содержание книги.

Отзывы и предложения по книге просьба направлять по адресу: Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3, издательство «Машиностроение».

---



## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ (для ракеты и головной части)

- $a$  — скорость звука в атмосфере; большая полуось земного эллипсоида;  
 $b$  — малая полуось земного эллипсоида;  
 $c_x, c_y, c_z$  — коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой силы соответственно;  
 $c_{x1}$  и  $c_x$  — коэффициенты осевой аэродинамической силы;  
 $c_{y1}$  и  $c_n$  — коэффициенты нормальной аэродинамической силы;  
 $c_{z1}$  — коэффициент поперечной аэродинамической силы;  
 $D$  — диаметр миделевого сечения;  
 $e$  — эксцентриситет земного эллипсоида;  
 $F$  — результирующая полной аэродинамической силы и силы притяжения;  
 $f$  — гравитационная постоянная;  
 $G$  — сила тяжести (вес объекта);  
 $G_0$  — стартовый вес ракеты;  
 $G_T$  — сила притяжения Земли;  
 $G_{T\text{ пл}}$  — вес топлива;  
 $\dot{G}$  — секундный весовой расход топлива  $\left( \dot{G} = \left| \frac{dG}{dt} \right| \right)$ ;  
 $g$  — ускорение силы тяжести;  
 $g_0$  — ускорение силы тяжести на поверхности Земли;  
 $g_T$  — ускорение силы притяжения (тяготения);  
 $h$  — высота центра масс объекта над поверхностью земного эллипсоида;  
 $J$  — управляющий функционал;  
 $J_{x1}, J_{y1}, J_{z1}$  — моменты инерции относительно связанных осей  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ , совпадающих с главными центральными осями;  
 $\ddot{J}$  — ускорение центра масс объекта в относительной (земной) системе координат;  
 $\ddot{J}_a$  — абсолютное ускорение центра масс объекта;  
 $\ddot{J}_{ц}$  — центробежное ускорение;  
 $\ddot{J}_c$  — кориолисово ускорение;  
 $K$  — отношение веса окислителя к весу горючего;  
 $L$  — дальность полета ракеты;  
 $l$  — длина объекта;  
 $M$  — число Маха;



$M$  — момент силы; масса Земли;  
 $M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}$  — моменты крена, рыскания и тангажа соответственно;  
 $m$  — масса объекта;  
 $\dot{m}$  — секундный расход массы через выходное сечение сопла;  
 $m_{x1}, m_{y1}, m_{z1}$  — коэффициенты моментов крена, рыскания, тангажа соответственно;  
 $P$  — сила тяги ракетного двигателя;  
 $P_{уд}$  — удельная тяга ракетного двигателя;  
 $p$  — давление воздуха или газов;  
 $q$  — скоростной напор;  
 $q_i$  — обобщенные координаты ракеты;  
 $q_W$  — скоростной напор с учетом скорости ветра;  
 $R$  — радиус земной сферы; полная аэродинамическая сила;  
 $Re$  — число Рейнольдса;  
 $r$  — расстояние между центром масс объекта и центром Земли;  
 $S$  — площадь миделевого сечения;  
 $s$  — кажущийся путь;  
 $T$  — абсолютная температура воздуха или топлива в  $^{\circ}K$ ;  
 $t$  — время;  
 $t_k$  — момент окончания активного участка (отделения головной части);  
 $V$  — скорость центра масс объекта относительно Земли (при отсутствии ветра совпадает со скоростью относительно воздуха);  
 $V_W$  — скорость центра масс объекта относительно воздушной среды (а также относительно Земли при отсутствии ветра);  
 $W$  — скорость ветра относительно Земли;  
 $w$  — кажущаяся скорость ракеты;  
 $X$  — сила лобового сопротивления;  
 $X_1$  — осевая сила;  
 $x_3$  — координата центра масс объекта вдоль земной оси  $Ox_3$ ;  
 $x_{дв}$  — расстояние от вершины объекта до управляющих двигателей или других органов управления;  
 $x_d$  — расстояние от вершины объекта до центра давления;  
 $x_T$  — расстояние от вершины объекта до центра масс (центра тяжести);  
 $Y$  — подъемная сила;  
 $Y_1$  — нормальная сила;  
 $y_3$  — координата центра масс объекта вдоль земной оси  $Oy_3$ ;  
 $Z$  — боковая сила;  
 $Z_1$  — поперечная сила;  
 $z_3$  — координата центра масс объекта вдоль земной оси  $Oz_3$ ;  
 $A$  — геодезический азимут направления стрельбы (гл. VII и VIII),  
 $\alpha$  — угол атаки; полярное сжатие земного эллипсоида;  
 $\alpha_W$  — угол атаки с учетом скорости ветра;  
 $\beta$  — угол скольжения;  
 $\gamma$  — удельный вес; угол крена;  
 $\delta$  — угол отклонения органов управления;  
 $\delta_\varphi, \delta_\xi, \delta_\eta$  — углы отклонения органов управления тангажом, рысканием и креном соответственно;



- $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  — углы отклонения органов управления;  
 $\zeta$  — координата центра масс ракеты вдоль инерциальной оси  $O\xi$ ;  
 $\eta$  — угол крена ракеты относительно начальной стартовой системы координат; координата центра масс ракеты вдоль инерциальной оси  $O\eta$ ;  
 $\theta$  — угол между вектором скорости и местным горизонтом;  
 $\theta_w$  — угол между вектором воздушной скорости  $V_w$  и местным горизонтом;  
 $\vartheta$  — угол тангажа;  
 $\lambda$  — долгота геоцентрическая и геодезическая;  
 $\xi$  — угол рыскания ракеты относительно начальной стартовой системы координат; координата центра масс ракеты вдоль инерциальной оси  $O\xi$ ;  
 $\rho$  — плотность воздуха;  
 $\varphi$  — угол тангажа ракеты относительно начальной стартовой системы координат;  
 $\varphi_r$  — геодезическая широта;  
 $\varphi_n$  — геоцентрическая широта;  
 $\Psi$  — азимут проекции вектора скорости на горизонтальную плоскость;  
 $\psi$  — угол рыскания; азимут стрельбы (гл. II);  
 $\psi_w$  — азимут направления ветра;  
 $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$  — проекции вектора угловой скорости объекта на связанные оси  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ ;  
 $\omega_3$  — угловая скорость вращения Земли.
-



## ВВЕДЕНИЕ

Под *баллистической ракетой* принято понимать управляемый летательный аппарат с ракетным двигателем, предназначенный для доставки полезного груза на большие расстояния по заданной незамкнутой траектории, бóльшая часть которой представляет собой траекторию свободного полета.

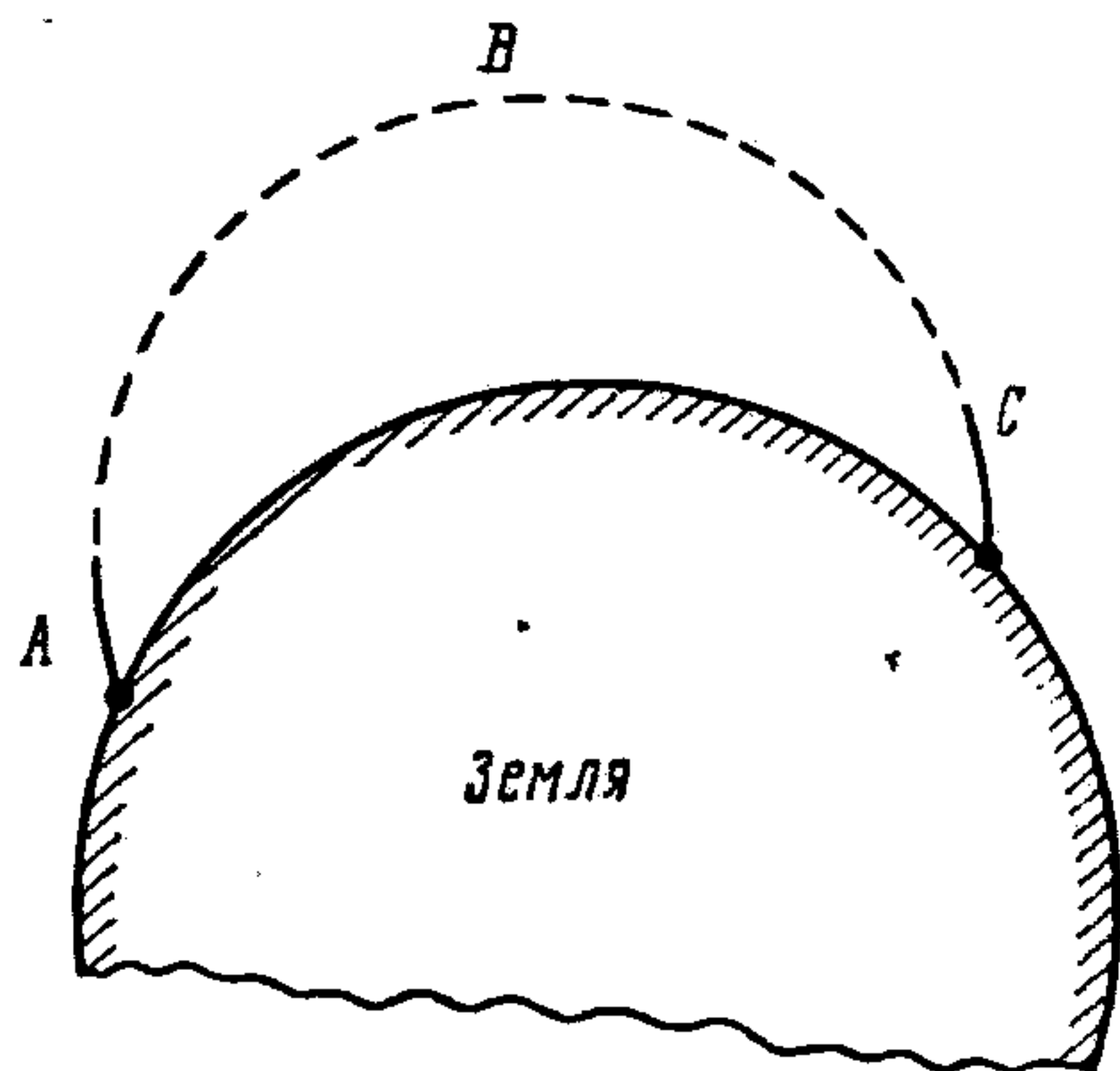


Рис. 0.1. Траектория баллистической ракеты

**Особенности траекторий баллистической ракеты.** В зависимости от сил, действующих на баллистическую ракету, ее траектория может быть разделена на три участка (рис. 0.1):

*A — активный участок*, т. е. участок полета с работающей двигательной установкой, на котором, как правило, осуществляется управление полетом ракеты;

*B — участок свободного полета*, на котором ракета движется как свободное тело. Обычно этот участок располагается на сравнительно большой высоте, где аэродинамические силы очень малы и ракета движется практически только под действием силы тяжести;

*C — участок снижения* в плотных слоях атмосферы, на котором аэродинамические силы оказывают существенное влияние на полет ракеты.

Так как на участках *B* и *C* двигательная установка не работает и на ракету действуют только сила тяжести и аэродинамические силы, то соответствующая траектория полета является баллистической, а сам участок *B—C* полета баллистической ракеты называется *пассивным*, или *баллистическим*.



Траектория свободного полета определяется параметрами движения ракеты в начале свободного полета (т. е. в конце активного участка): координатами центра масс ракеты и проекциями его скорости. В частности, координаты точки падения ракеты на поверхность Земли зависят от параметров движения ракеты в конце активного участка и ряда прочих факторов, например, состояния атмосферы на участке снижения, аномалий гравитационного поля Земли и т. д. Поэтому, чтобы ракета выполнила поставленную перед ней задачу, необходимо в конце активного участка иметь вполне определенные значения параметров движения центра масс ракеты.

**Ракетный комплекс.** Подготовка пусков баллистических ракет осуществляется *ракетным комплексом*, который обеспечивает проведение цикла предстартовых операций и пуск ракет. В состав ракетного комплекса, кроме ракет, являющихся средством доставки боевой части в район цели, входят:

1) пусковые установки с комплектами эксплуатационного оборудования, системами снабжения и коммуникаций;

2) система управления пуском с командным пунктом и средствами связи;

3) система прицеливания и внебортовая аппаратура управления полетом.

Особенности ракетного комплекса во многом определяются типом стартовых позиций. В зависимости от условий применения ракеты и требований, предъявляемых к защищенности стартовых позиций, могут использоваться различные виды стартов: с наземной подвижной пусковой установки, из шахтного сооружения и т. д.

Основными характеристиками ракетного комплекса являются дальность и точность стрельбы, эффективность боевой части, способность преодолевать системы противоракетной обороны, боеготовность, надежность, живучесть, экономичность в производстве и эксплуатации, простота обслуживания. Эти характеристики тесно связаны друг с другом и, как правило, противоречивы.

Ракетный комплекс представляет собой сложную систему, состоящую из большого числа элементов, связанных между собой. Однако сложность ракетного комплекса обусловлена не только большим количеством взаимосвязей. Весьма существенно и характерно то, что связи между отдельными элементами комплекса качественно различны и каждая из них имеет индивидуальное значение. Последнее означает, что расстройство только одной связи может нарушить пуск или нормальный полет ракеты.

При создании ракетного комплекса рассматривают его элементы как части единого целого и разрабатывают каждый из элементов так, чтобы обеспечить требуемые характеристики комплекса в целом.



**Ракета и комплектующие ее системы.** Современные баллистические ракеты отличаются многообразием конструктивных форм. Они могут быть одно- и многоступенчатыми с последовательным (схема «тандем») и параллельным (схема «пакет») расположением ступеней, использовать в качестве рабочего тела жидкое или твердое топливо и т. п. Различие конструкций зависит от назначения ракеты и требований, предъявляемых к ней, а также от уровня развития техники. Эти условия и определяют выбор конструктивной схемы ракеты, типа топлива и двигателя, способа старта и т. д.

По типу используемого топлива баллистические ракеты делятся на жидкостные и твердотопливные. По величине удельного импульса тяги жидкие ракетные топлива имеют преимущества по сравнению с существующими твердыми топливами. Существенным достоинством ракетных двигателей на жидком топливе является возможность многократного запуска и останова а также возможность регулирования величины тяги в полете для снижения рассеивания траекторий ракеты на активном участке.

Твердотопливные ракеты по сравнению с жидкостными, как правило, имеют более простую конструкцию. Однако вследствие больших отклонений основных характеристик твердотопливных двигателей (тяги и весового секундного расхода) от их номинальных значений имеет место большое рассеивание траекторий полета ракеты на активном участке. Это приводит к усложнению системы управления полетом. В дальнейшем отдельные вопросы, связанные с конструкцией ракеты, будем рассматривать на примере жидкостных ракет.

Межконтинентальные баллистические ракеты, как правило, выполняются многоступенчатыми, чаще всего двухступенчатыми с последовательным расположением ступеней. Такие ракеты состоят из трех последовательно расположенных частей: отделяющейся части первой ступени, корпуса второй ступени и головной части (рис. 0.2). В полете при достижении ракетой заданной скорости (либо при выгорании топлива) система управления выдает команду на выключение двигателей первой ступени, разделение ступеней и запуск двигателей второй ступени. В конце активного участка траектории по команде, которая формируется системой управления на основании информации о параметрах движения ракеты, выключаются двигатели второй ступени и отделяется головная часть от корпуса второй ступени.

Каждая из ступеней жидкостной ракеты, как правило, состоит из топливного отсека, отсека для размещения приборов и аппаратуры системы управления и хвостового отсека для размещения двигательной установки. Для обеспечения работы двигательной установки на ступени устанавливается ряд специальных систем: наддува топливных баков, синхронного опорожнения баков, контроля уровней и др.



Система наддува топливных баков предназначена для создания избыточных давлений в баках перед запуском двигателей и при их работе.

Система синхронного опорожнения баков устанавливается для регулирования объемных расходов компонентов топлива. Эта система формирует командные сигналы таким образом, чтобы к моменту выключения двигателей при стрельбе

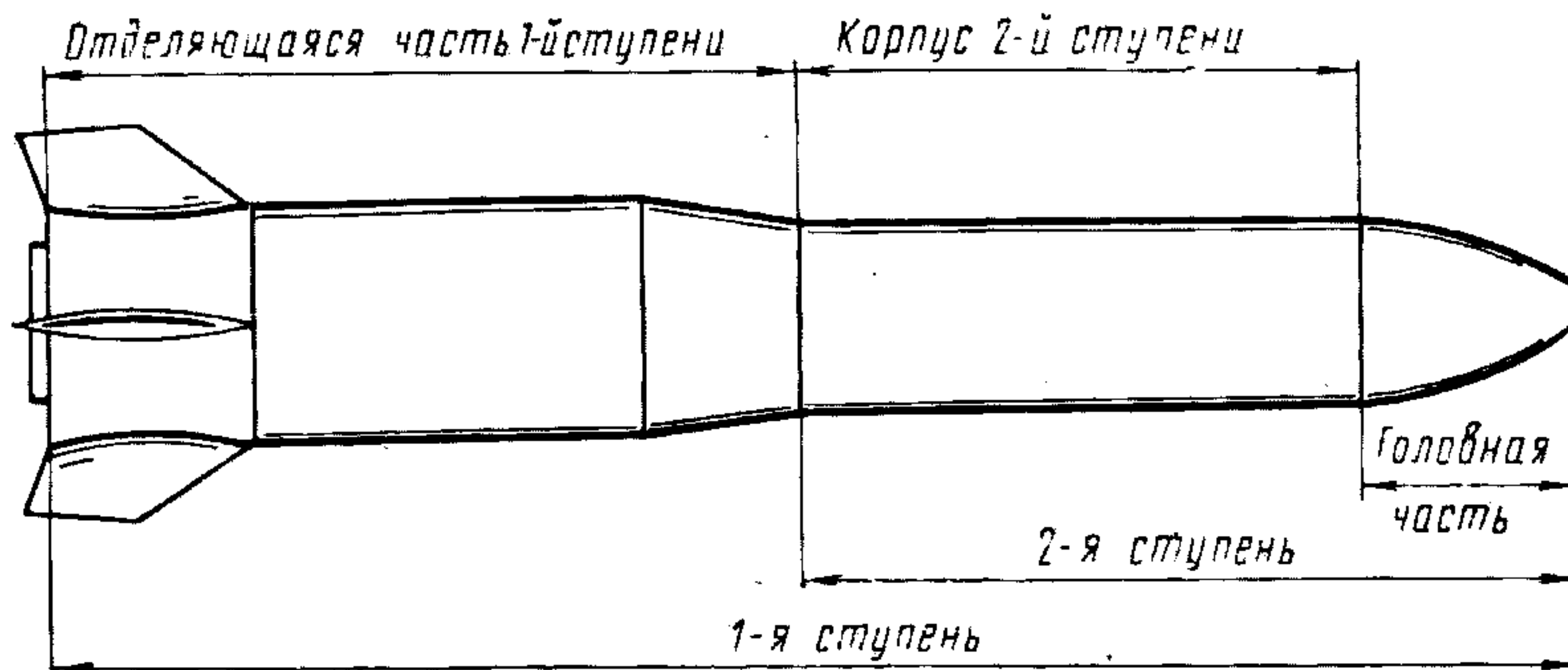


Рис. 0.2. Схема двухступенчатой жидкостной МБР

на максимально возможную дальность обеспечить полное израсходование обоих компонентов топлива. В случае отсутствия этой системы вследствие неизбежно возникающего отклонения соотношения весовых секундных расходов компонентов топлива к концу работы двигательных установок в одном из баков ракеты остаются неиспользованные рабочие запасы топлива, что приводит к уменьшению максимальной дальности стрельбы.

Система контроля уровней служит для дистанционного контроля уровней окислителя и горючего в баках при заправке и для выдачи команд заправочным агрегатам при окончании заправки. Система контроля уровней позволяет также периодически контролировать уровни компонентов топлива в баках в процессе длительного хранения заправленной ракеты.

Каждая ступень ракеты имеет *органы управления*, отклонение которых для создания управляющих моментов осуществляется рулевыми машинами. В настоящее время известно большое число разнообразных органов управления баллистическими ракетами, среди которых чаще всего используются поворотные камеры сгорания.

Система управления полетом представляет собой совокупность приборов и устройств, обеспечивающих в соответствии с произведенным прицеливанием управляемый полет ракеты и попадание ее головной части в окрестность цели с требуемой точностью.



**Основные этапы разработки ракетного комплекса**<sup>1</sup>. Ракетный комплекс разрабатывается на основании тактико-технических требований, которые определяют его назначение, технические и эксплуатационные характеристики, взаимодействие составных частей. К основным характеристикам ракеты можно отнести дальность и точность стрельбы, тип полезной нагрузки и ее вес, возможность преодоления средств противоракетной обороны, стартовый вес, тип старта, тип двигателя и компоненты топлива, количество ступеней ракеты, тип системы управления полетом, боеготовность, надежность.

Процесс разработки ракетного комплекса включает в себя ряд этапов. На первом этапе проводятся различного рода поисковые работы и предварительные исследования, рассматривается большое число различных вариантов схем ракетного комплекса. Задачами этого этапа являются оценка возможности создания ракетного комплекса, удовлетворяющего заданным тактико-техническим требованиям, выбор оптимального варианта (или вариантов) и получение исходных данных для основного проектирования, отсутствующих в тактико-технических требованиях, а также оценка стоимости проведения всех работ и сроков их исполнения.

Из большого числа вопросов, обычно рассматриваемых при предварительном проектировании, отметим для примера следующие: выбор компоновочной схемы ракеты, оценка весовых и центровочных характеристик, выбор компонентов топлива, выбор основных и управляющих двигателей.

Итогом работ первого этапа является выпуск предэскизного проекта ракеты. В предэскизном проекте приводятся предварительные материалы по баллистике (расчеты траекторий полета), аэродинамическим характеристикам, прочности, управляемости и устойчивости ракеты и т. д. Кроме того, даются материалы по возможности использования имеющегося наземного оборудования, а также существующих производственных мощностей.

Второй этап разработки представляет собой *основное проектирование*, которое по традиции часто называется *эскизным проектированием*. Перед началом этого этапа уточняются отдельные тактико-технические данные ракетного комплекса, состав и характеристики его основных частей.

На этапе основного проектирования проводятся углубленные проработки по всем вопросам, связанным с созданием ракеты и наземного оборудования комплекса. Для этого, кроме расчетов, используются лабораторные исследования и экспериментальная отработка различных узлов, агрегатов и систем. Так, например, проводятся лабораторные исследования и отработка приборов и агрегатов системы управления, наземного оборудования, прочностные испытания корпуса, баков и отдельных уз-

---

<sup>1</sup> См., например, книгу [20].



лов ракеты, стендовые испытания двигателей, экспериментальные исследования колебаний жидкости в баках и т. д.

Задачей этого этапа работ является подготовка обоснованных материалов для выпуска чертежно-технической документации и изготовления опытных образцов ракеты и наземного оборудования.

Следующим этапом создания ракетного комплекса является *разработка чертежно-технической документации и изготовление опытных образцов*. Этот этап трудно отделить во времени от этапа основного проектирования, так как разработка чертежно-технической документации и изготовление отдельных узлов и систем часто проводится в период основного проектирования. В особенности это относится к аппаратуре и узлам, имеющим наиболее длительный технологический цикл изготовления.

Дальнейшим этапом работ является наземная отработка опытных образцов материальной части (отдельных элементов и систем) с использованием стендов и т. п. Этот этап по времени в той или иной мере также может совпадать с предыдущими этапами.

Заключительным этапом является отработка и оценка опытных образцов-путем летных испытаний. Этому этапу работ предшествует подготовка документации, необходимой для проведения летных испытаний и, в частности, выпуск инструкций по всем видам работ, проводимым на полигоне. Особо следует отметить разработку вопросов баллистического обеспечения летных испытаний (выбор полигона, трасс стрельбы, районов падения отделяющихся элементов ракеты и головных частей, выбор и обоснование программ управления полетом, расчет траекторий полета и установочных данных системы управления).

Летные испытания опытных образцов предназначены для проверки соответствия фактических и заданных летно-технических характеристик ракеты, аппаратуры управления, наземного оборудования, определения путей совершенствования и т. д. Этот этап играет важную роль в создании ракетного комплекса. На основании результатов испытаний вносят необходимые изменения в конструкцию комплекса. Поэтому рассматриваемый этап обычно называют *этапом летно-конструкторских испытаний*. В ходе испытаний уточняются также вопросы эксплуатации, оценивается надежность работы всех систем и агрегатов, проводится оценка работы ракетного комплекса в целом, готовится эксплуатационная документация.

**Место динамического проектирования в процессе разработки ракетного комплекса.** При создании ракетного комплекса и, в частности, самой ракеты весьма большую роль играет динамическое проектирование, включающее в себя главным образом решение задач баллистики, динамики, управления и стрельбы. По результатам динамического проектирования определяются основные характеристики ракеты и ее компоновка.



При решении вопроса о возможности создания ракеты, удовлетворяющей заданным тактико-техническим требованиям, проводится большое количество баллистических расчетов, на основании которых определяются наиболее рациональные варианты компоновочной схемы и основных проектных параметров ракеты, весовая сводка и центровка, номинальные траектории полета.

Вопросы о возможности обеспечения управляемости и устойчивости ракеты решаются путем исследования ее динамической схемы. Последняя описывается дифференциальными уравнениями возмущенного движения, коэффициенты которых определяются компоновочной схемой и конструктивными параметрами ракеты, а также параметрами движения ракеты по номинальной траектории.

Рассматривая различные варианты решений, выбирают наиболее рациональную динамическую и, следовательно, компоновочную схему ракеты. При этом приходится преодолевать ряд противоречий. Может оказаться, что компоновочная схема ракеты, удовлетворяющая баллистическим, конструктивно-технологическим и эксплуатационным требованиям, не будет удовлетворять требованиям управляемости и устойчивости. Например, уменьшение жесткости ракеты с целью снижения ее веса ведет к понижению частот упругих колебаний ракеты, что создает значительные трудности в обеспечении устойчивости полета. Использование достаточно эффективных органов управления (управляющие камеры, газовые рули и т. п.) всегда приводит к понижению удельной тяги двигательной установки или увеличению «сухого» веса и, следовательно, ухудшает энергетические возможности ракеты. В связи с этим определение наиболее рационального варианта ракеты, ее компоновочной схемы, способа заправки, стоимости, сроков разработки и т. д. в большой степени зависит от того, насколько правильно решены задачи динамического проектирования ракеты.

На этапе основного проектирования роль динамического проектирования еще более высока. На этом этапе требуется дать исчерпывающий ответ на вопрос о достаточности принятых решений по обеспечению для проектируемой ракеты заданной дальности и точности стрельбы, управляемости и устойчивости во всех возможных эксплуатационных условиях, т. е. во всех геофизических условиях пуска, при различных метеорологических условиях, отклонениях параметров ракеты и аппаратуры управления от номинальных значений, изменениях в комплектации ракеты и т. д.

Наличие большого количества возмущающих факторов (разброс параметров атмосферы, характеристики топлива и конструктивных параметров, погрешности работы комплектующих агрегатов и систем и т. п.) вызывает отклонения параметров движения ракеты от расчетных значений. Это обстоятельство



предопределяет применение вероятностных и статистических методов при решении многих задач динамического проектирования ракеты (например, при обеспечении заданной предельной дальности стрельбы, оценке рассеивания точек падения головных частей и т. д.).

В решении задач динамического проектирования ракетного комплекса ярко проявляется метод комплексной разработки, при котором комплекс рассматривается как единое целое. При динамическом проектировании приходится находить рациональные компромиссные решения по многочисленным взаимосвязанным вопросам. Так, например, выбор способа управления влияет на компоновку и энергетiku ракеты, выбор траекторий связан с энергетическими характеристиками ракеты, температурными и прочностными ограничениями, требованиями к точности стрельбы, типом системы управления (автономная или радиотехническая), а также с районами отчуждения, предназначенными для падения отделяющихся частей первых ступеней, и многими другими факторами; выбор места установки гироскопических приборов связан с вопросом обеспечения устойчивости упругой ракеты; выбор способа разделения ступеней и отделения головной части — с требованиями, предъявляемыми к характеристикам двигательных установок; выбор количества и места установки устройств, демпфирующих колебания жидкого топлива в баках, — с компоновкой ракеты и ее энергетическими характеристиками.

Велика роль динамического проектирования при разработке шахтного стартового сооружения. В этом случае может проводиться анализ различных вариантов движения ракеты в шахтном сооружении (свободное движение и движение по направляющим), определяется потребный диаметр ствола шахты, внутри которого движется ракета, величины проходных сечений газоходов и другие данные, необходимые для проектирования шахтного сооружения.

При выборе варианта исполнения шахтного сооружения, кроме этих данных, учитываются характеристики надежности выхода ракеты из шахты, стоимость шахтного сооружения и другие факторы.

Тесная взаимосвязь между различными вопросами динамического проектирования ракетного комплекса вынуждает вести проектирование в несколько этапов, согласуя на каждом из них полученные результаты со всеми соисполнителями. Особо тщательно подходят к выбору командных приборов и другой аппаратуры системы управления вследствие большой сложности их изготовления и относительно высокой стоимости.

При решении задач динамического проектирования широко используется вычислительная техника. В частности, расчеты активных участков траекторий, пассивных участков полета головных частей и отделяющихся частей ступеней ракеты и другие



баллистические расчеты проводятся с помощью электронных цифровых вычислительных машин (ЦВМ).

При анализе устойчивости движения основным методом исследования является моделирование возмущенного движения ракеты на электронных аналоговых вычислительных машинах (АВМ) с использованием реальной бортовой аппаратуры управления. Этот метод позволяет получить достаточно полное представление о реальных процессах, имеющих место в полете.

В последнее время для исследования устойчивости движения ракеты начинает широко использоваться аналого-цифровые комплексы (АЦК), представляющие собой соединение аналоговой и цифровой вычислительных машин с реальной аппаратурой системы управления полетом. Такой комплекс позволяет гораздо более оперативно, всесторонне и на высоком техническом уровне решать задачи динамики движения ракеты. Одной из задач, решаемых с помощью аналого-цифрового комплекса, является задача определения наихудших сочетаний параметров ракеты и аппаратуры системы управления и проверка надежности обеспечения устойчивого движения ракеты при различных неблагоприятных условиях.

Использование электронной вычислительной техники позволяет осуществить моделирование полета ракеты с учетом большинства случайных факторов, т. е., другими словами, для принятой модели случайного процесса (полета ракеты) получить серию реализаций этого процесса — «электронных пусков» ракеты и оценить, например, рассеивание точек падения головных частей.

Кроме расчетов на ЦВМ и моделирования на АВМ, при динамическом проектировании широко используются графоаналитические методы исследования, особенно на этапе предварительного проектирования. Применение графоаналитических методов требует существенного упрощения динамической схемы ракеты. Из ряда необходимых многочисленных упрощений следует указать на линеаризацию уравнений движения ракеты и замену переменных коэффициентов этих уравнений постоянными (прием «замораживания» коэффициентов). Так, например, при предварительном исследовании устойчивости движения ракеты принимаются отмеченные упрощения, чтобы затем использовать частотный метод или метод корневого годографа. Линеаризация уравнений при исследовании точности стрельбы дает возможность применить соответствующие методы теории вероятностей. В тех случаях, когда нельзя пренебречь нелинейными свойствами ракеты или системы управления, используются такие приближенные методы, как метод гармонического баланса или метод статистической линеаризации. Графоаналитические методы позволяют инженеру глубоко проникнуть в сущность исследуемого явления, что способствует более успешному последующему



решению задач динамического проектирования с помощью более точных методов с использованием ЦВМ, АВМ и АЦК.

**Основные задачи баллистики ракет.** Баллистика ракет решает следующие основные задачи.

1. Исследование зависимости летных характеристик ракеты, и в первую очередь дальности ее полета, от конструктивных параметров с целью выбора наивыгоднейшего сочетания этих параметров (баллистическое проектирование).

2. Определение траектории и других основных характеристик движения ракеты с известными конструктивными параметрами и системой управления при заданных прицельных данных (поворотные баллистические расчеты).

3. Определение исходных данных для проектирования головной части и исследование рассеивания головных частей (задачи баллистики головных частей).

4. Обеспечение максимальной прицельной дальности стрельбы в условиях влияния различных возмущающих факторов — разброса конструктивных параметров, изменения внешних условий полета и др. (обеспечение предельной дальности стрельбы).

5. Исследование влияния различных возмущающих факторов на активном участке полета и, в частности, погрешностей элементов системы управления на рассеивание точек падения головных частей (исследование рассеивания ракет).

6. Определение прицельных данных по заданным координатам точек старта и цели (составление полетного задания).

7. Выбор номинальной траектории, обеспечивающей наилучшее использование возможностей ракеты (выбор программы управления).

8. Определение исходных данных для летно-конструкторских испытаний ракет и анализ результатов этих испытаний.

Все эти задачи тесно связаны с решением ряда других вопросов, относящихся, в частности, к:

— аэродинамике (определение величин аэродинамических сил и аэродинамического нагрева поверхности и элементов конструкции ракеты или головной части);

— динамике конструкции (расчет упругих колебаний и колебаний жидкости в баках);

— управлению ракетой (обеспечение устойчивости движения и управляемости ракеты с учетом упругих колебаний и колебаний жидкости; выбор структуры и основных параметров системы управления);

— динамике неустановившихся режимов — старту и процессам разделения ступеней и отделения головной части (обеспечение безопасности разделения и управляемости ракеты на этих участках);

— расчету конструкции ракеты на прочность (определение нагрузок на конструкцию для различных траекторий полета).



Баллистическое проектирование играет очень большую роль в разработке ракеты при выборе конструктивной схемы ракеты, ее компоновки и значений ее конструктивных и энергетических характеристик, наилучшим образом отвечающих требованиям, предъявленным к ракете. В настоящее время баллистическое проектирование сложилось в самостоятельную дисциплину. В связи с этим в данной книге баллистическое проектирование не излагается. Основные вопросы баллистического проектирования рассматриваются, например, в книге [2].

Поверочные баллистические расчеты и, в частности, расчет свободного полета головной части, непосредственно не представляет интереса для данной книги, посвященной комплексному решению основных задач баллистики, тем более, что методы и особенности этих расчетов также изложены в книге [2].

Баллистические расчеты для летно-конструкторских испытаний неразрывно связаны с методами этих испытаний. Последние же представляют собой отдельную дисциплину, требующую самостоятельного изложения.

Таким образом, в рамки настоящей книги входят такие задачи баллистики, как баллистика головных частей, обеспечение предельной дальности стрельбы, исследование рассеивания ракет, определение установочных данных на пуск ракеты, выбор номинальной траектории. Кроме того, в книге затрагиваются и некоторые другие смежные вопросы.

---



### УСЛОВИЯ ПОЛЕТА РАКЕТЫ. ОСОБЕННОСТИ РАКЕТЫ КАК УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Решение любой задачи баллистики начинается с составления математической модели (динамической схемы) полета ракеты, которая описывается более или менее сложными уравнениями движения ракеты. Математическая модель определяется, в первую очередь, поставленной задачей, в зависимости от которой исследователь выбирает ту или иную модель условий полета, механическую модель самой ракеты, модель сил и моментов, приложенных к ракете, и т. д. От того, насколько рационально составлена математическая модель полета ракеты, зависит успех исследования. Ниже приводятся основные сведения об условиях полета ракеты и особенностях ракеты как управляемой механической системы, которые необходимо иметь в виду при составлении математической модели полета ракеты в задачах баллистики.

#### 1.1. ДВИЖЕНИЕ, ФИГУРА И ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

##### Движение Земли

Земля совершает сложное движение, состоящее в основном из следующих составляющих.

1. Вращение вокруг своей оси с запада на восток с периодом в 23 ч 56 мин 4,091 сек = 86164,091 сек среднего солнечного времени, или 24 ч = 86 400 сек звездного времени; угловая скорость вращения при этом соответственно равна

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{86164,091} = 7,2921 \cdot 10^{-5} \text{ рад/сек.}$$

Вектор угловой скорости Земли  $\vec{\omega}_3$  направлен по оси вращения от южного полюса к северному в соответствии с правилами знаков для правых систем координат.

2. Годичное обращение вокруг Солнца со средней скоростью движения по орбите 29,893 км/сек.



3. Нутационные колебания земной оси с периодом около 18,6 года и амплитудой, не превосходящей 9,2".

4. Прецессионное движение относительно оси эклиптики с периодом 25 800 лет.

5. Движение вместе с солнечной системой относительно других звезд.

При исследовании полета баллистической ракеты все эти составляющие движения Земли, кроме суточного вращения, не учитываются, так как их влияние на траекторию полета чрезвычайно мало. Считается, что центр масс Земли движется прямолинейно и равномерно и Земля вращается равномерно вокруг оси, направление которой не изменяется. Явления, связанные с вращением Земли, играют весьма большую роль в динамике ракет. Так, при расчете траекторий движения ракет приходится учитывать силы инерции, обусловленные суточным вращением Земли.

Вследствие своего вращения Земля представляет собой сплюснутый сфероид, у которого расстояние между полюсами меньше диаметра экватора. Это обстоятельство вместе с другими отклонениями формы Земли от сферической и неравномерное распределение масс внутри Земли затрудняют определение по величине и направлению силы притяжения Земли, действующей на ракету.

### Фигура Земли

Земля представляет собой тело сложной формы. Поверхность Земли со всеми ее неровностями называется физической поверхностью Земли. На ней и производятся всевозможные геодезические измерения с целью получения исходных данных для решения различных геодезических задач. Физическую поверхность Земли практически невозможно описать математически, вследствие чего ее нельзя использовать в качестве поверхности обработки результатов измерений. За такую поверхность следует принять поверхность тела, которое бы наиболее близко подходило к Земле в целом по форме и размерам, а поверхность его выражалась доступной для практического использования математической зависимостью. Из геометрических тел, описывающих форму Земли, наиболее близко подходит к реальной Земле тело, получившее название геоид. Чтобы дать определение этого тела, напомним понятие об урóвенной поверхности силы тяжести.

Как известно, суточное вращение Земли создает центробежную силу инерции, которая воздействует на тело, находящееся на поверхности Земли. Поэтому невозможно экспериментальным путем отделить центробежную силу инерции от силы земного притяжения. Результирующий вектор этих сил является вектором силы тяжести (рис. 1.1), направление которого в пространстве можно определить при помощи отвеса или уровня.



Уровеньная поверхность силы тяжести — это поверхность, в каждой точке которой нормаль к поверхности коллинеарна направлению силы тяжести. Геоид представляет собой тело, ограниченное уровнем поверхности силы тяжести, совпадающей с поверхностью океанов (невозмущенной приливами и волнами) и продолженной под материками (рис. 1. 2). Поверхность геоида непрерывна, замкнута и не имеет резких перегибов и складок.

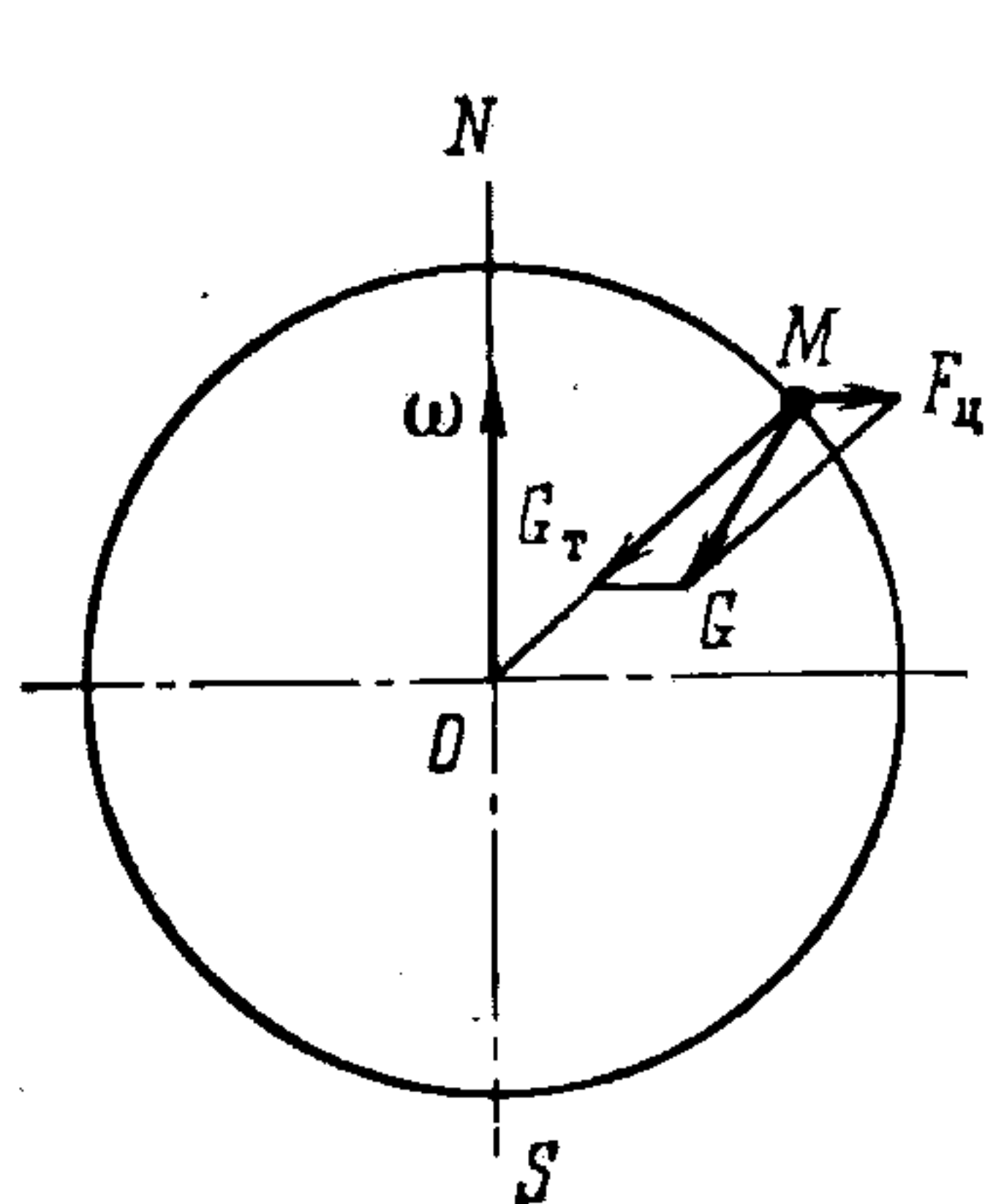


Рис. 1.1. Схема приложения силы притяжения, центробежной силы и силы тяжести

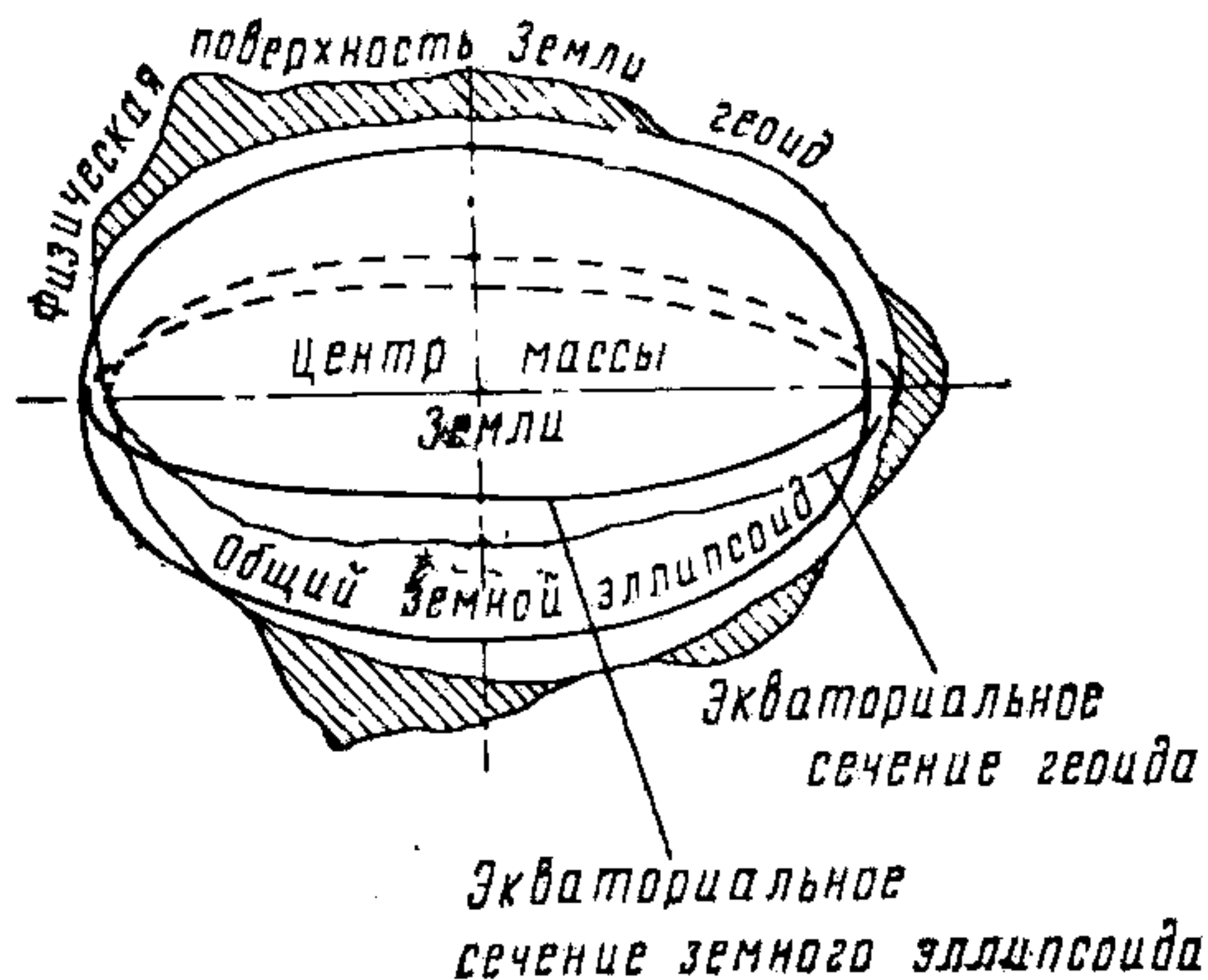


Рис. 1.2. Физическая поверхность Земли, геоид и общий земной эллипсоид

Так как направление силы тяжести зависит от притягивающего действия неравномерно распределенных внутри Земли масс, то поверхность геоида является весьма сложной и не может быть описана математически. По этой причине геоид заменяется более простым телом таким, чтобы его поверхность возможно меньше отличалась от геоида, а проведение вычислений на этой поверхности не представляло значительных трудностей.

В первом приближении Землю можно считать шаром, объем которого равен объему Земли. Радиус такого шара  $R = 6371110$  м. В одних задачах баллистики это приближение удовлетворяет требуемой точности расчета, в других, например, при подготовке летных испытаний и анализе результатов пуска такое приближение вносит большую погрешность в определении точек падения головных частей.

В большинстве случаев с достаточной для практики точностью геоид заменяется эллипсоидом вращения, полученным вращением эллипса вокруг малой оси. Такой надлежаще ориентированный эллипсоид, наилучшим образом приближающийся к поверхности реального геоида, носит название *общего земного эллипсоида* (см. рис. 1. 2).

Общий земной эллипсоид определяют исходя из следующих условий:



- 1) центр эллипсоида совпадает с центром массы Земли, а плоскость его экватора параллельна плоскости экватора Земли;
- 2) объемы эллипсоида и геоида равны;
- 3) сумма квадратов отклонений (по высоте) поверхности общего земного эллипсоида от поверхности геоида должна быть минимальна.

Определение размеров общего земного эллипсоида является одной из основных задач геодезии. К настоящему времени эта задача полностью не решена, так как не на всех материках еще проведены соответствующие измерения (геодезические, астрономические и гравиметрические), служащие исходным материалом для решения указанной задачи. Все имеющиеся размеры общего земного эллипсоида являются приближенными и в той или иной степени отличаются от размеров действительного общего земного эллипсоида. В дальнейшем будем исходить из следующих приближенных значений параметров, определяющих размеры общего земного эллипсоида:

— большая полуось (радиус экватора)  $a = 6\,378\,137$  м;

— сжатие  $\alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{298,25}$ , где  $b$  — малая полуось общего земного эллипсоида.

Поверхность даже самого точного по размерам общего земного эллипсоида, правильно ориентированного по отношению к Земле, может отклоняться от поверхности геоида по высоте на десятки метров. По мнению ряда ученых, наибольшие значения этих отклонений находятся в пределах  $\pm 150$  м. В некоторых случаях с целью уменьшения ошибок замены геоида общим земным эллипсоидом вводят понятие о референц-эллипсоиде.

*Референц-эллипсоидом* называется эллипсоид вращения с соответствующими размерами, определенным образом ориентированный относительно Земли и к поверхности которого относятся результаты геодезических работ на рассматриваемой части земной поверхности (в данном государстве). На ориентировку референц-эллипсоида налагаются следующие условия:

а) наибольшая близость поверхности референц-эллипсоида к поверхности геоида лишь на рассматриваемой части земной поверхности;

б) параллельность оси вращения референц-эллипсоида и оси вращения Земли (совпадение его центра массы с центром массы Земли не обязательно).

На территории СССР за размеры референц-эллипсоида можно принять размеры эллипсоида Красовского, а именно: большая полуось  $a = 6\,378\,245$  м; сжатие  $\alpha = 1/298,3$ . Центр эллипсоида Красовского удален от центра массы Земли на некоторое расстояние. В качестве референц-эллипсоидов принимают также эллипсоиды Кларка, Хейфорда, Эвереста.



## Системы координат, определяющие положение точки на земной поверхности

Для определения положения точки на земной поверхности, математического описания гравитационного поля Земли и ряда других задач используют следующие системы координат.

**Геоцентрическая система координат** (рис. 1.3). Положение точки  $M$  на поверхности эллипсоида Красовского определяют две координаты  $\lambda$  и  $\varphi_{\text{г}}$ .

**Долгота  $\lambda$**  — двугранный угол между плоскостями начального (Гринвичского) меридиана и местного меридиана, проходящего через точку  $M$ . Восточные долготы, т. е. долготы точек, расположенных восточнее Гринвичского меридиана, считаются положительными, а западные — отрицательными.

**Широта геоцентрическая  $\varphi_{\text{г}}$**  — угол между плоскостью экватора и радиусом-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из центра эллипсоида через точку  $M$ . Северные широты, т. е. широты точек, расположенных севернее экватора, принято считать положительными, южные — отрицательными.

**Геодезическая система координат** (рис. 1.4). В этой системе точка  $M$  на поверхности эллипсоида Красовского имеет следующие две координаты: *геодезическую долготу  $\lambda$* , которая определяется так же, как и в геоцентрической системе координат, и *геодезическую широту  $\varphi_{\text{г}}$* , представляющую собой угол между плоскостью экватора и нормалью к поверхности эллипсоида в точке  $M$ . Геодезическим азимутом направления называется угол  $\psi$ , отсчитываемый по часовой стрелке от северного направления  $\vec{p}$  геодезического меридиана данной точки до заданного направления  $\vec{l}$ . Геодезическая система координат нашла широкое применение в баллистике для определения координат точек старта и цели.

Геоцентрическая и геодезическая широты связаны между собой соотношением

$$\sin (\varphi_{\text{г}} - \varphi_{\text{ц}}) = e^2 \sin \varphi_{\text{г}} \cos \varphi_{\text{ц}},$$

где  $e$  — эксцентриситет меридианного эллипса общего земного эллипсоида.

**Астрономическая (географическая) система координат.** В отличие от геодезических координат, определяемых на основании геодезических измерений и относящихся к поверхности эллипсоида вращения, астрономические координаты определяются на основании астрономических наблюдений и относятся к поверхности геоида.

В данной системе координат астрономическая (географическая) широта определяется как угол  $\varphi_{\text{А}}$  между линией отвеса в данной точке и плоскостью экватора. Астрономической (географической) долготой называется угол  $\lambda_{\text{А}}$  между плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического меридиана,



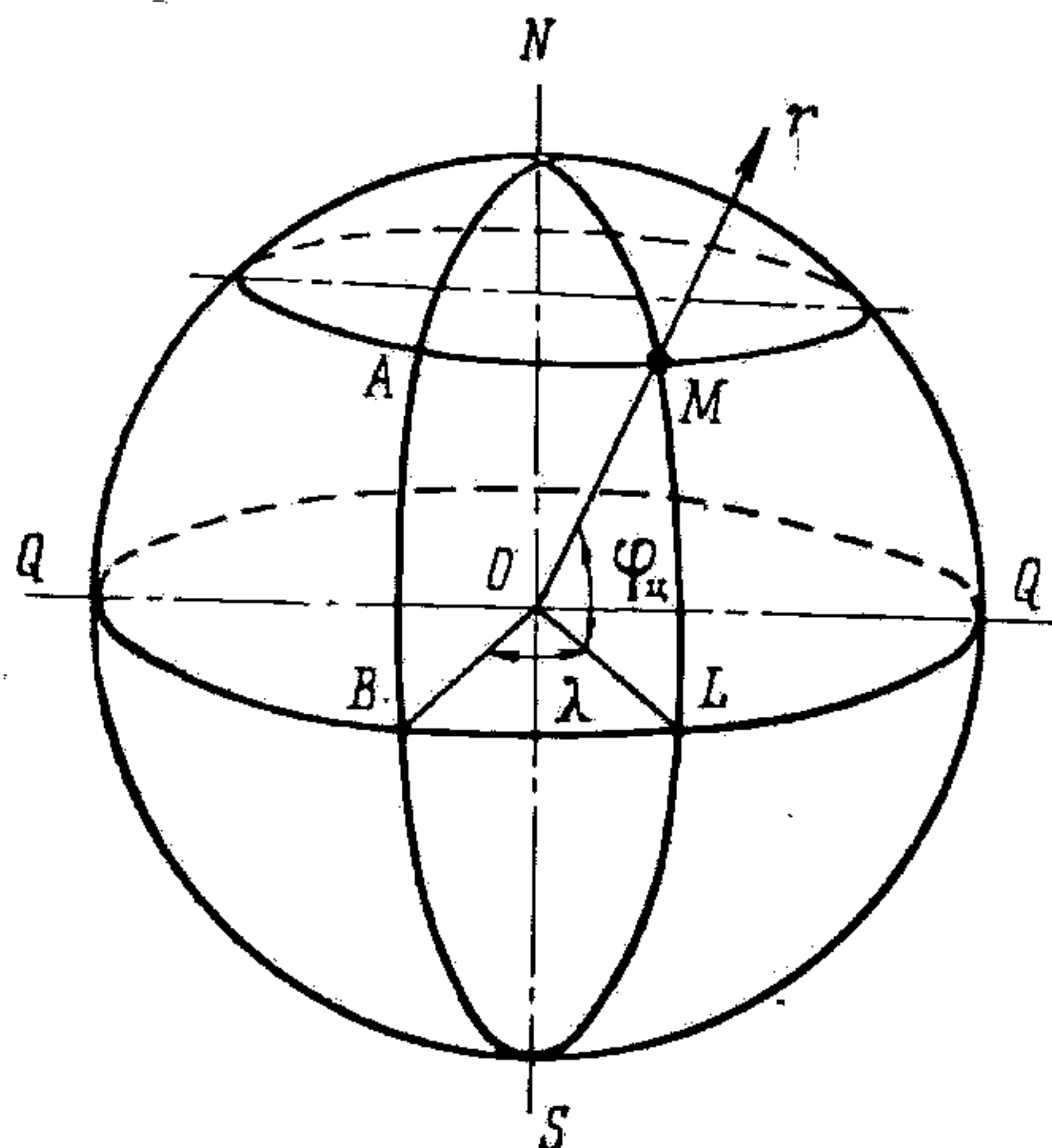


Рис. 1.3. Геоцентрическая система координат:

*NABS*—начальный (Гринвичский) меридиан;  
*NMLS*—местный меридиан;  
*QBLQ*—экватор  
 $-180^\circ < \lambda < 180^\circ$   
 $-90^\circ < \varphi_{\text{г}} < 90^\circ$

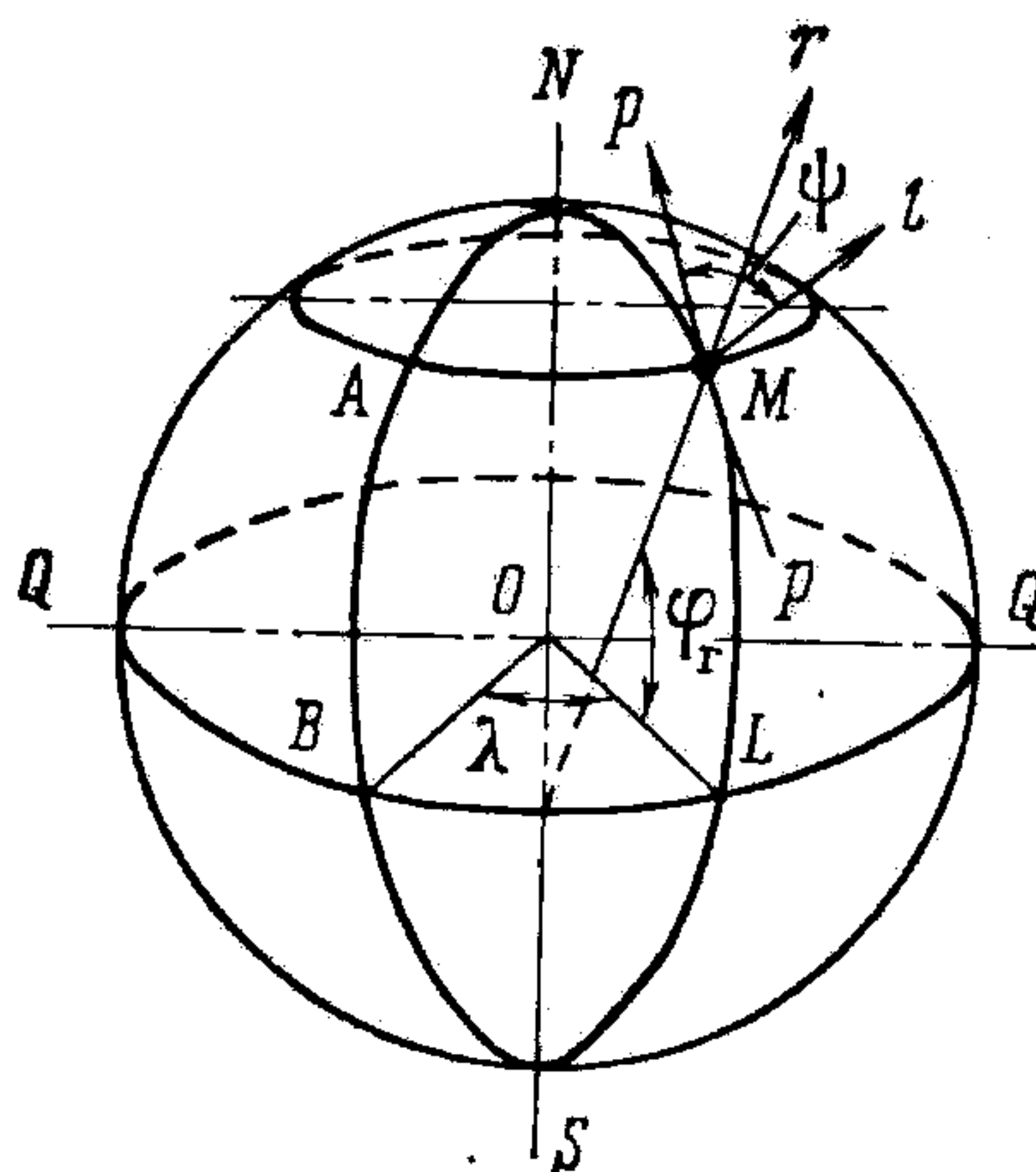


Рис. 1.4. Геодезическая система координат:

*NABS*—начальный (Гринвичский) меридиан;  
*NMLS*—местный меридиан;  
*QBLQ*—экватор; *pp*—касательная к местному меридиану эллипсоида Красовского в точке *M*  
 $-180^\circ < \lambda < 180^\circ$   
 $-90^\circ < \varphi_{\text{г}} < 90^\circ$



проходящей через отвесную линию в данной точке. Направления отсчетов и знаки астрономических широты и долготы определяются так же, как и для геоцентрических и геодезических координат.

Астрономическая широта и долгота не совпадают с соответствующими геодезическими величинами, поскольку в общем случае нормаль к геоиду и эллипсоиду не совпадают друг с другом. Угол между нормалью к эллипсоиду и отвесной линией в рассматриваемой точке называется полным отклонением отвеса. Среднее по поверхности Земли отклонение отвеса составляет около  $5''$ , максимальное около  $1'$ .

### Гравитационное поле Земли

Согласно закону всемирного тяготения Ньютона каждая частица массой  $M$  притягивает другую частицу массой  $m$  с силой гравитационного притяжения (тяготения)  $G_T$ , определяемой зависимостью

$$G_T = -f \frac{Mm}{r^2}, \quad (1.1)$$

где  $f = 65,41 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^4}{\text{кг} \cdot \text{сек}^4}$  — гравитационная постоянная;

$r$  — расстояние между частицами.

При полете ракеты на нее действуют силы притяжения Земли и других небесных тел. Для баллистических ракет, траектории которых пролегают в непосредственной близости Земли, силы притяжения небесных тел чрезвычайно малы (так, силы притяжения к Луне и Солнцу приводят к незначительному изменению ускорения силы притяжения и отклонения отвеса; влияние остальных небесных тел еще меньше). В связи с этим в дальнейшем нами рассматривается только гравитационное поле Земли.

Сила притяжения является консервативной, т. е. имеющей силовую функцию. Силовая функция материальной точки массой  $M$  называется ньютоновским потенциалом и равна

$$U = f \frac{M}{r}, \quad (1.2)$$

где  $r$  — расстояние от материальной точки до рассматриваемой точки пространства.

Ньютоновский потенциал произвольного тела массой  $M$  может быть записан в виде

$$U = f \int_M \frac{dm}{r}, \quad (1.3)$$

где  $r$  — расстояние от частицы, имеющей массу  $dm$ , до рассматриваемой точки пространства.



В первом приближении, если считать, что масса Земли сосредоточена в точке или распределена внутри шара так, что плотность во всех точках, равноудаленных от центра шара, одинакова, потенциальная функция Земли записывается в виде (1.2). В этом случае величина  $r$  является расстоянием от центра Земли.

Используя свойство силовой функции, можно определить проекции силы притяжения частицы единичной массы на оси некоторой системы координат  $Oxyz$ :

$$g_{Tx} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad g_{Ty} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad g_{Tz} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (1.4)$$

В частности, проекция силы притяжения на радиус-вектор  $r$  определяется выражением

$$g_{Tr} = \frac{\partial U}{\partial r} = -f \frac{M}{r^2}. \quad (1.5)$$

В этом случае ускорение, сообщаемое частице единичной массы сферической Землей, направлено к центру Земли, и равно

$$g_{Tr} = -\frac{fM}{r^2}. \quad (1.6)$$

Произведение гравитационной постоянной  $f$  на массу Земли  $M$  постоянно и для приближенных расчетов может быть принято равным:  $fM = 3,986004 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{сек}^2$ .

Нормальный потенциал Земли. В общем виде задача определения потенциальной функции  $U$  для реальной Земли, имеющей сложную форму и неравномерное распределение масс, оказывается весьма трудной. В гравиметрии принято потенциал Земли представлять в виде бесконечного ряда

$$U(r, \varphi_n) = \frac{a_{00}}{r} + \frac{a_{20}}{r^3} P_{20}(\sin \varphi_n) + \frac{a_{40}}{r^5} P_{40}(\sin \varphi_n) + \dots, \quad (1.7)$$

в котором присоединенные полиномы Лежандра определяются выражениями:

$$P_{20}(\sin \varphi_n) = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi_n - \frac{1}{2};$$

$$P_{40}(\sin \varphi_n) = \frac{35}{8} \sin^4 \varphi_n - \frac{15}{4} \sin^2 \varphi_n + \frac{3}{8}$$

и т. д.

Ограничиваясь в выражении (1.7) членами, являющимися главными сферическими функциями нулевого, второго и четвертого порядков, получают удобную формулу для потенциала притяжения, называемого нормальным потенциалом Земли:

$$U_0 = \frac{a_{00}}{r} + \frac{3}{2} \frac{a_{20}}{r^3} \left( \sin^2 \varphi_n - \frac{1}{3} \right) + \frac{35}{8} \frac{a_{40}}{r^5} \left( \sin^4 \varphi_n - \frac{6}{7} \sin^2 \varphi_n + \frac{3}{35} \right), \quad (1.8)$$



где  $a_{00}$ ,  $a_{20}$ ,  $a_{40}$  — постоянные коэффициенты, зависящие от угловой скорости вращения  $\omega_3$  и параметров принятой модели Земли:

$$\begin{aligned} a_{00} &= fM; \\ a_{20} &= -g_3 a^4 \left( \frac{2}{3} \alpha - \alpha^2 - \frac{1}{3} \mu + \frac{10}{7} \mu \alpha \right); \\ a_{40} &= \frac{8}{35} g_3 a^6 \left( \frac{7}{2} \alpha^2 - \frac{5}{2} \mu \alpha \right); \\ \mu &= \frac{\omega_3^2 a}{g_3}; \quad \alpha = \frac{a-b}{a}; \end{aligned}$$

$g_3$  — ускорение силы тяжести на экваторе.

Нормальный потенциал Земли соответствует потенциалу некоторого сфероида, представляющего идеализированную Землю, и несколько отличается от потенциала Земли. Это отличие выражается в виде аномалии поля притяжения и учитывается при точных расчетах.

Нормальный потенциал притяжения Земли зависит только от расстояния  $r$  до рассматриваемой точки и геоцентрической широты  $\varphi_{\text{ц}}$ . Вектор напряженности нормального поля притяжения всегда расположен в плоскости меридиана, проходящего через ось вращения Земли и рассматриваемую точку пространства. Поэтому вектор  $\bar{g}_r$  ускорения силы нормального притяжения может быть задан двумя составляющими:  $\bar{g}_{r1}$  и  $\bar{g}_{r2}$ , лежащими в плоскости меридиана (рис. 1.5), при этом

$$g_{r1} = -\frac{\partial U_0}{\partial r}; \quad g_{r2} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_0}{\partial \varphi_{\text{ц}}}, \quad (1.9)$$

или

$$\left. \begin{aligned} g_{r1} &= \frac{a_{00}}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{a_{20}}{r^4} (3 \sin^2 \varphi_{\text{ц}} - 1) + \\ &+ \frac{35}{8} \frac{a_{40}}{r^6} \left( 5 \sin^4 \varphi_{\text{ц}} - \frac{30}{7} \sin^2 \varphi_{\text{ц}} + \frac{3}{7} \right); \\ g_{r2} &= \frac{3}{2} \frac{a_{20}}{r^4} \sin 2\varphi_{\text{ц}} + \frac{5}{2} \frac{a_{40}}{r^6} \cos \varphi_{\text{ц}} (7 \sin^3 \varphi_{\text{ц}} - 3 \sin \varphi_{\text{ц}}). \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

Относительная погрешность этих формул сравнительно мала (не превышает  $3 \cdot 10^{-5}$ ) и вполне допустима при решении большинства задач баллистики, связанных с расчетом траекторий полета и подготовкой прицельных данных для стрельбы.

При выводе уравнений движения ракеты удобно рассматривать следующие две составляющие ускорения силы притяжения (см. рис. 1.5):  $g_{r1}$ , направленную к центру Земли;  $g_{r2}$ , направленную параллельно оси вращения Земли.

Чтобы их найти, необходимо разложить, в свою очередь, меридиональную составляющую ускорения силы притяжения  $g_{r2}$



на две составляющие в направлении радиуса-вектора  $r$  и оси вращения Земли:

$$\left. \begin{aligned} g'_{\tau 1} &= g_{\tau 2} \operatorname{tg} \varphi_{\Pi}; \\ g_{\tau \omega} &= \frac{g_{\tau 2}}{\cos \varphi_{\Pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Составляющая  $\bar{g}'_{\tau 1}$  направлена противоположно составляющей  $\bar{g}_{\tau 1}$ . Поэтому

$$g_{\tau r} = g_{\tau 1} - g'_{\tau 1}. \quad (1.12)$$

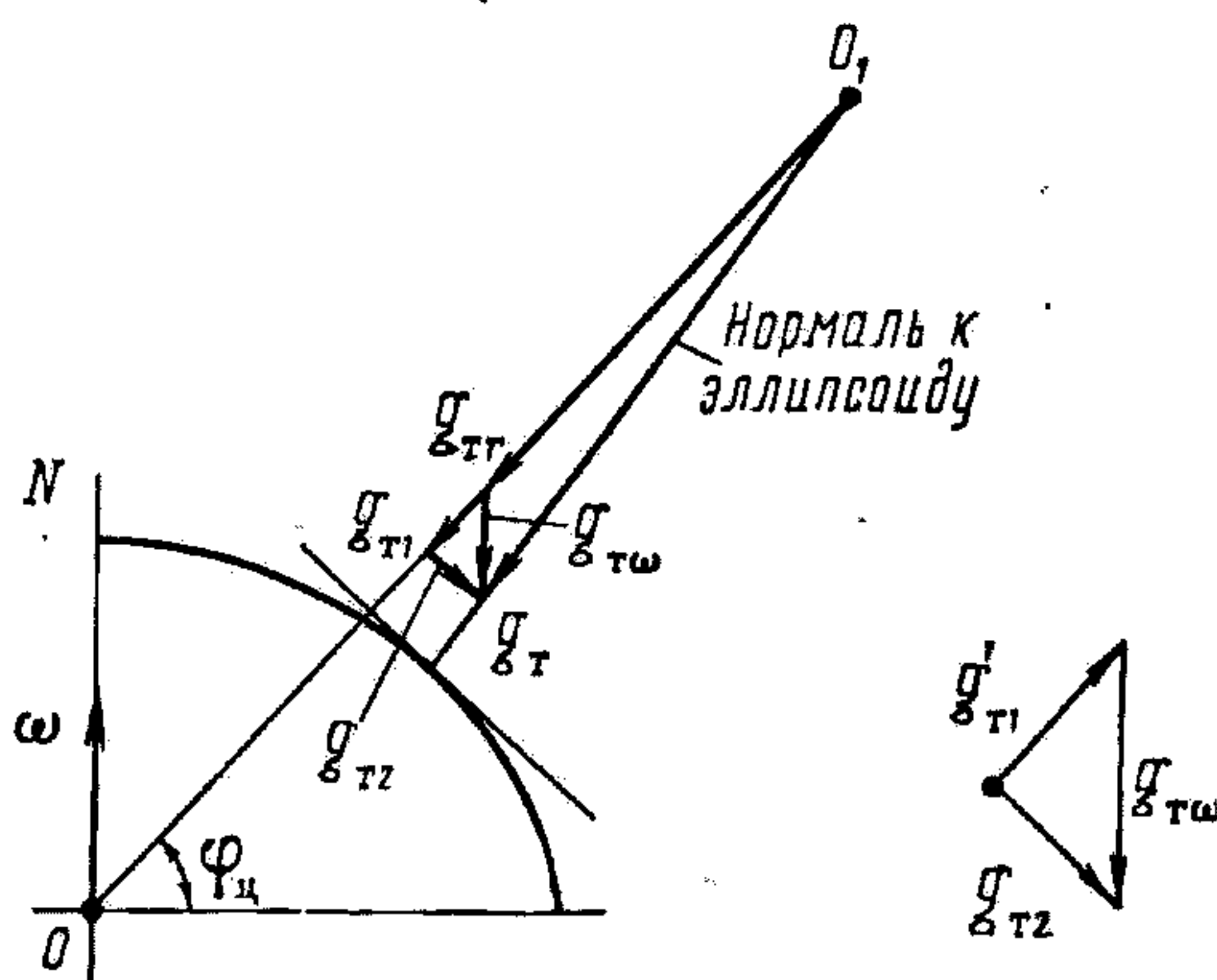


Рис. 1.5. Составляющие ускорения силы тяжести

Окончательно получим

$$\begin{aligned} g_{\tau r} &= \frac{a_{00}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{a_{20}}{r^4} (5 \sin^2 \varphi_{\Pi} - 1) + \\ &+ \frac{15}{8} \frac{a_{40}}{r^6} (21 \sin^4 \varphi_{\Pi} - 14 \sin^2 \varphi_{\Pi} + 1); \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$g_{\tau \omega} = 3 \frac{a_{20}}{r^4} \sin \varphi_{\Pi} - \frac{5}{2} \frac{a_{40}}{r^6} \sin \varphi_{\Pi} (7 \sin^2 \varphi_{\Pi} - 3). \quad (1.14)$$

Если не требуется особо высокая точность расчетов, то можно ограничиться первыми членами разложения в ряд, т. е. принять

$$g_{\tau r} = \frac{a_{00}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{a_{20}}{r^4} (5 \sin^2 \varphi_{\Pi} - 1); \quad (1.15)$$

$$g_{\tau \omega} = 3 \frac{a_{20}}{r^4} \sin \varphi_{\Pi}, \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} a_{00} &= 3,9861679 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{сек}^2; \\ \frac{3}{2} a_{20} &= 26,32785 \cdot 10^{24} \text{ м}^5/\text{сек}^2. \end{aligned}$$



## 1. 2. АТМОСФЕРА

Полет баллистической ракеты на начальном и конечном участках траектории происходит в атмосфере. Возникающие при этом аэродинамические силы существенно зависят от параметров атмосферы — плотности, давления и температуры воздуха. Эти параметры, в свою очередь, зависят от высоты полета, географической широты места, времени года и суток и ряда других факторов, например от степени активности Солнца.

Для определения конструктивных параметров ракеты, расчета траекторий и других исследований, проводимых при динамическом проектировании, обычно используются таблицы стандартной атмосферы (СА), которые дают некоторые средние значения параметров спокойной атмосферы в зависимости от высоты. Отклонения параметров атмосферы от стандартных значений, а также ветер представляют собой атмосферные возмущения, которые влияют на полет ракеты и, в частности, на рассеивание точек падения ее головной части.

В СССР принята стандартная атмосфера СА-64 для высот до +200 000 м (ГОСТ 4401—64). Для высот 200 000—300 000 м в этом же ГОСТе приведены характеристики атмосферы, рекомендуемые координационной комиссией при АН СССР по составлению ГОСТа на стандартную атмосферу.

Для решения задач динамического проектирования, кроме стандартных значений параметров атмосферы, нужно знать также диапазоны возможных отклонений этих параметров, соответствующие определенному уровню вероятности, причем для различных условий как без учета времени года и мест на земном шаре, так и с их учетом. Кроме того, для более точных исследований требуется знание статистических зависимостей между случайными отклонениями каждого параметра на разных высотах, между отклонениями различных параметров на данной высоте и т. п.

Возможны различные методы описания возмущений параметров атмосферы. Рассмотрим один из них. Температура  $T$  и плотность атмосферы  $\rho$  могут быть представлены в виде

$$T(h) = T_{\text{ст}}(h) + \Delta T(h); \quad (1.17)$$

$$\rho(h) = \rho_{\text{ст}}(h) \left[ 1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_{\text{ст}}}(h) \right], \quad (1.18)$$

где  $T_{\text{ст}}(h)$  и  $\rho_{\text{ст}}(h)$  — стандартные значения температуры и плотности;

$\Delta T(h)$  — отклонение температуры от стандартной;

$\frac{\Delta \rho}{\rho_{\text{ст}}}(h)$  — относительное отклонение плотности воз-

духа от стандартной.

Для задания случайных функций  $\Delta T$  и  $\Delta \rho / \rho_{\text{ст}}$  можно использовать метод канонических разложений [5].



Применительно к рассматриваемому случаю параметры атмосферы как случайные функции высоты точки над поверхностью Земли представляются в виде канонического разложения следующим образом:

$$\Delta T(h) = \overline{\Delta T}(h) + \sum_{i=1}^m \Delta T_i(h) b_i; \quad (1.19)$$

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_{ст}}(h) = \frac{\overline{\Delta \varrho}}{\varrho_{ст}}(h) + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta \varrho_i}{\varrho_{ст}}(h) c_i, \quad (1.20)$$

где  $\overline{\Delta T}(h), \frac{\overline{\Delta \varrho}}{\varrho_{ст}}(h)$  — средние отклонения от значений СА, соответствующие рассматриваемой точке;  
 $\Delta T_i(h), \frac{\Delta \varrho_i}{\varrho_{ст}}(h)$  — некоторые неслучайные отклонения от средних отклонений  $\overline{\Delta T}(h)$  и  $\frac{\overline{\Delta \varrho}}{\varrho_{ст}}(h)$ .

Такая запись параметров «случайной атмосферы» соответствует представлению ее в виде суммы некоторого количества  $m$  «атмосфер» со случайными коэффициентами  $b_i$  и  $c_i$ . Эти коэффициенты и координатные функции  $\Delta T_i(h)$  и  $\frac{\Delta \varrho_i}{\varrho_{ст}}(h)$  определяются на основе накопленных статистических данных, характеризующих состояние атмосферы. Достаточно точное представление случайных параметров атмосферы дает разложение, включающее 10—11 членов.

Использование метода канонических разложений случайных параметров атмосферы позволяет решать различные задачи, возникающие при проектировании ракет. Одной из наиболее часто встречающихся задач является задача оценки статистических характеристик параметров атмосферы с учетом случайного характера изменения координат и времени полета ракеты (географические координаты движения ракеты и время полета заранее неизвестны). Типичным примером такого рода задач является задача о рассеивании ракет. Построение канонического разложения в этом случае сводится к определению неизвестных случайных величин и координатных функций для достаточно обширной области по данным метеозондирования атмосферы.

При проектировании ракет встречается и другая группа расчетов (например, при оценке прочности аппарата), целью которых является изучение характеристик объекта для наихудших (крайних) условий полета и оценка влияния предельных отклонений. Наиболее важными из расчетов этого типа являются расчеты в точках, соответствующих наибольшему по величине отклонениям термодинамических параметров. Поскольку могут быть различные сочетания больших отклонений, можно рекомендовать



две системы функций: одна соответствует типичным неблагоприятным зимним условиям, а вторая — летним. Зимней неблагоприятной точке свойственны самые низкие температуры и самые большие плотности у Земли и наименьшие плотности на больших высотах. Летней неблагоприятной точке свойственны самые высокие температуры и малые плотности у Земли и большие плотности в стратосфере.

В некоторых случаях с целью упрощения расчетов вместо использования канонических разложений для крайних условий можно использовать предельные значения температуры атмосферы по высоте. В качестве предельных распределений температуры при этом принимаются температуры для так называемых стандартных дней — максимальные температуры теплого дня и минимальные температуры холодного дня.

Соответствующие предельные значения относительной плотности воздуха определяются из уравнения состояния и дифференциального уравнения равновесия.

По аналогии с определением случайных параметров атмосферы определяются характеристики ветра. При решении первого типа задач выделяется систематический ветер постоянного направления (с запада на восток) и случайная составляющая ветра. При расчете управляемости и прочности ракеты используется огибающая скоростей ветра по высоте, соответствующая предельным значениям.

### 1.3. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ

Аэродинамические силы, возникающие при движении ракеты в атмосфере, можно привести к одной результирующей силе  $\bar{R}$ , проходящей через центр масс ракеты и называемой *полной аэродинамической силой*, и результирующему моменту  $\bar{M}$ , действующему относительно центра масс ракеты и называемому *полным аэродинамическим моментом*. Величина и направление векторов  $\bar{R}$  и  $\bar{M}$  зависят от ряда факторов, в том числе от ориентации ракеты относительно вектора скорости воздушного потока, набегающего на ракету, плотности воздуха и т. д.

В динамике летательных аппаратов для определения ориентации аппарата относительно вектора воздушной скорости и разложения силы  $\bar{R}$  и момента  $\bar{M}$  по осям координат обычно используются поточная и связанная системы осей координат.

Связанная система осей координат  $Ox_1y_1z_1$  представляет собой декартову прямоугольную правую систему осей координат, неподвижную относительно ракеты или головной части (рис. 1.6). Оси этой системы сокращенно называют *связанными осями*.

Начало координат связанной системы помещают в центре масс ракеты; ось  $Ox_1$  направляют по продольной оси ракеты в сторону головной части; ось  $Oy_1$  располагают в той плоскости



симметрии ракеты, которая в момент запуска совпадает с плоскостью стрельбы — плоскостью  $Ox_0y_0$  начальной стартовой системы координат<sup>1</sup>. Если прицеливание осуществляется без разворота ракеты на стартовом устройстве, то за плоскость  $Ox_1y_1$  можно принимать любую плоскость симметрии ракеты.

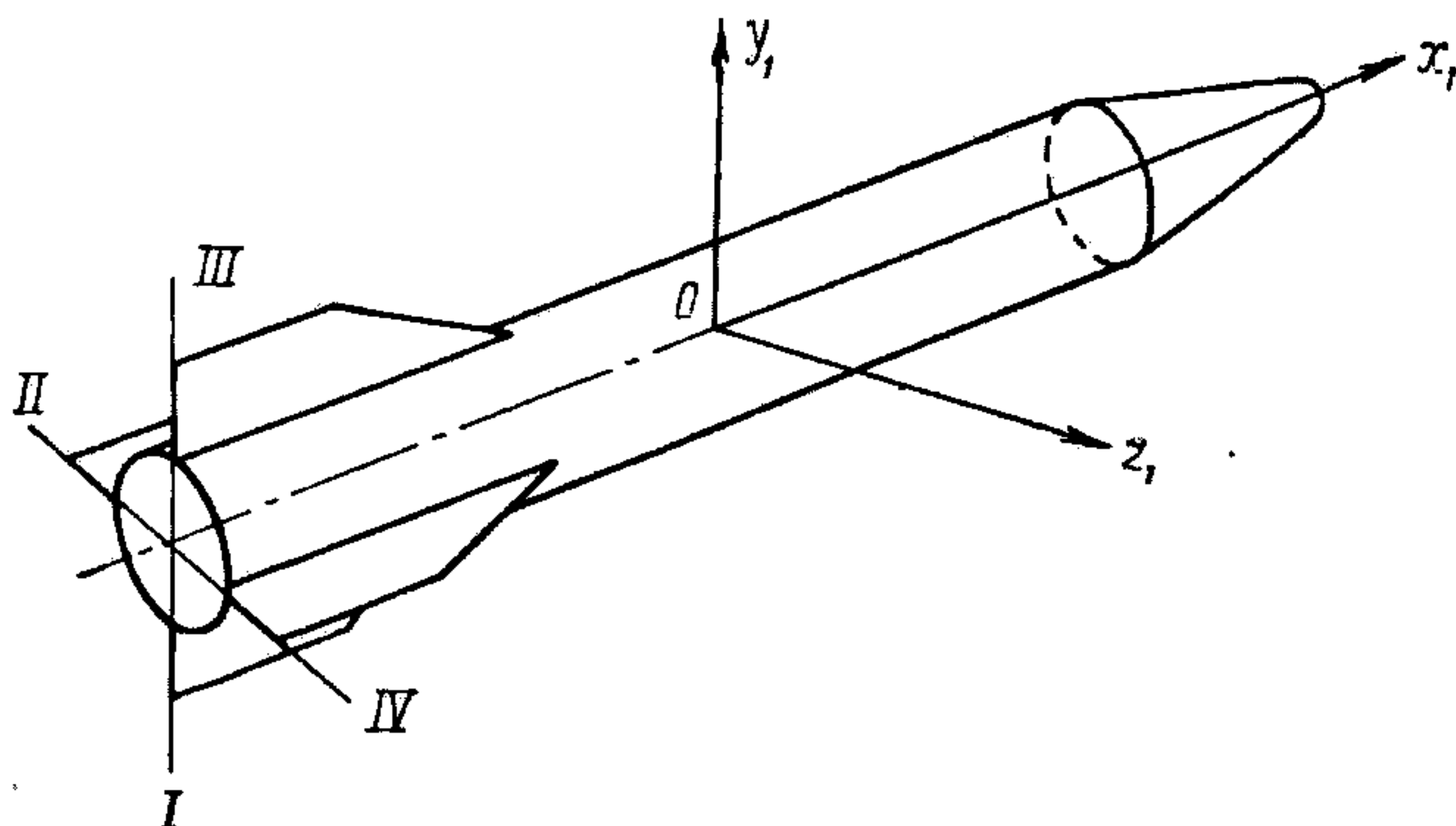


Рис. 1.6. Связанная с ракетой система осей координат

Для головной части направления осей  $Oy_1$  и  $Oz_1$  удобно выбирать таким образом, чтобы на головной части, состыкованной с ракетой, ось  $Oy_1$  была направлена в сторону стабилизатора *III*, а ось  $Oz_1$  — в сторону стабилизатора *IV* (рис. 1.7).

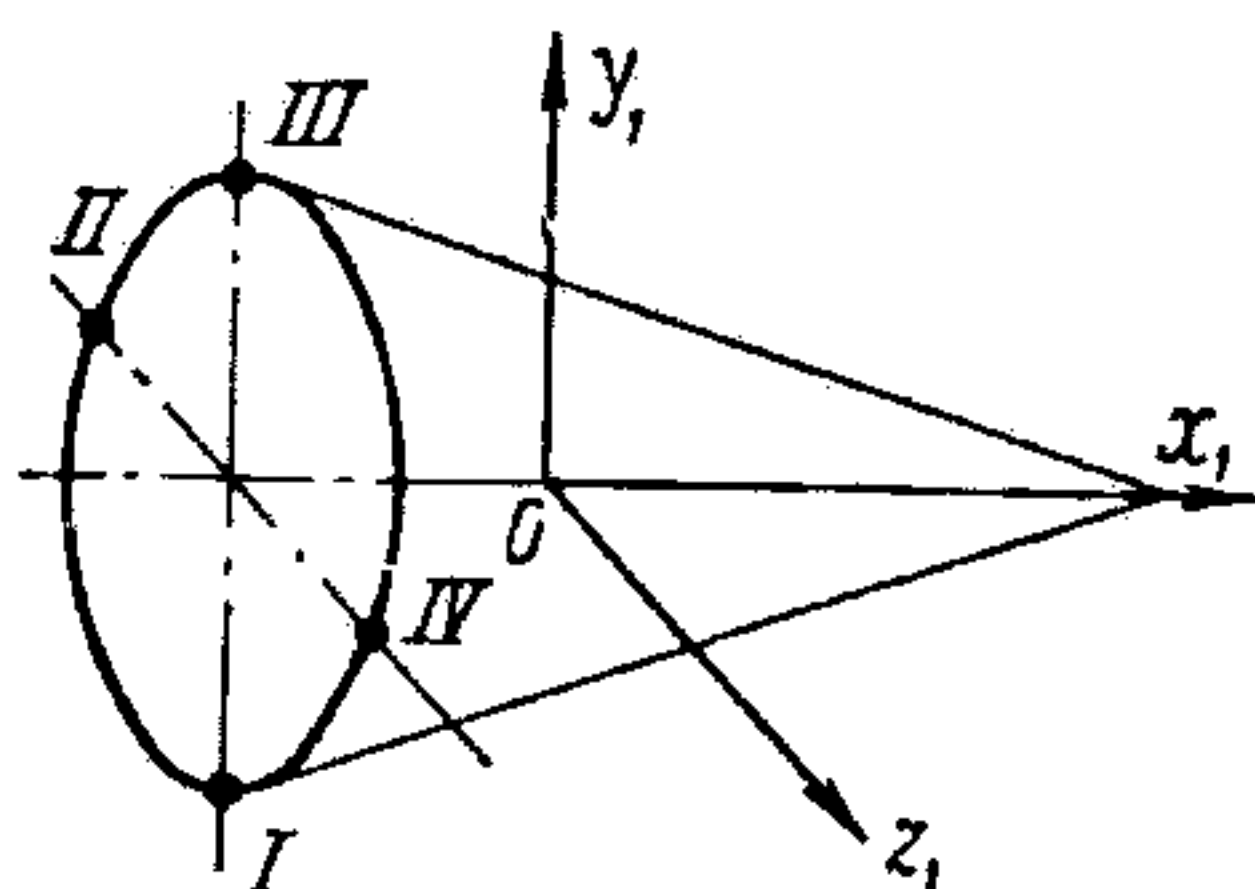


Рис. 1.7. Связанная с головной частью система осей координат

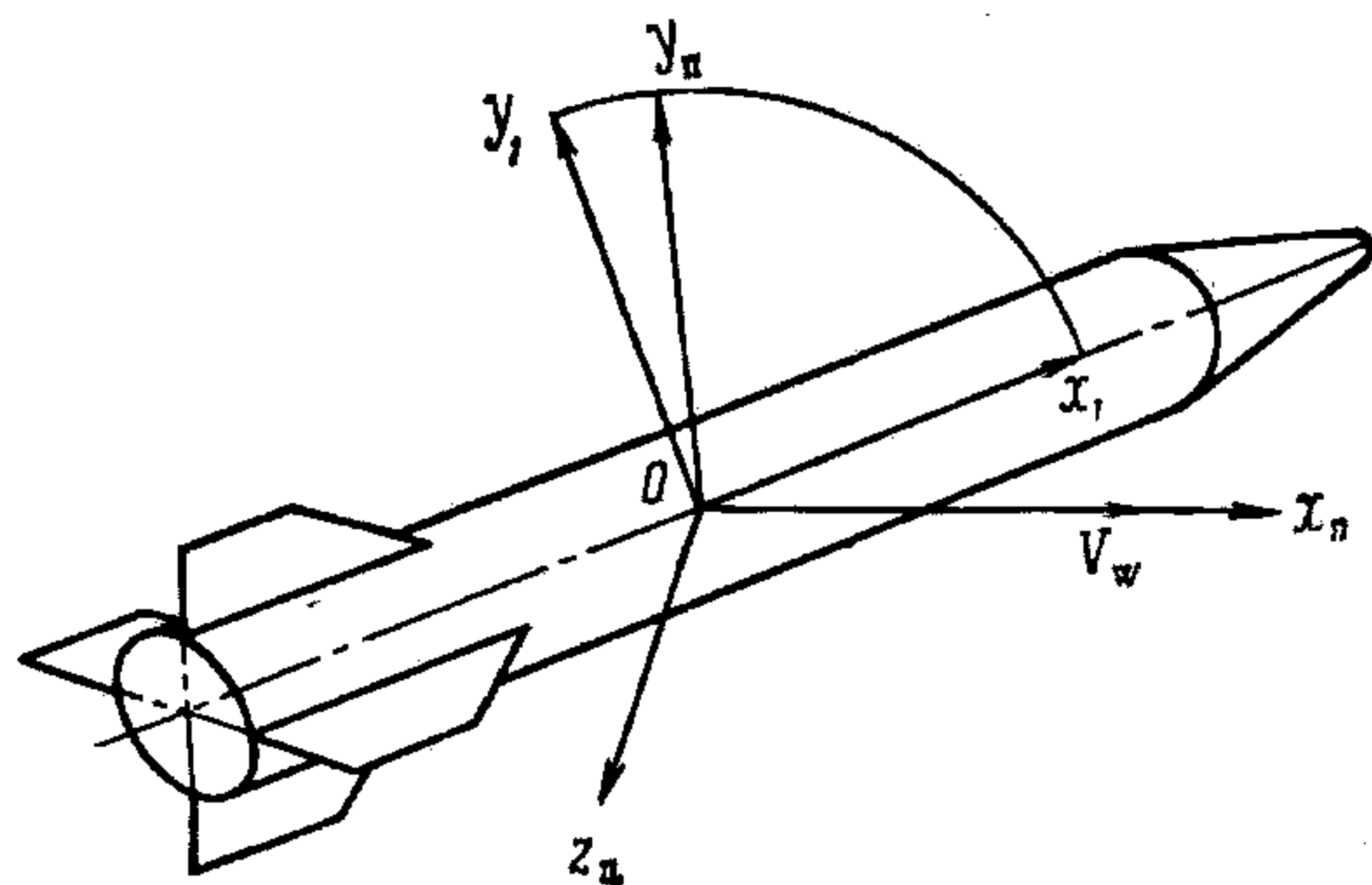


Рис. 1.8. Поточная система осей координат

Поточная система осей координат  $Ox_пy_пz_п$  — декартова прямоугольная правая (рис. 1.8). Начало координат этой системы совпадает с центром масс ракеты; ось  $Ox_п$  направлена по вектору скорости  $\bar{V}_w$  ракеты относительно воздушной среды; ось  $Oy_п$  лежит в плоскости симметрии ракеты  $Ox_1y_1$ .

<sup>1</sup> См. разд. 2. 1.



Ориентация ракеты относительно вектора воздушной скорости  $\bar{V}_w$  в общем случае определяется углами атаки  $\alpha$  и скольжения  $\beta$ , т. е. углом  $\beta$  — между вектором скорости  $\bar{V}_w$  и плоскостью симметрии ракеты  $Ox_1y_1$  и углом  $\alpha$  — между проекцией вектора скорости  $\bar{V}_w$  на плоскость симметрии ракеты  $Ox_1y_1$  и продольной осью ракеты  $Ox_1$ .

Переход к произвольному положению связанных осей относительно поточных осуществляется посредством двух вращений — поворота связанных осей относительно оси  $Oy_1$  на угол скольжения  $\beta$  и затем относительно оси  $Oz_1$  на угол  $\alpha$  (рис. 1.9).

Косинусы углов между связанными и поточными осями приведены в табл. 1.1.

Полную аэродинамическую силу  $\bar{R}$ , зависящую от углов  $\alpha$  и  $\beta$ , обычно раскладывают на составляющие  $X, Y, Z$  по поточным осям координат или на составляющие  $X_1, Y_1, Z_1$  по связанным осям:

$$\bar{R} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z} = \bar{X}_1 + \bar{Y}_1 + \bar{Z}_1. \tag{1.21}$$

Таблица 1.1

| Косинусы углов между связанными и поточными осями |                           |               |                           |
|---------------------------------------------------|---------------------------|---------------|---------------------------|
| Оси                                               | $Ox_\Pi$                  | $Oy_\Pi$      | $Oz_\Pi$                  |
| $Ox_1$                                            | $\cos \alpha \cos \beta$  | $\sin \alpha$ | $-\cos \alpha \sin \beta$ |
| $Oy_1$                                            | $-\sin \alpha \cos \beta$ | $\cos \alpha$ | $\sin \alpha \sin \beta$  |
| $Oz_1$                                            | $\sin \beta$              | 0             | $\cos \beta$              |

Так как проекция силы  $\bar{R}$  на поточную ось  $Ox_\Pi$  всегда отрицательна, принято рассматривать составляющие  $X$  и  $X_1$  силы  $R$  по отрицательным направлениям осей  $Ox_\Pi$  и  $Ox_1$ . Поэтому проекции силы  $R$  на эти оси — сила лобового сопротивления и осевая сила соответственно равны:

$$R_{x_\Pi} = -X; R_{x_1} = -X_1.$$

Баллистическая ракета (неоперенная или с крестообразным оперением) практически является аэродинамически осесиммет-

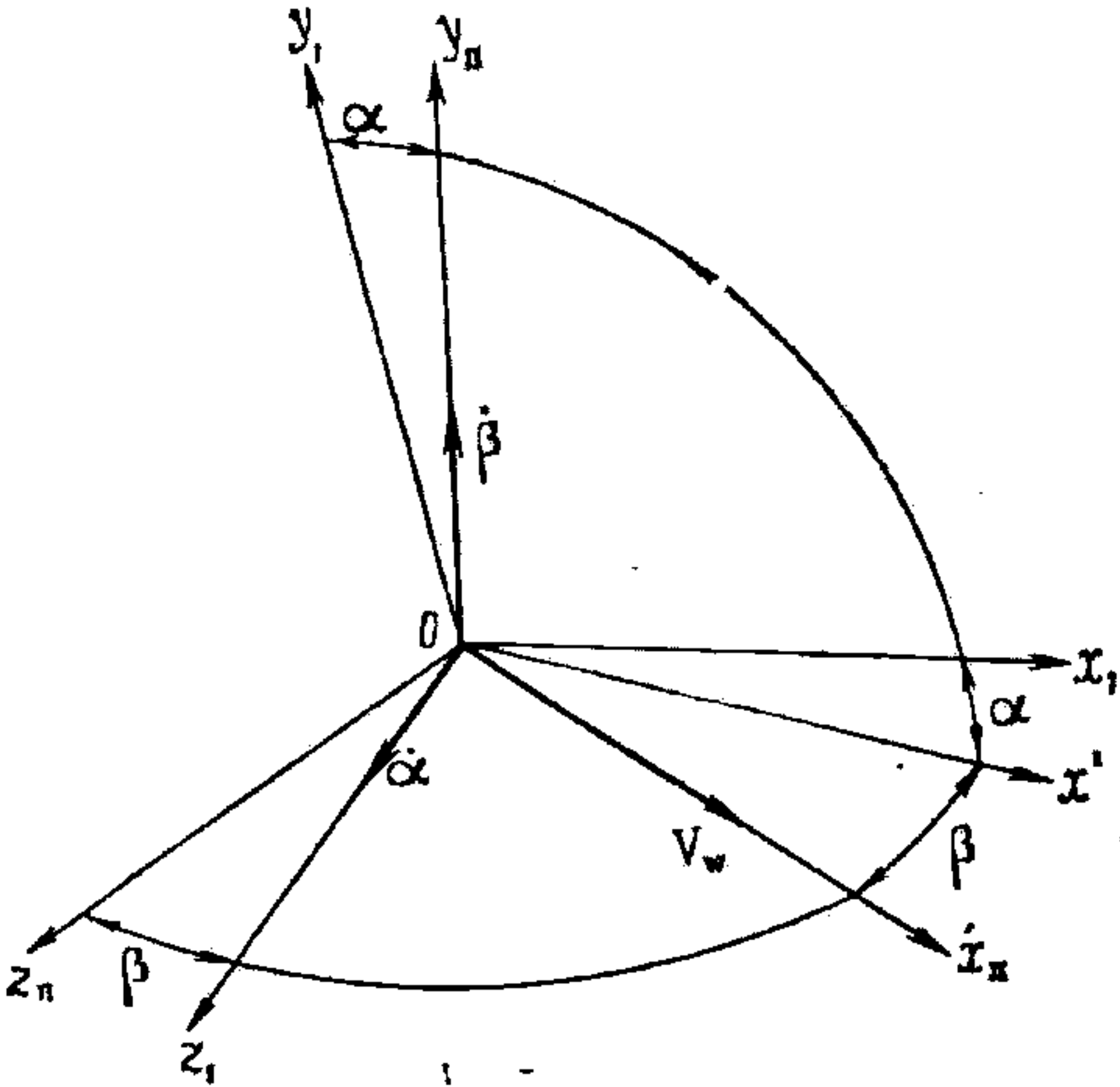


Рис. 1.9. Переход от поточных к связанным осям



ричным телом. Если ось ракеты направлена по вектору воздушной скорости ( $\alpha = \beta = 0$ ), то обтекание ракеты будет симметричным относительно ее оси и, следовательно, силы  $Y$  и  $Z$  (или  $Y_1$  и  $Z_1$ ) будут равны нулю.

Если же ось ракеты образует с вектором воздушной скорости некоторый угол, то обтекание будет симметрично относительно плоскости, проходящей через ось ракеты и вектор воздушной скорости. При этом полная аэродинамическая сила, а следовательно, и ее составляющие, например подъемная сила  $Y$  или нормальная сила  $Y_1$ , будут располагаться в этой плоскости. Отсюда следует, что для аэродинамически осесимметричной ракеты зависимости сил  $Z$  и  $Z_1$  от угла  $\beta$  аналогичны зависимостям  $Y$  и  $Y_1$  от  $\alpha$ . Более того, можно вообще не рассматривать угол скольжения  $\beta$ , если за угол атаки  $\alpha$  принимать угол между продольной осью ракеты и вектором воздушной скорости и определять положение в пространстве плоскости, проходящей через ось ракеты и вектор скорости. В дальнейшем будем поступать именно так.

На основании теории аэродинамического подобия аэродинамические силы обычно выражают следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{коэффициенты} \\ (\text{с скоростями}) \text{СК} \end{array} \left. \begin{array}{l} X = c_x q S; \\ Y = c_y q S; \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = c_\tau q S; \\ Y_1 = c_n q S, \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} X = c_x q S; \\ Y = c_y q S; \end{array}} \right\} \text{связан СК (1.22)}$$

где  $q = \rho \frac{V_w^2}{2}$  — скоростной напор;

$\rho$  — плотность воздуха;

$S$  — характерная площадь ракеты, обычно площадь миделя;

$c_x$  и  $c_y$ ;  $c_\tau$  и  $c_n$  — безразмерные аэродинамические коэффициенты.

Аэродинамические коэффициенты зависят от формы ракеты, ориентации ракеты относительно вектора воздушной скорости (т. е. от угла  $\alpha$ ) и от критериев аэродинамического подобия — чисел Маха  $M = \frac{V_w}{a}$  и Рейнольдса  $Re = \frac{V_w l}{\nu}$ ,

где  $a$  — скорость распространения звука в воздухе;

$l$  — характерный размер ракеты, обычно ее длина;

$\nu$  — кинематический коэффициент вязкости воздуха.

Пользуясь табл. 1.1 для случая  $\beta = 0$  и учитывая, что положительным значениям  $x$  и  $x_1$  соответствуют отрицательные направления осей  $Ox$  и  $Ox_1$ , получим

$$\left. \begin{array}{l} c_\tau = c_x \cos \alpha - c_y \sin \alpha; \\ c_n = c_x \sin \alpha + c_y \cos \alpha. \end{array} \right\} \quad (1.23)$$

Так как при полете ракеты в атмосфере угол  $\alpha$  бывает небольшим — порядка нескольких градусов, можно считать, что

$$\begin{array}{l} \text{или: } c_x = c_\tau \cos \alpha + c_n \sin \alpha \\ c_y = -c_\tau \sin \alpha + c_n \cos \alpha \end{array}$$



$\cos \alpha \approx 1$ , а  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Тогда получим выражения (1.23) в приближенном виде

$$\left. \begin{aligned} c_x &\approx c_x - c_y \alpha; \\ c_n &\approx c_x \alpha + c_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Аэродинамические характеристики ракеты детально изучаются в специальной литературе и поэтому здесь не будем на них подробно останавливаться. Отметим лишь основные особенности аэродинамических характеристик ракеты.

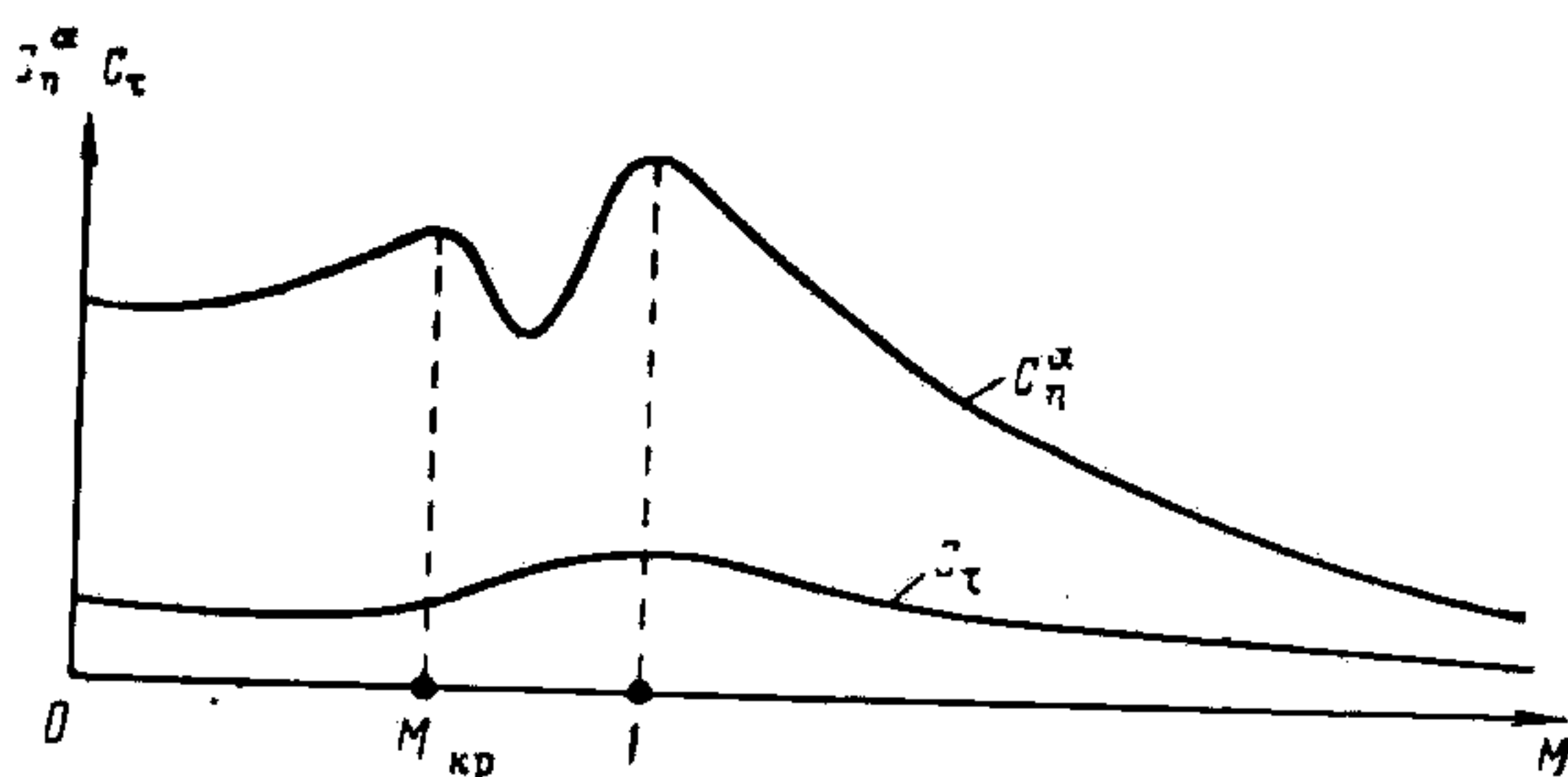


Рис. 1.10. Примерная зависимость аэродинамических коэффициентов  $c_x$  и  $c_n^{\alpha}$  от числа  $M$

Аэродинамические исследования показывают, что при небольших углах атаки ( $\alpha \leq 10^\circ$ ) коэффициент осевой силы  $c_x$  мало зависит от угла атаки, а коэффициенты подъемной  $c_y$  и нормальной  $c_n$  сил пропорциональны углу атаки:

$$c_y = c_y^{\alpha} \alpha; \quad c_n = c_n^{\alpha} \alpha, \quad (1.25)$$

где  $c_y^{\alpha}$  и  $c_n^{\alpha}$  — частные производные от соответствующих коэффициентов по углу атаки.

Производная коэффициента нормальной силы  $c_n^{\alpha}$  зависит, главным образом, от числа  $M$  (рис. 1.10). В области околосвуковых скоростей ракеты ( $M \approx 1$ ) этот коэффициент имеет максимальное значение, а с дальнейшим увеличением чисел  $M$  понижается, стремясь к некоторой постоянной величине.

Коэффициент осевой силы  $c_x$  существенно зависит от формы ракеты, угла атаки, чисел  $M$  и  $Re$ . Примерный вид зависимости  $c_x(M)$  показан на рис. 1.10. Так как скорость звука и кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  зависят от высоты, то при данной скорости  $V_w$  числа  $M$  и  $Re$ , а с ними и коэффициенты  $c_n^{\alpha}$  и  $c_x$  изменяются с высотой, причем коэффициент  $c_n^{\alpha}$  слабо, а коэффициент  $c_x$  существенно.

Следует заметить, что коэффициент осевой силы зависит также от работы ракетного двигателя. При неработающем дви-



гателе осевая сила  $X_1$  возрастает на величину соответствующего прироста донного сопротивления.

Учитывая изложенное выше, можно сказать, что аэродинамические силы зависят от формы и размеров ракеты, угла атаки, скорости и высоты полета.

Полный аэродинамический момент, действующий на ракету, обычно раскладывают на составляющие по осям  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ . Эти составляющие  $M_{x1}$ ,  $M_{y1}$  и  $M_{z1}$  называются соответственно моментами крена, рыскания и тангажа.

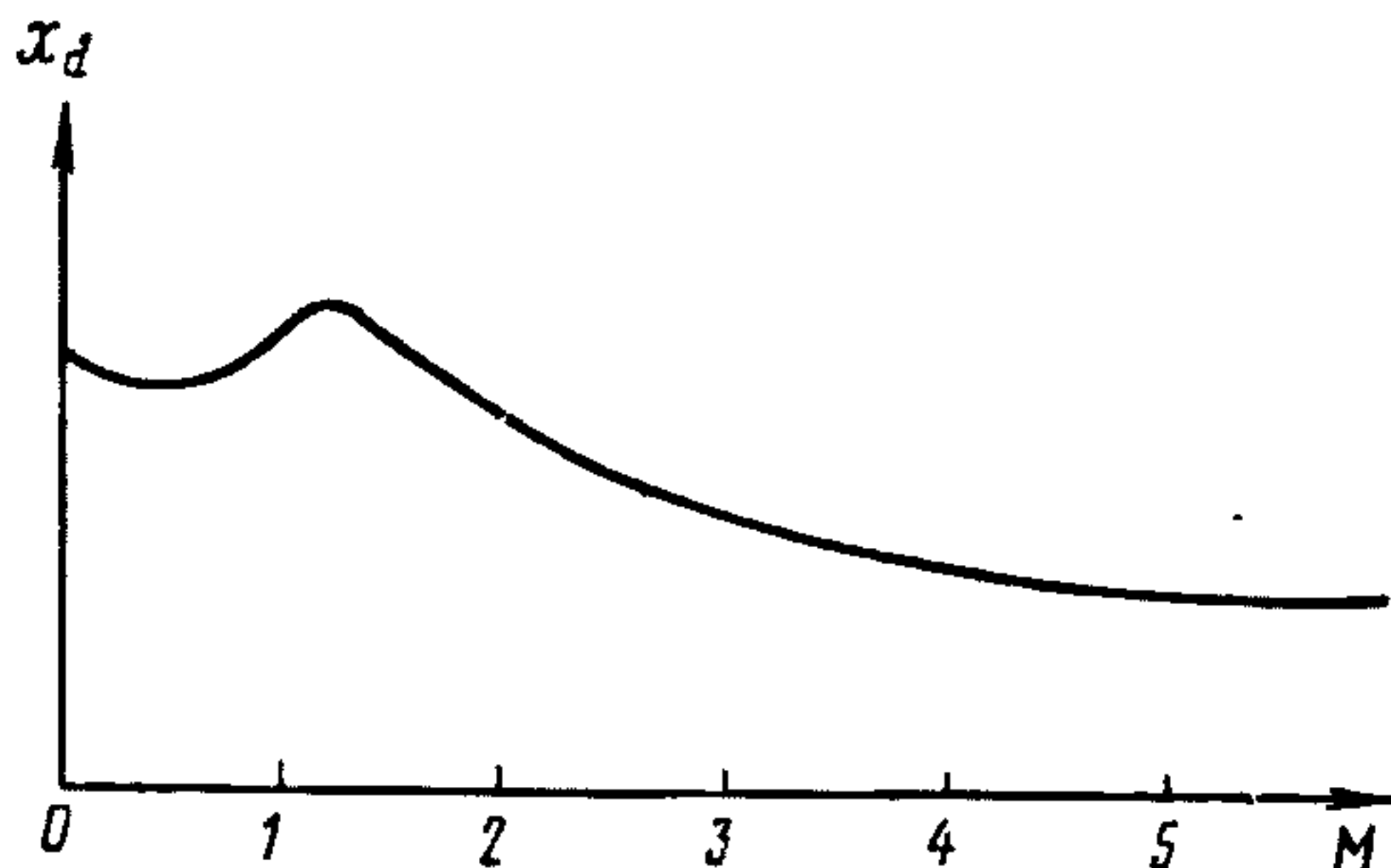


Рис. 1.11. Положение центра давления ракеты в зависимости от числа  $M$

Величина и направление полного аэродинамического момента зависят от ряда факторов, среди которых важное значение имеют характеристики движения ракеты относительно воздушной среды — ориентация ракеты относительно векторов скорости центра масс и угловой скорости ракеты и величины этих скоростей  $V_w$  и  $\omega$ .

Пусть центр масс невращающейся ракеты лежит на ее продольной оси на расстоянии  $x_T$  от носка головной части, а центр давления находится на расстоянии  $x_d$  от носка ракеты. Тогда величина полного аэродинамического момента относительно центра масс будет равна

$$M = c_n q S (x_T - x_d) \quad (1.26)$$

или при малых углах атаки

$$M = c_n^a q S (x_T - x_d) \alpha. \quad (1.27)$$

Этот момент, как и полная аэродинамическая сила, действует в плоскости, проходящей через продольную ось ракеты и вектор скорости.

Положение центра давления в общем случае зависит от формы ракеты, числа  $M$  и угла атаки. На рис. 1.11 показано типичное перемещение центра давления ракеты при изменении числа  $M$ . Обычно можно считать, что положение центра давления остается постоянным, если угол атаки изменяется в некоторой малой окрестности его нулевого значения.

При вращательном движении ракеты сопротивление воздушной среды проявляется, главным образом, в виде аэродинамиче-



ского момента сопротивления вращению. Этот момент, называемый *демпфирующим*, всегда направлен в сторону, противоположную вращению и стремится погасить угловую скорость вращения.

Демпфирующий момент зависит от величины угловой скорости и от ее ориентации относительно ракеты. Обычно вектор демпфирующего момента раскладывают по связанным осям на составляющие, пропорциональные угловым скоростям относительно соответствующих осей:

$$M_{\Delta x1} = m_{x1}^{\omega_{x1}} q S \frac{D^2}{V} \omega_{x1}; \quad (1.28)$$

$$M_{\Delta y1} = m_{y1}^{\omega_{y1}} q S \frac{l^2}{V} \omega_{y1};$$

$$M_{\Delta z1} = m_{z1}^{\omega_{z1}} q S \frac{l^2}{V} \omega_{z1},$$

где  $D$  и  $l$  — диаметр и длина ракеты соответственно.

Каждый из безразмерных коэффициентов  $m_{x1}^{\omega_{x1}}$ ,  $m_{y1}^{\omega_{y1}}$ ,  $m_{z1}^{\omega_{z1}}$  всегда отрицателен. Величины этих коэффициентов в летном диапазоне углов атаки зависят, главным образом, от геометрической формы ракеты, ее центровки  $x_T$  и числа  $M$ .

#### 1.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Основными характеристиками ракетного двигателя являются его тяга  $P$ , удельная тяга  $P_{уд}$ , секундный расход топлива  $\dot{m}g_0$  и коэффициент соотношения компонентов топлива  $K$ .

Как известно, сила тяги ракетного двигателя  $P$  связана с секундным расходом массы  $\dot{m}$ , скоростью истечения продуктов сгорания  $w$ , давлением газов на срезе сопла  $p_a$ , атмосферным давлением  $p$  и площадью выходного сечения сопла  $S_a$  зависимостью

$$P = \dot{m}w + (p_a - p)S_a. \quad (1.29)$$

Как видно, сила тяга зависит от высоты. На уровне моря, где  $p = p_0$ , сила тяги имеет наименьшее значение

$$P_0 = \dot{m}w + (p_a - p_0)S_a, \quad (1.30)$$

а в пустоте — наибольшее

$$P_{\Pi} = \dot{m}w + p_a S_a = P_0 + p_0 S_a. \quad (1.31)$$

Увеличение силы тяги при изменении атмосферного давления от  $p_0$  до нуля может достигать 25% от тяги  $P_0$  на уровне моря.

Зависимость силы тяги от высоты можно записать в виде

$$P = P_{\Pi} - p S_a. \quad (1.32)$$



Отношение тяги двигателя к весовому секунднему расходу называется обычно удельной тягой:

$$P_{уд} = \frac{P}{\dot{m}g_0} = \frac{P_0 + p_0 S_a}{\dot{m}g_0} - \frac{p S_a}{\dot{m}g_0}. \quad (1.33)$$

Удельная тяга представляет собой силу тяги, создаваемую двигателем при сгорании 1 кг топлива в 1 сек, и характеризует экономичность двигательной установки. Удельная тяга в пустоте определяется формулой

$$P_{уд.п} = \frac{P_0 + p_0 S_a}{\dot{m}g_0} = \frac{w}{g_0} + \frac{p_0 S_a}{\dot{m}g_0}. \quad (1.34)$$

Используя понятие удельной тяги в пустоте, выражение (1.32) можно переписать в виде

$$P = \dot{m}g_0 P_{уд.п} - p_0 S_a \left( \frac{p}{p_0} \right). \quad (1.35)$$

В практике проектирования применение находит также следующая формула для определения тяги:

$$P = A p_k - p S_a, \quad (1.36)$$

где  $p_k$  — давление в камере сгорания двигателя;

$A$  — коэффициент пропорциональности, величина которого определяется на основании стендовых испытаний двигателей.

На основе выражения (1.36) можно записать соответствующие формулы для определения удельной тяги, например:

$$P_{уд.п} = A \frac{p_k}{\dot{m}g_0}. \quad (1.37)$$

Удобство формул (1.36) и (1.37) состоит в том, что в них тяга и удельная тяга связаны линейной зависимостью с давлением в камере сгорания, величину которого замеряют при стендовых испытаниях.

Соотношение компонентов топлива  $K = \dot{G}_{ок}/\dot{G}_г$  характеризует состав топливной смеси. Здесь  $\dot{G}_{ок}$  и  $\dot{G}_г$  весовые расходы соответственно окислителя и горючего в единицу времени.

Зная суммарный расход топлива за одну секунду  $\dot{G}_{топл} = \dot{m}g_0$  и величину параметра  $K$ , можно определить весовой секундный расход окислителя и горючего по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \dot{G}_{ок} &= \frac{K}{K+1} \dot{G}_{топл}; \\ \dot{G}_г &= \frac{1}{K+1} \dot{G}_{топл}. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$



Тяга ракетного двигателя существенно меняется по времени на переходных режимах (при запуске и выключении двигателя). Зависимость тяги от времени (переходная характеристика ракетного двигателя) представлена на рис. 1.12. Как видно, давление в камере сгорания, а следовательно, и сила тяги достигают номинального значения не сразу после запуска. Некоторое время проходит от момента подачи команды на запуск двигателя

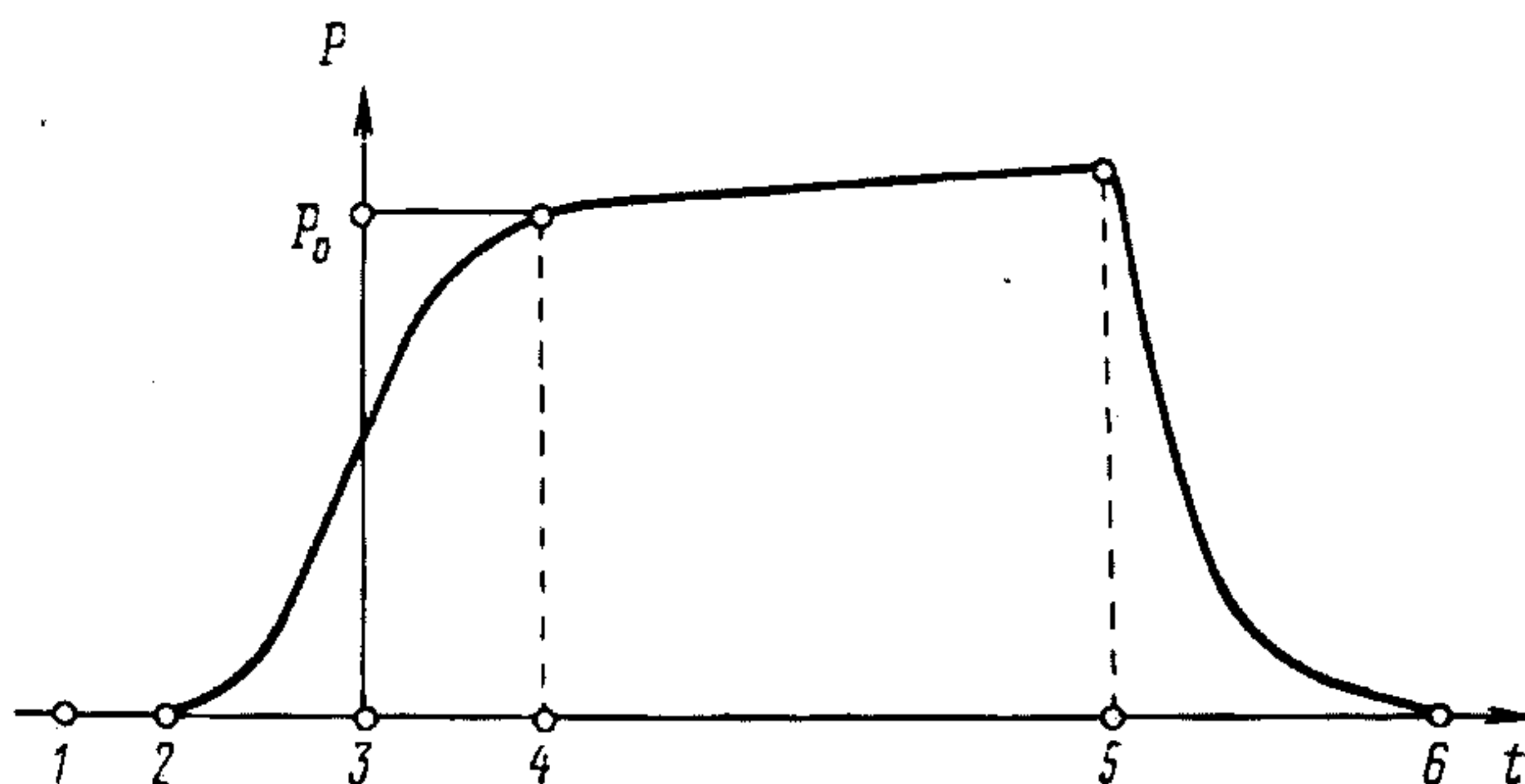


Рис. 1.12. Изменение силы тяги ЖРД во время полета ракеты:

1—команда на запуск; 2—воспламенение; 3—отделение ракеты от стартового устройства; 4—5—участок номинальной тяги; 6 — команда на выключение двигателя; 5—6 — участок последействия

до начала воспламенения. Тяга появляется практически в момент воспламенения.

При выключении двигателя тяга также исчезает не мгновенно — наблюдается, так называемое, явление последействия. После команды на выключение двигателя за счет догорания определенного количества топлива продолжает создаваться некоторая тяга, импульс которой, называемый импульсом последействия, выражается формулой

$$I_{\text{пд}} = \int_{t_k}^{t_{P=0}} P(t) dt,$$

где  $t_k$  — время подачи команды на выключение двигателя;

$t_{P=0}$  — момент времени, соответствующий нулевой тяге.

Импульс последействия является случайной величиной, разброс которой может составлять до 15% от среднего значения этого импульса [12]. Такая особенность переходной характеристики двигателя влияет на условия разделения ступеней и отделения головных частей ракет.

Разброс величины импульса последействия зависит от разброса времени, соответствующего нулевой тяге, и разброса тяги, который, в свою очередь, зависит от разброса давления в камерах сгорания, разброса параметра  $K$  и других факторов.



## 1.5. РАКЕТА КАК ТЕЛО ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА

### Масса ракеты, положение центра масс, моменты инерции

В связи с непрерывным горением топлива масса ракеты изменяется во время полета и может быть найдена из выражения

$$m = m_0 - \int_0^t \dot{m} dt, \quad (1.39)$$

где  $\dot{m} = \left| \frac{dm}{dt} \right| = -\frac{dm}{dt}$  — секундный расход массы;  
 $t=0$  — момент включения двигателя;  
 $m_0$  — начальная масса ракеты.

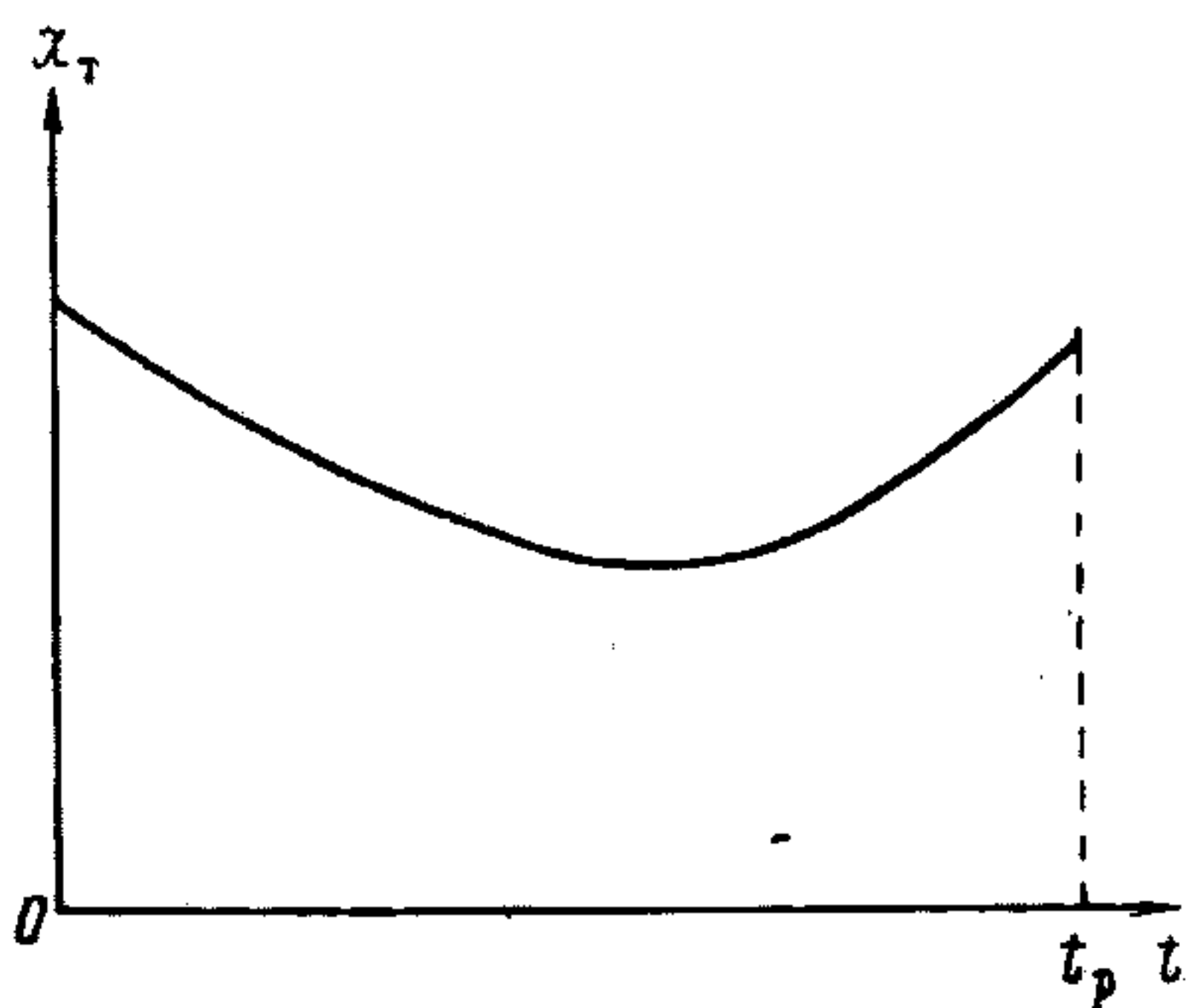


Рис. 1.13. Изменение безразмерной координаты центра масс одноступенчатой ракеты  $\bar{x}_T = x_T/l$  во время полета:

$t_p$  — момент выключения двигателя

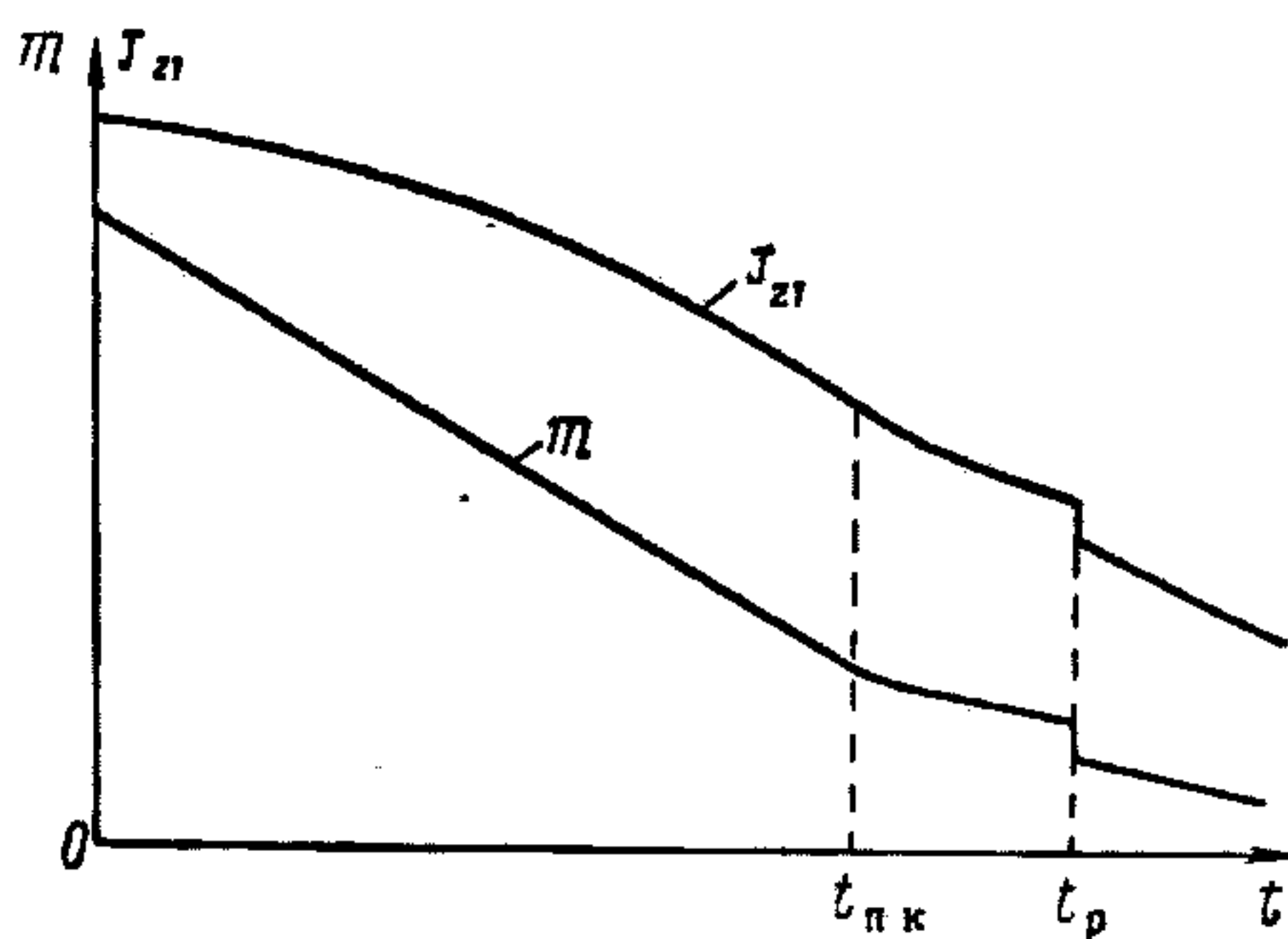


Рис. 1.14. Изменение массы и момента инерции двухступенчатой ракеты во время полета:

$t_{p.k.}$  — момент предварительной команды;  
 $t_p$  — момент разделения ступеней

Секундный расход массы  $\dot{m}$  складывается из секундного расхода массы через камеры сгорания основных двигателей, через выхлопные патрубки ТНА и через камеры сгорания управляющих двигателей.

Обычно в полете имеют место изменения секундного расхода массы, вызываемые изменением режима работы двигателя, а также различными случайными факторами. Наиболее значительные изменения секундного расхода происходят на переходных режимах работы двигателя (включение, переключение на меньшую тягу, полное выключение).

По мере выгорания топлива изменяются положение центра масс ракеты, определяемое координатой  $x_T$  (рис. 1.13), и моменты инерции ракеты. Эти величины можно считать зависящими от массы ракеты, т. е.

$$x_T(m); J_{x1}(m); J_{y1}(m); J_{z1}(m).$$



На рис. 1.14 для примера приведены графики, иллюстрирующие характер изменения массы и момента инерции относительно поперечной оси для первой ступени двухступенчатой ракеты.

### Принцип составления уравнений движения ракеты как тела переменного состава

При полете ракеты с работающим двигателем происходит отбрасывание продуктов горения и состав ракеты непрерывно изменяется. Рассматривая движение ракеты, удобно в каждый момент времени включать в ее состав только те материальные частицы, которые в этот момент находятся внутри определенного объема, занимаемого ракетой. При такой постановке задачи ракета с работающим двигателем представляет собой систему переменного состава, к которой непосредственно нельзя применить теоремы динамики твердого тела. Однако, основываясь на этих классических теоремах, можно доказать аналогичные теоремы для системы переменного состава и установить принцип составления уравнений движения ракеты.

Опуская доказательства, изложенные, например, в книге [6], рассмотрим принцип составления уравнений движения ракеты.

Уравнения движения реактивного летательного аппарата в произвольный момент  $t$  можно записать в виде уравнений движения твердого тела, получающегося в результате «затвердевания» реактивного аппарата в этот момент времени, если в число внешних сил, приложенных к такому фиктивному твердому телу, включить реактивные силы.

Следовательно, векторное уравнение движения центра масс ракеты можно записать в виде

$$m \frac{d\bar{V}_a}{dt} = \sum \bar{F}_i + \sum \bar{P}_i. \quad (1.40)$$

Здесь  $m = m(t)$  — масса ракеты в момент времени  $t$ ;

$\frac{d\bar{V}_a}{dt}$  — ускорение центра масс в инерциальной системе координат;

$\sum \bar{F}_i$  — сумма внешних сил, приложенных к ракете;

$\sum \bar{P}_i$  — сумма реактивных сил.

Под внешними силами, действующими на ракету, подразумевают такие силы, как сила притяжения  $\bar{G}_T$ , полная аэродинамическая сила  $\bar{R}$ , сила взаимодействия ракеты с пусковой установкой или отбрасываемой ступенью.

Как видно, составление уравнений движения тела переменного состава сводится к определению реактивных сил, что является достаточно сложной задачей. Основной из этих сил является



реактивная сила  $m\dot{w}$ , которую не удастся непосредственно измерить. Поэтому принято определять силу тяги ракетного двигателя по формуле (1.29), в которую входит сила, вызванная атмосферным давлением и давлением газа на срезе сопла  $(p_a - p)S_a$ . Хотя эта сила является внешней, ее объединяют с собственно реактивной силой  $m\dot{w}$ , поскольку при испытании двигателя на стенде измеряется сила, действующая на опоры стенда, определяемая зависимостью (1.30). Соответственно сила  $(p_a - p)S_a$  исключается из числа внешних сил  $\Sigma \bar{F}_i$ .

Кроме силы тяги  $P$ , определяемой формулой (1.29), в состав реактивных сил входят:

1) силы, вызванные нестационарностью движения топлива и продуктов горения относительно корпуса ракеты;

2) кориолисовы силы, обусловленные движением топлива и продуктов горения в ракете, вращающейся относительно инерциальной системы координат;

3) силы, обусловленные перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса.

Перечисленные силы очень малы по сравнению с тягой, определяемой формулой (1.29), причем непосредственное измерение их невозможно. В зависимости от принятых допущений разные авторы получают для них различные теоретические выражения. В баллистике обычно пренебрегают указанными малыми реактивными силами и определяют силы тяги ракетных двигателей согласно выражению (1.29).

Аналогичным образом составляется векторное уравнение вращательного движения ракеты относительно центра масс:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \Sigma \bar{M}_{F_i} + \Sigma \bar{M}_{P_i}. \quad (1.41)$$

Здесь  $\bar{K}$  — главный момент (относительно центра масс ракеты) количеств движения частиц «затвердевшей» ракеты относительно осей, проходящих через центр масс ракеты и движущихся поступательно со скоростью  $\bar{V}_a$  относительно инерциальной системы;

$\Sigma \bar{M}_{F_i}$  — главный момент (относительно центра масс ракеты) всех внешних сил, действующих на ракету, за исключением сил атмосферного давления и давления газов в выходном сечении сопла;

$\Sigma \bar{M}_{P_i}$  — главный момент (относительно центра масс ракеты) силы тяги ракетного двигателя, а также сил, вызванных движением топлива и газов внутри вращающейся ракеты, нестационарностью этого движения и перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса.



В дальнейшем для упрощения уравнений вращательного движения ракеты относительно ее центра масс будем пренебрегать моментами сил, обусловленными нестационарностью движения топлива и газов внутри ракеты и перемещением центра масс ракеты относительно ее корпуса, поскольку эти моменты достаточно малы.

Следует заметить, что обычно имеют место значительные по величине моменты, обусловленные колебаниями жидкости в баках ракеты при наличии свободной поверхности. Однако при соответствующем выборе параметров системы стабилизации колебания ракеты вследствие подвижности жидкости в баках оказываются малыми и их влияние на траекторию ракеты несущественно. В этой связи изучение моментов, обусловленных взаимодействием жидкости с корпусом ракеты, мы опускаем, тем более, что эти вопросы представляют собой предмет исследования специальных разделов динамики ракет<sup>1</sup>.

### 1.6. ВОЗМУЩАЮЩИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ

В реальном полете на ракету всегда действуют возмущающие силы и моменты, обусловленные различными возмущающими факторами.

При составлении математической модели полета ракеты и ее исследовании невозможно учесть все эти возмущающие факторы. В зависимости от конкретных условий приходится учитывать лишь те из них, которые существенно влияют на решение данной задачи. Поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким обзором основных групп возмущающих факторов, перенеся более детальное их рассмотрение в соответствующие разделы книги.

Такие возмущающие факторы, как отклонения параметров ракеты и ее двигателей (веса ракеты, силы тяги основных двигателей, секундного расхода топлива и др.) от номинальных значений, обусловлены, главным образом, производственными погрешностями при изготовлении и сборке элементов и агрегатов, комплектующих ракету, и разбросом характеристик топлива. Эти отклонения параметров ракеты и двигателей от номинальных значений и такие производственные погрешности, как эксцентриситет тяги основного двигателя, несимметрия ракеты, перекос корпуса и т. п., вызывают появление случайных возмущающих сил (сил тяжести, реактивных и аэродинамических) и их моментов.

Атмосфера является другим источником возмущений. Отклонения параметров атмосферы от стандартных значений приводят к появлению возмущающих аэродинамических сил и моментов и к отклонению тяги от номинальной величины. Ветровые воздействия на ракету также вызывают возмущения аэродинамических сил и моментов. Атмосферные возмущения представляют

---

<sup>1</sup> См., например, работы [1], [17].



собой случайный процесс и соответственно описываются случайными функциями.

Все эти возмущающие силы и моменты приложены непосредственно к ракете. Кроме них всегда действуют возмущающие силы и моменты, возникающие в результате различных ошибок в отклонении органов управления. Обычные источники таких возмущающих воздействий — это шумы, погрешности в работе аппаратуры и отклонения параметров аппаратуры от их номинальных значений, приводящие к различным ложным сигналам в элементах системы управления и соответственно к ложным отклонениям органов управления. В результате появляются возмущающие силы и моменты, которые являются, вообще говоря, случайными величинами.

Возмущающие факторы, воздействуя непосредственно на ракету и на процессы управления, в конечном счете, приводят к уменьшению максимальной дальности полета и рассеиванию траекторий полета ракеты и головных частей.

### 1.7. УПРАВЛЯЮЩИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ

Управление поступательным и вращательным движениями ракеты осуществляется посредством изменения управляющих сил и моментов, которые создаются органами управления ракетой по командам системы управления. Выбор типа органов управления и их эффективности является одним из наиболее важных вопросов динамического проектирования ракеты. Его решение непосредственно связано с выбором конструктивной схемы ракеты.

#### Управляющие силы

В общем случае на ракету в полете действуют следующие силы: сила тяжести  $\bar{G}$ , полная аэродинамическая сила  $\bar{R}$  и сила тяги двигателей  $\bar{P}$ . При старте ракеты на нее могут действовать также силы реакции стартовых устройств.

Для изменения траектории полета ракеты нужно изменять величину и направление равнодействующей указанных выше сил. Поскольку на силу тяжести влиять невозможно, то управление полетом практически осуществляется только изменением величины и направления равнодействующей  $\bar{N}$  сил тяги двигателей и аэродинамических сил. Равнодействующую  $\bar{N}$  можно разложить на две составляющие  $\bar{N}_t$  и  $\bar{N}_n$ , направленные соответственно вдоль вектора скорости  $\bar{V}$  и перпендикулярно к нему (рис. 1.15).

Тангенциальная составляющая  $\bar{N}_t$ , равная по величине

$$N_t = P_t - X, \quad (1.42)$$

может служить для регулирования скорости полета. Изменение тангенциальной составляющей  $\bar{N}_t$  у баллистических ракет достигается изменением тяги основных двигателей (например, регули-



рованием секундного расхода топлива, если двигатель жидкостной) и включением или выключением различных двигателей. Ту часть силы тяги  $\Delta P$ , которую можно использовать для регулирования скорости ракеты, назовем тангенциальной управляющей силой.

Нормальная сила  $\bar{N}_n$  равна сумме проекций полной аэродинамической силы и сил тяги на плоскость, нормальную к траектории:

$$\bar{N}_n = \bar{P}_n + \bar{R}_n = \bar{P}_n + \bar{Y} + \bar{Z}. \quad (1.43)$$

Ее составляющую в плоскости стрельбы  $\bar{N}_y$  будем называть нормальной управляющей силой.

По аналогии с нормальной управляющей силой введем понятие боковой управляющей силы  $N_z$ , представляющей собой проекцию силы  $N_n$  на перпендикуляр к плоскости полета.

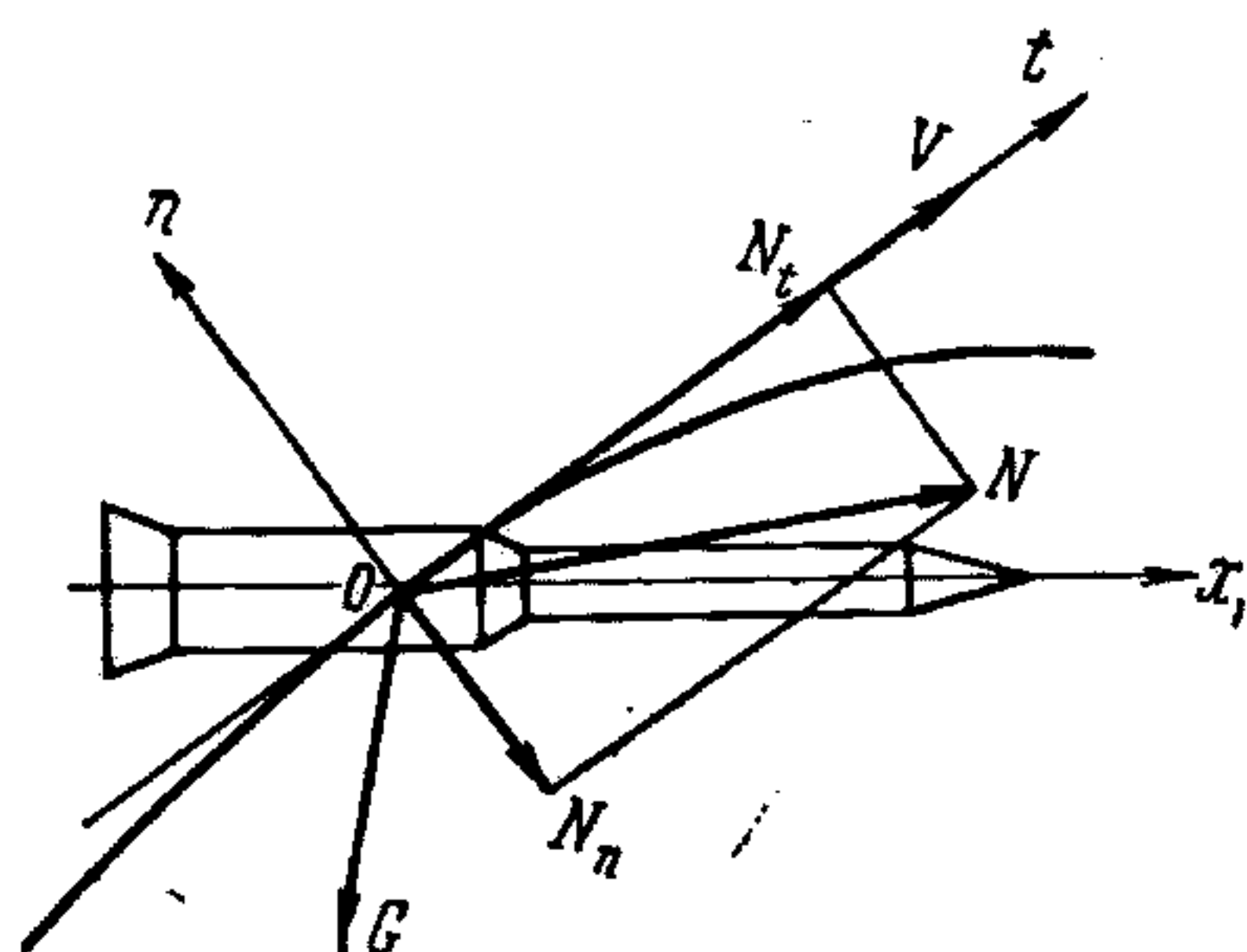


Рис. 1.15. Силы, действующие на ракету в полете

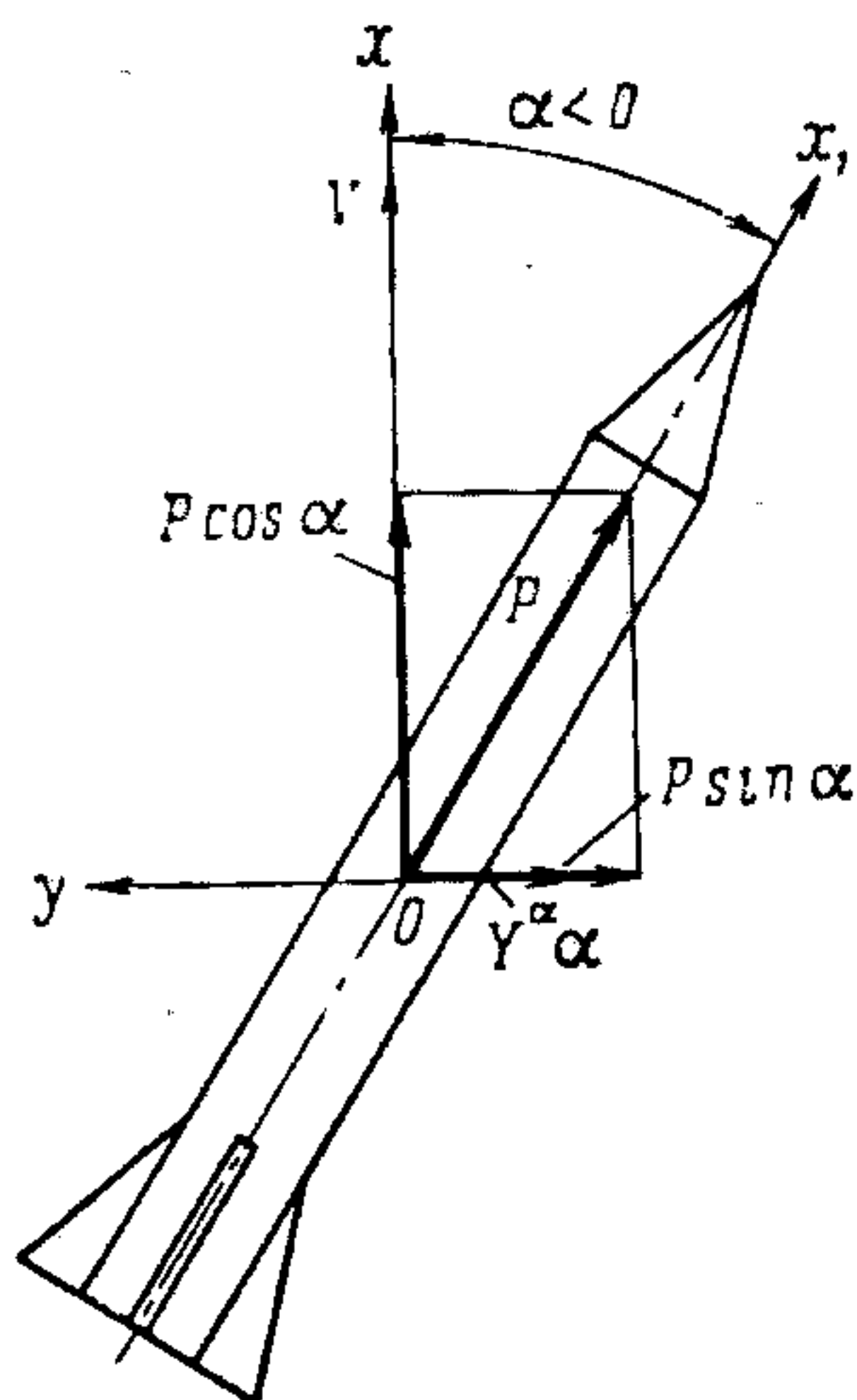


Рис. 1.16. Схема возникновения нормальной управляющей силы у ракеты

Создавая требуемые по величине и направлению тангенциальную, нормальную и боковую управляющие силы, можно обеспечить заданную траекторию полета ракеты.

Возможны различные способы создания нормальной и боковой управляющих сил. У баллистических ракет, чтобы получить нормальную силу различной величины, необходимо изменять угол атаки в плоскости полета  $\alpha_y$ , поворачивая ракету вокруг центра масс. Когда ракета имеет угол атаки  $\alpha_y$ , нормальная сила равна (рис. 1.16)

$$N_y = P \sin \alpha_y + Y \approx (P + c_y^a q S) \alpha_y. \quad (1.44)$$

Чтобы получить боковую управляющую силу, необходимо придать ракете угол атаки  $\alpha_z$  в плоскости, перпендикулярной к плоскости стрельбы.



## Органы управления ракетой. Управляющие моменты

Как было сказано выше, для получения требуемой по величине и направлению нормальной силы необходимо определенным образом регулировать ориентацию ракеты относительно вектора скорости. Эта задача решается созданием управляющих моментов, которые вращают ракету вокруг ее осей  $Ox_1$ ,  $Oy_1$ ,  $Oz_1$ . Соответствующие движения обычно называются движениями крена, рыскания и тангажа. Для образования управляющих моментов на ракете имеются органы управления. Последние создают сравнительно небольшие аэродинамические или реактивные силы, моменты которых относительно центра масс ракеты являются достаточными для управления угловыми движениями ракеты.

Для изменения нормальной и боковой силы используется вращение ракеты вокруг осей  $Oy_1$  и  $Oz_1$  с помощью органов управления рысканием и тангажом. Эти же органы управления необходимы для стабилизации требуемой ориентации ракеты в пространстве. Для стабилизации ракеты по крену<sup>1</sup> необходимы еще органы управления креном, создающие управляющий момент относительно продольной оси  $Ox_1$ . И, наконец, необходим орган управления для изменения силы тяги основных двигателей, если требуется регулировать величину скорости ракеты.

В настоящее время используются следующие основные типы органов управления баллистическими ракетами:

- 1) воздушные рули;
- 2) газовые рули;
- 3) поворотные камеры сгорания основных двигателей (одна или несколько);
- 4) поворотные сопла основных двигателей;
- 5) специальные насадки на срезе сопла (сферические, цилиндрические с косым срезом и др.);
- 6) разрезные сопла;
- 7) выдвижные щитки, работающие в струе двигателя перпендикулярно потоку;
- 8) вдув генераторного газа или впрыск жидкости в сверхзвуковую часть сопла основного двигателя;
- 9) основной многокамерный двигатель, работающий в режиме форсирования — дросселирования;
- 10) управляющие двигатели (неподвижные и поворотные);

---

<sup>1</sup> Вращение относительно продольной оси  $Ox_1$  для изменения боковой управляющей силы у баллистических ракет не используется. Однако для упрощения системы управления требуется, чтобы полет ракеты происходил без вращения вокруг этой оси, т. е. без крена.



- 11) управляющие сопла (поворотные и неподвижные);
- 12) комбинированные управляющие органы (например, воздушные и газовые рули или воздушные рули с основными камерами, работающими в режиме форсирования — дросселирования).

Все перечисленные органы управления могут создавать управляющие моменты рыскания и тангажа, однако не все из них пригодны для создания момента крена. Нельзя получить момент крена, если для управления тангажом и рысканием используется, например, один поворотный двигатель или, если силы, создающие моменты тангажа и рыскания, направлены вдоль продольной оси ракеты. В этих случаях для управления креном приходится применять специальные управляющие двигатели, тяга которых действует в поперечной плоскости.

Во всех других случаях, когда имеется не меньше двух пар органов управления тангажом и рысканием, создающих поперечные силы на некотором расстоянии от продольной оси, для образования момента крена используется *дифференциальное управление* органами

управления. Последние могут действовать симметрично, создавая момент тангажа или рыскания, или асимметрично, создавая момент крена. При сочетании указанных действий могут создаваться одновременно и момент тангажа (рыскания) и момент крена.

Величина сил, создаваемых органами управления, зависит от перемещения этих органов (чаще всего углового) или от секундного расхода топлива, если для управления используется рассогласование тяг основных двигателей.

Рассмотрим определение сил, создаваемых органами управления, и управляющих моментов на примере управления движением ракеты с помощью четырех управляющих двигателей.

У многих современных ракет управление движением ракеты на активном участке осуществляется четырьмя управляющими двигателями. Расположение этих двигателей и направления их отклонения, принятые за положительные, показаны на рис. 1. 17. Положительным отклонением управляющего двигателя будем считать поворот его против часовой стрелки, если смотреть со

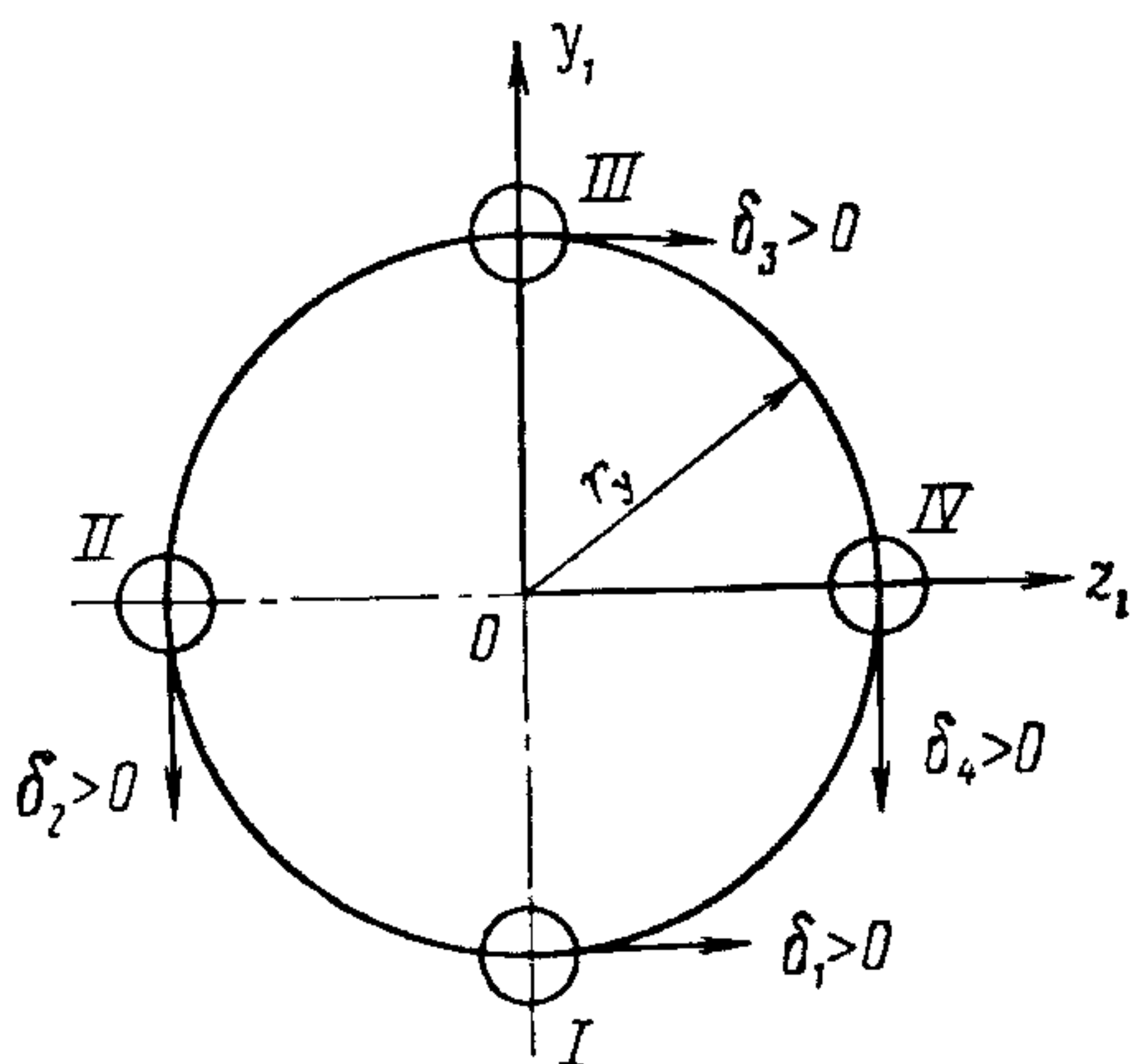


Рис. 1. 17. Схема возникновения управляющего момента при отклонении управляющих двигателей



стороны соответствующей оси, т. е. на рис. 1.17 положительными будут отклонения двигателей *II—IV* вниз, а двигателей *I—III* вправо.

Принимая тяги  $T$  всех четырех управляющих двигателей равными, запишем проекции их равнодействующей на связанные оси координат в виде:

$$\left. \begin{aligned} T_{x1} &= T (\cos \delta_1 + \cos \delta_2 + \cos \delta_3 + \cos \delta_4); \\ T_{y1} &= T (\sin \delta_2 + \sin \delta_4); \\ T_{z1} &= -T (\sin \delta_1 + \sin \delta_3), \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

где  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  — соответственно углы отклонения управляющих камер *I, II, III* и *IV*.

Очевидно, управляющие моменты в этом случае будут равны:

$$\left. \begin{aligned} M_{y\ x1} &= T r_y (\sin \delta_1 + \sin \delta_2 - \sin \delta_3 - \sin \delta_4); \\ M_{y\ y1} &= -T l_y (\sin \delta_1 + \sin \delta_3); \\ M_{y\ z1} &= -T l_y (\sin \delta_2 + \sin \delta_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

где  $r_y$  — расстояние от продольной оси ракеты до продольных осей управляющих камер;  
 $l_y = x_T - x_{дв}$  — расстояние от центра масс ракеты до осей вращения управляющих двигателей.

В этих выражениях сила тяги управляющего двигателя определяется в зависимости от его параметров формулой (1.35).

### Управляемость ракеты

Обеспечение управляемости ракеты является одной из важнейших задач динамического проектирования, которая сводится к выбору типа и эффективности органов управления. Эффективность органов управления будем оценивать максимальным управляющим моментом  $M_{y\ max}$ , создаваемым отклонением органов управления, и соответствующим углом отклонения этих органов  $\delta_{max}$ .

Выбор типа и эффективности органов управления производится с учетом возможности конструктивной реализации из условий:

- 1) достаточности управляющих моментов (с некоторыми запасами) для компенсации возмущающих сил и моментов;
- 2) минимальных энергетических потерь на управление.

Потери энергии на управление и, как следствие этого, уменьшение дальности стрельбы обусловлены, главным образом, двумя причинами, а именно:

- 1) установка органов управления приводит к уменьшению удельной тяги двигательной установки;



2) установка органов управления вызывает увеличение «сухих» весов ступеней ракеты (за счет весов самих органов управления, их приводов и источников энергии для последних).

Завышение эффективности органов управления может привести к неоправданным конструктивным осложнениям и большим потерям энергии ракеты. В связи с этим весьма существенное значение приобретает задача правильного определения потребной эффективности органов управления. При решении этой задачи следует правильно оценить возмущающие силы и моменты и рационально выбрать динамическую схему ракеты.

Все возмущающие факторы, влияющие на выбор органов управления, могут быть разделены на следующие группы:

- 1) ветер;
- 2) технологические погрешности изготовления и монтажа ракеты;
- 3) несимметричность компоновки ракеты.

В настоящее время накоплен большой статистический материал, характеризующий ветровое поле Земли.

Скорость ветра  $\bar{W}$  можно рассматривать как векторную случайную величину с ненулевым средним значением. Систематическая составляющая скорости ветра  $\bar{W}_{\text{сист}}$  направлена с запада на восток. Величина случайной составляющей скорости ветра, направление которой равновероятно, подчинена нормальному закону распределения.

Другая группа возмущающих факторов обусловлена технологическими погрешностями изготовления и монтажа ракеты; основные из них следующие:

- 1) смещение и перекося осей сопел двигательной установки относительно установочной базы;
- 2) смещение и перекося установочной базы относительно номинального положения;
- 3) разность тяг камер и возможный разброс тяг двигателей;
- 4) упругая деформация рамы двигательной установки;
- 5) смещение и перекося стыкующихся отсеков ракеты;
- 6) погрешности монтажа стабилизаторов.

Технологические погрешности изготовления и монтажа ракеты можно считать подчиненными нормальному закону распределения. В связи с этим и возмущающие воздействия от каждого из перечисленных факторов также можно считать распределенными по нормальному закону.

Несимметричная компоновка ракеты приводит к возникновению систематических возмущающих сил и моментов:

- 1) возмущающего момента за счет весовой асимметрии;
- 2) возмущающих сил и момента за счет несимметричного расположения выхлопных сопел турбонасосных агрегатов двигателей;



3) возмущающих силы и момента за счет упругой деформации рамы двигательной установки, обусловленной несимметричным ее нагружением.

Каждой группе возмущающих сил и моментов, действующих на предыдущую ступень ракеты, соответствует группа начальных возмущений для последующей ступени. Начальные возмущения за счет процесса разделения ступеней можно считать случайными и распределенными по нормальному закону.

Таким образом, для оценки эффективности органов управления рассматривают комплекс независимых возмущающих воздействий, приложенных к ракете в полете, который может быть приведен к одному систематическому и  $n$  случайным независимым между собой воздействиям с нормальными законами распределения.

На различных участках полета роль возмущающих факторов не одинакова.

Основным возмущающим фактором для одноступенчатых ракет и для первых ступеней многоступенчатых ракет является ветер.

Возмущающие силы и моменты, обусловленные погрешностями изготовления и монтажа ракеты и несимметричностью компоновки (как систематические, так и случайные), значительно меньше ветровых сил и моментов, при оценке эффективности органов управления существенной роли не играют. Поэтому для предварительного определения потребных углов отклонения органов управления одноступенчатых и первых ступеней многоступенчатых ракет достаточно оценить действие на ракету ветра (с учетом изменения его по высоте).

Для вторых и последующих ступеней ракет с высотой разделения более 40 км основными возмущающими факторами являются погрешности изготовления и монтажа и несимметричность компоновки ракеты. Воздействие ветра в этих случаях оказывается несущественным.

На начальных участках полета после разделения ступеней необходимо учитывать влияние на отклонения органов управления начальных возмущений, обусловленных ошибками стабилизации предыдущей ступени и процессом разделения ступеней.

Для предварительного выбора типа и эффективности органов управления можно определить суммарный возмущающий момент

$$M_{в\Sigma} = \sum_{i=1}^m M_{в i \text{ сист}} + \sqrt{\sum_{j=1}^n M_{в j \text{ сл}}^2} \quad (1.47)$$

и принять с запасом в 10%, что

$$M_{y \text{ max}} = M_y^i \delta_{\text{max}} \geq 1,1 M_{в\Sigma}. \quad (1.48)$$



Исходя из этого значения потребного управляющего момента и учитывая конструктивные особенности ракеты, можно выбрать тип органов управления. После этого следует провести оценку управляемости (другими словами, оценку достаточности управляющих моментов), используя рассмотренную в разд. 2.4 динамическую схему движения ракеты.

Ниже приводится порядок расчетов для определения отклонений (загрузки) органов управления на первой и последующих ступенях ракеты.

### Порядок проведения расчетов для первой ступени

А. Определяются отклонения органов управления:

1) от действия систематической составляющей скорости ветра  $\delta w_{\text{сист}}$ ;

2) от действия случайной составляющей скорости ветра  $\delta w_{\text{сл}}$ ;

3) от действия возмущающих факторов, обусловленных несимметричностью компоновки  $\delta_{\text{нс}}$ ;

4) от действия возмущающих сил и моментов, обусловленных технологическими погрешностями изготовления и монтажа ракеты  $\delta_{\text{п}}$ .

Б. Определяется суммарное отклонение органов управления

$$\delta_{\Sigma} = \delta w_{\text{сист}} + \delta_{\text{нс}} \pm \sqrt{\delta w_{\text{сл}}^2 + \delta_{\text{п}}^2}. \quad (1.49)$$

В. Сравнивается нагрузка органов управления (с учетом возможных случайных отклонений параметров ракеты, аппаратуры управления и атмосферы — введением коэффициента запаса 1,1) с максимально возможным отклонением

$$1,1 \delta_{\Sigma} \leq \delta_{\text{max}}. \quad (1.50)$$

### Порядок проведения расчетов для второй и последующих ступеней

При определении загрузки органов управления вторых и последующих ступеней учитывается совокупное воздействие на движение ракеты ветра, технологических погрешностей, несимметричности компоновки, а также начальных возмущений.

Начальные возмущения за счет ошибок стабилизации в конце полета предыдущей ступени вызывают следующие отклонения органов управления:

— систематическая составляющая  $\delta_{\text{сист}}^0 = \delta w_{\text{сист}}^0 + \delta_{\text{нс}}^0$ ;

— случайные составляющие  $\delta w_{\text{сл}}^0, \delta_{\text{п}}^0$ .



Случайные возмущения за счет процесса разделения ступеней приводят к отклонению органов управления  $\delta_p^0$ .

Порядок проведения расчетов.

А. Определяются составляющие отклонения органов управления:

1)  $\delta_{\text{сист}}$  — от действия алгебраической суммы возмущающих сил и моментов за счет систематической составляющей скорости ветра и несимметричности компоновки при начальных возмущениях  $\delta_{\text{сист}}^0$ ;

2)  $\delta_{W_{\text{сл}}}$  — от действия случайной составляющей скорости ветра при нулевых начальных возмущениях;

3)  $\delta_{\text{п}}$  — от действия возмущающих сил и моментов, обусловленных технологическими погрешностями, при нулевых начальных возмущениях;

4)  $\delta_{W_{\text{сл.н}}}$ ,  $\delta_{\text{п.н}}$ ,  $\delta_{\text{р.н}}$  — за счет начальных возмущений  $\delta_{W_{\text{сл}}}^0$ ,  $\delta_{\text{п}}^0$ ,  $\delta_{\text{р}}^0$ .

Б. Определяется суммарное отклонение органов управления

$$\delta_{\Sigma} = \delta_{\text{сист}} \pm \sqrt{\delta_{W_{\text{сл}}}^2 + \delta_{\text{п}}^2 + \delta_{W_{\text{сл.н}}}^2 + \delta_{\text{п.н}}^2 + \delta_{\text{р.н}}^2}. \quad (1.51)$$

В. Сравнивается нагрузка органов управления (с учетом возможных случайных отклонений параметров ракеты, аппаратуры управления и атмосферы) с максимально возможным отклонением:

$$1,1\delta_{\Sigma} \leq \delta_{\text{max}}. \quad (1.52)$$

Если это условие не выполняется, производится корректировка выбранной ранее эффективности органов управления, характеризуемой величиной  $M_y$ .

## 1. 8. СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПОЛОТОМ РАКЕТЫ

### Задачи и состав системы управления

Система управления полетом ракеты управляет ее движением на активном участке, обеспечивая полет в достаточно близкой окрестности требуемой траектории, и отделением в нужные моменты времени ступеней и головной части ракеты. Эта самая общая формулировка задачи системы управления полетом может быть несколько конкретизирована разделением общей задачи на задачи наведения и стабилизации.

Задача стабилизации ракеты, а точнее, управления движением вокруг центра масс, сводится к управлению ориентацией осей ракеты в пространстве и выдерживанию требуемой ориентации. Эта задача решается группой устройств, расположенных на борту ракеты, — *автоматом угловой стабилизации*.

Благодаря обратным связям ракета и автомат угловой стабилизации образуют единую динамическую систему, в которой

ракета является одним из звеньев. В дальнейшем под *системой стабилизации* будем понимать замкнутую автоматическую систему, состоящую из ракеты и автомата угловой стабилизации.

Обычно ракета стабилизируется (ориентируется) относительно всех трех (связанных с нею) осей координат. Соответственно система стабилизации состоит из трех каналов: тангажа, рыскания и крена.

Задача наведения ракеты (управления движением центра масс) сводится к управлению тремя составляющими скорости центра масс (продольной, нормальной и боковой), отделением ступеней и головной части таким образом, чтобы параметры движения центра масс ракеты в момент отделения головной части обеспечивали свободный полет последней по требуемой траектории. Автоматическую систему управления, решающую эту задачу, условимся называть системой наведения.

В общем случае система наведения состоит из трех каналов для управления боковой, нормальной и продольной составляющими скорости и каналов управления отделением ступеней и головной части. Первые три канала работают с использованием обратной связи и образуют вместе с ракетой трехканальную замкнутую динамическую систему.

Управление отделением частей ракеты осуществляется по разомкнутой схеме (без обратной связи): на основании информации о движении центра масс ракеты на активном участке траектории определяется момент времени, в который необходимо отделить соответствующую часть ракеты и подается серия разовых команд на выключение двигательной установки и отделение этой части.

Вследствие наличия двух различных участков полета баллистической ракеты — активного и пассивного основной задачей наведения является управление отделением головной части ракеты таким образом, чтобы головная часть, совершая в дальнейшем свободный полет, попала в окрестность цели на поверхности Земли с требуемой точностью. Выполнение этой задачи обеспечивается каналом управления отделением головной части, которая представляет собой группу устройств, формирующих сигнал на выключение двигательной установки и отделение головной части в тот момент времени, когда некоторая функция параметров движения ракеты достигает значения, обеспечивающего с требуемой точностью прохождение траектории полета головной части через цель, положение которой относительно точки старта ракеты известно.

Чтобы к моменту отделения головной части параметры движения ракеты находились в такой достаточно малой области, которая обеспечивает нормальную работу канала управления отделением головной части, необходимо управлять составляющими скорости ракеты.



Канал управления боковой скоростью выдерживает полет ракеты на активном участке в указанной плоскости стрельбы. Это необходимо для того, чтобы вектор скорости ракеты в момент отделения головной части имел требуемое направление по азимуту. Так как этот канал стремится свести к нулю боковой снос — отклонение ракеты от плоскости стрельбы, то его можно назвать также каналом стабилизации бокового сноса, или каналом боковой стабилизации.

Канал управления нормальной скоростью обеспечивает полет ракеты в плоскости стрельбы по заданной траектории для того, чтобы в момент отделения головной части вектор скорости ракеты имел необходимое направление в плоскости стрельбы.

Канал регулирования скорости обеспечивает требуемый закон изменения величины скорости полета. Регулирование скорости осуществляется с целью уменьшения области параметров движения центра масс ракеты в плоскости стрельбы, при которых возможно отделение головной части для попадания в заданную цель. Канал регулирования скорости может отсутствовать, если оказывается возможным обеспечить требуемую точность стрельбы без регулирования скорости.

Каждый из трех замкнутых каналов управления составляющими скорости ракеты выполняет обычно следующие функции.

1. Получает и обрабатывает информацию о параметрах движения ракеты, на основании которой вырабатывает сигналы наведения.

2. Передает сигналы наведения на борт ракеты, если эти сигналы вырабатываются внебортной аппаратурой.

3. Преобразует сигналы наведения в боковую, нормальную и тангенциальную управляющие силы.

Так как боковая и нормальная управляющие силы создаются путем изменения углового положения ракеты относительно ее вектора скорости, т. е. путем изменения углов атаки и скольжения, то для управления этими силами используются два канала системы угловой стабилизации — каналы тангажа и рыскания. При этом система угловой стабилизации выполняет одновременно две функции:

- 1) преобразует сигналы наведения в боковую и нормальную управляющие силы;

- 2) стабилизирует при воздействии возмущений угловое положение ракеты, задаваемое сигналами наведения.

Таким образом, два канала системы угловой стабилизации являются структурными элементами соответствующих двух каналов системы наведения. Так, канал стабилизации угла тангажа входит в состав канала управления нормальной скоростью, а канал стабилизации угла рыскания входит в канал управления боковой скоростью. Эти два канала системы угловой стабилизации представляют собой по отношению к системе наведения некоторый сложный «объект управления».

Для нормальной работы системы наведения обычно необходимо, чтобы полет ракеты происходил без крена. При накренивании ракеты сигналы наведения будут выполняться неточно вследствие уменьшения нормальной управляющей силы  $N_y$  по сравнению с ее требуемым значением  $N_y^*$  ( $N_y = N_y^* \cos \eta$ ) и появления боковой управляющей силы  $N_z = N_y^* \sin \eta$ , вызывающей отклонение центра масс ракеты от плоскости стрельбы. Задача предотвращения крена ракеты при воздействии внешних возмущений решается каналом стабилизации крена. Этот канал в системе наведения не входит, но облегчает ее работу.

Принцип управления отделением головной части основывается на положении, что в одну и ту же точку цели (в конце пассивного участка) головная часть может попасть, двигаясь как по номинальной траектории, так и по бесконечному множеству других возможных траекторий. Вследствие этого совсем не обязательно для попадания в цель, чтобы параметры движения ракеты в момент окончания активного полета равнялись бы их номинальным значениям. Представляется возможным отделить головную часть в то мгновение, когда совокупность отклонений параметров движения ракеты от их номинальных значений обеспечит дальнейшее движение головной части по одной из траекторий, приводящих ее к цели. Эта задача и решается соответствующим каналом системы управления ракетой.

### **Особенности систем управления ракет с регулируемой и нерегулируемой тягой**

Принципы построения системы управления баллистической ракетой определяются условиями полета ракеты и особенностями ее конструкции, задачами, которые возлагаются на эту систему, и требованиями, предъявляемым к ней, а также уровнем развития соответствующих областей техники. В частности, большую роль играет то обстоятельство, регулируется или не регулируется величина тяги двигателя. Ракеты с двигателями, позволяющими изменять величину тяги, являются более совершенными объектами управления. Они могут совершать полет по траектории, достаточно близкой к номинальной, и, следовательно, производить отделение головной части при малых отклонениях параметров конца активного участка от номинальных значений. Это дает возможность получить относительно высокую точность стрельбы при использовании сравнительно простых систем наведения и приборов.

Для обеспечения полета ракеты по траектории, близкой к номинальной, можно измерять три составляющих ускорения центра масс и сравнивать их (либо интегралы от них, т. е. три составляющие скорости) с программами их изменения, которые заложены как функции времени в программном устройстве (или в бортовом счетно-решающем приборе).



Управляя нормальными силами путем изменения ориентации ракеты и величиной тяги путем форсирования или дросселирования двигателя, можно осуществить заданную траекторию полета с точностью, определяемой лишь характеристиками приборов системы управления. Получающаяся при этом узкая «трубка» возмущенных траекторий дает возможность построить сравнительно простой автомат управления отделением головной части, работающий в режиме ожидания и не влияющий ни на процесс движения ракеты на активном участке, ни на работу системы управления. Алгоритм работы этого автомата может быть сравнительно простым, не требующим сложного вычислительного устройства.

Достаточно простым получается и канал управления нормальной скоростью, выдерживающий заданную программу ее изменения. Характерной особенностью этой программы является медленное изменение нормальной скорости на протяжении десятков секунд (длительность полета ступени ракеты). Представление программы в виде спектра частот показывает, что этот спектр практически занимает полосу частот от нуля до нескольких десятых долей радиан в секунду. Для точного воспроизведения такой программы от канала управления нормальной скоростью не требуется высокого быстродействия и для него более характерен режим стабилизации, чем режим управления. В связи с отмеченным обстоятельством у ракет с регулируемой тягой канал управления нормальной скоростью, обеспечивающий заданную программу ее изменения, можно называть *каналом нормальной стабилизации*.

Таким образом, у ракет с регулируемой тягой номинальная траектория полета на активном участке задается программами регулирования проекций скорости на некоторые три направления и программами регулирования углов тангажа, рыскания и крена, а система наведения предназначается для ведения ракеты на активном участке по траектории, возможно более близкой к номинальной. Эта задача решается тремя каналами системы наведения, в состав которых входят каналы стабилизации углов тангажа и рыскания, а также каналом стабилизации угла крена.

Рассмотренный подход к построению системы наведения переносит значительную часть задачи по обеспечению требуемой точности стрельбы на конструкторов ракеты и двигательной установки. Система наведения получает при этом простое приборное оформление за счет усложнения конструкции ракеты.

Ракеты, у которых величина тяги двигательной установки не регулируется, например твердотопливные ракеты, могут заметно отклоняться от номинальной траектории. Однако сведение к нулю на всем протяжении активного участка отклонений параметров движения ракеты от номинальных значений не является самоцелью. Основная задача системы управления ракетой со-

стоит в минимизации отклонения точки падения головной части от цели. Идеальная система наведения должна использовать информацию о параметрах движения ракеты таким образом, чтобы обеспечить в конце полета попадание головной части в цель. Успех решения этой задачи реальной системой наведения зависит от того, насколько полно алгоритм преобразования информации о движении ракеты в сигнал наведения, управляющий ориентацией ракеты, учитывает всевозможные факторы, влияющие на точность попадания.

Поэтому если не стремиться обеспечить наименьшие отклонения параметров движения ракеты от номинальных значений, что возможно более или менее у ракет с регулируемой тягой, то управление нормальной и боковой скоростями и отделением головной части осуществляется в соответствии с достаточно полными алгоритмами, обеспечивающими требуемое рассеивание головной части, несмотря на существенные отклонения параметров движения ракеты от номинальных. В этом случае для формирования сигналов наведения и на отделение головной части необходимо большое число вычислительных операций, которые выполняются цифровой вычислительной машиной: бортовой — в инерциальной системе или наземной — в радиокомандной системе. Нетрудно заметить, что для обеспечения заданного рассеивания головной части менее совершенный объект управления (с нерегулируемой тягой) требует применения более совершенной системы наведения, использующей цифровую вычислительную машину.

### **Инерциальные системы управления ракет с регулируемой тягой**

На основании анализа систем управления различных баллистических ракет<sup>1</sup> можно представить себе некоторую типовую инерциальную систему наведения ракеты с регулируемой тягой. Как уже было отмечено, такая ракета не требует сложных алгоритмов управления, а потому ее система наведения не содержит сложных вычислительных устройств.

Основу системы наведения составляет гиростабилизированная платформа (ГСП), которая сохраняет в полете на активном участке траектории направления осей начальной стартовой системы координат.

#### **Программа управления**

При полете ракеты на активном участке траектории измеряются три проекции кажущейся скорости центра масс ракеты и углы поворота связанных осей ракеты относительно осей инерциальной (начальной стартовой) системы координат, т. е. углы тангажа  $\varphi$ , рыскания  $\xi$  и крена  $\eta$ .

---

<sup>1</sup> См., например, книги [12], [13], [26], [27], [29], [30].



Для определения составляющих кажущейся скорости центра масс ракеты в качестве опорных направлений можно использовать: направление связанной оси  $Ox_1$ , совпадающее с продольной осью ракеты; направление оси  $Oy^*$ , совпадающее с опорным (программным) направлением связанной оси  $Oy_1$ ; направление оси  $Oz_0$ , совпадающее с нормалью к плоскости стрельбы  $Ox_0y_0$ , или направление связанной оси  $Oz_1$ .

Программы боковой скорости  $w_{z0}^*$ , углов рыскания и крена обычно принимаются нулевыми. Программу нормальной скорости проще всего также выбрать нулевой. Тогда траектория полета будет задаваться только двумя программами:  $w_{x1}^*$  и  $\varphi^*$ .

Программа изменения угла тангажа, заданная в виде зависимости от времени, отличается простотой своей приборной реализации. Возможны также и другие способы задания программы угла тангажа. Например, программа может быть задана в виде зависимости угла тангажа от проекции кажущейся скорости на продольную ось:  $\varphi^* = \varphi^*(w_{x1})$ . Реализация программы в этом случае осуществляется программным механизмом в соответствии с фактическим значением кажущейся скорости полета.

#### Система угловой стабилизации

Система угловой стабилизации поддерживает требуемую ориентацию ракеты, определяемую нулевыми значениями углов рыскания и крена и программным значением угла тангажа. Эта система имеет три канала: тангажа, рыскания и крена, построенные аналогично. Некоторые различия в работе этих каналов обусловлены их взаимодействием с соответствующими каналами системы наведения.

Особенностью каналов стабилизации рыскания и крена является дифференциальное отклонение рулей для создания момента крена, что означает использование одних и тех же рулевых приводов и органов управления для создания моментов рыскания и крена.

Так как ракета является динамически осесимметричной, канал стабилизации угла рыскания обычно имеет такую же структурную схему, как и канал стабилизации угла тангажа.

Блок-схема одного из каналов системы угловой стабилизации показана на рис. 1. 18. Рассмотрим уравнения звеньев, входящих в эту схему.

Гиростабилизированная платформа с датчиком углового расогласования являются практически безынерционным звеном, единственной характеристикой которого является передаточный коэффициент  $K_d$ , т. е.

$$u_\varepsilon = K_d \varepsilon, \quad (1.53)$$

где  $\varepsilon = \varphi^* - \varphi$ ;  $\varepsilon = \xi$ ;  $\varepsilon = \eta$  — для каналов тангажа, рыскания и крена соответственно.

Усилители, входящие в схему усилителя-преобразователя, а также преобразователи рода сигнала — модуляторы и демодуляторы, характеризуются очень малым динамическим запаздыванием, которым при анализе системы стабилизации можно пренебречь. Тогда

$$i_y = K_y u_y. \quad (1.54)$$

Гидравлический рулевой привод с учетом момента нагрузки характеризуется уравнением аperiodического звена

$$T_{p.п} \dot{\delta} + \delta = K_{p.п} i_y. \quad (1.55)$$

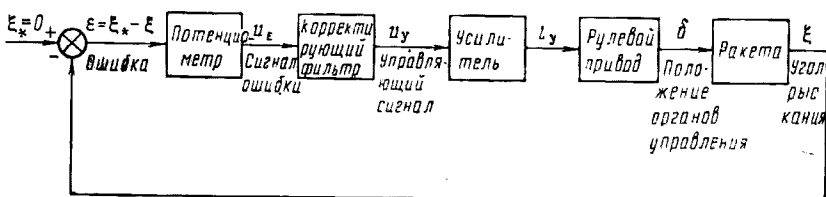


Рис. 1.18. Схема канала угловой стабилизации

Возможны и другие схемы приводов; им будут соответствовать иные уравнения.

Для коррекции динамических свойств системы могут применяться различные типы *RC*-фильтров. Уравнения однозвенного дифференцирующего и интегрирующего фильтров в общем виде могут быть записаны как

$$T_{\phi} \dot{u}_y + u_y = K_{\phi} (t_{\phi} \dot{u}_{\varepsilon} + u_{\varepsilon}). \quad (1.56)$$

Уравнения двухзвенного дифференцирующего и интегро-дифференцирующего фильтров имеют следующий общий вид:

$$T_{\phi}^2 \ddot{u}_y + 2\xi_{\tau} T_{\phi} \dot{u}_y + u_y = K_{\phi} (t_{\phi}^2 \ddot{u}_{\varepsilon} + 2\xi_{\phi} t_{\phi} \dot{u}_{\varepsilon} + u_{\varepsilon}). \quad (1.57)$$

Приведенные уравнения используются при выборе типа коррекции и основных параметров каждого из каналов системы угловой стабилизации. Однако при решении различных задач динамического проектирования ракеты можно отвлечься от переходных процессов стабилизации и рассматривать только установившиеся режимы стабилизации, используя следующие упрощенные уравнения:

рулевого привода

$$\delta = K_{p.п} i_y; \quad (1.58)$$

однозвенного дифференцирующего фильтра

$$u_y = K_{\phi} (t_{\phi} \dot{u}_{\varepsilon} + u_{\varepsilon}); \quad (1.59)$$



интегрирующего фильтра

$$u_y = \frac{K_\Phi}{T_\Phi} \left( \tau_\Phi u_\varepsilon + \int_0^t u_\varepsilon dt \right); \quad (1.60)$$

двухзвенного дифференцирующего фильтра

$$u_y = K_\Phi (\tau_\Phi^2 \ddot{u}_\varepsilon + 2\xi_\Phi \tau_\Phi \dot{u}_\varepsilon + u_\varepsilon); \quad (1.61)$$

интегро-дифференцирующего фильтра

$$u_y = \frac{K_\Phi}{2\xi_\tau T_\Phi} \left( \tau_\Phi^2 \dot{u}_\varepsilon + 2\xi_\Phi \tau_\Phi u_\varepsilon + \int_0^t u_\varepsilon dt \right). \quad (1.62)$$

Пользуясь уравнениями (1.58)—(1.62), можно составить для каждого из каналов системы стабилизации приближенное уравнение, связывающее отклонение органов управления с параметрами углового движения ракеты.

Для коррекции динамических свойств каналов стабилизации тангажа и рыскания обычно приходится либо использовать двухзвенный дифференцирующий, либо интегро-дифференцирующий фильтр. Тогда, например, для канала стабилизации угла тангажа имеем уравнения

$$\delta_\varphi = a_\varphi \Delta\varphi + a_{\dot{\varphi}} \dot{\Delta\varphi} + a_{\ddot{\varphi}} \ddot{\Delta\varphi}, \quad (1.63)$$

или

$$\delta_\varphi = a_\varphi \Delta\varphi + a_{\dot{\varphi}} \dot{\Delta\varphi} + a_{\int \varphi} \int \dot{\Delta\varphi} dt. \quad (1.64)$$

Аналогично записываются уравнения для канала стабилизации угла рыскания.

Для коррекции динамических свойств канала стабилизации угла крена достаточно применение однозвенного дифференцирующего фильтра. В этом случае получаем

$$\delta_\eta = a_\eta \eta + a_{\dot{\eta}} \dot{\eta}. \quad (1.65)$$

#### Система наведения

Канал регулирования кажущейся скорости (система РКС) предназначен для поддержания программного значения продольной составляющей кажущейся скорости путем форсирования или дросселирования основной двигательной установки. Регулирование скорости осуществляется с целью уменьшения разброса параметров движения центра масс ракеты, это необходимо для упрощения алгоритма выключения двигательной установки<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Система РКС может отсутствовать, если оказывается возможным обеспечить требуемую точность стрельбы без оснащения ракеты этой системой.

Регулирование продольной составляющей кажущейся скорости может осуществляться следующим образом (рис. 1.19). В систему РКС вводится, а затем воспроизводится на борту ракеты программа  $\omega_{x1}^*(t)$ . Эту функцию (запоминание и воспроизведение на борту ракеты программы) выполняет какое-либо программное устройство.

Измеритель скорости — гироскопический интегратор, установленный на корпусе ракеты так, что его ось чувствительности параллельна продольной оси ракеты, выдает на сравнивающее

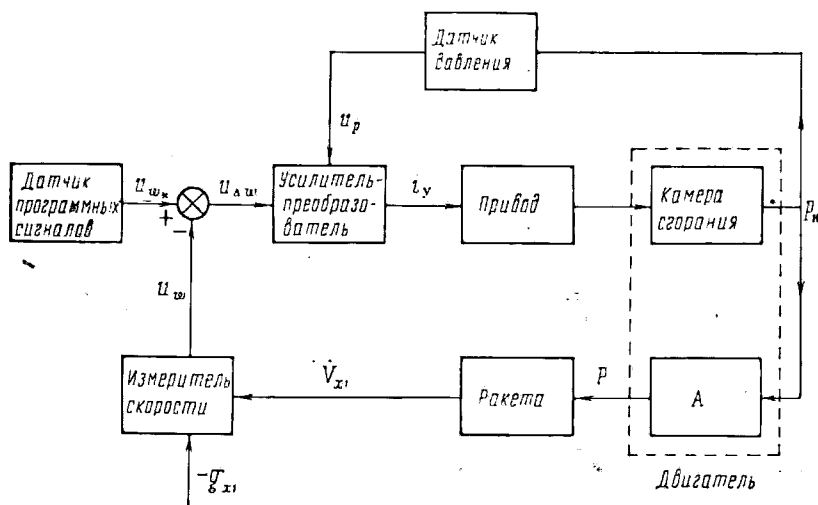


Рис. 1.19. Схема канала регулирования кажущейся скорости

устройство в виде соответствующего сигнала измеренное значение кажущейся скорости  $\omega_{x1}$ . На сравнивающее устройство поступает также сигнал программного значения кажущейся скорости  $\omega_{x1}^*$ . (Гироскопический интегратор и сравнивающее устройство могут быть объединены в один прибор — датчик рассогласования кажущейся скорости). Сигнал, пропорциональный рассогласованию, подается в усилитель-преобразователь, где он усиливается и преобразуется в сигнал управления исполнительным органом системы РКС. Исполнительным органом может быть, например, привод винта редуктора двигателя. Поворот винта редуктора изменяет секундный расход компонентов топлива в газогенераторе турбонасосного агрегата. В результате этого изменяется секундный расход топлива в камерах сгорания, что приводит к изменению давления в камерах сгорания и, следовательно, тяги двигательной установки.

Тяга возрастает, если фактическая скорость  $\omega_{x1}$  меньше программной  $\omega_{x1}^*$ , и наоборот. В результате получается замкнутая

автоматическая система РКС, в состав которой входит ракета как объект управления.

Для улучшения динамических свойств этой системы могут быть применены известные в теории автоматического управления способы коррекции: введение производных от сигнала ошибки  $\Delta\omega_{x1}$  в управляющий сигнал, использование внутренних обратных связей и т. п. Одним из возможных способов является введение внутренней обратной связи по давлению в камерах сгорания. В этом случае сигнал ошибки кажущейся скорости  $u_{\Delta\omega}$  суммируется с сигналом обратной связи по давлению в камерах сгорания (см. рис. 1. 19).

**Канал боковой стабилизации.** Канал управления боковой составляющей скорости выдерживает полет ракеты на активном участке траектории в заданной плоскости стрельбы. Это необходимо для того, чтобы возможно проще обеспечить требуемое направление по азимуту вектора скорости ракеты в момент выключения двигателя.

Канал управления боковой скоростью обеспечивает в течение активного полета ракеты с необходимой точностью нулевые значения боковой составляющей скорости и бокового сноса, т. е. отклонения центра масс ракеты от плоскости стрельбы. В соответствии с этой задачей рассматриваемый канал системы наведения называют обычно *каналом (или системой) боковой стабилизации (БС)*.

В инерциальной системе боковой стабилизации измерительный элемент (акселерометр или гироинтегратор) установлен на ракете таким образом, что его ось чувствительности направлена либо вдоль связанной оси  $Oz_1$  (при неподвижной относительно корпуса ракеты установке измерительного элемента), либо перпендикулярно плоскости стрельбы, т. е. вдоль начальной стартовой оси  $Oz_0$  (при установке измерительного элемента на ГСП). Инерциальная система боковой стабилизации обеспечивает, таким образом, в течение активного полета ракеты с достаточной точностью нулевые значения боковой составляющей кажущейся скорости  $\omega_z$  и интеграла по времени от этой скорости  $s_z = \int_0^t \omega_z(\tau) d\tau$ , т. е. кажущегося пути в боковом направлении.

Сигнал, пропорциональный кажущемуся пути в боковом направлении  $s_z$ , получают двукратным интегрированием сигнала акселерометра или однократным интегрированием сигнала гироинтегратора. Интегрирование может осуществляться с помощью интеграторов различного типа, например электролитического интегратора или интегрирующего RC-контура.

Задача выбора типа коррекции и основных параметров контура боковой стабилизации решается исходя из условий обеспе-



чения заданной точности наведения, характеризуемой величиной бокового сноса, и требуемых динамических свойств контура, характеризующихся качеством переходного процесса. В инерциальной системе боковой стабилизации для коррекции динамических свойств системы используется сигнал, пропорциональный боковой составляющей кажущейся скорости. В этом случае отклонение органов управления описывается приближенным уравнением

$$\delta_z = a_z z + a_{\dot{z}} \dot{z}, \quad (1.66)$$

в котором принято:  $\dot{z} \approx w_z$ ;  $z \approx s_z$ .

Канал нормальной стабилизации системы наведения ракеты, как и канал боковой стабилизации, состоит из двух контуров: контура нормальной стабилизации и контура стабилизации угла тангажа. Он работает аналогично инерциальному каналу боковой стабилизации. Различие состоит только в том, что программные значения угла тангажа не нулевые. Угол тангажа  $\varphi^*(t)$ , соответствующий полету по номинальной траектории, задается программным механизмом и реализуется контуром стабилизации угла тангажа.

Программное изменение угла тангажа приводит к соответствующему изменению нормальной составляющей скорости. В связи с этим в простейших системах наведения управление нормальной скоростью движения центра масс было заменено управлением угловым положением ракеты по тангажу. Однако контроля угла тангажа в некоторых случаях недостаточно для обеспечения малого рассеивания параметров движения центра масс ракеты в плоскости стрельбы. Управление нормальной составляющей скорости в дополнение к управлению углом тангажа позволяет уменьшить указанное рассеивание.

В наиболее простом случае управление нормальной скоростью сводится к стабилизации нулевых значений нормальной составляющей кажущейся скорости  $w_{y1}$  (по связанной оси  $Oy_1$  или по программному направлению этой оси) и интеграла по времени от этой скорости

$$s_y = \int_0^t w_y(\tau) d\tau.$$

Информация, необходимая для нормальной стабилизации, поступает от инерциального измерительного элемента — акселерометра или гиросинтезатора.

Если измерительный элемент системы нормальной стабилизации установлен на ГСП, то с помощью программного механизма угла тангажа он разворачивается в течение полета так, что его ось чувствительности всегда перпендикулярна к программному направлению продольной оси ракеты.

Уравнение отклонения органов управления ракеты для установившегося процесса нормальной стабилизации имеет вид

$$\delta_y = a_y s_y + a_y w_y. \quad (1.67)$$

Автомат управления отделением головной части. Рассматриваемая здесь инерциальная система наведения, в состав которой входят каналы боковой и нормальной стабилизации и канал регулирования кажущейся скорости, обеспечивает достаточно малое рассеивание всех координат и составляющих скорости центра масс ракеты и тем самым позволяет упростить автомат управления отделением головной части. Этот автомат содержит измерители кажущейся скорости ракеты, установленные на ГСП, — акселерометры или гироскопы, ориентированные соответствующим образом. Информация измерителей о проекциях кажущейся скорости и кажущегося пути поступает в вычислительное устройство для выработки сигнала на выключение двигательной установки и отделение головной части.

Алгоритм управления, соответствующие методические и инструментальные ошибки и их влияние на рассеивание головных частей рассмотрены в гл. V.

### **Инерциальные системы управления ракет с нерегулируемой тягой**

Представим себе некоторую типовую инерциальную систему управления с бортовой ЦВМ для ракеты с нерегулируемой тягой, для чего учтем схемы системы управления различных ракет. Такая система управления, естественно, состоит из систем наведения и стабилизации.

Система стабилизации получает информацию, необходимую для формирования управляющего сигнала, поступающего в рулевой привод, от системы наведения и от измерителей параметров движения ракеты: углов тангажа, рыскания и крена, углов атаки, угловых скоростей, ускорений центра масс. Так, например, кроме обычных систем стабилизации с измерителями углов тангажа, рыскания и крена, могут использоваться системы стабилизации с датчиками угловых скоростей и линейных ускорений.

Система стабилизации является цифровой, т. е. управляющие сигналы вырабатываются цифровыми фильтрами, что позволяет существенно улучшить динамические свойства системы.

Аппаратура системы наведения состоит из инерциальной измерительной системы (системы навигации), определяющей скорости и координаты ракеты, и бортовой вычислительной машины, формирующей сигналы наведения и сигнал отсечки двигателя.

Инерциальная измерительная система конструктивно оформлена в едином узле, в который входят:

— трехстепенная гиросtabilизированная платформа с аналоговыми элементами контуров стабилизации;

— измерители параметров движения ракеты (датчики углов, ускорений или скоростей центра масс).

Выходные сигналы инерциальной измерительной системы в цифровой форме поступают в бортовую вычислительную машину, которая определяет составляющие скорости и координаты ракеты, решает уравнения наведения и выдает сигналы в цифровой форме в систему стабилизации, на отделение ступеней, отсечку двигателя и др.

Три акселерометра, установленные на ГСП, выполняют одновременно функции измерителей систем управления нормальной и боковой скоростями и автомата управления дальностью, а также функции измерителей системы стабилизации при соответствующем построении последней. По существу автомат управления дальностью как самостоятельный узел ликвидируется, отсутствуют специфические измерители нормальной и боковой скоростей и в результате количество измерителей доводится до трех.

При таком построении системы наведения комплект ее аппаратуры представляет собой достаточно универсальное устройство, позволяющее применять его на различных ракетах без существенных переделок.

## **1.9. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАКЕТЫ КАК ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

Прежде чем перейти к составлению математической модели управляемого полета ракеты, отметим специфические особенности ракеты как динамической системы.

Ракета вместе с системой управления образует замкнутую динамическую систему, процессы в которой (движение ракеты, упругие колебания ракеты и колебания жидкого топлива в баках, преобразования электрических сигналов, отклонения органов управления и др.) описываются сложной системой дифференциальных уравнений.

Можно рассматривать следующие составляющие движения ракеты:

- 1) движения центра масс;
- 2) движения вокруг центра масс;
- 3) упругие колебания корпуса (изгибные колебания в двух плоскостях, продольные и крутильные колебания);
- 4) колебания жидкого топлива в баках относительно корпуса ракеты при наличии свободных поверхностей топлива.

Считать ракету абсолютно твердой можно лишь в первом приближении. В общем же случае изгибные колебания корпуса ракеты могут взаимодействовать с колебаниями в системе управления и с колебаниями жидкого топлива. Когда частоты колебаний достаточно близки друг к другу, при исследовании дви-



жения ракеты необходимо учитывать взаимосвязь соответствующих колебательных процессов.

Движение центра масс ракеты является неустановившимся, причем параметры ракеты и параметры ее движения весьма существенно изменяются в течение полета. Изменения параметров движения связаны с большим секундным расходом топлива и перемещением ракеты с переменной скоростью в атмосфере, плотность которой с высотой резко падает. В результате большого

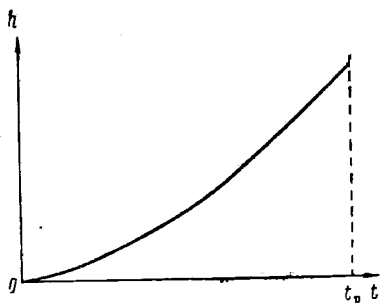


Рис. 1.20. Изменение высоты полета одноступенчатой ракеты

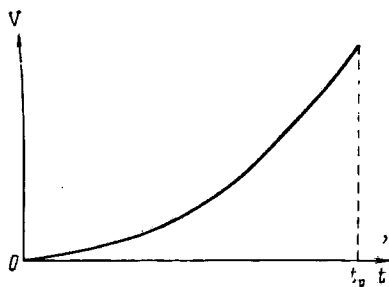


Рис. 1.21. Изменение скорости полета одноступенчатой ракеты

расхода топлива изменяются такие характеристики ракеты, как масса, моменты инерции и положение центра масс (см. рис. 1.13—1.14). Изменение высоты полета (рис. 1.20) и плотности атмосферы в сочетании с резким изменением скорости движения ракеты (рис. 1.21) приводят к весьма специфическому характеру изменения величины скоростного напора (рис. 1.22).

С изменением числа  $M$  изменяются и аэродинамические характеристики ракеты, в частности  $c_t$  — коэффициент тангенциальной силы,  $c_n^z$  — производная от коэффициента нормальной силы по углу атаки,  $\bar{x}_a$  — относительная координата центра давления (рис. 1.23). В связи с тем, что на последних секундах активного полета, как правило, двигательная установка переходит на режим малой тяги, на этом участке движения имеет место резкое изменение величины тяги и осевой перегрузки (рис. 1.24 и 1.25).

У многоступенчатых ракет, кроме указанных изменений непрерывного характера, имеют место также скачкообразные изменения параметров ракеты и параметров движения, связанные с отделением отработавшей ступени и началом работы двигательной установки следующей ступени (см. рис. 1.13 и 1.14). На рис. 1.26 для примера приведен график, иллюстрирующий характер изменения перегрузки для двухступенчатой ракеты.

Скачкообразные изменения параметров могут иметь место как в моменты времени разделения ступеней, так и в моменты отделения элементов конструкции ракеты, сбрасываемых после

выхода ее из плотных слоев атмосферы (обтекатель головной части, элементы хвостового отсека и др.). В результате изменения параметров ракеты и параметров ее движения в процессе

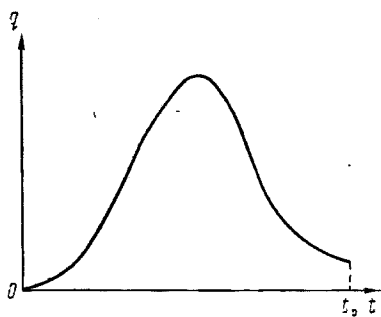


Рис. 1.22. Изменение скоростного напора при полете одноступенчатой ракеты

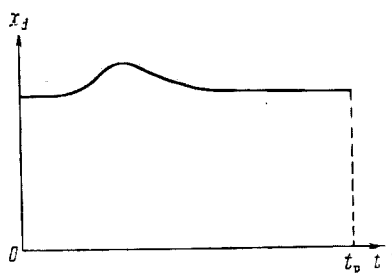


Рис. 1.23. Изменение положения центра давления одноступенчатой ракеты в процессе полета

полета существенно изменяются динамические свойства ракеты как объекта управления (эффективность органов управления, реакция ракеты на отклонение органов управления и др.).

Система дифференциальных уравнений, достаточно полно описывающая полет управляемой ракеты, имеет очень высокий порядок и является нелинейной стохастической системой уравнений. Рассмотрим кратко отмеченные особенности этих уравнений.

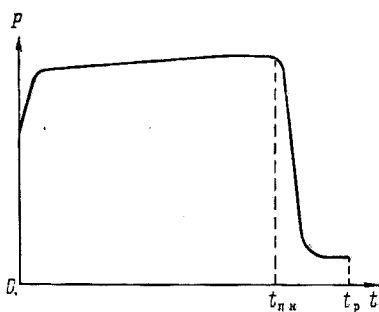


Рис. 1.24. Изменение тяги двигателя одноступенчатой ракеты во время полета

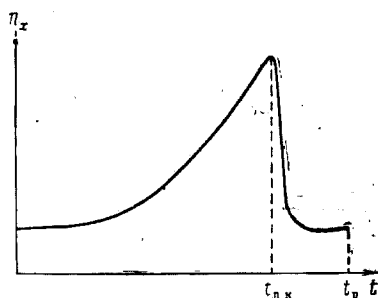


Рис. 1.25. Изменение осевой перегрузки одноступенчатой ракеты во время полета

Движение ракеты как абсолютно твердого тела, состоящее из движения центра масс и движения вокруг центра масс, характеризуется шестью степенями свободы и описывается соответственно системой дифференциальных уравнений 12-го порядка.

Упругие свойства конструкции ракеты и наличие свободных поверхностей жидкого топлива значительно повышают количество степеней свободы такой механической системы, как ракета. Многочисленные элементы системы управления, влияющие на движение ракеты, еще больше повышают число степеней свободы динамической системы, образуемой ракетой и аппаратурой управления.

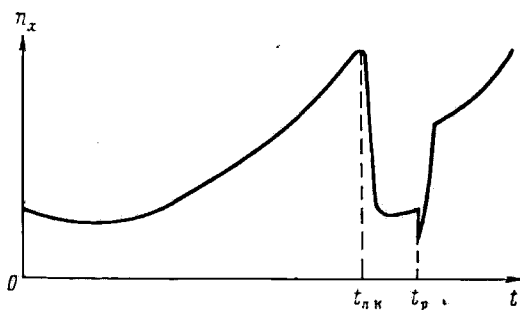


Рис. 1. 26. Изменение осевой перегрузки для двухступенчатой ракеты во время полета

Вообще говоря, все процессы в природе описываются нелинейными уравнениями, а линейные уравнения дают лишь модель процесса, более или менее соответствующую действительности. Так и уравнения движения ракеты являются в общем случае нелинейными. Среди многих нелинейных зависимостей в уравнениях движения ракеты можно указать, например, нелинейные зависимости аэродинамических сил и моментов от параметров движения, ограничения отклонений органов управления, характеристики с насыщением и зонами нечувствительности элементов системы управления и др.

Стохастический характер дифференциальных уравнений обусловлен воздействием на процесс полета ракеты многочисленных случайных возмущений.



## ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

При выводе уравнений движения баллистической ракеты предполагается, что ракета является абсолютно жестким телом, т. е. не учитываются упругость ракеты и наличие жидкого топлива в баках.

### 2.1. ВЕКТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Движение ракеты можно рассматривать как сумму поступательного движения, определяемого движением центра масс ракеты, и вращения ракеты около этой точки как неподвижной.

Движение центра масс ракеты определяется уравнением

$$m \frac{d\vec{V}_a}{dt} = \vec{F} + \vec{P}, \quad (2.1)$$

где  $m = m(t)$  — масса ракеты;

$\vec{V}_a$  — вектор абсолютной скорости центра масс ракеты, т. е. скорости относительно инерциальной системы координат;

$\vec{F}$  — главный вектор всех внешних сил, приложенных к ракете;

$\vec{P}$  — главный вектор реактивных сил.

Абсолютное ускорение  $\vec{j}_a = d\vec{V}_a/dt$  можно представить в виде

$$\vec{j}_a = \vec{j} + \vec{j}_e + \vec{j}_c, \quad (2.2)$$

где  $\vec{j}$  — относительное ускорение;

$\vec{j}_e$  — переносное ускорение;

$\vec{j}_c$  — кориолисово ускорение.

Следовательно, уравнение движения центра масс ракеты относительно некоторой подвижной системы координат будет иметь вид

$$m\vec{j} = \vec{F} + \vec{P} + (-m\vec{j}_e) + (-m\vec{j}_c), \quad (2.3)$$

где  $(-m\vec{j}_e)$  и  $(-m\vec{j}_c)$  — соответственно переносная и кориолисова силы инерции.

Пусть, например, рассматривается движение ракеты в системе координат, вращающейся вместе с Землей с угловой скоростью  $\bar{\omega}_3$ . Начало  $O$  этой системы координат расположено в центре Земли; оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в плоскости экватора; ось  $Oz$  совпадает с осью вращения Земли. Относительным ускорением  $\bar{j}$  будет тогда ускорение центра масс ракеты относительно Земли. Так как

$$\bar{j}_e = \bar{j}_0 + \frac{d\bar{\omega}_3}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \bar{r}), \quad (2.4)$$

причем  $\bar{j}_0 = 0$  и  $d\bar{\omega}_3/dt = 0$ , то переносное ускорение

$$\bar{j}_e = \bar{\omega}_3 \times (\bar{\omega}_3 \times \bar{r}). \quad (2.5)$$

Кориолисово ускорение, возникающее за счет вращения Земли при наличии относительной скорости  $\bar{V}$ , определяется зависимостью

$$\bar{j}_c = 2(\bar{\omega}_3 \times \bar{V}). \quad (2.6)$$

Формулы (2.5) и (2.6) сохраняют свой вид для любой системы координат, связанной с Землей.

Уравнение движения центра масс ракеты в системе координат, вращающейся вместе с Землей, если учесть, что  $\bar{j} = d\bar{V}/dt$ , можно переписать в следующем виде:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} + \bar{P} - m\bar{j}_e - m\bar{j}_c. \quad (2.7)$$

Рассмотрим теперь произвольную подвижную систему координат с началом в центре масс ракеты. Пусть  $\bar{\Omega}$  — угловая скорость вращения осей этой системы относительно земных осей. Тогда

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d'\bar{V}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{V}, \quad (2.8)$$

где  $\frac{d'\bar{V}}{dt}$  — локальная производная вектора  $\bar{V}$  по времени, характеризующая скорость изменения вектора в рассматриваемой подвижной системе координат.

Таким образом, векторное уравнение движения центра масс ракеты может быть записано в виде

$$m \left( \frac{d'\bar{V}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{V} \right) = \bar{F} + \bar{P} - m\bar{j}_e - m\bar{j}_c. \quad (2.9)$$

Вращение ракеты относительно ее центра масс определяется уравнением (1.41), записываемым в виде

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \sum \bar{M}, \quad (2.10)$$

где  $\bar{K}$  — главный момент количества движения ракеты, или кинетический момент;

$\Sigma \bar{M}$  — главный момент всех внешних сил относительно центра масс ракеты (в том числе и реактивных).

При определении главного момента количества движения обычно вращением Земли пренебрегают, рассматривая земные оси как инерциальные.

Согласно теореме о локальной производной

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d'\bar{K}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{K}, \quad (2.11)$$

где  $\frac{d'\bar{K}}{dt}$  — локальная производная вектора  $\bar{K}$ .

Тогда

$$\frac{d'\bar{K}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{K} = \Sigma \bar{M}. \quad (2.12)$$

Проектируя уравнения (2.9) и (2.12) на различные оси координат, можно получить различные формы скалярных уравнений движения ракеты. Эти же уравнения можно использовать и для составления уравнений движения головной части.

Положение центра масс объекта — ракеты или головной части — в векторной форме определяется радиусом-вектором  $\bar{r}$ , проведенным из начала рассматриваемой системы координат в центр масс объекта.

Кинематическое уравнение движения центра масс объекта в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}, \quad (2.13)$$

где  $\bar{V}$  — вектор скорости объекта относительно рассматриваемой системы координат.

Ориентация объекта в пространстве относительно выбранной системы координат определяется тремя эйлеровыми углами:  $\chi$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ . Кинематическое уравнение вращательного движения объекта связывает угловые скорости  $\dot{\chi}$ ,  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\mu}$  с угловой скоростью объекта  $\bar{\omega}$ :

$$\dot{\chi} + \dot{\lambda} + \dot{\mu} = \bar{\omega}. \quad (2.14)$$

Проектируя уравнения (2.13) и (2.14) на выбранные оси координат, можно получить скалярные кинематические уравнения.

При решении задач баллистики и динамики ракеты и ее головной части могут использоваться различные системы координат. Во многих случаях удачный выбор системы координат зна-



чительно упрощает исследование. Для изучения полета обычно применяются декартовы прямоугольные правые системы координат и соответствующие им сферические системы координат.

## 2.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ В ПРОЕКЦИЯХ НА ЗЕМНЫЕ ОСИ КООРДИНАТ

Исследование полета ракеты может быть значительно упрощено за счет удачного выбора системы координат. Практически всегда оказывается наиболее целесообразным получать уравнения вращательного движения объекта проектированием соответствующего векторного уравнения на связанные с объектом оси. Однако выбор системы координат для составления скалярных уравнений движения центра масс объекта во многом зависит от рассматриваемой задачи. Так, например, при исследовании управляемого движения ракеты на активном участке траектории целесообразно рассматривать движение относительно земных осей.

### Системы координат

#### Земная система координат

Оси этой системы  $Ox_3 y_3 z_3$  (рис. 2.1) неподвижно связаны с Землей и участвуют в ее суточном вращении. Сокращенно их называют *земными осями*.

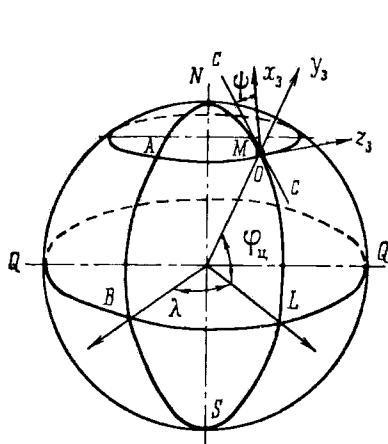


Рис. 2.1. Земная система осей координат:

$M$ —точка старта;  $NABS$ —начальный (Гринвичский) меридиан;  $NMLS$ —местный меридиан;  $\varphi_n$ —геоцентрическая широта точки  $M$ ;  $\lambda$ —долгота точки  $M$ ;  $cs$ —касательная к местному меридиану в точке  $M$ ;  $\psi$ —азимут запуска

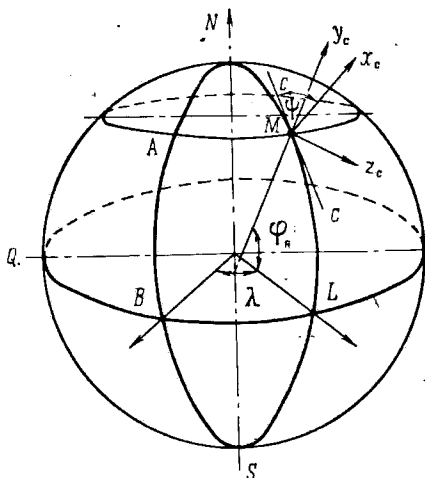


Рис. 2.2. Стартовая система осей координат:

$M$ —точка старта;  $NABS$ —начальный (Гринвичский) меридиан;  $NMLS$ —местный меридиан;  $\varphi_n$ —астрономическая широта точки  $M$ ;  $\lambda$ —долгота точки  $M$ ;  $cs$ —касательная к местному меридиану в точке  $M$ ;  $\psi$ —азимут запуска

Начало координат  $O$  находится в точке старта; ось  $Oy_3$  направлена по радиусу-вектору, проведенному из центра общего земного эллипсоида через точку старта; ось  $Ox_3$  образует с плоскостью местного меридиана угол  $\psi$ , называемый *азимутом запуска*; ось  $Oz_3$  направляется так, чтобы система координат была правой.

### Стартовая система координат

Стартовая система координат  $Ox_c y_c z_c$  (рис. 2.2) также связана с Землей и вращается вместе с ней. Начало координат расположено в точке старта; ось  $Oy_c$  направлена вверх по линии отвеса, т. е. противоположно направлению силы тяжести; ось  $Ox_c$  образует с плоскостью местного меридиана угол азимута запуска  $\psi$ ; ось  $Oz_c$  соответствует правой системе координат.

На старте связанные оси ракеты ориентируются по осям стартовой системы (рис. 2.3). Продольная ось ракеты  $Ox_1$  совмещается с осью  $Oy_c$ ; поперечная ось  $Oy_1$  направляется в сторону, противоположную оси  $Ox_c$ ; ось  $Oz_1$  направляется по оси  $Oz_c$ .

### Начальная стартовая система осей координат

Оси начальной стартовой системы координат  $Ox_0 y_0 z_0$  в момент пуска совпадают с осями стартовой системы. В дальнейшем оси начальной стартовой системы не изменяют своего первоначального направления относительно инерциального пространства, а оси стартовой системы, жестко связанные с Землей, поворачиваются за время  $t$  на угол  $\omega_3 t$  вокруг оси вращения Земли. Начальная стартовая система координат является инерциальной системой координат.

### Матрицы направляющих косинусов

Косинусы углов между осями связанной и начальной стартовой систем координат

Ориентация ракеты относительно начальной стартовой системы координат определяется тремя углами между связанной  $Ox_1 y_1 z_1$  и начальной стартовой  $Ox_0 y_0 z_0$  системами координат (рис. 2.4):

*углом рыскания*  $\xi$  — между проекцией продольной оси ракеты  $Ox_1$  на плоскость  $Ox_0 z_0$  и осью  $Ox_0$ ;

*углом тангажа*  $\varphi$  — между продольной осью ракеты  $Ox_1$  и плоскостью  $Ox_0 z_0$ ;

*углом крена*  $\eta$  — между поперечной осью  $Oy_1$  и плоскостью, проходящей через оси  $Ox_1$  и  $Oy_0$ .

Косинусы углов между осями связанной и начальной стартовой систем координат приводятся в табл. 2.1.

Таблица 2.1

| Осн    | $Ox_0$                                                        | $Oy_0$                    | $Oz_0$                                                       |
|--------|---------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $Ox_1$ | $\cos \xi \cos \varphi$                                       | $\sin \varphi$            | $-\sin \xi \cos \varphi$                                     |
| $Oy_1$ | $-\cos \xi \sin \varphi \cos \eta +$<br>$+\sin \xi \sin \eta$ | $\cos \varphi \cos \eta$  | $\cos \xi \sin \eta +$<br>$+\sin \xi \sin \varphi \cos \eta$ |
| $Oz_1$ | $\cos \xi \sin \varphi \sin \eta +$<br>$+\sin \xi \cos \eta$  | $-\cos \varphi \sin \eta$ | $\cos \xi \cos \eta -$<br>$-\sin \xi \sin \varphi \sin \eta$ |

Найдем косинусы углов между осями начальной стартовой и связанной систем координат. Для этого через центр масс ракеты — начало связанной системы координат, проведем оси  $Ox_0y_0z_0$ , параллельные осям начальной стартовой системы координат. Повернем эту систему на угол  $\xi$  вокруг оси  $Oy_0$  так, чтобы плоскость  $Ox'y'$  прошла через ось  $Ox_1$ . Обозначим полученную систему через  $Ox'y'z'$ .

Формулы преобразования координат удобно записывать в матричной форме. Обозначая матрицу-столбец с элементами  $x', y', z'$  через  $[\bar{x}']$ , т. е.

$$[\bar{x}'] = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

а с элементами  $x_0, y_0, z_0$  через  $[\bar{x}_0]$ , получим следующую формулу перехода от системы  $Ox_0y_0z_0$  к системе  $Ox'y'z'$ :

$$[\bar{x}'] = \Gamma_{\xi} [\bar{x}_0], \quad (2.15)$$

где матрица  $\Gamma_{\xi}$  перехода от системы координат  $Ox_0y_0z_0$  к системе  $Ox'y'z'$  имеет вид

$$\Gamma_{\xi} = \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 & -\sin \xi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \xi & 0 & \cos \xi \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Повернем систему  $Ox'y'z'$  вокруг оси  $Oz'$  на угол  $\varphi$  так, чтобы ось  $Ox''$  совпала с осью  $Ox_1$ ; полученную систему обозначим через  $Ox''y''z''$ . Соответствующая формула преобразования координат при повороте осей на угол  $\varphi$  будет иметь вид

$$[\bar{x}''] = \Gamma_{\varphi} [\bar{x}'], \quad (2.17)$$



где

$$\Gamma_{\varphi} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Поворотом вокруг оси  $Ox''$  на угол  $\eta$  совместим оси  $Oy'''$  и  $Oz'''$  с осями  $Oy_1$  и  $Oz_1$ . Переход от системы  $Ox''y''z''$  к системе  $Ox_1y_1z_1$  осуществится посредством формулы

$$[\bar{x}_1] = \Gamma_{\eta} [\bar{x}''], \quad (2.19)$$

где

$$\Gamma_{\eta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \eta & \sin \eta \\ 0 & -\sin \eta & \cos \eta \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

Подставляя выражения (2.15) и (2.17) в зависимость (2.19), получим матричное уравнение перехода от начальных стартовых осей к связанным:

$$[\bar{x}_1] = \Gamma_{\eta} \Gamma_{\varphi} \Gamma_{\xi} [\bar{x}_0] = \Gamma [\bar{x}_0], \quad (2.21)$$

в котором матрица  $\Gamma$  представляет собой таблицу направляющих косинусов, т. е. косинусов углов между осями начальной стартовой и связанной систем координат (см. табл. 2.1):

$$\Gamma = \begin{vmatrix} \cos \xi \cos \varphi & \sin \varphi & -\sin \xi \cos \varphi \\ \sin \xi \sin \eta - \cos \xi \sin \varphi \cos \eta & \cos \varphi \cos \eta \cos \xi \sin \eta + \sin \xi \sin \varphi \cos \eta & \sin \xi \cos \eta + \cos \xi \sin \varphi \sin \eta \\ \sin \xi \cos \eta + \cos \xi \sin \varphi \sin \eta & -\cos \varphi \sin \eta \cos \xi \cos \eta - \sin \xi \sin \varphi \sin \eta & \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

Косинусы углов между осями начальной стартовой и стартовой систем координат

В момент пуска ракеты начальная стартовая система координат  $Ox_0y_0z_0$  и стартовая система координат  $Ox_cy_cz_c$  совпадают. Во время полета ракеты стартовая система координат повернется вместе с Землей относительно своего первоначального положения на угол  $\omega_3 t$ , где  $t$  — время полета ракеты (рис. 2.5).

Чтобы осуществить переход от вращающейся стартовой системы координат к начальной стартовой, проведем пять последовательных поворотов вспомогательной системы координат, совпадающей сначала со стартовой системой. Первый поворот этой системы произведем вокруг оси  $Oy_c$  на угол  $\psi$  так, чтобы

азимут оси  $Ox'$  стал равным нулю. Полученную систему  $Ox'y'z'$  повернем вокруг оси  $Oz'$  на угол  $\varphi_r$  так, чтобы ось  $Ox''$  стала параллельной оси вращения Земли, а ось  $Oy''$  — параллельной плоскости экватора. Теперь можем осуществить поворот на угол  $\omega_3 t$ . Для этого повернем новую систему  $Ox''y''z''$  вокруг оси  $Ox''$  на угол  $\omega_3 t$  так, чтобы плоскость  $Ox''y''$  проходила через ось

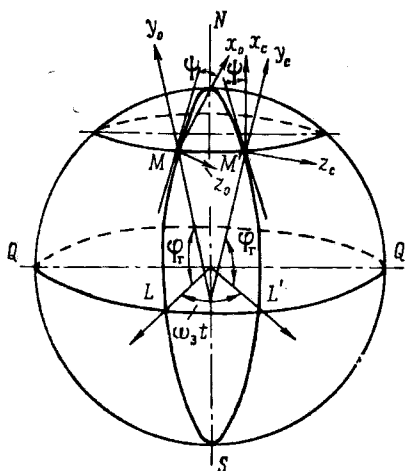


Рис. 2.5. Переход от начальной стартовой системы к стартовой системе осей координат

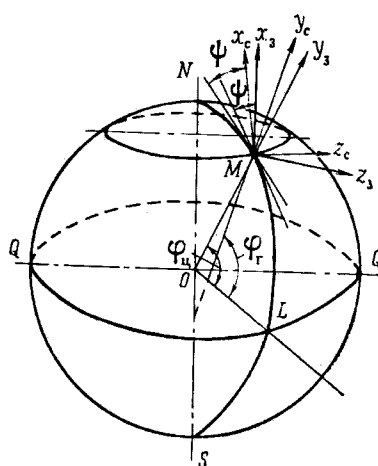


Рис. 2.6. Ориентация земных осей относительно стартовых осей координат

$Oy_0$ . Далее повернем систему  $Ox'''y'''z'''$  вокруг оси  $Oz'''$  на угол  $-\varphi_r$  так, чтобы ось  $Oy^{IV}$  совпала с осью  $Oy_0$ . Поворотом на угол азимута  $\psi$  вокруг оси  $Oy^{IV}$  совместим систему  $Ox^{IV}y^{IV}z^{IV}$  с начальной стартовой системой  $Ox_0y_0z_0$ .

Проведенные преобразования систем координат описываются матричным уравнением

$$[\bar{x}_0] = \Delta [\bar{x}_c], \quad (2.23)$$

в котором матрица перехода  $\Delta$  имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.24)$$

а коэффициенты матрицы

$$\delta_{11} = \cos^2 \psi \cos^2 \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) + \cos \omega_3 t;$$

$$\delta_{21} = -\cos \psi \sin \varphi_r \cos \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) - \sin \psi \cos \varphi_r \sin \omega_3 t;$$

$$\delta_{31} = -\sin \psi \cos \psi \cos^2 \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) - \sin \varphi_r \sin \omega_3 t;$$

$$\begin{aligned}
\delta_{12} &= \cos \psi \sin \varphi_r \cos \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) + \sin \psi \cos \varphi_r \sin \omega_3 t; \\
\delta_{22} &= \sin^2 \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) + \cos \omega_3 t; \\
\delta_{32} &= -\sin \psi \sin \varphi_r \cos \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) + \cos \psi \cos \varphi_r \sin \omega_3 t; \\
\delta_{31} &= -\sin \psi \cos \psi \cos^2 \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) + \sin \varphi_r \sin \omega_3 t; \\
\delta_{32} &= -\sin \psi \sin \varphi_r \cos \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) - \cos \psi \cos \varphi_r \sin \omega_3 t; \\
\delta_{33} &= \sin^2 \psi \cos^2 \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) + \cos \omega_3 t.
\end{aligned}$$

Косинусы углов между осями стартовой и земной систем координат

Переход от стартовой  $Ox_c y_c z_c$  к земной  $Ox_3 y_3 z_3$  систем координат можно осуществить следующим образом (рис. 2.6). Повернем систему осей, совпадающую вначале со стартовой системой  $Ox_c y_c z_c$ , вокруг оси  $Oy_c$  на угол  $\psi$  так, чтобы азимут оси  $Ox'$  стал равным нулю. Далее повернем систему  $Ox'y'z'$  вокруг оси  $Oz'$  на угол  $\gamma = \varphi_r - \varphi_n$  так, чтобы ось  $Oy''$  совпала с осью  $Oy_3$ . Поворотом вокруг оси  $Oy_3$  на угол  $\psi$  в обратном направлении совместим промежуточную систему  $Ox''y''z''$  с земной системой  $Ox_3 y_3 z_3$ .

Матричное уравнение перехода имеет вид

$$[\bar{x}_c] = E[\bar{x}_3], \quad (2.25)$$

где

$$E = \begin{vmatrix} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos \gamma & -\cos \psi \sin \gamma & \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \gamma) \\ \cos \psi \sin \gamma & \cos \gamma & -\sin \psi \sin \gamma \\ \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \gamma) & \sin \psi \sin \gamma & \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos \gamma \end{vmatrix}. \quad (2.26)$$

Косинусы углов между осями начальной стартовой и земной систем координат

Матрицу  $B$  перехода от земной системы координат к начальной стартовой системе координат можно найти перемножением полученных выше матриц перехода от стартовой к начальной стартовой системе координат ( $\Delta$ ) и от земной к стартовой системе координат ( $E$ ). В результате получим

$$[\bar{x}_0] = \Delta[\bar{x}_c] = \Delta E[\bar{x}_3] = B[\bar{x}_3], \quad (2.27)$$

где

$$B = \Delta E = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.28)$$



а коэффициенты матрицы:

$$\beta_{11} = \cos^2 \psi \cos \varphi_r \cos \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) + (\cos^2 \psi \cos \gamma + \sin^2 \psi) \cos \omega_3 t + \\ + \sin \psi \cos \psi (\sin \varphi_r - \sin \varphi_n) \sin \omega_3 t;$$

$$\beta_{21} = \cos \psi \sin \varphi_r \cos \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) + \cos \psi \sin \gamma \cos \omega_3 t - \\ - \sin \psi \cos \varphi_r \sin \omega_3 t;$$

$$\beta_{31} = -\cos \psi \sin \psi \cos \varphi_r (1 - \cos \omega_3 t) \cos \varphi_n + \cos \psi \sin \psi (1 - \cos \gamma) \times \\ \times \cos \omega_3 t - (\cos^2 \psi \sin \varphi_n + \sin^2 \psi \sin \varphi_r) \sin \omega_3 t;$$

$$\beta_{12} = \cos \psi \cos \varphi_r \sin \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) - \cos \psi \sin \gamma \cos \omega_3 t + \\ + \sin \psi \cos \varphi_n \sin \omega_3 t;$$

$$\beta_{22} = \sin \varphi_r \sin \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) + \cos \gamma \cos \omega_3 t;$$

$$\beta_{32} = -\sin \psi \cos \varphi_r \sin \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) + \sin \psi \sin \gamma \cos \omega_3 t + \\ + \cos \psi \cos \varphi_n \sin \omega_3 t;$$

$$\beta_{13} = -\sin \psi \cos \psi \cos \varphi_r \cos \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) + \\ + \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \gamma) \cos \omega_3 t + (\sin^2 \psi \sin \varphi_n + \cos^2 \psi \sin \varphi_r) \sin \omega_3 t;$$

$$\beta_{23} = -\sin \psi \sin \varphi_r \cos \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) - \sin \psi \sin \gamma \cos \omega_3 t - \\ - \cos \psi \cos \varphi_r \sin \omega_3 t;$$

$$\beta_{33} = \sin^2 \psi \cos \varphi_r \cos \varphi_n (1 - \cos \omega_3 t) + (\sin^2 \psi \cos \gamma + \cos^2 \psi) \cos \omega_3 t + \\ + \sin \psi \cos \psi (\sin \varphi_n - \sin \varphi_r) \sin \omega_3 t.$$

Косинусы углов между осями связанной и земной систем координат

Матрицу перехода от земной к связанной системе координат можно найти перемножением матриц  $\Gamma$  и  $B$ . В результате получим

$$[\bar{x}_1] = \Gamma [\bar{x}_0] = \Gamma B [\bar{x}_3] = A [\bar{x}_3], \quad (2.29)$$

где

$$A = \Gamma B = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad (2.30)$$

а коэффициенты матрицы:

$$\alpha_{11} = \beta_{11} \cos \varphi \cos \xi + \beta_{21} \sin \varphi - \beta_{31} \sin \xi \cos \varphi;$$

$$\alpha_{21} = \beta_{11} (-\cos \xi \sin \varphi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta) + \beta_{21} \cos \varphi \cos \eta +$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_{31}(\sin \varphi \cos \eta \sin \xi + \cos \xi \sin \eta); \\
\alpha_{31} &= \beta_{11}(\cos \xi \sin \varphi \sin \eta + \sin \xi \cos \eta) - \beta_{21} \cos \varphi \sin \eta + \\
& +\beta_{31}(-\sin \xi \sin \varphi \sin \eta + \cos \xi \cos \eta); \\
\alpha_{12} &= \beta_{12} \cos \varphi \cos \xi + \beta_{22} \sin \varphi - \beta_{32} \sin \xi \cos \varphi; \\
\alpha_{22} &= \beta_{12}(-\cos \xi \sin \varphi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta) + \beta_{22} \cos \varphi \cos \eta + \\
& +\beta_{32}(\sin \varphi \cos \eta \sin \xi + \cos \xi \sin \eta); \\
\alpha_{32} &= \beta_{12}(\cos \xi \sin \varphi \sin \eta + \sin \xi \cos \eta) - \beta_{22} \cos \varphi \sin \eta + \\
& +\beta_{32}(-\sin \xi \sin \varphi \sin \eta + \cos \xi \cos \eta); \\
\alpha_{13} &= \beta_{13} \cos \varphi \cos \xi + \beta_{23} \sin \varphi - \beta_{33} \sin \xi \cos \varphi; \\
\alpha_{23} &= \beta_{13}(-\cos \xi \sin \varphi \cos \eta + \sin \xi \sin \eta) + \beta_{23} \cos \varphi \cos \eta + \\
& +\beta_{33}(\sin \varphi \cos \eta \sin \xi + \cos \xi \sin \eta); \\
\alpha_{33} &= \beta_{13}(\cos \xi \sin \varphi \sin \eta + \sin \xi \cos \eta) - \beta_{23} \cos \varphi \sin \eta + \\
& +\beta_{33}(-\sin \xi \sin \varphi \sin \eta + \cos \xi \cos \eta).
\end{aligned}$$

### Кинематические уравнения

Для исследования полета ракеты необходимо иметь кинематические уравнения, описывающие изменение угловых координат ракеты  $\varphi$ ,  $\xi$  и  $\eta$  в зависимости от проекций вектора угловой скорости ракеты на связанные оси  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$ .

Чтобы получить указанные уравнения, рассмотрим ранее приведенный рис. 2. 4, из которого следует, что вектор угловой скорости  $\bar{\omega}$  направлен по оси  $Oy_0$ , вектор  $\bar{\varphi}$  — по оси  $Oz'$ , а вектор  $\bar{\eta}$  — по оси  $Ox_1$ .

Вектор угловой скорости ракеты  $\bar{\omega}$  можно представить как сумму

$$\bar{\omega} = \bar{\xi} + \bar{\varphi} + \bar{\eta}. \quad (2.31)$$

Косинусы углов между векторами  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\eta}$  и связанными осями даны в табл. 2. 2. Пользуясь этой таблицей, получим, что проекции угловой скорости ракеты на связанные оси равны:

$$\left. \begin{aligned}
\omega_{x1} &= \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \sin \varphi; \\
\omega_{y1} &= \frac{d\xi}{dt} \cos \varphi \cos \eta + \frac{d\varphi}{dt} \sin \eta; \\
\omega_{z1} &= \frac{d\varphi}{dt} \cos \eta - \frac{d\xi}{dt} \cos \varphi \sin \eta.
\end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Кинематические уравнения движения центра масс объекта получаем, проектируя выражение (2.13) на земные оси:

$$\frac{dx_3}{dt} = V_{x3}; \quad \frac{dy_3}{dt} = V_{y3}; \quad \frac{dz_3}{dt} = V_{z3}. \quad (2.33)$$

Таблица 2.2

| Оси    | $\vec{\xi}$               | $\vec{\varphi}$ | $\vec{\eta}$ |
|--------|---------------------------|-----------------|--------------|
| $Ox_1$ | $\sin \varphi$            | 0               | 1            |
| $Oy_1$ | $\cos \varphi \cos \eta$  | $\sin \eta$     | 0            |
| $Oz_1$ | $-\cos \varphi \sin \eta$ | $\cos \eta$     | 0            |

### Разложение сил и моментов по осям координат

Найдем составляющие по осям координат сил и моментов, действующих на ракету, учитывая, что уравнения движения центра масс ракеты спроектированы на земные оси координат, а уравнения вращательного движения — на связанные оси.

Для определения составляющих сил тяги и аэродинамических сил необходимо знать высоту полета, а для определения составляющих силы притяжения — геоцентрическую широту в зависимости от координат ракеты в земных осях  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$ . Приведем соответствующие формулы.

Предварительно разложим на составляющие по земным осям радиус-вектор  $\vec{r}$  центра масс ракеты относительно центра Земли. Пусть  $\vec{x}_3$ ,  $\vec{y}_3$  и  $\vec{z}_3$  — единичные векторы земных осей (рис. 2.7). Тогда

$$\vec{r} = x_3 \vec{x}_3 + (R_0 + y_3) \vec{y}_3 + z_3 \vec{z}_3, \quad (2.34)$$

где  $R_0$  — расстояние от центра Земли до точки старта, определяемое по формуле

$$R_0 = a \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \varphi_{ц0}}}; \quad (2.35)$$

$e$  — эксцентриситет меридианного сечения общего земного эллипсоида;

$\varphi_{ц0}$  — геоцентрическая широта точки старта, которую можно определить, зная геодезическую широту, по формуле

$$\varphi_{ц0} = \varphi_{г0} - \gamma \approx \varphi_{г0} - \alpha \sin 2 \varphi_{г0}. \quad (2.36)$$

Высота полета определяется зависимостью

$$h = r - R, \quad (2.37)$$



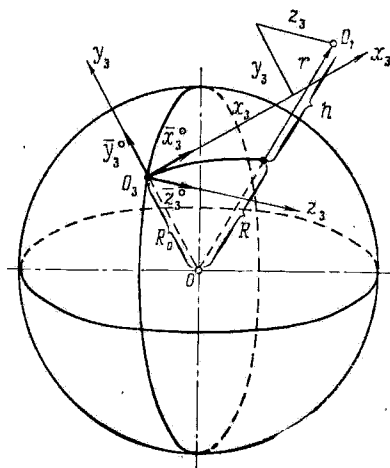


Рис. 2.7. Координаты центра масс ракеты в земных осях и высота полета

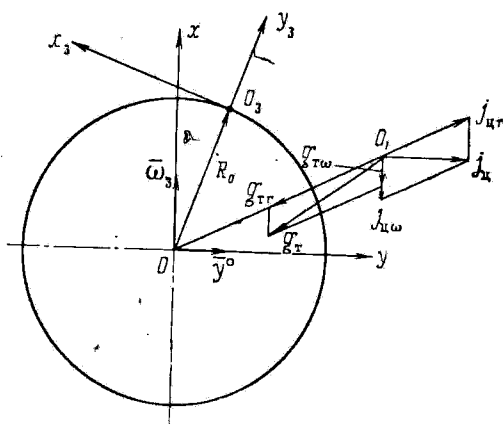


Рис. 2.8. Разложение ускорения земного притяжения и центробежного ускорения на составляющие по направлению к центру Земли и по оси вращения Земли

где  $r$  — расстояние от центра Земли до ракеты, равное

$$r = \sqrt{x^2 + (R_0 + y)^2 + z^2}; \quad (2.38)$$

$R$  — расстояние вдоль радиуса-вектора  $\vec{r}$  от центра Земли до ее поверхности, равное

$$R = a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi_{\text{ц}}}} \approx a (1 - \alpha \sin^2 \varphi_{\text{ц}}). \quad (2.39)$$

Геоцентрическая широта точки пространства, в которой находится ракета, определяется при заданных координатах этой точки в земной системе координат формулой

$$\sin \varphi_{\text{ц}} = \frac{x_3}{r} \cos \psi \cos \varphi_{\text{ц}0} + \frac{R_0 + y_3}{r} \sin \varphi_{\text{ц}0} - \frac{z_3}{r} \sin \psi \cos \varphi_{\text{ц}0}. \quad (2.40)$$

При разложении силы притяжения Земли по земным осям будем рассматривать две составляющие ускорения силы земного притяжения:  $\vec{g}_{\tau r}$  — направленную к центру Земли и  $\vec{g}_{\tau \omega}$  — направленную параллельно оси вращения Земли. Выражения для их величин были даны выше [см. формулы (1.13) и (1.14)].

Объединив центробежное ускорение  $\vec{j}_{\text{ц}} = -\vec{j}_e$  с ускорением земного притяжения  $\vec{g}_{\tau}$ , получим ускорение силы тяжести

$$\vec{g} = \vec{g}_{\tau} + \vec{j}_{\text{ц}}. \quad (2.41)$$

Учитывая, что центробежное ускорение

$$\vec{j}_{\text{ц}} = -\vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}) = \vec{y}^0 \omega_3^2 r \cos \varphi_{\text{ц}}, \quad (2.42)$$

где  $\vec{y}^0$  — единичный вектор геоцентрической оси  $Oy$  (рис. 2.8), разложим центробежное ускорение, как и ускорение земного притяжения, на две составляющие — по радиусу  $\vec{r}$  и по оси вращения Земли (см. рис. 2.8):

$$\left. \begin{aligned} \vec{j}_{\text{ц}r} &= \omega_3^2 r; \\ \vec{j}_{\text{ц}\omega} &= \omega_3^2 r \sin \varphi_{\text{ц}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Тогда составляющие ускорения силы тяжести будут равны:

$$\left. \begin{aligned} g_r &= g_{\tau r} - \omega_3^2 r, \\ g_{\omega} &= g_{\tau \omega} + \omega_3^2 r \sin \varphi_{\text{ц}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.44) \quad \begin{array}{l} \text{см. стр. 28} \\ (1.15) \\ (1.16) \end{array}$$

Косинусы углов между этими составляющими ускорения силы тяжести и земными осями приведены в табл. 2.3.

Проекции силы тяжести на земные оси определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} G_{x_3} &= -mg_r \frac{x_3}{r} - mg_\omega \frac{\omega_3 x_3}{\omega_3}; \\ G_{y_3} &= -mg_r \frac{R_0 + y_3}{r} - mg_\omega \frac{\omega_3 y_3}{\omega_3}; \\ G_{z_3} &= -mg_r \frac{z_3}{r} - mg_\omega \frac{\omega_3 z_3}{\omega_3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Таблица 2.3

| Оси                   | $Ox_3$                           | $Oy_3$                           | $Oz_3$                           |
|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $\overline{g_r}$      | $-\frac{x_3}{r}$                 | $-\frac{R_0 + y_3}{r}$           | $-\frac{z_3}{r}$                 |
| $\overline{g_\omega}$ | $-\frac{\omega_3 x_3}{\omega_3}$ | $-\frac{\omega_3 y_3}{\omega_3}$ | $-\frac{\omega_3 z_3}{\omega_3}$ |

Чтобы определить составляющие кориолисова ускорения, предварительно разложим на составляющие по земным осям вектор угловой скорости Земли  $\omega_3$ . Сначала разложим его на две составляющие в плоскости меридиана (рис. 2.9): на вертикальную

$$\omega_{3y_3} = \omega_3 \sin \varphi_{п0}$$

и горизонтальную

$$\omega_{3.r} = \omega_3 \cos \varphi_{п0}.$$

Горизонтальная составляющая в свою очередь может быть разложена по осям  $Ox_3$  и  $Oz_3$  на составляющие:

$$\omega_{3x_3} = \omega_3 \cos \varphi_{п0} \cos \psi;$$

$$\omega_{3z_3} = -\omega_3 \cos \varphi_{п0} \sin \psi.$$

Таким образом, вектор  $\overline{\omega_3}$  может быть представлен в виде

$$\overline{\omega_3} = \omega_3 (\cos \varphi_{п0} \cos \psi \overline{x_3} + \sin \varphi_{п0} \overline{y_3} - \cos \varphi_{п0} \sin \psi \overline{z_3}). \quad (2.46)$$

Используя выражения (2.6), (2.34) и (2.46), найдем разложение кориолисова ускорения

$$\overline{j_c} = 2 (\overline{\omega_3} \times \overline{V}) = 2 \begin{vmatrix} \overline{x_3}^\circ & \overline{y_3}^\circ & \overline{z_3}^\circ \\ \omega_{3x_3} & \omega_{3y_3} & \omega_{3z_3} \\ V_{x_3} & V_{y_3} & V_{z_3} \end{vmatrix} \quad (2.47)$$



по земным осям. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} -j_{cx_3} &= b_{12}V_{y_3} + b_{13}V_{z_3}; \\ -j_{cy_3} &= b_{21}V_{x_3} + b_{23}V_{z_3}; \\ -j_{cz_3} &= b_{31}V_{x_3} + b_{32}V_{y_3}, \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

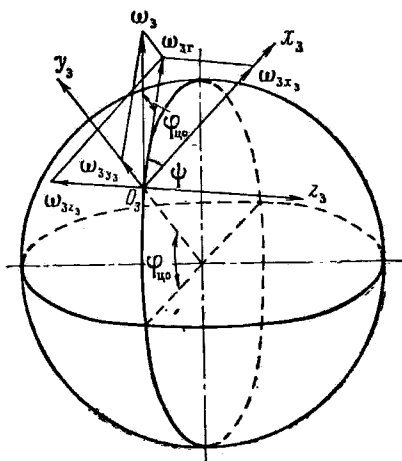


Рис. 2.9. Разложение угловой скорости вращения Земли на составляющие по земным осям координат

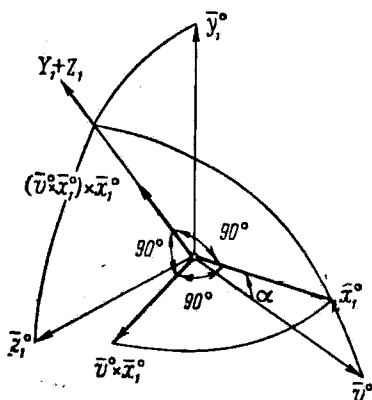


Рис. 2.10. К определению направления аэродинамической поперечной силы  $\bar{N}_1 = \bar{Y}_1 + \bar{Z}_1$

где

$$\left. \begin{aligned} b_{12} &= -b_{21} = -2\omega_3 \cos \varphi_{n0} \sin \psi; \\ b_{13} &= -b_{31} = -2\omega_3 \sin \varphi_{n0}; \\ b_{23} &= b_{32} = 2\omega_3 \cos \varphi_{n0} \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Для определения проекций на земные оси силы  $\bar{N}$ , т. е. равнодействующей силы тяги, аэродинамических сил и сил, создаваемых органами управления, разложим сначала эти силы по связанным осям, а затем, пользуясь матрицей косинусов углов между осями связанной и земной системами координат, найдем искомые проекции сил. Так, если составляющие рассматриваемых сил по связанным осям представить в виде сумм:

$$\left. \begin{aligned} N_{x1} &= P_{x1} + T_{x1} + X_1; \\ N_{y1} &= T_{y1} + Y_1; \\ N_{z1} &= T_{z1} + Z_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

то суммы проекций на земные оси силы тяги, аэродинамических сил и сил, создаваемых органами управления, определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} N_{x3} &= N_{x1}a_{11} + N_{y1}a_{21} + N_{z1}a_{31}; \\ N_{y3} &= N_{x1}a_{12} + N_{y1}a_{22} + N_{z1}a_{32}; \\ N_{z3} &= N_{x1}a_{13} + N_{y1}a_{23} + N_{z1}a_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Остается найти выражения для нормальной и поперечной составляющих аэродинамической силы  $\bar{Y}_1$  и  $\bar{Z}_1$ .

Равнодействующая этих сил  $(\bar{Y}_1 + \bar{Z}_1)$  перпендикулярна продольной оси ракеты и лежит в плоскости угла атаки, проходящей через вектор скорости и эту ось. Введем единичные векторы:  $\bar{x}_1$ , направленный по продольной оси  $Ox_1$ , и  $\bar{v}^\circ$ , направленный по вектору скорости, и запишем в векторной форме направление силы  $(\bar{Y}_1 + \bar{Z}_1)$ . Эта сила перпендикулярна векторам  $\bar{x}_1$  и  $\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1$  и, следовательно, совпадает по направлению с вектором  $(\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1) \times \bar{x}_1$  (рис. 2.10).

Модуль векторного произведения  $\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1$  равен  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Модуль вектора  $(\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1) \times \bar{x}_1$  также равен  $\alpha$ , так как векторы  $\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1$  и  $\bar{x}_1$  взаимно перпендикулярны. Заметив это, представим поперечную силу следующим образом:

$$\bar{Y}_1 + \bar{Z}_1 = c_n^a q S [(\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1) \times \bar{x}_1]. \quad (2.52)$$

Чтобы определить составляющие вектора  $(\bar{Y}_1 + \bar{Z}_1)$  по связанным осям, воспользуемся равенством  $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 \times \bar{z}_1$  и преобразуем векторное произведение  $\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1$  к виду

$$\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1 = \bar{v}^\circ \times (\bar{y}_1 \times \bar{z}_1) = \bar{y}_1 (\bar{v}^\circ \bar{z}_1) - \bar{z}_1 (\bar{v}^\circ \bar{y}_1). \quad (2.53)$$

С учетом полученного выражения преобразуем двойное векторное произведение

$$\begin{aligned} (\bar{v}^\circ \times \bar{x}_1) \times \bar{x}_1 &= [\bar{y}_1 (\bar{v}^\circ \bar{z}_1) - \bar{z}_1 (\bar{v}^\circ \bar{y}_1)] \times \bar{x}_1 = \\ &= (\bar{v}^\circ \bar{z}_1) \bar{y}_1 \times \bar{x}_1 - (\bar{v}^\circ \bar{y}_1) \bar{z}_1 \times \bar{x}_1 = -(\bar{v}^\circ \bar{z}_1) \bar{z}_1 - (\bar{v}^\circ \bar{y}_1) \bar{y}_1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Тогда выражение (2.52) примет вид

$$\bar{Y}_1 + \bar{Z}_1 = -c_n^a q S (\bar{v}^\circ \bar{z}_1) \bar{z}_1 - c_n^a q S (\bar{v}^\circ \bar{y}_1) \bar{y}_1. \quad (2.55)$$

Следовательно, силы  $\bar{Y}_1$  и  $\bar{Z}_1$  определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_1 &= -c_n^a q S (\bar{v}^\circ \bar{y}_1) \bar{y}_1; \\ \bar{Z}_1 &= -c_n^a q S (\bar{v}^\circ \bar{z}_1) \bar{z}_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.56)$$

Скалярные произведения  $(\vec{v}^0 \vec{y}_1^0)$  и  $(\vec{v}^0 \vec{z}_1^0)$  можно рассматривать как значения углов атаки  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  в плоскостях  $Ox_1y_1$  и  $Ox_1z_1$ .

Как видно из рис. 2.11, в случае если углы  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$  малы, то

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v}^0 \vec{y}_1^0) &= \cos(\vec{v}^0, \vec{y}_1^0) \approx \cos(90^\circ + \alpha_y) = -\sin \alpha_y \approx -\alpha_y; \\ (\vec{v}^0 \vec{z}_1^0) &= \cos(\vec{v}^0, \vec{z}_1^0) \approx \sin \alpha_z \approx \alpha_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

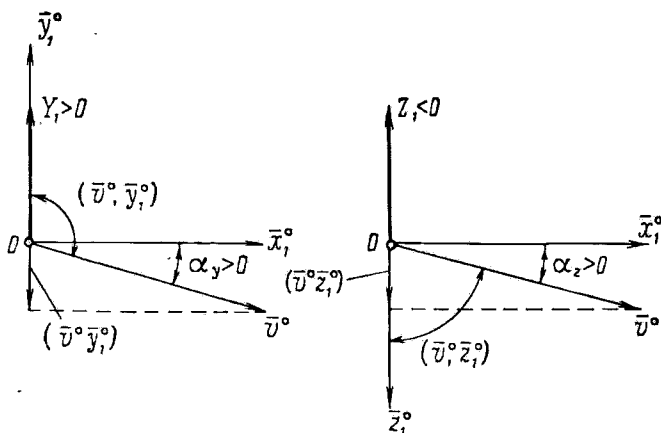


Рис. 2.11. К определению углов атаки  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$

Принимая во внимание формулу (2.56), получим следующие выражения для аэродинамических сил:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= c_n^z q S \alpha_y; \\ Z_1 &= -c_n^z q S \alpha_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Чтобы найти выражения углов  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$ , определим направление в пространстве вектора скорости  $\vec{V}$  центра масс ракеты. Для этого рассмотрим систему координат  $Ox_3 y_3 z_3$ , начало которой совмещено с центром масс ракеты, а оси направлены параллельно осям земной системы.

Направление вектора скорости  $\vec{V}$  относительно земных осей координат определим следующими двумя углами (рис. 2.12):

1) углом  $\sigma$  между проекцией вектора скорости  $\vec{V}$  на плоскость  $Ox_3 z_3$  и осью  $Ox_3$  и

2) углом  $\tau$  между вектором скорости  $\vec{V}$  и плоскостью  $Ox_3 z_3$ .

Проекции вектора скорости на земные оси равны:

$$\left. \begin{aligned} V_{x_3} &= V \cos \tau \cos \sigma; \\ V_{y_3} &= V \sin \tau; \\ V_{z_3} &= -V \cos \tau \sin \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Косинусы углов между вектором скорости  $\vec{V}$  и земными осями приведены в табл. 2. 4.

Таблица 2. 4

| Оси | $Ox_3$                  | $Oy_3$      | $Oz_3$                   |
|-----|-------------------------|-------------|--------------------------|
| $V$ | $\cos \tau \cos \sigma$ | $\sin \tau$ | $-\cos \tau \sin \sigma$ |

Зная косинусы углов между связанными и земными осями  $\alpha_{ij}$ , а также между вектором скорости и земными осями (см. табл. 2. 4), определим угол атаки  $\alpha_y$ :

$$\alpha_y = -(\vec{v}^0, \vec{y}_1) = -\cos(\vec{v}^0, \vec{x}_3) \cos(\vec{y}_1, \vec{x}_3) - \\ - \cos(\vec{v}^0, \vec{y}_3) \cos(\vec{y}_1, \vec{y}_3) - \cos(\vec{v}^0, \vec{z}_3) \cos(\vec{y}_1, \vec{z}_3),$$

или

$$\alpha_y = -\alpha_{21} \cos \tau \cos \sigma - \alpha_{22} \sin \tau + \alpha_{23} \cos \tau \sin \sigma. \quad (2. 60)$$

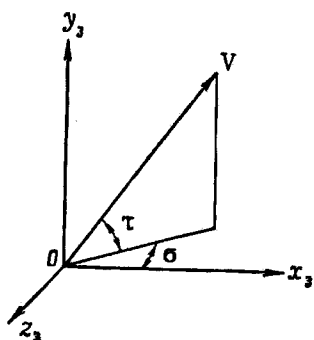


Рис 2. 12. Ориентация вектора скорости ракеты относительно земных осей координат

Аналогично найдем угол  $\alpha_z$ :

$$\alpha_z = \alpha_{31} \cos \tau \cos \sigma + \alpha_{32} \sin \tau - \alpha_{33} \cos \tau \sin \sigma. \quad (2. 61)$$

В этих выражениях углы  $\tau$  и  $\sigma$  определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \arcsin \frac{V_{y3}}{V} = \arcsin \frac{V_{y3}}{\sqrt{V_{x3}^2 + V_{y3}^2 + V_{z3}^2}}; \\ \sigma &= \arctg \left( -\frac{V_{z3}}{V_{x3}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2. 62)$$

вытекающими из соотношений (2. 59).



Определим теперь проекции моментов сил на связанные оси. Моменты нормальной и поперечной аэродинамических сил получим, используя выражение (2.58):

$$\left. \begin{aligned} M_{y1} &= -Z_1(x_T - x_d) = c_n^a q S (x_T - x_d) \alpha_z; \\ M_{z1} &= Y_1(x_T - x_d) = c_n^a q S (x_T - x_d) \alpha_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Поскольку осевая аэродинамическая сила и сила тяги основного двигателя направлены по продольной оси, проходящей через центр масс ракеты, моменты этих сил равны нулю. Аэродинамические демпфирующие моменты и управляющие моменты определяются соответственно формулам (1.28) и (1.46).

### Система уравнений движения

Спроектируем уравнение (2.9) на земные оси координат. Предварительно силы  $\bar{F} + \bar{P} - m\bar{j}_e$ , действующие на ракету, представим в виде

$$-m\bar{j}_e + \bar{F} + \bar{P} = \bar{N} + \bar{G}. \quad (2.64)$$

Здесь  $\bar{F} = \bar{R} + \bar{G}_T$  — результирующая полной аэродинамической силы и силы притяжения;

$\bar{P}$  — результирующая сил тяги основных двигателей, выхлопных патрубков ТНА и управляющих двигателей;

$\bar{G}$  — сила тяжести;

$\bar{N} = \bar{R} + \bar{P}$  — результирующая полной аэродинамической силы и сил тяги.

Уравнения движения центра масс ракеты в проекциях на земные оси будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV_{x3}}{dt} &= N_{x3} + G_{x3} - m j_{cx3}; \\ m \frac{dV_{y3}}{dt} &= N_{y3} + G_{y3} - m j_{cy3}; \\ m \frac{dV_{z3}}{dt} &= N_{z3} + G_{z3} - m j_{cz3}. \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

К этим уравнениям необходимо еще добавить три кинематических уравнения движения центра масс ракеты (2.33).

Уравнения вращательного движения ракеты вокруг центра масс (2.12) спроектируем на связанные с ракетой оси координат, вращающиеся относительно земных осей с угловой скоростью  $\omega$ . Пусть  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  — проекции угловой скорости ракеты  $\omega$  на связанные с нею оси. Проекции вектора кинетического момента  $K$  на эти оси соответственно равны  $J_{x1}\omega_{x1}$ ,  $J_{y1}\omega_{y1}$ ,  $J_{z1}\omega_{z1}$ .

Тогда, проектируя выражение (2.12) на связанные с ракетой оси, получим так называемые динамические уравнения Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} J_{x1} \frac{d\omega_{x1}}{dt} + (J_{z1} - J_{y1}) \omega_{y1} \omega_{z1} &= \sum M_{x1}; \\ J_{y1} \frac{d\omega_{y1}}{dt} + (J_{x1} - J_{z1}) \omega_{z1} \omega_{x1} &= \sum M_{y1}; \\ J_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} + (J_{y1} - J_{x1}) \omega_{x1} \omega_{y1} &= \sum M_{z1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

Соотношения между проекциями угловой скорости ракеты на связанные оси координат  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  и углами  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , определяющими ориентацию ракеты относительно начальных стартовых осей, определяются кинематическими уравнениями (2.32).

Система уравнений (2.32), (2.33), (2.65), (2.66) может использоваться для описания движения неуправляемой ракеты, но для управляемой ракеты она еще не замкнута. Дело в том, что неуправляемая ракета как твердое тело имеет шесть степеней свободы. Соответственно этому ее движение описывается системой 12-дифференциальных уравнений первого порядка (2.32), (2.33), (2.65), (2.66), которая является замкнутой, так как силы  $P$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$ , действующие на ракету, и их моменты  $M_{x1}$ ,  $M_{y1}$ ,  $M_{z1}$  относительно связанных осей однозначно определяются параметрами движения ракеты и число неизвестных функций

$$x_3, y_3, z_3, V_{x3}, V_{y3}, V_{z3}, \varphi, \xi, \eta, \omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1} \quad (2.67)$$

равно числу дифференциальных уравнений. При этом, если отсутствуют случайные возмущения, траектория полета полностью определяется начальными условиями — значениями кинематических параметров движения в начальный момент времени:

$$x_3(t_0), y_3(t_0), z_3(t_0), \dots, \omega_{z1}(t_0). \quad (2.68)$$

Управляемая ракета, если пренебречь ее упругостью и рассматривать ее как механическую систему, обладает в общем случае уже 12 степенями свободы: шесть степеней свободы для движения центра масс и вращения вокруг центра масс и шесть степеней свободы соответствующих органов управления. В частном случае, рассмотренном выше, в разд. 1.7, когда управляющие нормальные силы создаются вращением ракеты вокруг двух осей, ракета имеет четыре органа управления: органы управления вращательными движениями тангажа, рыскания и крена и тягой двигателя. Система из 12 дифференциальных уравнений (2.32), (2.33), (2.65), (2.66) при этом не является замкнутой, так как проекции сил и моментов, входящие в правые части уравнений, зависят от перемещений органов управления движениями тангажа  $\delta_\varphi$ , рыскания  $\delta_\eta$ , крена  $\delta_\xi$  и тягой двигателя  $\delta_P$ .

Если помимо начальных условий задать изменение во времени величин  $\delta_\varphi(t)$ ,  $\delta_\eta(t)$ ,  $\delta_\xi(t)$ ,  $\delta_P(t)$ , то тем самым будет определена траектория ракеты. В реальном полете перемещения органов управления осуществляются системой управления в зависимости от выполняемой задачи полета. Чтобы задача определения траектории полета стала осуществимой, необходимо к системе уравнений движения ракеты (2.32), (2.33), (2.65), (2.66) добавить уравнения, описывающие процессы в системе управления и связывающие перемещения органов управления с параметрами движения ракеты. Эти уравнения могут иметь совершенно различный конкретный вид в зависимости от принципа работы и устройства системы управления.

В самом общем виде уравнения системы управления можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F_1[\delta_\varphi(t), x_3(t), y_3(t), z_3(t), \varphi(t), \xi(t), \eta(t)] &= 0; \\ F_2[\delta_\eta(t), x_3(t), y_3(t), z_3(t), \varphi(t), \xi(t), \eta(t)] &= 0; \\ F_3[\delta_\xi(t), x_3(t), y_3(t), z_3(t), \varphi(t), \xi(t), \eta(t)] &= 0; \\ F_4[\delta_P(t), x_3(t), y_3(t), z_3(t), \varphi(t), \xi(t), \eta(t)] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

где  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  и  $F_4$  — функционалы от функций, взятых в квадратных скобки.

Шестнадцать уравнений (2.32), (2.33), (2.65), (2.66), (2.69) составляют теперь замкнутую систему, определяющую 16 неизвестных функций:

$$x_3, y_3, z_3, V_{x3}, V_{y3}, V_{z3}, \omega_{x1}, \\ \omega_y, \omega_{z1}, \varphi, \xi, \eta, \delta_\varphi, \delta_\eta, \delta_\xi, \delta_P.$$

При этом траектория управляемого полета (решение системы) определяется заданием начальных условий и конкретных связей (2.69), накладываемых на движение ракеты системой управления.

### 2.3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ПРОЕКЦИЯХ НА ПОЛУСКОРОСТНЫЕ ОСИ КООРДИНАТ

Полученные выше общие уравнения движения в проекциях на земные оси в принципе могут быть использованы для решения любых технических задач. Однако всегда целесообразно в исследуемые уравнения вводить те или иные упрощения, сущность которых тесно связана с содержанием конкретной задачи. По этой причине часто оказывается удобным при исследовании динамики ракеты или головной части использовать уравнения движения в проекциях на полускоростные оси.

## Системы координат

### Геоцентрическая система координат

Эта система координат с началом в центре Земли и с осями, связанными с Землей, уже использовалась выше при изучении поля земного тяготения. Опорными плоскостями в рассматриваемой системе координат служат плоскости экватора и начального меридиана.

Положение центра масс ракеты при этом может определяться или тремя декартовыми координатами  $x, y, z$ , или, что более удобно, тремя сферическими координатами  $\lambda, \varphi, r$ . Долгота  $\lambda$  и геоцентрическая широта  $\varphi$  отсчитываются, как было показано выше, на рис. 1. 3. Координата  $r$  представляет собой расстояние от центра Земли до центра масс ракеты.

### Скоростная и полускоростная системы координат

В некоторых задачах динамики уравнения движения центра масс ракеты удобно записывать в проекциях на оси координат, связанные с вектором скорости  $\bar{V}$  ракеты. Начало координат  $O$  такой системы располагается в центре масс ракеты; ось  $Ox$  направлена по вектору скорости  $\bar{V}$ , т. е. по касательной к траектории в сторону полета; оси  $Oy$  и  $Oz$  лежат в плоскости, нормальной к траектории полета. При этом в динамике полета ось  $Oy$  выбирают как в плоскости симметрии объекта  $Ox_1y_1$ , так и в вертикальной плоскости. Первую систему координат будем называть скоростной, вторую — полускоростной.

### Местная географическая система координат

Начало этой системы координат  $Ox_r y_r z_r$  (рис. 2. 13) совпадает с центром масс объекта; ось  $Ox_r$  проведена параллельно касательной к траектории полета.

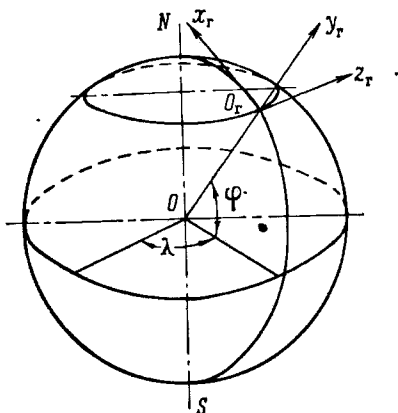


Рис. 2. 13. Местная географическая система координат



тельной к меридиану места в северном направлении; ось  $Oy_T$  направлена по радиусу-вектору  $\vec{r}$ ; ось  $Oz_T$  параллельна плоскости экватора.

## Полусвязанная система координат

Начало полусвязанной системы координат  $Ox'y'z'$  (рис. 2. 14) совпадает с центром масс объекта; ось  $Ox'$  направлена по про-

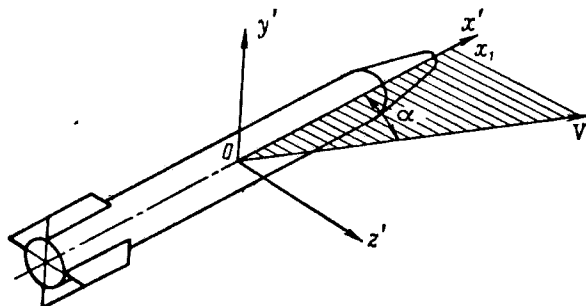


Рис. 2. 14. Полусвязанная система осей координат

дольной оси объекта в сторону носка; ось  $Oy'$  перпендикулярна плоскости, проходящей через вектор скорости и продольную ось объекта; ось  $Oz'$  дополняет систему до правой.

## Матрицы направляющих косинусов

Косинусы углов между осями связанной и полускоростной систем координат

Чтобы определить косинусы углов между этими осями координат, рассмотрим последовательные повороты полускоростной системы координат  $Oxyz$  до совмещения ее сначала с полусвязанной  $Ox'y'z'$ , а затем со связанной  $Ox_1y_1z_1$  системами координат (рис. 2. 15).

Переход от полускоростной системы координат  $Oxyz$  к полусвязанной  $Ox'y'z'$  можно осуществить двумя последовательными поворотами: сначала на угол  $\mu$  вокруг оси  $Ox$ , а затем на угол атаки  $\alpha$  вокруг оси  $Oy''$  в соответствии с рис. 2. 15.

Матрица направляющих косинусов, входящая в уравнение преобразования координат

$$[\bar{x}'] = Z [\bar{x}], \quad (2.70)$$

имеет вид

$$\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix} \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \mu & -\sin \alpha \cos \mu \\ 0 & \cos \mu & \sin \mu \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \mu & \cos \alpha \cos \mu \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Матрица перехода от полускоростной к связанной

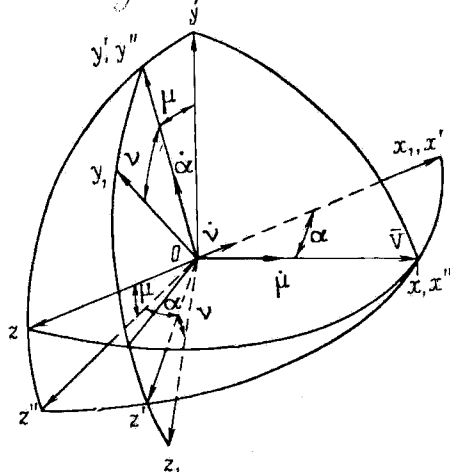


Рис. 2.15. Переход от полускоростной системы координат к связанной системе координат

Чтобы перейти от полускоростной системы координат к связанной, необходимо выполнить еще один поворот — повернуть полусвязанные оси координат  $Ox'y'z'$  на угол  $\nu$  вокруг оси  $Ox'$ .

В результате получаем следующее уравнение преобразования координат:

$$[\bar{x}_1] = \mathbf{H} [x], \quad (2.72)$$

где матрица направляющих косинусов  $\mathbf{H}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \sin \mu & -\sin \alpha \cos \mu \\ \sin \alpha \sin \nu & \cos \mu \cos \nu & \sin \mu \cos \nu \\ \sin \alpha \cos \nu & -\cos \mu \sin \nu & -\sin \mu \sin \nu \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Матрица перехода от полускоростной к связанной

Косинусы углов между осями полускоростной и местной географической систем координат

Произведем последовательные повороты местной географической системы координат  $Ox_T y_T z_T$  на углы  $\Psi$  и  $\Theta$  до совпадения направления ее осей с полускоростной системой координат  $Oxyz$  (рис. 2.16). В результате получаем:

$$[\bar{x}] = \Lambda [\bar{x}_T]; \quad (2.74)$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & \sin \Theta & -\sin \Psi \cos \Theta \\ -\cos \Psi \sin \Theta & \cos \Theta & \sin \Psi \sin \Theta \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{vmatrix}. \quad (2.75)$$

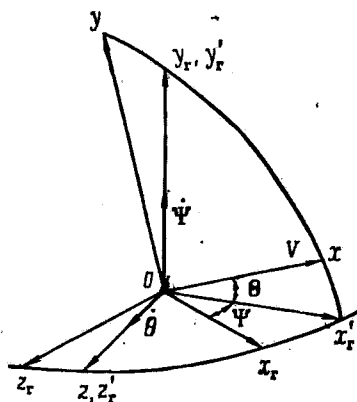


Рис. 2.16. Переход от местной географической системы координат к полускоростной системе координат

Формулы перехода от местной географической системы координат к полускоростной, а от последней к связанной и полусвязанной имеют вид

$$[\bar{x}'] = Z [\bar{x}] = Z \Lambda [\bar{x}_T]; \quad (2.76)$$

$$[\bar{x}_1] = H [\bar{x}] = H \Lambda [\bar{x}_T]. \quad (2.77)$$

### Уравнения движения

Для вывода скалярных уравнений движения центра масс объекта (ракеты или головной части) спроектируем векторное уравнение (2.9) на оси полускоростной системы координат

*Охуз.* При этом положение центра масс будем определять в геоцентрической сферической системе координат геоцентрической широтой  $\varphi_{\text{ц}}$ , долготой  $\lambda$  и радиусом-вектором  $\bar{r}$ , проведенным из центра Земли в центр масс объекта.

Определим проекции относительного, переносного и кориолисова ускорения на оси полускоростной системы координат.

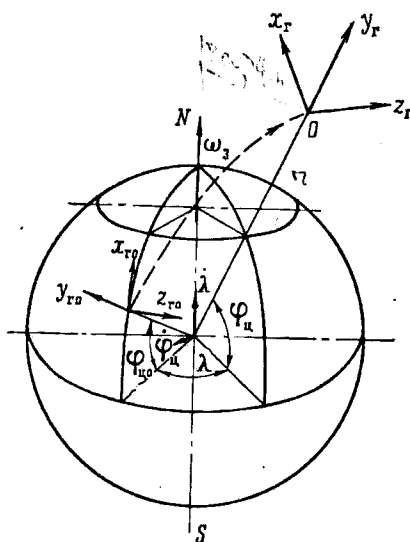


Рис. 2.17. Изменение ориентации местных географических осей при полете ракеты

Полускоростная система координат вращается относительно Земли с угловой скоростью  $\bar{\Omega}$ , которую представим в виде суммы угловых скоростей поворота полускоростных осей относительно географических и географических осей относительно некоторых земных осей. В качестве осей, связанных с Землей, удобно взять географические оси  $O_0x_{г0}y_{г0}z_{г0}$  в некоторый начальный момент полета, например в момент пуска ракеты или в момент отделения головной части от корпуса ракеты (рис. 2.17). В результате будем иметь (см. также рис. 2.16)

$$\bar{\Omega} = \bar{\Psi} + \bar{\Theta} + \bar{\lambda} + \bar{\varphi}_{\text{ц}}. \quad (2.78)$$

Найдем проекции вектора  $\bar{\Omega}$  на полускоростные оси. Сначала выразим угловые скорости  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{\varphi}_{\text{ц}}$  через проекции на оси географической системы координат (см. рис. 2.17)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &= \dot{\lambda} \left( \bar{x}_{\text{г}}^{\circ} \cos \varphi_{\text{ц}} + \bar{y}_{\text{г}}^{\circ} \sin \varphi_{\text{ц}} \right); \\ \bar{\varphi}_{\text{ц}} &= -\dot{\varphi}_{\text{ц}} \bar{z}_{\text{г}}^{\circ}, \end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

где  $\bar{x}_{\text{г}}^{\circ}$ ,  $\bar{y}_{\text{г}}^{\circ}$ ,  $\bar{z}_{\text{г}}^{\circ}$  — орты географических осей.

Чтобы выразить  $\bar{\lambda}$  и  $\bar{\varphi}_{\text{ц}}$  через проекции на полускоростные оси, используем формулу (2.74). Тогда получим:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \dot{\lambda} \left[ \bar{x}^{\circ} (\cos \varphi_{\text{ц}} \cos \Psi \cos \Theta + \sin \varphi_{\text{ц}} \sin \Theta) + \right. \\ &+ \bar{y}^{\circ} (-\cos \varphi_{\text{ц}} \cos \Psi \sin \Theta + \sin \varphi_{\text{ц}} \cos \Theta) + \bar{z}^{\circ} (\cos \varphi_{\text{ц}} \sin \Psi) \left. \right]; \quad (2.80) \\ \bar{\varphi}_{\text{ц}} &= -\dot{\varphi}_{\text{ц}} \left[ \bar{x}^{\circ} (-\sin \Psi \cos \Theta) + \bar{y}^{\circ} (\sin \Psi \sin \Theta) + \bar{z}^{\circ} \cos \Psi \right]. \end{aligned}$$

<sup>96</sup> где  $\bar{x}^{\circ}, \bar{y}^{\circ}, \bar{z}^{\circ}$  — орты полускоростной СК.



Векторы  $\bar{\Psi}$  и  $\bar{\Theta}$  выразим через проекции на полускоростные оси, используя рис. 2. 16:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi} &= \dot{\Psi} (\bar{x}^\circ \sin \Theta + \bar{y}^\circ \cos \Theta); \\ \bar{\Theta} &= \dot{\Theta} \bar{z}^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

Таким образом, проекции вектора  $\bar{\Omega}$  на полускоростные оси определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\lambda} (\cos \varphi_n \cos \Psi \cos \Theta + \sin \varphi_n \sin \Theta) + \\ &+ \dot{\varphi}_n \sin \Psi \cos \Theta + \dot{\Psi} \sin \Theta; \\ \Omega_y &= \dot{\lambda} (-\cos \varphi_n \cos \Psi \sin \Theta + \sin \varphi_n \cos \Theta) - \\ &- \dot{\varphi}_n \sin \Psi \sin \Theta + \dot{\Psi} \cos \Theta; \\ \Omega_z &= \dot{\lambda} \cos \varphi_n \sin \Psi - \dot{\varphi}_n \cos \Psi + \dot{\Theta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

Теперь можно найти проекции относительного ускорения. Учитывая, что

$$\bar{j} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d'\bar{V}}{dt} + \bar{\Omega} \times \bar{V} = \frac{d'\bar{V}}{dt} + \begin{vmatrix} \bar{x}^\circ & \bar{y}^\circ & \bar{z}^\circ \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}; \quad (2.83)$$

$$\frac{d'\bar{V}}{dt} = \dot{V} \bar{x}^\circ; \quad V_x = V; \quad V_y = V_z = 0,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{j}_x &= \dot{V}; \\ \bar{j}_y &= V \Omega_z = V (\dot{\lambda} \cos \varphi_n \sin \Psi - \dot{\varphi}_n \cos \Psi + \dot{\Theta}); \\ \bar{j}_z &= -V \Omega_y = -V [\dot{\lambda} (-\cos \varphi_n \cos \Psi \sin \Theta + \\ &+ \sin \varphi_n \cos \Theta) - \dot{\varphi}_n \sin \Psi \sin \Theta + \dot{\Psi} \cos \Theta]. \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Выразим угловые скорости  $\dot{\lambda}$  и  $\dot{\varphi}_n$  через скорость  $V$ . Для этого найдем проекции скорости  $V$  на географические оси  $x_r$  и  $z_r$  (см. рис. 2. 16):

$$\left. \begin{aligned} V_{x_r} &= V \cos \Theta \cos \Psi; \\ V_{z_r} &= -V \cos \Theta \sin \Psi. \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Разделив меридиальную составляющую скорости  $V_{\text{мт}}$  на радиус сферы  $r$ , а широтную  $V_{\text{зт}}$  на радиус малого круга  $r \cos \varphi_{\text{н}}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_{\text{н}} &= \frac{V}{r} \cos \Psi \cos \Theta; \\ \dot{\lambda} &= -\frac{V}{r} \frac{\sin \Psi \cos \Theta}{\cos \varphi_{\text{н}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Подставляя зависимость (2.86) в формулы (2.84), получим окончательные выражения для проекций ускорения объекта относительно Земли на полускоростные оси координат:

$$\begin{aligned} \bar{j}_x &= \dot{V}; \\ \bar{j}_y &= V \dot{\Theta} - \frac{V^2}{r} \cos \Theta; \\ \bar{j}_z &= -V \dot{\Psi} \cos \Theta + \frac{V^2}{r} \operatorname{tg} \varphi_{\text{н}} \sin \Psi \cos^2 \Theta. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Определим теперь проекции кориолисова ускорения на полускоростные оси. Как известно,

$$\bar{j}_c = 2 \bar{\omega}_3 \times \bar{V} = 2 \begin{vmatrix} \bar{x}^0 & \bar{y}^0 & \bar{z}^0 \\ \omega_{3x} & \omega_{3y} & \omega_{3z} \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.88)$$

Проекции угловой скорости Земли  $\bar{\omega}_3$  на полускоростные оси найдем, используя выражения (2.80), так как направление вектора  $\bar{\omega}_3$  совпадает с направлением  $\bar{\lambda}$  (см. рис. 2.17). Тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_3 &= \omega_3 [\bar{x}^0 (\cos \varphi_{\text{н}} \cos \Psi \cos \Theta + \sin \varphi_{\text{н}} \sin \Theta) + \\ &+ \bar{y}^0 (-\cos \varphi_{\text{н}} \cos \Psi \sin \Theta + \sin \varphi_{\text{н}} \cos \Theta) + \bar{z}^0 (\cos \varphi_{\text{н}} \sin \Psi)]. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Проекции кориолисова ускорения на полускоростные оси определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} j_{cx} &= 0; \\ j_{cy} &= 2V \omega_{3z} = 2V \omega_3 \cos \varphi_{\text{н}} \sin \Psi; \\ j_{cz} &= -2V \omega_{3y} = 2V \omega_3 (\cos \varphi_{\text{н}} \cos \Psi \sin \Theta - \sin \varphi_{\text{н}} \cos \Theta). \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

Определим проекции ускорения силы тяжести на полускоростные оси. Направляющие косинусы векторов  $\bar{g}_r$  и  $\bar{g}_{\omega}$  будут таки-

ми же, как и у векторов  $\bar{\Psi}$  и  $\bar{\omega}_3$  соответственно [см. формулы (2.81) и (2.89)], но с обратными знаками. Тогда получим: 9.8  
с.м. (2.91) стр. 8

$$\begin{aligned} g_x &= -g_r \sin \Theta - g_\omega (\cos \varphi_n \cos \Psi \cos \Theta + \sin \varphi_n \sin \Theta); \\ g_y &= -g_r \cos \Theta - g_\omega (-\cos \varphi_n \cos \Psi \sin \Theta + \sin \varphi_n \cos \Theta); \\ g_z &= -g_\omega \cos \varphi_n \sin \Psi. \end{aligned} \quad (2.91)$$

— Найдем теперь проекции полной аэродинамической силы  $\bar{R}$  на полускоростные оси. Разложим эту силу на составляющие по полусвязанным осям:

$$\bar{R} = -X_1(\bar{x}')^\circ - Z' \bar{z}'^\circ. \quad (2.92)$$

Используя теперь матрицу (2.71), получим:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -X_1 \cos \alpha - Z' \sin \alpha; \\ R_y &= (-X_1 \sin \alpha + Z' \cos \alpha) \sin \mu; \\ R_z &= (X_1 \sin \alpha - Z' \cos \alpha) \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

Лобовое сопротивление  $X$  и подъемная сила  $Y$  связаны с осевой силой  $X_1$  и поперечной силой  $Z'$  следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} -X &= -X_1 \cos \alpha - Z' \sin \alpha; \\ Y &= -X_1 \sin \alpha + Z' \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

которые получаются с помощью табл. 1.1, если учесть, что  $Z' = -Y_1$  при  $\mu = 0$ . Следовательно, имеем другой вариант проекций полной аэродинамической силы на полускоростные оси:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -X; \\ R_y &= Y \sin \mu; \\ R_z &= -Y \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

Проекции равнодействующей  $\bar{N}$  силы тяги, аэродинамических сил и сил, создаваемых органами управления, на полускоростные оси имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= (P_{x1} + T_{x1}) \eta_{11} + T_{y1} \eta_{21} + T_{z1} \eta_{31} - X; \\ N_y &= (P_{x1} + T_{x1}) \eta_{12} + T_{y1} \eta_{22} + T_{z1} \eta_{32} + Y \sin \mu; \\ N_z &= (P_{x1} + T_{x1}) \eta_{13} + T_{y1} \eta_{23} + T_{z1} \eta_{33} - Y \cos \mu, \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

где  $\eta_{ij}$  — элементы матрицы (2.73).

Таким образом, проекции всех членов векторного уравнения движения центра масс объекта (2.9) на полускоростные оси определяются формулами (2.87), (2.90), (2.91) и (2.96).

Динамические уравнения движения центра масс объекта в проекциях на полускоростные оси имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{N_x}{m} - g_r \sin \Theta - g_\omega (\cos \varphi_n \cos \Psi \cos \Theta + \sin \varphi_n \sin \Theta); \\
 \dot{\Theta} &= \frac{N_y}{mV} - \frac{g_r}{V} \cos \Theta - \frac{g_\omega}{V} (-\cos \varphi_n \cos \Psi \sin \Theta + \\
 &\quad + \sin \varphi_n \cos \Theta) + \frac{V}{r} \cos \Theta - 2\omega_3 \cos \varphi_n \sin \Psi; \\
 \dot{\Psi} &= -\frac{N_z}{mV \cos \Theta} + \frac{g_\omega \cos \varphi_n \sin \Psi}{V \cos \Theta} + \frac{V}{r} \operatorname{tg} \varphi_n \sin \Psi \cos \Theta + \\
 &\quad + 2\omega_3 (\cos \varphi_n \cos \Psi \operatorname{tg} \Theta - \sin \varphi_n).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

Эти уравнения следует дополнить кинематическими уравнениями движения центра масс объекта в геоцентрической сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\varphi}_n &= \frac{V}{r} \cos \Psi \cos \Theta; \\
 \dot{\lambda} &= -\frac{V}{r} \frac{\sin \Psi \cos \Theta}{\cos \varphi_n}; \\
 \dot{r} &= V \sin \Theta
 \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

и формулой для определения высоты полета  $h$ , от которой зависят аэродинамические силы:

$$h = r - a \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos \varphi_n}}. \quad (2.99)$$

Уравнения движения вокруг центра масс запишем в проекциях на связанные оси [см. формулу (2.67)]:

$$\left. \begin{aligned}
 J_{x1} \frac{d\omega_{x1}}{dt} + (J_{z1} - J_{y1}) \omega_{y1} \omega_{z1} &= \sum M_{x1}; \\
 J_{y1} \frac{d\omega_{y1}}{dt} + (J_{x1} - J_{z1}) \omega_{z1} \omega_{x1} &= \sum M_{y1}; \\
 J_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} + (J_{y1} - J_{x1}) \omega_{x1} \omega_{y1} &= \sum M_{z1}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.100)$$

Для проекций аэродинамического момента теперь вместо выражений (2.63) следует взять выражения:

$$\left. \begin{aligned}
 M_{y1} &= c_n^a q S a (x_\tau - x_d) \cos v; \\
 M_{z1} &= -c_n^a q S a (x_\tau - x_d) \sin v.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

Составим кинематические соотношения, связывающие производные по времени от углов  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $v$  с проекциями угловой скорости связанных осей  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$ .



Угловая скорость связанных осей  $\bar{\omega}$  складывается из угловой скорости  $\bar{\Omega}$  полускоростных осей относительно земных осей и угловой скорости  $\bar{\omega}'$  связанных осей относительно полускоростных осей:

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega} + \bar{\omega}'. \quad (2.102)$$

Угловую скорость  $\bar{\omega}'$  можно представить в виде суммы

$$\bar{\omega}' = \dot{\mu} + \dot{\alpha} + \dot{\nu}. \quad (2.103)$$

Проектируя вектор  $\bar{\omega}'$  на связанные оси, получим (см. рис. 2.15):

$$\left. \begin{aligned} \omega'_{x_1} &= \dot{\mu} \cos \alpha + \dot{\nu}; \\ \omega'_{y_1} &= \dot{\alpha} \cos \nu + \dot{\mu} \sin \alpha \sin \nu; \\ \omega'_{z_1} &= -\dot{\alpha} \sin \nu + \dot{\mu} \sin \alpha \cos \nu. \end{aligned} \right\} \quad (2.104) \quad \checkmark$$

Для определения проекций угловой скорости  $\bar{\Omega}$  на связанные оси используем ее проекции (2.82) на полускоростные оси и таблицу косинусов углов между полускоростными и связанными осями, записанную в виде матрицы (2.73)

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33} \end{vmatrix}. \quad (2.105)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \Omega_{x_1} &= \eta_{11}\Omega_x + \eta_{12}\Omega_y + \eta_{13}\Omega_z; \\ \Omega_{y_1} &= \eta_{21}\Omega_x + \eta_{22}\Omega_y + \eta_{23}\Omega_z; \\ \Omega_{z_1} &= \eta_{31}\Omega_x + \eta_{32}\Omega_y + \eta_{33}\Omega_z. \end{aligned} \quad (2.106) \quad \checkmark$$

Учитывая выражения (2.102), (2.104) и (2.106), найдем:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \eta_{11}\Omega_x + \eta_{12}\Omega_y + \eta_{13}\Omega_z + \dot{\nu} + \dot{\mu} \cos \alpha; \\ \omega_{y_1} &= \eta_{21}\Omega_x + \eta_{22}\Omega_y + \eta_{23}\Omega_z + \dot{\alpha} \cos \nu + \dot{\mu} \sin \alpha \sin \nu; \\ \omega_{z_1} &= \eta_{31}\Omega_x + \eta_{32}\Omega_y + \eta_{33}\Omega_z - \dot{\alpha} \sin \nu + \dot{\mu} \sin \alpha \cos \nu. \end{aligned} \quad (2.107) \quad \checkmark$$

Подставляя значения косинусов  $\eta_{ij}$  из матрицы (2.73) и решая уравнения (2.107) относительно  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\nu$ , получим:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \omega_{y_1} \cos \nu - \omega_{z_1} \sin \nu - \Omega_y \cos \mu - \Omega_z \sin \mu; \\ \dot{\mu} &= \omega_{y_1} \frac{\sin \nu}{\sin \alpha} + \omega_{z_1} \frac{\cos \nu}{\sin \alpha} - \Omega_x + \Omega_y \operatorname{ctg} \alpha \sin \mu - \\ &\quad - \Omega_z \operatorname{ctg} \alpha \cos \mu; \\ \dot{\nu} &= \omega_{x_1} - \omega_{y_1} \operatorname{ctg} \alpha \sin \nu - \omega_{z_1} \operatorname{ctg} \alpha \cos \nu - \Omega_y \frac{\sin \mu}{\sin \alpha} + \Omega_z \frac{\cos \mu}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (2.108) \quad \checkmark$$

В этих уравнениях значения  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  и  $\Omega_z$  определяются формулами (2.82).

Уравнения (2.97), (2.98), (2.100) и (2.108) составляют систему уравнений движения неуправляемого объекта. Для описания управляемого полета ракеты они должны быть дополнены уравнениями системы управления.

#### **2.4. ОСНОВНЫЕ УПРОЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ**

В зависимости от решаемой задачи полученные выше общие уравнения движения могут быть более или менее существенно упрощены. Так как выбор тех или иных упрощений неразрывно связан с конкретными условиями задачи, будем рассматривать упрощение уравнений движения в соответствующих разделах книги. Здесь ограничимся лишь некоторыми общими замечаниями и одним примером упрощений уравнений, используемых в баллистике.

##### **Учет участка траектории**

В первую очередь при составлении уравнений движения приходится учитывать, какой участок траектории рассматривается.

На активном участке траектории движение ракеты должно рассматриваться с учетом управления. Так как нас интересует полет ракеты относительно Земли, а система управления ракетой является обычно инерциальной, приходится рассматривать движение центра масс в земных осях координат, а ориентацию ракеты — в инерциальных, т. е. начальных стартовых осях. Это обстоятельство приводит к возможности использования более или менее упрощенных уравнений, основанных на общих уравнениях, рассмотренных в разд. 2.2.

При рассмотрении движения на участке свободного полета за пределами атмосферы исследование траектории облегчается отсутствием силы тяги, аэродинамических сил и сил, создаваемых органами управления, а также моментов всех этих сил. Однако вследствие большой дальности, высоты и скорости полета приходится учитывать изменение ускорения земного притяжения и влияние вращения Земли.

На участке снижения головной части в атмосфере большую роль играют аэродинамические силы и моменты. Поскольку полет на этом участке является неуправляемым, нет необходимости опираться на инерциальную систему координат и для исследования можно использовать различные упрощения уравнений движения в проекциях на полускоростные оси.

##### **«Квазиустановившееся» движение**

Движение ракеты или головной части, так же как и движение любого тела, можно представить в виде движения центра масс объекта и вращения вокруг центра масс. Наличие управле-

ния на активном участке полета вынуждает рассматривать движение центра масс ракеты совместно с движением ракеты вокруг центра масс. При снижении головной части в атмосфере колебания вокруг центра масс также необходимо рассматривать совместно с движением центра масс.

Типичным для ракет является исследование движения центра масс при упрощенных уравнениях системы управления и вращательного движения ракеты.

Уравнения системы управления существенно зависят от ее структуры и состава ее элементов. Поэтому конкретные их упрощения не могут быть рассмотрены в настоящей книге. Наиболее существенные упрощения состоят в замене уравнений системы управления уравнениями идеальных управляющих связей.

Рассмотрим упрощение уравнений вращательного движения ракеты.

Левые части уравнений Эйлера (2.67) при управляемом полете ракеты, если исключить такие неустановившиеся режимы полета, как старт, разделение ступеней и отделение головной части, близки к нулю, поэтому при исследовании движения центра масс левыми частями уравнений Эйлера обычно пренебрегают и эти уравнения записывают в виде уравнений равновесия моментов сил, действующих на ракету, относительно связанных с ракетой осей. Тем самым пренебрегают переходными процессами во вращательном движении и рассматривают ракету с системой управления идеальными в том смысле, что при отклонении органов управления угол атаки мгновенно принимает соответствующее уравнению равновесия моментов «установившееся» (балансирующее) значение [21].

### Упрощение матриц направляющих косинусов

Следующее обычное упрощение уравнений движения ракеты состоит в упрощении выражений косинусов углов между осями координат. Так, например, при расчете номинальной траектории баллистической ракеты можно положить углы крена  $\eta$  и рыскания  $\xi$  равными нулю. Такая возможность обусловлена тем, что система управления полетом, отрабатывая возмущения, стремится свести к нулю эти углы, благодаря чему их фактические значения невелики. Положим поэтому  $\cos \eta \approx 1$ ,  $\sin \eta \approx \eta$ ,  $\cos \xi \approx 1$ ,  $\sin \xi \approx \xi$ .

Будем пренебрегать также произведениями углов  $\xi$  и  $\eta$ . Тогда приближенную матрицу  $\Gamma$  косинусов углов между начальными стартовыми и связанными осями получим в следующем виде:

$$\Gamma \approx \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & -\xi \cos \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & \eta + \xi \sin \varphi \\ \xi + \eta \sin \varphi & -\eta \cos \varphi & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично получим приближенную матрицу косинусов углов между связанными и земными осями.

### Разделение общего движения на продольное и боковое

Существенное упрощение системы уравнений движения ракеты достигается, когда оказывается возможным разделить эту систему на две независимые группы уравнений, описывающих движение ракеты в двух взаимно перпендикулярных плоскостях [21]. Принципиальная возможность такого разделения обусловлена динамической симметрией ракеты относительно продольной оси  $Ox_1$ .

Представим общее движение ракеты складывающимся из продольного движения, в котором изменяются параметры  $V_{x3}$ ,  $V_{y3}$ ,  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $\omega_{x1}$ ,  $\varphi$ , и бокового движения, в котором изменяются параметры  $V_{z3}$ ,  $z_3$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ . Между этими двумя движениями в общем случае имеет место взаимное влияние. Выясним условия, при которых каждое из рассматриваемых двух движений, может протекать независимо от другого.

В уравнения, описывающие изменение продольных параметров движения  $V_{x3}$ ,  $V_{y3}$ ,  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $\omega_{x1}$ ,  $\varphi$ , не будут входить боковые параметры движения  $V_{z3}$ ,  $z_3$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , если каналы стабилизации углов рыскания и крена и бокового сноса работают идеально. Практически же можно исключить параметры бокового движения из уравнений движения ракеты в плоскости  $Ox_3 y_3$ , когда боковые параметры  $V_{z3}$ ,  $z_3$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  достаточно малы. Тогда получаем следующую систему уравнений движения ракеты в плоскости  $Ox_3 y_3$ :

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV_{x3}}{dt} &= N_{x3} + G_{x3} - m j_{cx3}; \\ m \frac{dV_{y3}}{dt} &= N_{y3} + G_{y3} - m j_{cy3}; \\ \frac{dx_3}{dt} &= V_{x3}; \quad \frac{dy_3}{dt} = V_{y3}; \\ J_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} &= \sum M_{z1}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{z1}; \\ F_1 [\delta_\varphi(t), x_3(t), y_3(t), \varphi(t)] &= 0; \\ F_2 [\delta_P(t), x_3(t), y_3(t), \varphi(t)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.109)$$

Уравнения бокового движения в общем случае имеют вид:



$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV_{z3}}{dt} &= N_{z3} + G_{z3} - m j_{cz3}; \\
 \frac{dz_3}{dt} &= V_{z3}; \\
 J_{y1} \frac{d\omega_{y1}}{dt} &= \Sigma M_{y1} - (J_{x1} - J_{z1}) \omega_{z1} \omega_{x1}; \\
 J_{x1} \frac{d\omega_{x1}}{dt} &= \Sigma M_{x1} - (J_{z1} - J_{y1}) \omega_{y1} \omega_{z1}; \\
 \omega_{x1} &= \frac{d\eta}{dt} + \frac{d\xi}{dt} \sin \varphi; \\
 \omega_{y1} &= \frac{d\xi}{dt} \cos \varphi \cos \eta + \frac{d\varphi}{dt} \sin \eta; \\
 F_3 [\delta_\xi(t), z(t), \xi(t), \eta(t)] &= 0; \\
 F_4 [\delta_\eta(t), z(t), \xi(t), \eta(t)] &= 0.
 \end{aligned} \right\} (2.110)$$

Из этих уравнений невозможно исключить все параметры продольного движения. Поэтому для самостоятельного исследования бокового движения предварительно надо определить все необходимые продольные параметры, например, путем решения уравнений (2.109).

### Линеаризация уравнений

Метод линеаризации уравнений весьма широко распространен во всех технических науках (см., например, книгу [21]). В баллистике и динамике ракет этот метод наиболее часто применяется при исследовании рассеивания головных частей, для оценки управляемости ракет и многих других задач.

#### Упрощение уравнений для оценки управляемости ракеты

Для определения максимального отклонения органов управления, необходимого для компенсации возмущающих сил и моментов, составим упрощенные уравнения движения ракеты, рассматривая ее как абсолютно жесткое твердое тело. С этой целью разделим общее движение ракеты на продольное и боковое и рассмотрим только боковое движение, поскольку максимальные возмущения вызываются боковым ветром.

Систему уравнений бокового движения (2.110) упростим, приняв следующие допущения.

1. Проекция силы тяжести и кориолисовой силы на ось  $Oz_3$  пренебрежимо малы.
2. Углы  $\varphi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\delta_\varphi$ ,  $\delta_\xi$ ,  $\delta_\eta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  считаем малыми, косинусы этих углов принимаем равными единице, синусы углов — равными углам, пренебрегаем произведениями этих углов.

3. Силы и моменты линеаризуем, представив их в виде:

$$X_1 \approx X;$$

$$Y_1 \approx (X + Y^a) \alpha;$$

$$Z_1 \approx (-X + Z^b) \beta = -(X + Y^a) \beta;$$

$$M_{y1} \approx M_{y1}^b \beta + M_{y1}^d \delta_\xi$$

$$M_{x1} \approx M_{x1}^b \beta + M_{x1}^d \delta_\eta$$

$$P = P_{x1} \approx P + 4T;$$

$$T_{y1} \approx 2T \delta_\phi;$$

$$T_{z1} \approx -2T \delta_\xi.$$

4. Угол  $\beta$  представляем в виде

$$\beta = \xi - \sigma \approx \xi + \frac{\dot{z}}{V}.$$

Тогда, учитывая в правых частях уравнений (2.110) возмущающие силы и моменты  $z_B$ ,  $M_{By1}$ ,  $M_{Bx1}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} &= a_{zz} \dot{z} + a_{z\xi} \xi + a_{z\eta} \eta + a_{z\delta} \delta_\xi + \tilde{Z}_B; \\ \ddot{\xi} &= a_{\xi z} \dot{z} + a_{\xi\xi} \xi + a_{\xi\delta} \delta_\xi + \tilde{M}_{By1}; \\ \ddot{\eta} &= a_{\eta z} \dot{z} + a_{\eta\xi} \xi + a_{\eta\delta} \delta_\eta + \tilde{M}_{Bx1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.111)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} a_{zz} &= -\frac{X + Y^a}{mV}; & a_{z\xi} &= -\frac{P + Y^a}{m}; \\ a_{z\eta} &= \frac{Y}{m}; & a_{z\delta} &= -\frac{2T}{m}; \\ a_{\xi z} &= \frac{Y^a (x_T - x_d)}{J_{y1} V}; & a_{\xi\xi} &= \frac{Y^a (x_T - x_d)}{J_{y1}}; \\ a_{\xi\delta} &= \frac{2T (x_T - x_{dB})}{J_{y1}}; & a_{\eta z} &= \frac{M_x^b}{J_{x1} V}; \\ a_{\eta\xi} &= \frac{M_x^b}{J_{x1}}; & a_{\eta\delta} &= \frac{4Tr_y}{J_{x1}}; \\ \tilde{Z}_B &= \frac{Z_B}{m}; & \tilde{M}_{By1} &= \frac{M_{By1}}{J_{y1}}; & \tilde{M}_{Bx1} &= \frac{M_{Bx1}}{J_{x1}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.112)$$

В качестве уравнений системы управления запишем линеаризованные уравнения каналов стабилизации рыскания, крена и бокового сноса, составленные в соответствии с методикой, рассмотренной в разд. 1. 8:

$$\begin{aligned}\delta_{\xi} &= a_{\xi} \xi + a_{\dot{\xi}} \dot{\xi} + a_{\int \xi} \int \xi dt + a_z z + a_{\dot{z}} \dot{z}; \\ \delta_{\eta} &= a_{\eta} \eta + a_{\dot{\eta}} \dot{\eta}.\end{aligned}\quad (2.113)$$

Суммарное отклонение органов управления равно:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{\xi} + \delta_{\eta}; \\ \delta_3 &= \delta_{\xi} - \delta_{\eta}.\end{aligned}\quad (2.114)$$

В результате решения полученной системы уравнений движения ракеты при заданном комплексе возмущений определяются необходимые для компенсации этих возмущений углы отклонения органов управления  $\delta_1(t)$  и  $\delta_3(t)$  и сравниваются с максимально возможным отклонением  $\delta_{\max} > 0$ . Если величины углов отклонения органов управления оказываются меньше максимально возможного угла (с некоторым запасом  $\delta_{\text{зап}} > 0$ ), то в этом случае органы управления являются эффективными:

$$\left. \begin{aligned}|\delta_1| + \delta_{\text{зап}} &\leq \delta_{\max}; \\ |\delta_3| + \delta_{\text{зап}} &\leq \delta_{\max}.\end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

## ПЕРЕХОДНЫЕ УЧАСТКИ ТРАЕКТОРИИ

Из всех вопросов баллистики и динамики ракет можно выделить, как самостоятельные, вопросы динамики переходных участков траектории — старта, разделения ступеней и отделения головных частей. Эти вопросы объединяются аналогичностью динамических процессов и идентичностью постановки задач.

Для переходных участков траектории характерны резкие изменения тяги основных двигателей, секундного расхода топлива, а также режимов работы системы управления. Кроме того, специфичны возмущения, действующие на ракету на этих участках. С точки зрения механики, исследование переходных участков траектории представляет собой решение задач об относительном движении двух или нескольких тел, в частности, ракеты относительно стартового сооружения, двух разделяющихся частей ракеты относительно друг друга и т. п. Во всех задачах необходимо определить силы, действующие на ракету, и параметры относительного движения с учетом конкретных особенностей конструкции ракеты и работы ее систем.

Ниже рассмотрены типовые схемы старта, разделения ступеней и отделения объектов, приведены уравнения движения ракет и отделяющихся частей, показано, какие вопросы динамики решаются при проектировании ракет. Изложение проводится на примере двухступенчатой ракеты, выполненной по схеме «тандем».

### 3.1. СТАРТ РАКЕТЫ

#### Свободный старт с открытой наземной пусковой установки

Свободный старт ракеты осуществляется со стартового стола, расположенного на поверхности Земли. Ракета свободно стоит на столе и при достижении тягой двигателя значения, большего стартового веса ракеты, последняя отрывается от стола.

Основной задачей динамического проектирования при такой схеме старта является определение возмущающих сил и момен-



тов, действующих на ракету, и исследование возмущенного движения ракеты на начальном участке траектории с целью выбора параметров системы стабилизации и оценки управляемости ракеты.

При свободном старте с открытой наземной пусковой установки на ракету действуют возмущающие силы и моменты, обусловленные:

- боковым ветром;
- погрешностями изготовления и монтажа ракеты и двигательной установки;
- разновременностью запуска и разнотяговостью двигателей двигательной установки (или камер сгорания одного двигателя).

Возмущающие силы и моменты могут быть определены по формулам, приведенным в [22].

Уравнения движения центра масс ракеты запишем в проекциях на оси системы координат, начало которой при  $t=0$  совпадает с центром масс ракеты; ось  $Ox$  направлена вертикально вверх; ось  $Oy$  — противоположно направлению на цель; ось  $Oz$  — так, чтобы система координат была правой (рис. 3.1).

Ориентацию ракеты относительно этой системы координат будем определять углами тангажа  $\theta$ , рыскания  $\psi$  и крена  $\gamma$ , которые образуются аналогично углам  $\varphi$ ,  $\eta$  и  $\xi$ , определяющим ориентацию ракеты относительно начальной стартовой системы координат (см. рис. 2.4). При этом кинематические уравнения, связывающие проекции угловой скорости ракеты  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  с угловыми скоростями  $\dot{\gamma}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ , будут аналогичны кинематическим уравнениям (2.32). Из этих уравнений следует, что при достаточно малых углах  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  и угловых скоростях  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\theta}$  имеют место приближенные равенства:

$$\omega_{x1} \approx \dot{\gamma}; \quad \omega_{y1} \approx \dot{\psi}; \quad \omega_{z1} \approx \dot{\theta}.$$

Упростим и конкретизируем общую систему уравнений (2.65)—(2.66) применительно к условиям рассматриваемой задачи. При этом примем допущение о том, что углы  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  и угловые скорости  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\theta}$ , а также углы отклонения управляющих двигателей  $\delta_\gamma$ ,  $\delta_\psi$  и  $\delta_\theta$  малы. Очевидно, что в рассматриваемом случае можно пренебречь кориолисовыми силами.

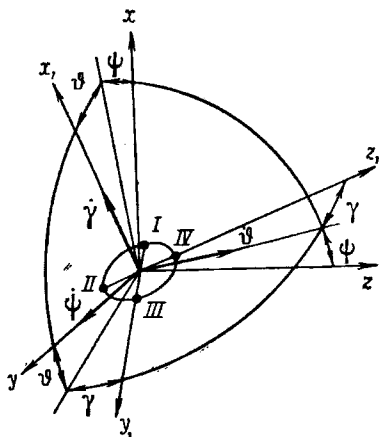


Рис. 3.1. Система координат для расчета старта ракеты с открытой наземной пусковой установки

При определении проекций сил на выбранные оси учтем, что:  
 — в невозмущенном (вертикальном) полете из аэродинамических сил на ракету действует только лобовое сопротивление;  
 — кориолисовы силы пренебрежимо малы;  
 — силы и моменты, создаваемые управляющими двигателями, определяются формулами (1.45) и (1.46);  
 — работа системы управления описывается уравнениями (1.63), (1.65), (1.66), (1.67).

С учетом сказанного уравнения движения ракеты имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 m\ddot{x} &= P_x - G - X; \\
 m\ddot{y} &= P_y \vartheta + 2T\delta_\vartheta + Y_B; \\
 m\ddot{z} &= -P_z\psi - 2T\delta_\psi + Z_B; \\
 J_{x1}\ddot{\gamma} &= 4Tr_y\delta_\gamma + M_{Bx1}, \\
 J_{y1}\ddot{\psi} &= 2T(x_T - x_{дв})\delta_\psi + M_{By1}; \\
 I_{z1}\ddot{\vartheta} &= 2T(x_T - x_{дв})\delta_\vartheta + M_{Bz1}; \\
 \delta_\gamma &= a_\gamma\gamma + a_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}; \\
 \delta_\psi &= a_\psi\psi + a_{\dot{\psi}}\dot{\psi} + a_{\ddot{\psi}}\ddot{\psi} + a_z z + a_{\dot{z}}\dot{z}; \\
 \delta_\vartheta &= a_\vartheta\vartheta + a_{\dot{\vartheta}}\dot{\vartheta} + a_{\ddot{\vartheta}}\ddot{\vartheta} + a_y y + a_{\dot{y}}\dot{y}; \\
 \delta_1 &= \delta_\psi + \delta_\gamma; \\
 \delta_2 &= \delta_\vartheta + \delta_\gamma; \\
 \delta_3 &= \delta_\psi - \delta_\gamma; \\
 \delta_4 &= \delta_\vartheta - \delta_\gamma.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь  $m = m_0 - \int_0^t \dot{m}(t) dt$  — масса ракеты;

$P_x = P + 4T$  — суммарная тяга двигательной установки, причем  $P$  — тяга основного двигателя;  $T$  — тяга управляющего двигателя;

$Y_B, Z_B$  — проекции вектора возмущающих сил, действующих на ракету;

$M_{Bx1}, M_{By1}, M_{Bz1}$  — проекции вектора возмущающего момента, действующего на ракету;

$a_\gamma, a_{\dot{\gamma}}, a_\psi, \dots, a_y, a_{\dot{y}}$  — передаточные коэффициенты системы управления ракетой.

Систему уравнений (3.1), как правило, удается решить лишь численными методами на аналоговых или цифровых вычислительных машинах. При этом, поскольку начальные условия и действующие на ракету возмущения в общем случае являются случайными, для решения обычно используется метод статистиче-

ских испытаний. Иногда для сокращения машинного времени решение указанной системы уравнений находится для наихудшего сочетания возмущающих сил и моментов, действующих в некоторой плоскости. Причем, поскольку положение этой плоскости для исследования динамики старта на вертикальном участке различно, в большинстве случаев задача решается для плоскости тангажа.

В результате решения задачи старта определяются: необходимая эффективность органов управления, рациональные значения передаточных коэффициентов системы управления, статистические характеристики фазовых координат ракеты, конструктивные параметры пусковой установки и др.

### **Свободный старт из шахты**

Свободный старт ракеты из шахтного сооружения осуществляется так же, как и старт с открытой наземной пусковой установки, только стартовый стол расположен внутри шахтного сооружения. Свободный старт из шахты предъявляет особые требования к ракете, шахтному сооружению и системе управления в части обеспечения безударного выхода из шахты — требует высокой точности стабилизации движения ракеты на шахтном участке траектории и определенного соотношения диаметров шахты и ракеты. Основными вопросами динамического проектирования ракеты при старте из шахты являются: оценка необходимой эффективности органов управления, выбор параметров системы управления и определение габаритов шахтного сооружения. Для этого необходимо знать параметры возмущенного движения ракеты при выходе ее из шахты.

Динамическая схема свободного старта ракеты из шахты идентична динамической схеме свободного старта с открытой наземной пусковой установки. Однако при движении в шахте на ракету действуют дополнительные возмущения, обусловленные газодинамическими силами от потоков газов, истекающих из сопел двигателей. Кроме того, по мере выхода ракеты из шахты на нее действует ветер. Формулы для расчета ветровых возмущений, действующих на ракету, остаются прежними (см. приложение). Однако коэффициенты нормальной аэродинамической силы  $c_n$  и координата центра давления  $x_d$  в данном случае зависят не только от угла атаки, но и от длины вышедшей из шахты части ракеты. Для расчета параметров возмущенного движения ракеты при свободном старте из шахты может быть использована та же система уравнений, что и для старта с открытой наземной пусковой установки.

### **Старт из шахты по направляющим**

Старт ракеты из шахты по направляющим обеспечивает безударный выход ракеты из шахты и не предъявляет таких жест-

ких требований к шахтному сооружению и системе управления ракетой, как при свободном старте из шахты.

При старте из шахты по направляющим наряду с оценкой эффективности органов управления ракеты и выбором параметров системы управления возникает необходимость определения реакций, действующих в опорных поясах ракеты при движении ее по направляющим. Кроме того, необходимо выбрать схему включения системы управления (по срабатыванию контакта подъема или контакта выхода), обеспечивающую минимальные нагрузки (реакции направляющих) и начальные возмущения.

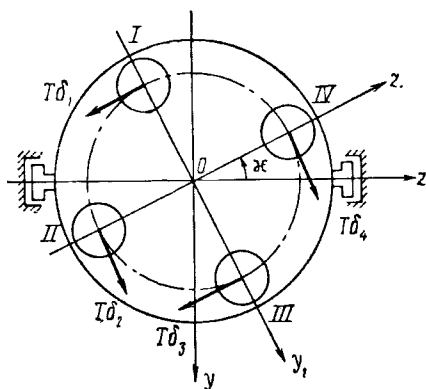


Рис. 3.2. Схема к составлению уравнений движения ракеты при старте из шахты по направляющим:

$\kappa$  — угол между плоскостью направляющих и плоскостью  $Ox_1z_1$

Ниже рассматриваются уравнения движения ракеты для одного из возможных вариантов конструктивного выполнения направляющих и опорных поясов ракеты: ракета движется в шахте по двум вертикальным направляющим, с которыми она связана двумя поясами (верхним и нижним) упругих опор, представляющими собой два диаметрально расположенных бугеля. Возмущения, действующие на ракету, такие же, как и при свободном старте. При составлении выражений для реакций опорных

поясов следует учитывать основные особенности конструкции ракеты и направляющих устройств; зазоры между бугелями и направляющими, предварительное поджатие пружины бугелей и ограничение их хода, упругость корпуса ракеты под бугелем и т. д.

В первом приближении при исследовании старта ракеты по направляющим пренебрегают изгибными колебаниями корпуса, вибрациями направляющих, а также возможными перемещениями пускового стакана шахты. Для составления соответствующих уравнений движения ракеты воспользуемся правой системой координат, оси которой ориентированы следующим образом:  $Ox$  направлена вверх по вертикали,  $Oz$  лежит в плоскости направляющих;  $Oy$  перпендикулярна этой плоскости (рис. 3.2). Уравнения движения ракеты по направляющим выводятся аналогично уравнениям (3.1).

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи по сравнению с предыдущей является учет сил упругих реакций, возникающих в результате взаимодействия упругих бугелей ракеты с направляющими (рис. 3.3). Данные реакции являются



функциями координат ракеты  $y, z$  и во многом определяются упругими свойствами того материала, из которого изготовлены бу-  
гели.

Введем следующие обозначения (см. рис. 3.3):

$R_1^0(z), R_2^0(z)$  — радиальные реакции на верхнем и нижнем опор-  
ных поясах соответственно;

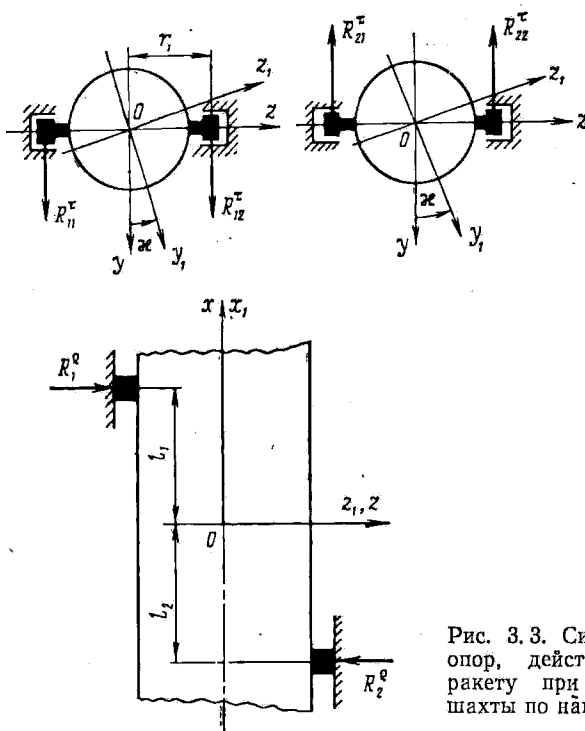


Рис. 3.3. Силы реакции опор, действующие на ракету при старте из шахты по направляющим

$R_{11}^tau(y), R_{12}^tau(y)$  — тангенциальные реакции на верхнем опорном поясе;

$R_{21}^tau(y), R_{22}^tau(y)$  — тангенциальные реакции на нижнем опорном поясе;

$l_1, l_2$  — расстояния до центра тяжести изделия от верхнего и нижнего опорных поясов соответственно;

$\alpha_1$  — угол между плоскостью направляющих и плоскостью рыскания.

Уравнения движения ракеты по направляющим имеют вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{m}x &= P_x - G - X; \\
m\ddot{y} &= P_y\vartheta + 2T(\delta_\vartheta \cos \alpha - \delta_\psi \sin \alpha) + \\
&\quad + R_{11}^\tau + R_{12}^\tau - R_{21}^\tau - R_{22}^\tau + Y_B; \\
m\ddot{z} &= -P_z\psi + 2T(\delta_\psi \cos \alpha + \delta_\vartheta \sin \alpha) + \\
&\quad + R_1^0 - R_2^0 + Z_B; \\
J_{x1}\ddot{\gamma} &= 4Tr_y\delta_\gamma + (R_{11}^\tau - R_{12}^\tau - R_{21}^\tau + R_{22}^\tau)r_1 + M_{Bx_1}; \\
J_{y1}\ddot{\psi} &= 2T(x_T - x_{дв})\delta_\psi + \\
&\quad + [(R_{11}^\tau + R_{12}^\tau)l_1 + (R_{21}^\tau + R_{22}^\tau)l_2] \sin \alpha - \\
&\quad - (R_1^0 l_1 + R_2^0 l_2) \cos \alpha + M_{By_1}; \\
J_{z1}\ddot{\vartheta} &= 2T(x_T - x_{дв})\delta_\vartheta + \\
&\quad + [(R_{11}^\tau + R_{12}^\tau)l_1 + (R_{21}^\tau + R_{22}^\tau)l_2] \cos \alpha + \\
&\quad + (R_1^0 l_1 + R_2^0 l_2) \sin \alpha + M_{Bz_1}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Как и в случае свободного старта ракеты, к этим уравнениям необходимо добавить уравнения системы управления, описывающие отклонения органов управления  $\delta_\gamma$ ,  $\delta_\psi$ ,  $\delta_\vartheta$  в зависимости от параметров движения ракеты.

Решение полученной таким путем системы уравнений является более сложным, чем системы (3.1), и также, как правило, находится с помощью вычислительных машин методом статистических испытаний.

### 3.2. РАЗДЕЛЕНИЕ СТУПЕНЕЙ И ОТДЕЛЕНИЕ ГОЛОВНЫХ ЧАСТЕЙ

#### Разделение ступеней

Участок движения ракеты с момента подачи главной команды на выключение двигательной установки предыдущей ступени до момента, когда отделяющаяся часть не может оказывать влияния на дальнейший полет ракеты, будем называть участком разделения ступеней. Для разделения ступеней многоступенчатых ракет, выполненных по схеме «тандем», могут применяться две основные схемы систем разделения<sup>1</sup>:

1) холодное разделение (или разделение торможением), при котором отделяющаяся часть тормозится специальными средствами после разрыва связей между ступенями, а основной дви-

<sup>1</sup> Возможны также и некоторые промежуточные схемы, однако на них мы не будем останавливаться.

гатель последующей ступени запускается после достижения безопасного расстояния между ступенями;

2) горячее (или огневое) разделение ступеней, при котором двигатель последующей ступени запускается до разрыва связей между ступенями и отделяющаяся часть отбрасывается газовой струей двигателя последующей ступени.

При любой схеме разделения необходимо обеспечить непрерывную управляемость ракеты на участке разделения. Способ выполнения этого требования зависит от типа органов управления.

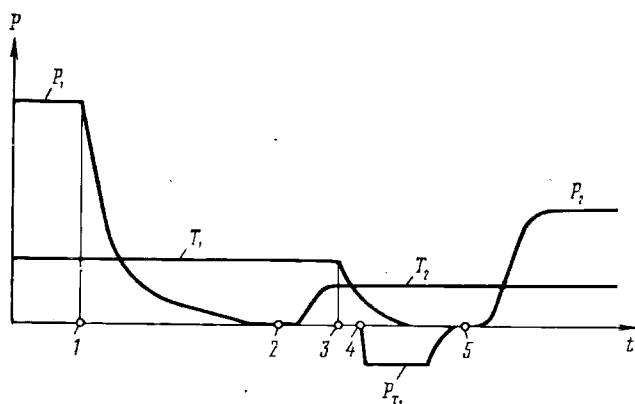


Рис. 3.4. Схема холодного разделения ступеней. Примерная последовательность команд на:

1—отсеканию основного двигателя отделяющейся части; 2—запуску управляющего двигателя последующей ступени; 3—отсеканию отсекающего двигателя отделяющейся части; 4—разрыву связей между ступенями и запуску тормозных ПРД; 5—запуску основного двигателя последующей ступени

Холодное разделение ступеней (рис. 3.4) возможно и наиболее приемлемо для ракет, управление которыми осуществляется с помощью специальных управляющих двигателей. Управляющие двигатели последующей ступени могут быть включены до выключения управляющих двигателей отделяющейся части. При этом обеспечивается непрерывная управляемость ракеты на участке разделения.

Горячее разделение ступеней (рис. 3.5) принципиально возможно на любых ракетах с последовательным соединением ступеней, однако требует специальной конструкции переходника между ступенями и хвостового отсека последующей ступени. Горячее разделение целесообразно для ракет, управление которыми связано с работой основного двигателя (управление газовыми рулями, качанием камеры сгорания основного двигателя, вдувом генераторного газа в закритическую часть сопла двигателя). При таких органах управления непрерывная управляемость ракеты на участке разделения возможна только при за-

пуске основного двигателя последующей ступени до разрыва связей между ступенями.

Другим требованием к системам разделения является обеспечение надежного разделения, под которым понимают разделение, исключающее соударение частей ракеты. Для надежного разделения необходимо обеспечить достаточную энергию, используемую для разделения и разведения на безопасное расстояние частей ракеты, непрерывную их управляемость на участке разделения и правильный выбор момента разрыва связей.

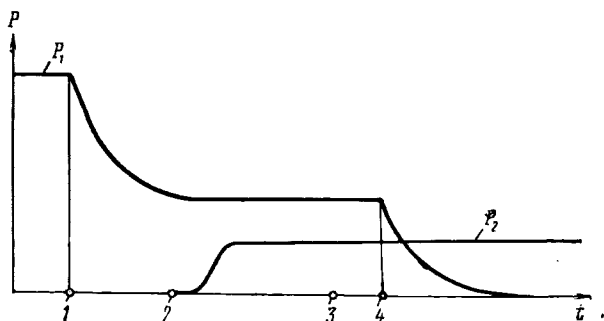


Рис. 3.5. Схема горячего разделения. Примерная последовательность команд на:

1—дресселирование двигателя отделяющейся части; 2—запуск двигателя последующей ступени; 3—разрыв связей между ступенями; 4—выключение двигателя отделяющейся части

В процессе разделения отклонения параметров движения последующей ступени от номинальных значений и отклонения параметров относительного движения частей ракеты от расчетных значений должны иметь возможно меньшее рассеивание. Это требование является определяющим при выборе конкретной схемы разделения.

Приведенные требования к системам разделения, как нетрудно заметить, взаимосвязаны. Степень сложности выполнения этих требований зависит от величин возмущающих сил и моментов, действующих на части ракеты на участке разделения. Поэтому при разработке ракеты и системы разделения ступеней предусматривают различные мероприятия, которые приводят к снижению возмущающих сил и моментов. В частности, при выборе траектории полета ракеты ограничивают величины скоростного напора и угла атаки на участке разделения. В свою очередь, выбор рациональной схемы разделения позволяет увеличить допустимые значения скоростного напора и угла атаки ракеты на участке разделения и тем самым ослабить требования к форме траектории ракеты.

Процесс разделения ступеней может приводить к заметным потерям максимальной дальности стрельбы, в связи с чем к системам разделения всегда предъявляется требование сни-

жения этих потерь. Чтобы уменьшить снижение дальности за счет гравитационных потерь скорости ракеты на участке разделения необходимо обеспечить быстроту процесса разделения. Однако сокращение длительности разделения требует увеличения сил, разъединяющих части ракеты, что приводит к возрастанию возмущающих сил и моментов. Другая причина уменьшения дальности состоит в увеличении веса ракеты за счет веса системы разделения.

Наконец, ряд требований предъявляют к конструкции средств разделения. Среди них можно отметить компактность и небольшие габариты устройств разделения, безопасность и простоту в эксплуатации и др.

В свете рассмотренных выше требований отметим основные достоинства и недостатки систем холодного и горячего разделения. Эти системы могут выполняться в различных вариантах.

Выше, на рис. 3.4 приведен один из возможных вариантов холодного разделения, в котором для торможения отделяющейся части применяются тормозные пороховые двигатели [22].

Основными достоинствами системы холодного разделения являются: разделение под действием небольших сил при малых возмущающих силах и моментах и небольшой вес средств разделения (тормозные ПРД с узлами крепления). К недостаткам этой системы относятся: сравнительно сложная схема разделения и уменьшение дальности стрельбы из-за продолжительного времени разделения.

Одна из возможных схем горячего разделения была показана на рис. 3.5. Преимуществами системы горячего разделения являются: быстрота разделения, не приводящая практически к гравитационным потерям дальности; простота процесса разделения и последовательности команд; повышенная надежность запуска двигателя последующей ступени за счет осевой перегрузки, создаваемой работающим двигателем отделяющейся части. Недостатками горячего разделения являются: большие возмущения, получаемые последующей ступенью в процессе разделения; расход топлива двигателем последующей ступени до разрыва связей между ступенями; необходимость защиты частей ракеты от воздействия струи газов работающего двигателя.

Исходя из условий обеспечения рассмотренных выше требований, при динамическом проектировании системы разделения обычно решают следующие задачи:

- 1) принципиальный выбор схемы и средств разделения ступеней;
- 2) выбор основных параметров (характеристик) системы разделения;
- 3) выбор последовательности моментов подачи системой управления команд на выполнение операций разделения;
- 4) обеспечение надежности процесса разделения, устойчивости и управляемости последующей ступени.



Основным методом решения перечисленных задач является исследование относительного движения разделяющихся частей ракеты.

При составлении уравнений движения частей ракеты для исследования процесса разделения необходимо учитывать следующие силы и моменты, действующие на разделяющиеся части ракеты: силы тяжести; силы тяги двигательных установок; силы тяги тормозных двигателей или сопел; силы и моменты, создаваемые управляющими двигателями; аэродинамические силы и моменты; силы и моменты от газодинамического воздействия струи двигателя последующей ступени на отделяющуюся часть (при горячем разделении ступеней); возмущающие силы и моменты.

Возмущающие силы и моменты, существенно влияющие на процесс разделения ступеней, обусловлены следующими факторами:

- действием ветра;
- погрешностями изготовления и монтажа ракеты и двигательной установки;
- эксцентриситетом центра масс ракеты, вызванным конструктивными особенностями компоновки ракеты;
- перекосом линии действия тяги двигателей, обусловленным упругой деформацией рамы двигательной установки;
- разнотяговостью двигателей (или камер сгорания одного двигателя) на установившихся и переходных режимах работы;
- разнотяговостью тормозных двигателей или сопел;
- импульсом последействия двигателей.

Расчетные формулы для определения перечисленных возмущающих сил и моментов приведены в [22]. Для упрощения исследования процесса разделения обычно пренебрегают влиянием жидкого наполнения баков, изгибными и продольными колебаниями разделяющихся частей ракеты, изменением во времени масс, моментов инерции и положений центров масс разделяющихся частей.

Чтобы оценить параметры относительного движения разделяющихся частей ракеты, достаточно, как правило, ограничиться рассмотрением продольного и бокового движения ракеты.

Для описания движения разделяющихся частей ракеты после разрыва связей между ними удобно использовать инерциальную систему координат  $Oxyz$ , движущуюся со скоростью, равной скорости ракеты в момент начала процесса разделения ( $t=0$ ). В момент времени  $t=0$  начало системы координат  $O$  совпадает с центром масс всей ракеты; ось  $Ox$  совпадает с продольной осью ракеты; ось  $Oy$  направлена вверх и образует с осью  $Ox$  вертикальную плоскость.

Обозначим через  $O_1x_1y_1$  и  $O_2x_2y_2$  системы координат, связанные с отделяющейся частью и последующей ступенью соответственно и образованные по обычным правилам.

Конкретный вид уравнений движения разделяющихся частей ракеты зависит от устройства системы разделения и условий полета во время разделения. Поэтому основные особенности исследования процесса разделения покажем на примерах динамических схем разделения, составленных с учетом приведенных выше допущений. Кроме того, предположим, что в начальный момент разделения угол атаки и угловая скорость ракеты равны

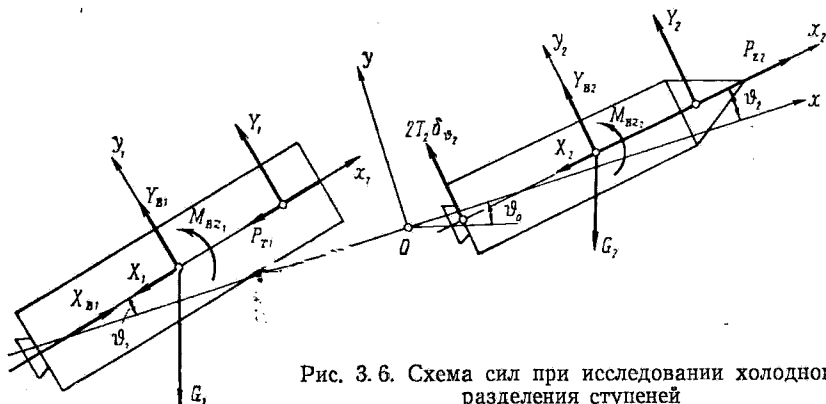


Рис. 3.6. Схема сил при исследовании холодного разделения ступеней

нулю. Остальные предположения будут видны из схем сил, действующих на разделяющиеся части, и пояснений к уравнениям движения.

При холодном разделении ступеней предположим, что тормозной ПРД мгновенно выходит на установившийся режим и реакции в месте стыка ступеней с момента запуска ПРД равны нулю. Тогда уравнения движения разделяющихся частей ракеты в плоскости тангажа с учетом всего сказанного выше для схем действующих сил, показанных на рис. 3.4 и 3.6, имеют вид:

для отделяющейся части

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= (-P_{T1} - X_1 + X_{B1}) - (Y_1 + Y_{B1}) \vartheta_1 - G_1 \sin \vartheta_0; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= (-P_{T1} - X_1 + X_{B1}) \vartheta_1 + (Y_1 + Y_{B1}) - G_1 \cos \vartheta_0; \\ J_{z1} \ddot{\vartheta}_1 &= M_{z1} + M_{Bz1}; \end{aligned} \right\} \quad (3.3a)$$

для последующей ступени

$$\left. \begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= (P_{T2} - X_2) - (Y_2 + Y_{B2}) \vartheta_2 - G_2 \sin \vartheta_0; \\ m_2 \ddot{y}_2 &= (P_{T2} - X_2) \vartheta_2 + (Y_2 + Y_{B2}) + 2T_2 \delta \vartheta_1 - G_2 \cos \vartheta_0; \\ J_{z2} \ddot{\vartheta}_2 &= M_{z2} + M_{yz2} + M_{Bz2}; \\ \delta \vartheta_2 &= \delta \vartheta_2(\vartheta_2, y_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Здесь  $\vartheta_0$  — угол тангажа ракеты относительно местного горизонта в начальный момент разделения;

$\vartheta_1, \vartheta_2$  — углы отклонения продольных осей отделяющейся части (1) и последующей ступени (2) от оси  $Ox$  инерциальной системы координат;

$P_2(t)$  — тяга двигательной установки последующей ступени;

$P_{T1}(t)$  — тяга тормозного двигателя;

$T_2$  — тяга управляющего двигателя последующей ступени;

$X_{в1}, Y_{в1}, Y_{в2}, M_{вz1}, M_{вz2}$  — возмущающие силы и моменты, действующие на разделяющиеся части ракеты;

$M_{z1}$  и  $M_{z2}$  — аэродинамические моменты;

$M_{yz_2} = 2T_2(x_{т2} - x_{лв2})\delta_{\vartheta_2}$  — управляющий момент.

В результате решения с помощью ЦВМ системы уравнений (3.3) можно рассчитать относительное движение разделяющихся частей ракеты, что позволяет выбрать основные параметры системы разделения и обеспечить необходимую надежность процесса разделения.

Обычно решают задачу определения величины тормозного импульса по заданному безопасному расстоянию между частями ракеты в конце разделения:  $x_{отн}(t_K) = x_1(t_K) - x_2(t_K)$ .

При заданном расстоянии  $x_{отн}(t_K)$  потребная величина импульса торможения  $I_T$  зависит от продолжительности разделения  $t_K$ . Чем больше  $t_K$ , тем меньше  $I_T$  и вес тормозных ПРД и, следовательно, меньше уменьшение дальности за счет установки ПРД. С другой стороны, с увеличением  $t_K$  растут потери дальности за счет гравитации. Поэтому выбирают такую величину  $I_T$ , при которой снижение дальности наименьшее.

Чтобы проверить надежность разделения, обычно строят траекторию относительного движения наиболее опасной точки плоскости стыка объектов и на основании полученных результатов делают вывод о возможности разделения объектов без соударения.

Исследование процесса разделения предусматривает также оценку устойчивости и управляемости последующей ступени на участке разделения, для чего определяют максимальные углы отклонения ступени  $\vartheta_{2\max}$  и управляющих двигателей  $\delta_{\vartheta_{2\max}}$ .

Для получения возможно более полных и достоверных выводов о надежности разделения и об устойчивости и управляемости последующей ступени исследование относительного движения частей ракеты следует проводить с учетом статистических характеристик возмущений.

Для горячего разделения весьма характерно воздействие газодинамических сил на разделяющиеся части ракеты. Газо-

динамические силы, обусловленные воздействием газовой струи двигателя последующей ступени на отделяющуюся часть, удобно рассматривать как геометрическую сумму осевой и боковой составляющих (рис. 3.7).

Осевая газодинамическая сила  $X_{Г1}$  обусловлена давлением струи двигателя на отделяющуюся часть. Боковое смещение и поворот отделяющейся части относительно последующей ступени, а также возмущения самой газовой струи вследствие

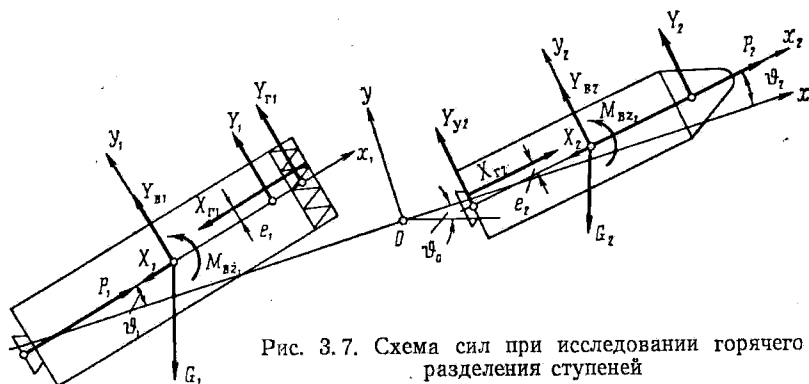


Рис. 3.7. Схема сил при исследовании горячего разделения ступеней

отклонения органов управления приводят к эксцентриситету  $e_1$  осевой силы относительно продольной оси отделяющейся части. Эти же причины вызывают поперечную газодинамическую силу  $Y_{Г1}$ .

Воздействие отраженной струи газов на последующую ступень можно описать осевой силой  $X_{Г2}$  с эксцентриситетом  $e_2$ .

Характерной особенностью газодинамических сил является их сравнительно большая величина. Так, осевая сила  $X_{Г1}$  в начальные моменты разделения сравнима с силой тяги двигательной установки последующей ступени  $P_2$ . Это обстоятельство и используется для быстрого разделения ступеней. Однако момент осевой газодинамической силы создает возможность резкого разворота (опрокидывания) отделяющейся части и соударения ее с двигателями последующей ступени.

При данной конструкции ракеты величины газодинамических сил и линии их действия ( $X_{Г1}$ ,  $Y_{Г1}$ ,  $X_{Г2}$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ ) определяются относительным положением разделяющихся частей ракеты, т. е. параметрами  $x_{отн} = x_2 - x_1$ ,  $y_{отн} = y_2 - y_1$  и  $\varphi_{отн} = \varphi_2 - \varphi_1$ . Расчетным путем определить эти зависимости очень трудно. Обычно их определяют с помощью экспериментов или принимают по аналогии с существующими ракетами.

Уравнения движения частей ракеты после разрыва связей при горячем разделении для рассмотренного нами случая (см. рис. 3.5 и 3.7) имеют вид:

для отделяющейся части

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= (P_1 - X_1 - X_{r1}) - (Y_1 + Y_{v1} + Y_{r1}) \vartheta_1 - G_1 \sin \vartheta_0; \\ m_1 \ddot{y}_1 &= (P_1 - X_1 - X_{r1}) \vartheta_1 + (Y_1 + Y_{v1} + Y_{r1}) - G_1 \cos \vartheta_0; \\ I_{z1} \ddot{\vartheta}_1 &= M_{z1} + M_{Bz1} + X_{r1} e_1 + Y_{r1} (x_{r1} - x_{dr1}); \end{aligned} \right\} \quad (3.4a)$$

для последующей ступени

$$\left. \begin{aligned} m_2 \ddot{x}_2 &= (P_2 - X_2 + X_{r2}) - (Y_2 + Y_{v2} + Y_{y2}) \vartheta_2 - G_2 \sin \vartheta_0; \\ m_2 \ddot{y}_2 &= (P_2 - X_2 + X_{r2}) \vartheta_2 + (Y_2 + Y_{v2} + Y_{y2}) - G_2 \cos \vartheta_0; \\ J_{z1} \ddot{\vartheta}_2 &= M_{z2} + M_{yz2} + M_{Bz2} - X_{r2} e_2; \\ \delta_{\vartheta 2} &= \delta_{\vartheta 2}(\vartheta_2, y_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.4б)$$

Здесь предполагается, что управляющий момент последующей ступени  $M_{yz}$  представляет собой момент силы  $Y_{y2}$ , создаваемой путем отклонения газовых струй основных двигателей, например, вдувом генераторного газа в сверхзвуковую часть сопла двигателя. Эти сила и момент зависят от угла  $\delta_{\vartheta 2}$  отклонения некоторого органа управления. Последнее уравнение системы (3.4б) представляет собой уравнение соответствующего канала системы управления последующей ступенью.

При выборе основных параметров системы горячего разделения, кроме оценки надежности разделения частей ракеты, а также устойчивости и управляемости последующей ступени, определяют последовательность моментов подачи команд. Разделение ступеней начинается, когда ускорение последующей ступени превысит ускорение отделяющейся части, т. е. когда  $\ddot{x}_{отн} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 > 0$ . Из этого условия определяется момент подачи команды на разрыв связей. При заданных переходных характеристиках двигателей  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$  начало разделения ступеней зависит от выбора момента запуска двигателя последующей ступени по отношению к моменту выключения двигателя отделяющейся части. Слишком раннее начало разделения ступеней приводит к уменьшению дальности за счет неиспользованного импульса тяги отделяющейся части, а слишком позднее может затруднить запуск двигателя последующей ступени из-за отсутствия продольной перегрузки. Окончательно временная последовательность моментов подачи команд устанавливается на основании результатов исследований надежности разделения, устойчивости и управляемости последующей ступени и уменьшения дальности.

### Отделение головных частей

Участок движения ракеты с момента подачи главной команды на выключение двигателей последней ступени ракеты



до отхода головной части от корпуса ракеты на достаточное расстояние будем называть участком отделения головной части (ГЧ).

Отделение ГЧ может осуществляться:

- торможением корпуса отделяющейся ступени с помощью специальных тормозных элементов (ПРД, тормозных сопел, работающих на газах наддува баков отделяющейся ступени);

- расталкиванием ГЧ и корпуса отделяющейся части с помощью толкателей (пружинных, пневматических и пороховых);

- ускорением ГЧ с помощью специальных двигателей.

К системам отделения предъявляются требования обеспечивать:

- минимальные значения возмущений скорости движения ГЧ, сказывающихся на рассеивании ее точек падения;

- достаточно малые величины угловых скоростей ГЧ, вызывающих появление больших углов атаки при входе в атмосферу;

- надежное отделение ГЧ.

Выполнение этих требований обеспечивает малое рассеивание точек падения ГЧ и нормальную работу всех систем оснащения ГЧ.

При динамическом проектировании системы отделения ГЧ обычно решают следующие задачи:

- выбор режима работы и способа выключения двигательной установки в конце активного участка;

- выбор схемы и средств отделения;

- выбор основных параметров системы отделения;

- выбор последовательности команд на участке отделения;

- обеспечение надежности процесса отделения (отсутствия соударений ГЧ с корпусом).

Энергетические характеристики средств отделения выбирают так, чтобы обеспечить надежное разъединение различных связей между ГЧ и корпусом ракеты с учетом тяги последствия и сообщить разделяющимся частям ракеты определенную относительную скорость, исключающую возможность догона ГЧ корпусом ракеты (в случае неполной компенсации импульса последствия).

Для уменьшения рассеивания точек падения ГЧ вследствие разброса импульса последствия может применяться двухступенчатое выключение двигателя. После предварительной команды на выключение двигателя уменьшается подача топлива и соответственно снижается сила тяги до некоторого промежуточного значения, и только после главной команды двигатель выключается (рис. 3.8, а). Эта мера приводит к заметному уменьшению импульса последствия и, следовательно, к сни-

ВИДНО, МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ УПРАВЛЯЮЩИЕ ДВИГАТЕЛИ.

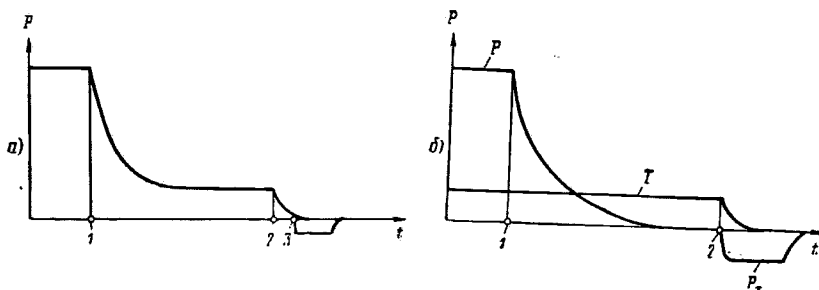


Рис. 3.8. Возможные схемы отделения головной части:

*а*—дресселирование двигателя ракеты и отделение ГЧ толкателем:

1—предварительная команда; 2—главная команда; 3—разрыв связей между ГЧ и корпусом и отталкивание ГЧ, толкателем;

*б*—использование двигателей малой тяги для снижения импульса последствия и торможение корпуса ракеты при помощи ПРД:

1—предварительная команда на выключение двигательной установки (отсечка основного двигателя); 2—главная команда на выключение двигательной установки (отсечка управляющего двигателя, разрыв связей между ГЧ и корпусом, запуск тормозных ПРД)

Для исключения влияния импульса последствия на отделение ГЧ от корпуса ракеты целесообразно одновременно с исполнением главной команды включать двигатели торможения корпуса (см. рис. 3.8, б).

Для исследования процесса отделения ГЧ от корпуса ракеты используется в принципе та же динамическая схема, что и при исследовании процесса разделения ступеней торможением (см. рис. 3.6 и уравнения 3.3). Конечно, конкретный вид уравнений движения ГЧ и корпуса ракеты зависит от конструктивных особенностей средств отделения и условий рассматриваемой задачи. Решая более или менее сложные уравнения движения ГЧ и корпуса ракеты, оценивают надежность отделения и определяют возмущения скорости движения и угловые скорости вращения, которые приобретает ГЧ после окончания процесса отделения в результате воздействия различных возмущений.

для гашения угловой скорости ГЧ, и тем самым уменьшает в большей или меньшей степени максимальную дальность стрельбы.

При использовании вращения ГЧ вокруг продольной оси для ориентации ГЧ в пространстве угловые скорости тангажа и рыскания снижают точность ориентации.

Угловая скорость, которую получает ГЧ после отделения от корпуса ракеты, обусловлена, во-первых, погрешностями угловой стабилизации ракеты (по угловой скорости) в момент начала отделения и, во-вторых, возмущениями, действующими на ГЧ в процессе разделения.

Состав возмущающих факторов устанавливается с учетом конкретных конструктивных схем ГЧ и системы ее отделения. В качестве примера возможных возмущающих факторов можно указать разброс усилий механизмов отделения, эксцентричное приложение силы толкателя относительно центра масс ГЧ, разнотяговость двигателей отделения, разброс импульсов пироболтов, асимметрия установки штепсельных разъемов и т. п.

Для приближенной оценки угловых скоростей вместо решения уравнений движения ГЧ на участке отделения можно воспользоваться формулой

$$\omega_i = \frac{1}{J_i} \int_0^{t_k} M_{ij}(t) dt, \quad (3.5)$$

где  $\omega_i$  и  $J_i$  — угловая скорость и момент инерции ГЧ относительно  $i$ -й оси;

$M_{ij}$  — возмущающий момент относительно  $i$ -й оси за счет  $j$ -го возмущающего фактора.

Полученные статистические характеристики составляющих угловой скорости ГЧ по связанным осям  $\omega_{x1}$ ,  $\omega_{y1}$ ,  $\omega_{z1}$  используются для определения углов атаки при неориентированном входе ГЧ в атмосферу, а также для оценки расхода рабочего тела на гашение угловых скоростей ГЧ с ориентированным входом в атмосферу.

### БАЛЛИСТИКА НЕУПРАВЛЯЕМОЙ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ

Траекторию полета головной части (ГЧ) от момента отделения ее от корпуса последней ступени до падения на поверхность Земли можно условно разделить на два участка: безатмосферный и атмосферный. Высота условной границы атмосферы зависит от решаемой задачи, характеристик ГЧ, дальности полета и т. п. На безатмосферном участке полета ГЧ движется практически только под действием силы тяжести. На атмосферном участке на ГЧ действуют, кроме силы тяжести, еще и аэродинамические силы.

Баллистика ГЧ призвана решать следующие основные задачи:

1) определение нагрузок, действующих на ГЧ в атмосфере, что необходимо для расчета прочности ГЧ;

2) определение рассеивания точек падения ГЧ за счет возмущений на атмосферном участке;

3) определение параметров движения ГЧ в характерных для решаемой задачи точках траектории.

Нагрузки на ГЧ, параметры ее движения и рассеивание точек падения зависят в основном от условий входа центра масс ГЧ в атмосферу (скорости и угла наклона вектора скорости к местному горизонту), величины предельного угла атаки в этот момент, характеристик ГЧ (аэродинамических, весовых, геометрических и центровочных), параметров атмосферы и случайных разбросов перечисленных параметров и характеристик. Исследование этих зависимостей дает возможность сформулировать требования к условиям входа в атмосферу и характеристикам ГЧ при разработке ракет.

Применяемые в баллистике ГЧ математические модели движения и обоснование этих моделей с учетом условий полета и особенностей решаемых задач составляют основное содержание данной главы. Общим для всех рассматриваемых моделей движения ГЧ является упрощающее предположение, что ГЧ представляет собой аэродинамически осесимметричное тело, эллипсоид инерции которого есть эллипсоид вращения.

Принятое разделение траектории движения ГЧ на два участка является условным, так как в действительности и на безатмосферном участке действуют аэродинамические силы. Однако на этом участке их величина пренебрежимо мала по сравнению с силой тяжести. Пренебрегают также гравитационными моментами, силами притяжения небесных тел, светового давления, электромагнитными и т. п. ввиду их незначительного влияния на движение ГЧ. Вследствие отсутствия сил, зависящих от параметров вращательного движения ГЧ, на безатмосферном участке траектории движение центра масс ГЧ и ее вращение вокруг центра масс исследуют отдельно.

### Движение центра масс головной части

Как известно [2], главными факторами, влияющими на совпадение расчетной дальности стрельбы с фактической, являются совершенство системы управления и точность расчета траектории ГЧ. Поэтому высокая точность расчета траектории ГЧ для определения прицельных данных является совершенно необходимой. Такой точности удовлетворяет система уравнений (2.97), (2.98), (2.100), (2.108), которая для движения центра масс ГЧ, если отсчитывать угол  $\Psi$  по часовой стрелке, принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= -g_r \sin \theta - g_\omega (\cos \varphi_n \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_n \sin \theta); \\ \dot{\theta} &= -\frac{g_r}{V} \cos \theta - \frac{g_\omega}{V} (-\cos \varphi_n \cos \Psi \sin \theta + \\ &\quad + \sin \varphi_n \cos \theta) + \frac{V}{r} \cos \theta + 2\omega_3 \cos \varphi_n \sin \Psi; \\ \dot{\Psi} &= \frac{g_\omega}{V} \frac{\cos \varphi_n \sin \Psi}{\cos \theta} + \frac{V}{r} \operatorname{tg} \varphi_n \sin \Psi \cos \theta - \\ &\quad - 2\omega_3 (\cos \varphi_n \cos \Psi \operatorname{tg} \theta - \sin \varphi_n); \\ \dot{\varphi}_n &= \frac{V}{r} \cos \Psi \cos \theta; \\ \dot{\lambda} &= \frac{V}{r} \frac{\sin \Psi \cos \theta}{\cos \varphi_n}; \\ \dot{r} &= V \sin \theta. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{угол } \Psi \\ \text{измеряют} \end{array} \quad (4.1)$$

Точность расчетов траектории ГЧ по этим уравнениям определяется лишь той точностью, с которой известны составляющие силы тяжести  $g_r$  и  $g_\omega$ .

Другой задачей баллистики является определение параметров движения центра масс ГЧ при ее входе в атмосферу. При решении этой задачи нецентральностью поля земного тяготения



и несферичностью земной поверхности. Поэтому удобно вместо интегрирования уравнений (4.1) воспользоваться известными результатами эллиптической теории, применимыми для абсолютного движения ГЧ (т. е. движения относительно некоторой инерциальной системы координат), а затем перейти к движению относительно Земли, произведя учет вращения Земли введением соответствующих поправок в значения скорости  $V$ , угла наклона траектории  $\Theta$ , азимута  $\Psi$  и долготы  $\lambda$ . Для этого рассмотрим движение ГЧ относительно «абсолютной» системы координат  $O_3x_ay_az_a$ , не участвующей в суточном вращении Земли. Начало координат  $O_3$  поместим в центре Земли; ось  $O_3x_a$  направим по оси вращения Земли к Северному полюсу; ось  $O_3y_a$  расположим в меридиальной плоскости, проходящей через точку старта в момент старта. Поле земного тяготения будем считать центральным. Обозначим параметры движения относительно абсолютной системы координат через  $V_a, \Theta_a, \Psi_a, \lambda_a$ . Тогда система уравнений (4.1) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_a &= -g \sin \Theta_a; \\ \dot{\Theta}_a &= -\frac{g}{V_a} \cos \Theta_a + \frac{V_a}{r} \cos \Theta_a; \\ \dot{\Psi}_a &= \frac{V_a}{r} \operatorname{tg} \varphi_{\Pi} \sin \Psi_a \cos \Theta_a; \\ \dot{\varphi}_{\Pi} &= \frac{V_a}{r} \cos \Psi_a \cos \Theta_a; \\ \dot{\lambda}_a &= \frac{V_a}{r} \frac{\sin \Psi_a \cos \Theta_a}{\cos \varphi_{\Pi}}; \\ \dot{r} &= V_a \sin \Theta_a, \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

где можно принять:  $g = 9,81 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$  — ускорение силы тяжести;  $R = 6371210 \text{ м}$  — средний радиус Земли.

Связи между параметрами абсолютного ( $V_a, \Theta_a, \Psi_a$ ) и относительного ( $V, \Theta, \Psi$ ) движения определим, используя рис. 4.1. Горизонтальная составляющая скорости  $V \cos \Theta$  геометрически складывается с линейной скоростью  $\omega_3 r \cos \varphi_{\Pi}$  за счет вращения Земли. Следовательно, модуль горизонтальной составляющей абсолютной скорости центра масс ГЧ равен

$$V_{a.\text{гор}} = \sqrt{(V \cos \Theta \cos \Psi)^2 + (V \cos \Theta \sin \Psi + \omega_3 r \cos \varphi_{\Pi})^2}.$$

Так как вертикальная составляющая скорости  $V \sin \Theta$  за счет вращения Земли не меняется, абсолютная скорость центра масс равна

$$V_a = \sqrt{(V \sin \Theta)^2 + (V \cos \Theta \cos \Psi)^2 + (V \cos \Theta \sin \Psi + \omega_3 r \cos \varphi_{\Pi})^2}. \quad (4.3)$$

Угол наклона вектора  $\bar{V}_a$  к местному горизонту равен

$$\theta_a = \arcsin \frac{V \sin \theta}{V_a} . \quad (4.4)$$

Угол  $\Psi_a$  в абсолютной системе координат определяется из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \cos \Psi_a &= \frac{V \cos \theta \cos \Psi}{\sqrt{(V \cos \theta \cos \Psi)^2 + (V \cos \theta \sin \Psi + \omega_3 r \cos \varphi_n)^2}}; \\ \sin \Psi_a &= \frac{V \cos \theta \sin \Psi + \omega_3 r \cos \varphi_n}{\sqrt{(V \cos \theta \cos \Psi)^2 + (V \cos \theta \sin \Psi + \omega_3 r \cos \varphi_n)^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

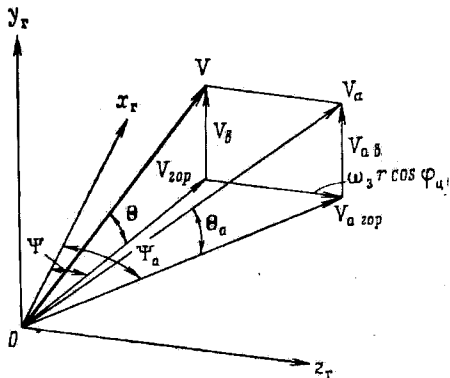


Рис. 4.1. К определению параметров абсолютного движения центра масс головной части

Поскольку за счет вращения Земли точка пересечения радиуса-вектора  $r$  с поверхностью Земли перемещается по параллели,

$$\varphi_{n,a} = \varphi_n. \quad (4.6)$$

Долготу центра масс ГЧ в абсолютной системе координат определяем по формуле

$$\lambda_a = \lambda + \omega_3(t - t_H). \quad (4.7)$$

Если в первых двух уравнениях системы (4.2) заменить координаты  $V_a$  и  $\Theta_a$  при помощи кинематических соотношений:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= V_a \sin \Theta_a; \\ r\dot{\chi} &= V_a \cos \Theta_a,\end{aligned}$$

где  $\chi$  — угол между радиусом-вектором  $r$  и радиусом-вектором  $r_n$  в начале пассивного участка траектории, то после некоторых преобразований получим известные уравнения эллиптической теории:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\chi}^2 &= -g; \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\chi}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

В результате интегрирования уравнений (4.8) получают уравнение траектории в виде уравнения конического сечения

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\chi_n - \chi)}, \quad (4.9)$$

где  $\chi_n$  — угол, соответствующий вершине траектории;

$p = r_\varepsilon \cos^2 \Theta_a^2$  — параметр сечения;

$e = \sqrt{1 - (2 - \varepsilon) \varepsilon \cos^2 \Theta_a^2}$  — эксцентриситет сечения;

$$\varepsilon = \frac{V_a^2 r}{fM}.$$

Для ГЧ  $e < 1$ , т. е. траектория ГЧ является эллиптической.

Зная параметры движения центра масс ГЧ относительно Земли в начале пассивного участка траектории

$$t_n, V_n, \Theta_n, \Psi_n, r_n, \varphi_{ц.н.}, \lambda_n, \quad (4.10)$$

определим теперь параметры движения центра масс ГЧ в момент входа в атмосферу, т. е. на высоте условной границы атмосферы  $h_0$ .

По формулам (4.3), (4.4), (4.5) и (4.7) найдем параметры абсолютного движения центра масс ГЧ в начале пассивного участка траектории:  $V_{a.n.}$ ,  $\Theta_{a.n.}$ ,  $\Psi_{a.n.}$ ,  $\lambda_{a.n.}$ . Затем по формулам эллиптической теории определим параметры движения ГЧ на высоте  $h_0 = r_0 - R$ :

$$V_{a0} = \sqrt{V_{a.n.}^2 + 2fM \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n} \right)}; \quad (4.11)$$

$$\Theta_{a0} = -\arccos \left( \frac{V_n r_n \cos \Theta_{a.n.}}{V_{a0} r_0} \right); \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \chi_0 = & 2 \operatorname{arctg} \left[ \{ \varepsilon_n r_0 \operatorname{tg} \Theta_{a.n.} + \sqrt{(\varepsilon_n r_0 \operatorname{tg} \Theta_{a.n.})^2 +} \right. \\ & \left. + [2r_0(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_{a.n.}) - (r_n + r_0) \varepsilon_n] (r_n - r_0) \varepsilon_n \} : \{ 2r_0(1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_{a.n.}) - \right. \\ & \left. - (r_n + r_0) \varepsilon_n \} \right]; \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} t_0 - t_n = & \frac{r_n}{V_{a.n.}} \frac{\varepsilon_n \cos \Theta_{a.n.}}{2 - \varepsilon_n} \left\{ \operatorname{tg} \Theta_{a.n.} - \right. \\ & - \operatorname{tg} \Theta_{a0} - \frac{1}{\cos \Theta_{a.n.} \sqrt{(2 - \varepsilon_n) \varepsilon_n}} \left[ \arcsin \frac{1 - \varepsilon_0}{e} + \right. \\ & \left. \left. + \arcsin \frac{1 - \varepsilon_n}{e} \right] + \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

После этого из сферического треугольника  $ABC$  (рис. 4.2) получим сферические координаты ГЧ в абсолютном движении в момент входа в атмосферу.

$$\varphi_{ц0} = \arcsin(\sin \varphi_{ц.н} \cos \chi_0 + \cos \varphi_{ц.н} \sin \chi_0 \cos \Psi_{а.н}). \quad (4.15)$$

Долгота  $\lambda_{а0}$ , изменяющаяся в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , определяется из формул:

$$\left. \begin{aligned} \sin(\lambda_{а0} - \lambda_{а.н}) &= \frac{\sin \chi_0 \sin \Psi_{а.н}}{\cos \varphi_{ц0}}; \\ \cos(\lambda_{а0} - \lambda_{а.н}) &= \frac{\cos \chi_0 - \sin \varphi_{ц.н} \sin \varphi_{ц0}}{\cos \varphi_{ц.н} \cos \varphi_{ц0}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

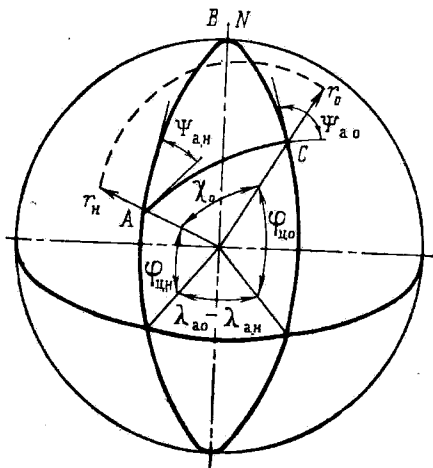


Рис. 4.2. К определению координат (в абсолютном движении) центра масс головной части в момент входа в атмосферу

Азимут  $\Psi_{а0}$ , изменяющийся также в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ , определяется из формул:

$$\left. \begin{aligned} \sin(180 - \Psi_{а0}) &= \frac{\cos \varphi_{ц.н} \sin \Psi_{а.н}}{\cos \varphi_{ц0}}; \\ \cos(180 - \Psi_{а0}) &= \sin \Psi_{а.н} \sin(\lambda_{а0} - \lambda_{а.н}) \times \\ &\times \sin \varphi_{ц.н} - \cos \Psi_{а.н} \cos(\lambda_{а0} - \lambda_{а.н}). \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Наконец, по формулам, аналогичным формулам (4.3), (4.4), (4.5) и (4.7), определим параметры  $V_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $\lambda_0$  движения центра масс ГЧ относительно вращающейся Земли:

$$V_0 = \sqrt{(V_{а0} \cos \Theta_{а0} \cos \Psi_{а0})^2 + (V_{а0} \cos \Theta_{а0} \sin \Psi_{а0} - \sqrt{V - \omega_3 r \cos \varphi_{ц0}})^2 + (V_{а0} \sin \Theta_{а0})^2}; \quad (4.18)$$

$$\lambda_0 = \lambda_{а0} - \omega_3(t_0 - t_н); \quad (4.19)$$

$$\Theta_0 = \arcsin \frac{V_{а0} \sin \Theta_{а0}}{V_0}. \quad (4.20)$$

Угол  $\Psi_0$  определяется из формул:

$$\left. \begin{aligned} \cos \Psi_0 &= \frac{V_{a0} \cos \theta_{a0} \cos \Psi_{a0}}{\sqrt{(V_{a0} \cos \theta_{a0} \cos \Psi_{a0})^2 + (V_{a0} \cos \theta_{a0} \sin \Psi_{a0} - \omega_3 r \cos \varphi_{n0})^2}}; \\ \sin \Psi_0 &= \frac{V_{a0} \cos \theta_{a0} \sin \Psi_{a0} - \omega_3 r \cos \varphi_{n0}}{\sqrt{(V_{a0} \cos \theta_{a0} \cos \Psi_{a0})^2 + (V_{a0} \cos \theta_{a0} \sin \Psi_{a0} - \omega_3 r \cos \varphi_{n0})^2}}. \end{aligned} \right\} (4.21)$$

### Движение головной части вокруг центра масс

Движение ГЧ вокруг центра масс на безатмосферном участке траектории исследуют с целью определения параметров этого движения при входе в атмосферу.

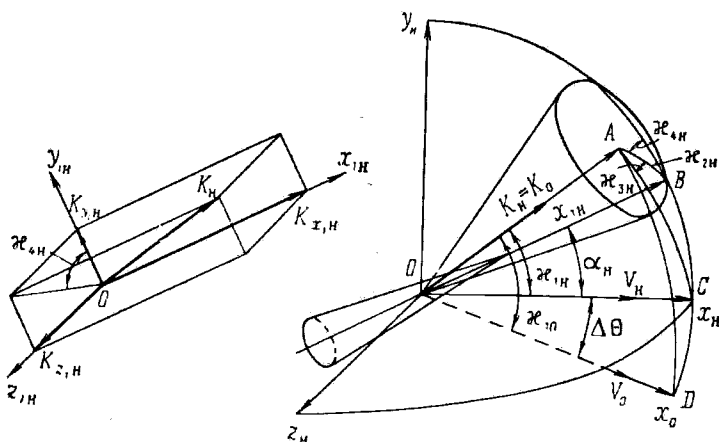


Рис. 4.3. Параметры движения головной части вокруг центра масс на безатмосферном участке траектории

В связи с тем, что ГЧ обычно имеют осесимметричную форму, их главные моменты инерции  $J_{y1}$  и  $J_{z1}$  отличаются незначительно. Поэтому при анализе движения ГЧ вокруг центра масс как на безатмосферном, так и на атмосферном участке траектории обычно полагают, что моменты инерции  $J_{y1}$  и  $J_{z1}$  равны между собой.

Систему уравнений движения ГЧ вокруг центра масс на безатмосферном участке траектории получим, положив в динамических уравнениях Эйлера (2.100) моменты сил равными нулю и  $J_{y1} = J_{z1}$ :

$$\left. \begin{aligned} J_{x1} \dot{\omega}_{x1} &= 0; \\ J_{z1} \dot{\omega}_{y1} - (J_{z1} - J_{x1}) \omega_{z1} \omega_{x1} &= 0; \\ J_{z1} \dot{\omega}_{z1} - (J_{x1} - J_{z1}) \omega_{x1} \omega_{y1} &= 0. \end{aligned} \right\} (4.22)$$



Этот случай движения твердого тела вокруг центра масс, называемый регулярной прецессией, хорошо изучен в классической механике [4]. Продольная ось ГЧ при полете на безатмосферном участке траектории движется равномерно по поверхности прямого кругового конуса (конуса прецессии), ось которого совпадает с вектором кинетического момента  $K$ , сохраняющего неизменное направление в пространстве (рис. 4.3). Направление вектора кинетического момента ГЧ, угол полураствора конуса прецессии и угловая скорость движения продольной оси по поверхности конуса прецессии (угловая скорость прецессии) определяются начальными условиями, соответствующими моменту отделения ГЧ от корпуса ракеты: ориентацией продольной оси и вектором угловой скорости.

Введем следующие обозначения (см. рис. 4.3):

$\kappa_1$  — угол между векторами кинетического момента  $\bar{K}$  и скорости  $\bar{V}$ ;

$\kappa_2$  — угол полураствора конуса прецессии;

$\kappa_3$  — угол между плоскостями углов  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ ;

$\kappa_3$  — угол между плоскостями углов  $\kappa_{10}$  и  $\kappa_{2H}$ ;

$\kappa_4$  — угол между плоскостью угла  $\kappa_2$  и плоскостью стрельбы.

Модуль кинетического момента определяется значениями проекций угловой скорости на оси связанной системы координат:

$$K = \sqrt{J_{x1}^2 \omega_{x1}^2 + J_{z1}^2 (\omega_{y1}^2 + \omega_{z1}^2)}. \quad (4.23)$$

Ориентацию кинетического момента относительно плоскости  $Ox_1y_1$  определим исходя из допущения о том, что в момент отделения ГЧ от ракеты эта плоскость параллельна плоскости стрельбы:

$$\left. \begin{aligned} \sin \kappa_{4H} &= \frac{\omega_{z1H}}{\sqrt{\omega_{y1H}^2 + \omega_{z1H}^2}}; \\ \operatorname{tg} \kappa_{4H} &= \frac{\omega_{z1H}}{\omega_{y1H}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

Составляющие кинетического момента  $K_{x1}$  и  $K_{\text{окв}}$  на безатмосферном участке траектории не меняются и равны:

$$K_{x1} = J_{x1} \omega_{x1}; \quad (4.25)$$

$$K_{\text{окв}} = J_{z1} \sqrt{\omega_{y1}^2 + \omega_{z1}^2}. \quad (4.26)$$

Параметры движения ГЧ вокруг центра масс в момент входа в атмосферу ( $h=h_0$ ) будем определять в следующей последовательности.

1. Углы  $\kappa_{1H}$  и  $\kappa_3'$  (угол  $BAD$ ) получим из сферических треугольников  $ABC$  и  $ABD$ :

$$\kappa_{1H} = \arccos(\cos \kappa_2 \cos \alpha_H - \sin \kappa_2 \sin \alpha_H \cos \kappa_{4H}); \quad (4.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \chi_3' &= \frac{\sin(\alpha_n + \Delta\theta) \sin \chi_{4n}}{\sin \chi_{10}}; \\ \cos \chi_3' &= \frac{\cos(\alpha_n + \Delta\theta) - \cos \chi_{10} \cos \chi_2}{\sin \chi_{10} \sin \chi_2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

где

$$\chi_2 = \arccos \frac{K_{x1}}{K} = \text{const.}$$

2. Угол  $\chi_{10}$  в момент входа в атмосферу получим из сферического треугольника  $ABD$ :

$$\chi_{10} = \arccos [\cos \chi_2 \cos(\alpha_n + \Delta\theta) - \sin \chi_2 \sin(\alpha_n + \Delta\theta) \cos \chi_{4n}], \quad (4.29)$$

где

$$\Delta\theta = \theta_n - \theta_0 + \chi_0; \quad (4.30)$$

$\chi_0$  — угловая дальность полета ГЧ.

Тогда

$$K_{x0} = K \cos \chi_{10}. \quad (4.31)$$

3. Угол  $\chi_{30}$  получим исходя из того, что продольная ось ГЧ

$Ox_1$  движется по конусу прецессии с постоянной угловой скоростью

$$\dot{\chi}_3 = \frac{K}{J_{z1}}. \quad (4.32)$$

Тогда

$$\chi_{30} = \chi_{3n} + \dot{\chi}_3(t_0 - t_n), \quad (4.33)$$

где  $t_0 - t_n$  — время полета ГЧ на безатмосферном участке траектории, определяемое по формуле (4.14).

Таким образом, мы получили значения углов  $\chi_{10}$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_{30}$  на высоте входа в атмосферу.

Зная эти углы, можно определить из сферического треугольника  $ABC$  (рис. 4.4) начальный угол атаки

$$\alpha_0 = \arccos(\cos \chi_{10} \cos \chi_2 + \sin \chi_{10} \sin \chi_2 \cos \chi_{30}). \quad (4.34)$$

Пренебрегая угловой скоростью  $\dot{\chi}_1$  по сравнению с  $\dot{\chi}_3$ , получим, что угловая скорость  $\dot{\alpha}_0$  равна

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{\sin \chi_{10} \sin \chi_2 \sin \chi_{30}}{\sin \alpha_0} \dot{\chi}_{30}. \quad (4.35)$$

Таким образом, задавая начальные условия движения центра масс:  $V_n$ ,  $\Theta_n$ ,  $\Psi_n$ ,  $r_n$ ,  $\varphi_{ц,n}$ ,  $\lambda_n$  и движения вокруг центра масс  $\alpha_n$ ,  $\mu_n$ ,  $\nu_n$ ,  $\omega_{x,n}$ ,  $\omega_{y,n}$ ,  $\omega_{z,n}$  в момент начала пассивного участка траектории, можно по полученным формулам определить начальные условия  $\alpha_0$  и  $\alpha_0$  для решения уравнения движения ГЧ вокруг центра масс на атмосферном участке траектории.

Как показывают расчеты по формуле (4.34), угол атаки ГЧ при входе в атмосферу в общем случае может принимать любые значения в зависимости от соотношения между составляющими угловой скорости ГЧ в момент отделения ее от последней ступени ракеты.

#### 4.2. ДВИЖЕНИЕ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ НА АТМОСФЕРНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

##### Общая характеристика движения ГЧ в атмосфере

Атмосферный участок траектории начинается с условной границы атмосферы, высота которой зависит от решаемой задачи, характеристик ГЧ, дальности полета и т. п. Так, например, начало заметного влияния атмосферы на параметры движения ГЧ при стрельбе на большие дальности соответствует высотам около 80—100 км. В связи с этим за условную границу обычно принимают высоту, равную 80 км [10], [26].

Первоначально в результате воздействия сравнительно небольших по величине аэродинамических моментов нарушается прецессионное движение и статически устойчивая ГЧ начинает совершать пространственные колебания вокруг центра масс. Вследствие довольно быстрого возрастания восстанавливающего и демпфирующего аэродинамических моментов амплитуда колебаний заметно убывает с уменьшением высоты. Условно можно считать, что при амплитуде колебаний угла атаки, меньшей  $1^\circ$ — $2^\circ$ , ГЧ стабилизируется, т. е. ее ось ориентируется по вектору скорости полета с точностью до  $1^\circ$ — $2^\circ$ . Высота начала стабилизированного полета ГЧ зависит от ее характеристик и условий входа в атмосферу и может находиться в различных пределах.

Условия движения центра масс ГЧ в атмосфере существенно отличаются от условий движения ракеты на активном участке. Так, в плотных слоях атмосферы скоростной напор и действующие на ГЧ продольные перегрузки отличаются в десятки раз, поперечные перегрузки — в сотни раз. Полет ГЧ характеризуется также значительным нагревом ее поверхности.

Для расчета на прочность ГЧ необходимо знать предельные нагрузки, действующие на ГЧ в полете. Основными данными для определения этих нагрузок являются максимальные значения перегрузок (осевой и поперечной), амплитуда угла атаки

и скоростной напор. Эти характеристики при заданных конструктивных параметрах ГЧ определяются условиями входа центра масс ГЧ в плотные слои атмосферы, а последние — формой траектории полета ракеты на активном участке, диапазоном дальности стрельбы и геофизическими условиями пуска ракеты.

С уменьшением угла атаки и скорости входа центра масс в атмосферу уменьшаются действующие на ГЧ продольные и поперечные нагрузки. С целью ограничения действующих на ГЧ нагрузок в процессе проектирования ГЧ принимаются специальные меры для уменьшения максимальных углов атаки ГЧ в момент входа в атмосферу. Задача баллистики, помимо подготовки данных для расчета на прочность, состоит в оценке влияния составляющих угловой скорости ГЧ в момент отделения от ракеты на величину угла атаки при входе в атмосферу и подготовке рекомендаций для исключения неблагоприятных сочетаний этих составляющих.

В соответствии с указанными задачами баллистики ГЧ ниже рассматриваются методы расчета траекторий движения ГЧ в атмосфере, определение предельных режимов полета, используемых при оценке прочности ГЧ, и расчет рассеивания ГЧ на атмосферном участке.

### Исходные уравнения движения и их упрощение

При движении ГЧ на атмосферном участке траектории дальность и продолжительность полета сравнительно невелики, в связи с чем Землю можно рассматривать как невращающийся шар с центральным полем притяжения.

За счет нагрева поверхности ГЧ при полете в атмосфере происходит унос массы теплозащитного покрытия набегающим потоком воздуха, в результате чего масса, форма и размеры ГЧ и, следовательно, моменты инерции, положение центра масс и аэродинамические характеристики ГЧ изменяются в течение полета. При исследовании движения ГЧ будем считать, что реактивные силы и моменты за счет уноса массы теплозащитного покрытия пренебрежимо малы.

Уравнения движения (2.97), (2.98), (2.99) применительно к движению центра масс ГЧ в атмосфере с учетом принятых выше допущений преобразуются к виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{c_x q S}{m} - g \sin \Theta; \\ \dot{\Theta} &= \frac{c_y q S}{m V} \sin \mu - \frac{g}{V} \cos \Theta + \frac{V}{r} \cos \Theta; \\ \dot{\Psi} &= -\frac{c_y q S}{m V \cos \Theta} \cos \mu + \frac{V}{r} \operatorname{tg} \varphi_n \sin \Psi \cos \Theta; \\ \dot{\varphi}_n &= \frac{V}{r} \cos \Psi \cos \Theta; \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

$c_x, c_y$  — коэффициенты сопротивления

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{V}{r} \frac{\sin \Psi \cos \Theta}{\cos \varphi_{\Pi}}; \\ \dot{h} &= V \sin \Theta; \\ \dot{L} &= \dot{\varphi}_{\Pi} R \cos \psi + \dot{\lambda} R \sin \psi \cos \varphi_{\Pi}; \\ \dot{z} &= -\dot{\varphi}_{\Pi} R \sin \psi + \dot{\lambda} R \cos \psi \cos \varphi_{\Pi}, \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

где  $L$  — расстояние, проходимое ГЧ по дуге большого круга в плоскости стрельбы;

$\Psi$  — азимут вектора скорости ГЧ, отсчитываемый по часовой стрелке;

$\psi$  — азимут стрельбы;

$z$  — отклонение центра масс ГЧ от плоскости стрельбы. (вправо)

Уравнения вращательного движения объекта вокруг центра масс (2.100) и (2.108) для случая полета ГЧ в атмосфере принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} J_{x1} \dot{\omega}_{x1} &= M_{x1} + M_{\Delta x1}; \\ J_{y1} \dot{\omega}_{y1} - (J_{z1} - J_{x1}) \omega_{z1} \omega_{x1} &= M_{y1} + M_{\Delta y1}; \\ J_{z1} \dot{\omega}_{z1} - (J_{x1} - J_{y1}) \omega_{x1} \omega_{y1} &= M_{z1} + M_{\Delta z1}; \\ \dot{\alpha} &= \omega_{y1} \cos \nu - \omega_{z1} \sin \nu - \Omega_y \cos \mu - \Omega_z \sin \mu; \\ \dot{\mu} &= \omega_{y1} \frac{\sin \nu}{\sin \alpha} + \omega_{z1} \frac{\cos \nu}{\sin \alpha} - \Omega_x + \Omega_y \operatorname{ctg} \alpha \sin \mu - \\ &\quad - \Omega_z \operatorname{ctg} \alpha \cos \mu; \\ \dot{\nu} &= \omega_{x1} - \omega_{y1} \operatorname{ctg} \alpha \sin \nu - \omega_{z1} \operatorname{ctg} \alpha \cos \nu - \\ &\quad - \Omega_y \frac{\sin \mu}{\sin \alpha} + \Omega_z \frac{\cos \mu}{\sin \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

где  $M_{x1}$ ,  $M_{y1}$ ,  $M_{z1}$  — моменты аэродинамических сил (см. формулы (2.101);

$M_{\Delta x1}$ ,  $M_{\Delta y1}$ ,  $M_{\Delta z1}$  — аэродинамические демпфирующие моменты, определяемые по формулам (1.28).

При решении основных задач баллистики неуправляемых ГЧ обычно достаточно рассматривать частный случай движения ГЧ на атмосферном участке траектории, когда продольная и поперечная оси ГЧ  $Ox_1$  и  $Oz_1$  движутся в плоскости стрельбы.

Уравнения такого движения, которое принято называть продольным, можно получить из уравнений (4.36) и (4.37), если учесть соображения, изложенные в разд. 2.4, и, в частности, принять  $\mu = 90^\circ$  и  $\nu = 0^\circ$ . Тогда параметры движения ГЧ в плос-



кости стрельбы можно определить решением следующей нелинейной системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{c_x q S}{m} - g \sin \Theta; \\ \dot{\Theta} &= \frac{c_y q S}{mV} - \frac{g}{V} \cos \Theta + \frac{V}{r} \cos \Theta; \\ \dot{h} &= V \sin \Theta; \\ \dot{L} &= R \frac{V}{r} \cos \Theta; \\ \dot{\alpha} &= \omega_{y1} - \frac{c_y q S}{mV} + \frac{g}{V} \cos \Theta; \\ \dot{\omega}_{y1} &= \frac{c_n q S (x_T - x_d)}{J_{z1}} + \frac{m_{xy1} q S l}{J_{z1}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Следует отметить, что при движении в атмосфере траектория

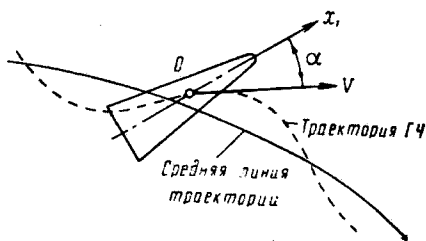


Рис. 4.5. Влияние подъемной силы головной части на траекторию ее движения на атмосферном участке

центра масс ГЧ за счет действия подъемной силы периодически отклоняется от некоторой средней линии (рис. 4.5) с частотой колебаний угла атаки.

Рассмотрим возможные дальнейшие упрощения уравнений движения ГЧ в атмосфере. Два последних уравнения из системы (4.38) сведем к одному уравнению относительно угла атаки  $\alpha$ . При этом сделаем следующие упрощения:

1) пренебрегая влиянием искривления траектории за счет силы тяжести на изменение угла атаки, положим в 5-м уравнении системы (4.38)  $\frac{g}{V} \cos \Theta \approx 0$ ;

2) зависимость демпфирующего момента от угловой скорости будем считать линейной, полагая

$$m_{xy1} q S l = m_{y1}^{\omega} \frac{q S l^2}{V} \omega_{y1};$$

3) учитывая, что угол атаки изменяется во много раз быстрее, чем параметры движения центра масс и что коэффициент  $c_y$  с достаточной точностью можно считать пропорциональным углу атаки при  $\alpha < 60^\circ$ , вычислим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{c_y q S}{mV} \right) \approx \frac{c_y^a q S}{mV} \frac{d\alpha}{dt};$$

4) пренебрежем влиянием на угловое ускорение ГЧ составляющей

$$\frac{m_{y1}^{\omega} q S l^2}{J_{z1} V} \frac{c_y q S}{m V} \text{ по сравнению с } \frac{c_n q S (x_T - x_d)}{J_z}.$$

Тогда получим уравнение второго порядка, описывающее колебания угла атаки

$$\ddot{\alpha} - m_{y1}^{\omega} \frac{q S l^2}{J_{z1} V} \dot{\alpha} - c_n(\alpha) \frac{q S (x_T - x_d)}{J_{z1}} = 0, \quad (4.39)$$

где  $m_{y1}^{\omega} = m_{y1}^{\omega} - c_y^{\alpha} \frac{J_{z1}}{m l^2}$  — коэффициент демпфирования с учетом искривления траектории за счет подъемной силы ГЧ.

Систему уравнений движения ГЧ на атмосферном участке траектории теперь можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{c_x(\alpha) q S}{m} - g \sin \theta; \\ \dot{\theta} &= \frac{c_y(\alpha) q S}{m V} - \frac{g}{V} \cos \theta + \frac{V}{r} \cos \theta; \\ \dot{h} &= V \sin \theta; \\ \dot{L} &= R \frac{V}{r} \cos \theta; \\ \ddot{\alpha} - m_{y1}^{\omega} \frac{q S l^2}{J_{z1} V} \dot{\alpha} - c_n(\alpha) \frac{q S (x_T - x_d)}{J_{z1}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Решение этой системы уравнений требует сравнительно больших затрат времени, так как частота колебаний угла атаки ГЧ велика (может достигать 10 гц) и при численном интегрировании системы уравнений (4.40) необходимо выбирать шаг интегрирования в десятки раз более мелкий, чем при интегрировании уравнений движения ГЧ с нулевым углом атаки. По этой причине используется упрощение системы уравнений (4.40) разделением ее на уравнения движения центра масс и на уравнение колебаний угла атаки. При этом, чтобы учесть влияние колебаний угла атаки на движение центра масс ГЧ, вычисляют аэродинамические коэффициенты для осредненного за период колебаний  $T$  угла атаки  $\alpha_{\text{ср}}$ .

Если считать колебания угла атаки гармоническими, т. е.

$$\alpha = A \sin \omega t,$$

а аэродинамические коэффициенты равными:  $c_x = c_{x0} + k \alpha^2$ ;  $c_y = c_y^{\alpha} \alpha$ , то

Чтобы учесть влияние поперечного смещения центра масс на движение ГЧ, необходимо в динамические уравнения Эйлера ввести проекции дополнительного аэродинамического момента, обусловленного указанным смещением центра масс. Кроме этого, в общем случае может потребоваться учет поворота главных центральных осей инерции за счет поперечного смещения центра масс.

Пусть центр масс ГЧ имеет координаты  $x_T, y_T, z_T$  относительно номинальных связанных осей (см. рис. 4.6). В этом случае проекции дополнительного аэродинамического момента на оси связанной системы координат будут равны:

$$\left. \begin{aligned} M_{Tx_1} &= Y_1 z_T - Z_1 y_T; \\ M_{Ty_1} &= X_1 z_T; \\ M_{Tz_1} &= -X_1 y_T. \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Составляющие аэродинамической силы  $X_1, Y_1, Z_1$  определим, используя составляющие полной аэродинамической силы  $\bar{R}$  по полусвязанным осям [см. формулу (2.92)] и направляющие косинусы между полусвязанными и связанными осями. Тогда выражения дополнительных моментов относительно связанных осей координат  $Ox_1 y_1 z_1$ , вызванных смещением центра масс ГЧ, принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} M_{Tx_1} &= c_\pi q S (-z_T \sin \nu + y_T \cos \nu); \\ M_{Ty_1} &= c_\pi q S z_T; \\ M_{Tz_1} &= -c_\pi q S y_T. \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Подставляя эти моменты в первые три уравнения системы (4.37), получим уравнения движения ГЧ с учетом поперечного смещения центра масс ГЧ.

В уравнении плоских колебаний ГЧ (4.39) за счет смещения центра масс появляется дополнительный член

$$\pm \frac{c_\pi q S}{J_{z1}} \sqrt{y_T^2 + z_T^2}.$$

### Учет ветра

Обычно скорость ветра задают вертикальной  $W_v$  и горизонтальной  $W_{гор}$  составляющими и направлением горизонтальной составляющей — азимутом ветра  $\psi_w$ . Азимут ветра принято называть углом, отсчитываемый по часовой стрелке от северного направления меридиана к тому направлению, откуда дует ветер (рис. 4.7). Вертикальную составляющую скорости ветра, направленную вверх, считают положительной, направленную вниз — отрицательной.

Принимая скорость движения центра масс ГЧ  $\bar{V}$  за абсолютную скорость, скорость ветра  $\bar{W}$  за переносную, а скорость движения центра масс ГЧ относительно воздуха с учетом ветра (так называемую воздушную скорость)  $\bar{V}_w$  за относительную, можем записать

$$\bar{V} = \bar{V}_w + \bar{W}. \quad (4.48)$$

Направление скорости  $\bar{V}$  в земной географической системе координат задается двумя углами: азимутом  $\Psi$  и углом наклона к горизонту  $\Theta$ . По аналогии направление воздушной скорости будем задавать углами  $\Psi_w$  и  $\Theta_w$  (при отсутствии ветра углы  $\Psi_w$  и  $\Theta_w$  совпадают с углами  $\Psi$  и  $\Theta$ ).

Для определения углов  $\Psi_w$  и  $\Theta_w$  спроектируем векторное равенство (4.48) на горизонтальную и вертикальную плоскости (рис. 4.8). Из рис. 4.8, а видно, что

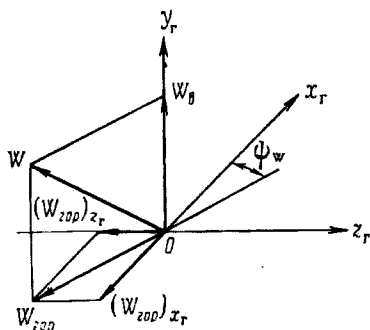
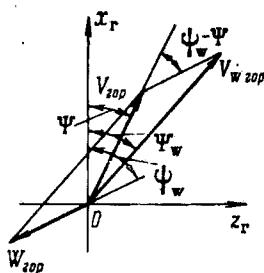


Рис. 4.7. Вектор скорости ветра и его проекции на оси географической системы координат

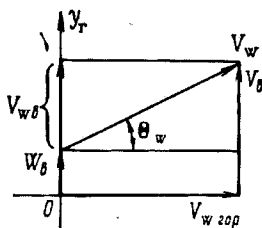
$$V_{w \text{ гop}} = \sqrt{V_{\text{гop}}^2 + W_{\text{гop}}^2 + 2V_{\text{гop}} W_{\text{гop}} \cos(\Psi - \psi_w)}; \quad (4.49)$$

$$\operatorname{tg} \Psi_w = \frac{V_{\text{гop}} \sin \Psi + W_{\text{гop}} \sin \psi_w}{V_{\text{гop}} \cos \Psi + W_{\text{гop}} \cos \psi_w};$$

$$\sin \Psi_w = \frac{V_{\text{гop}} \sin \Psi + W_{\text{гop}} \sin \psi_w}{V_{w \text{ гop}}}, \quad (4.50)$$



а)



б)

Рис. 4.8. К определению углов ориентации вектора воздушной скорости относительно географических осей координат:

а—горизонтальная плоскость; б—вертикальная плоскость

где

$$V_{\text{гop}} = V \cos \Theta.$$

Из рис. 4.8, б следует:

$$V_W = \sqrt{V_{\text{гор}}^2 + W_{\text{гор}}^2 + 2V_{\text{гор}}W_{\text{гор}} \cos(\Psi - \psi_W) + (V_B - W_B)^2}; \quad (4.51)$$

$$\Theta_W = \arcsin \frac{V_B - W_B}{V_W}, \quad (4.52)$$

где

$$V_B = V \sin \Theta.$$

Определим положение вектора  $\bar{V}_W$  в скоростной системе координат с помощью углов  $\xi$  и  $\eta$ , где  $\xi$  — угол между векторами  $\bar{V}$  и  $\bar{V}_W$ ;  $\eta$  — угол между плоскостью, определяемой векторами  $\bar{V}$  и  $\bar{V}_W$  и координатной плоскостью  $Oxy$  (рис. 4.9). Из сферического треугольника  $ABC$  найдем:

$$\xi = \arccos [\sin \Theta_W \sin \Theta + \cos \Theta_W \cos \Theta \cos(\Psi_W - \Psi)]; \quad (4.53)$$

$$\sin \eta = \frac{\sin(\Psi_W - \Psi) \cos \Theta_W}{\sin \xi};$$

$$\cos \eta = \frac{\sin \Theta_W - \sin \Theta \cos \xi}{\cos \Theta \sin \xi}. \quad (4.54)$$

Определим угол атаки ГЧ с учетом действия ветра  $\alpha_W$  (угол между продольной осью ГЧ и вектором воздушной скорости  $\bar{V}_W$ ), для чего рассмотрим рис. 4.10. Из сферического треугольника  $ABC$  получим

$$\cos \alpha_W = \cos \alpha \cos \xi + \sin \alpha \sin \xi \cos \zeta, \quad (4.55)$$

где

$$\zeta = 180^\circ - \mu - (90^\circ - \eta) = 90^\circ + \eta - \mu.$$

Зная угол атаки  $\alpha_W$  и скорость  $V_W$ , можно определить осевую и нормальную аэродинамические силы:

$$\left. \begin{aligned} X_{1W} &= c_x(\alpha_W, M_W) q_W S; \\ Y_{1W} &= c_n(\alpha_W, M_W) q_W S, \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

где

$$M_W = \frac{V_W}{a}; \quad q_W = \frac{\rho V_W^2}{2}. \quad (4.57)$$

Нормальная сила  $Y_{1W}$  направлена перпендикулярно оси  $Ox_1$  в плоскости воздушного угла атаки  $\alpha_W$ , составляющей с плоскостью угла  $\alpha$  угол  $\iota$  ( $\iota = 0^\circ - 180^\circ$ ). Угол  $\iota$  определяем из сферического треугольника  $ABC$ :

$$\left. \begin{aligned} \sin \iota &= \sin \xi \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha_W}; \\ \cos \iota &= \frac{\cos \xi - \cos \alpha_W \cos \alpha}{\sin \alpha_W \sin \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$



Составляющие аэродинамической силы по осям полусвязанной системы координат равны:

$$\left. \begin{aligned} X'_W &= X_{1W}; \\ Y'_W &= -Y_{1W} \sin \iota; \\ Z'_W &= -Y_{1W} \cos \iota. \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

Проекции аэродинамических сил с учетом действия ветра на оси полускоростной системы координат определим, используя

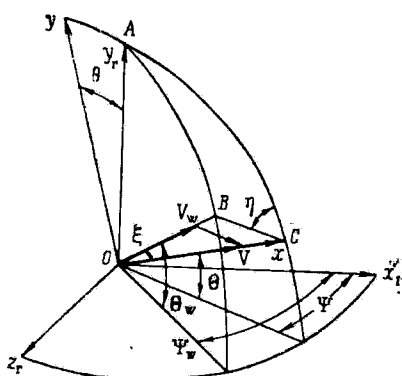


Рис. 4.9. Ориентация вектора воздушной скорости относительно полускоростной системы координат

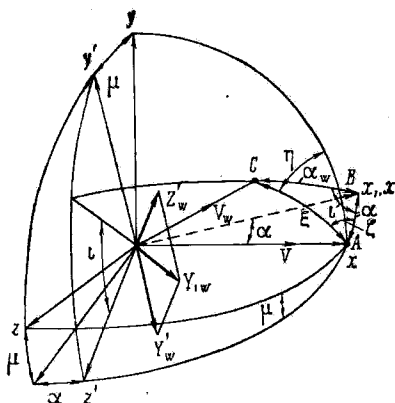


Рис. 4.10. К определению угла атаки головной части с учетом действия ветра

зуя направляющие косинусы, записанные в виде матрицы (2.71):

$$\left. \begin{aligned} X &= X_{1W} \cos \alpha - Y_{1W} \cos \iota \sin \alpha; \\ Y &= X_{1W} \sin \alpha \sin \mu - Y_{1W} \sin \iota \cos \mu + Y_{1W} \cos \iota \cos \alpha \sin \mu; \\ Z &= -X_{1W} \sin \alpha \cos \mu - Y_{1W} \sin \iota \sin \mu - \\ &\quad - Y_{1W} \cos \iota \cos \alpha \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

Проекции аэродинамических сил с учетом действия ветра на связанные оси выразим через их составляющие по полусвязанным осям. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_{1W}; \\ Y_1 &= -Y_{1W} \sin \iota \cos \nu - Y_{1W} \cos \iota \sin \nu; \\ Z_1 &= Y_{1W} \sin \iota \sin \nu - Y_{1W} \cos \iota \cos \nu. \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

Эти составляющие аэродинамической силы вызывают аэродинамический момент, проекции которого на оси связанной системы координат с учетом выражений (4.46) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} M_{x1} &= Y_1 z_T - Z_1 y_T; \\ M_{y1} &= X_1 z_T - Z_1 (x_T - x_d); \\ M_{z1} &= -X_1 y_T + Y_1 (x_T - x_d). \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Аэродинамические демпфирующие моменты также следует определить с учетом воздействия ветра:

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{л}x_1} &= m_{x_1}^{\omega x_1} (M_W) \frac{q_W S D^2}{V_W}; \\ M_{\text{л}y_1} &= m_{y_1}^{\omega y_1} (M_W) \frac{q_W S l^2}{V_W}. \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

Подставляя полученные выражения аэродинамических сил и моментов (4.60), (4.62) и (4.63) в уравнения (2.97) и (2.100), получим динамические уравнения движения ГЧ с учетом действия ветра и смещения центра масс ГЧ. Эти уравнения совместно с кинематическими соотношениями (2.98), (2.99) и (2.108) составляют систему уравнений движения ГЧ в атмосфере с учетом действия ветра и смещения центра масс ГЧ относительно продольной оси. Из такой общей системы в частных случаях могут быть получены более простые системы уравнений. Допущения, принимаемые при этом, определяются условиями конкретной решаемой задачи.

### Начальные условия движения

Для решения дифференциальных уравнений пространственного движения ГЧ, например уравнений (4.36) и (4.37), необходимо знать двенадцать параметров движения ГЧ в начальный момент времени. Эти начальные условия заимствуются из результатов расчетов параметров движения ракеты на активном участке траектории и процесса отделения ГЧ от последней ступени ракеты. Для плоского случая движения ГЧ на атмосферном участке траектории [уравнения (4.38) или (4.40)] число начальных условий движения сокращается до шести.

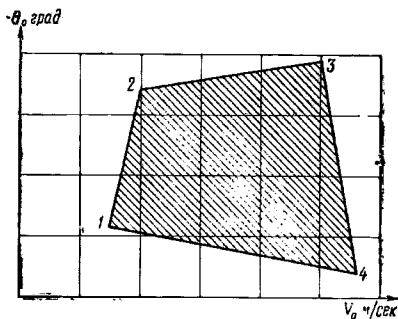


Рис. 4.11. Область начальных условий движения центра масс головной части при входе в атмосферу

При стрельбе ракетой на различные дальности от минимальной до максимальной при различных географических условиях пуска параметры движения центра масс ГЧ в момент входа в атмосферу образуют некоторую область начальных условий движения.

Если принять, что вход ГЧ в атмосферу происходит на некоторой условной высоте  $h_0$ , и начальную дальность атмосферного участка траектории, соответствующую этой высоте, положить равной нулю ( $L_0=0$ ), то получим область начальных условий  $V_0, \Theta_0$  движения центра масс ГЧ на высоте  $h_0$ .

На рис. 4. 11 изображена одна из возможных областей начальных условий движения центра масс ГЧ на высоте входа в атмосферу. В приведенной области начальных условий  $V_0, \Theta_0$  линия 1—2 соответствует стрельбе на минимальную дальность, линия 3—4 — на максимальную, линия 2—3 соответствует стрельбе в восточном направлении, 1—4 — стрельбе в западном направлении.

При плоских колебаниях ГЧ в атмосфере начальные условия колебаний ГЧ задаются двумя параметрами:  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0$ . Вместо этих двух параметров можно задавать только один параметр  $\alpha_0$ , так как к любой паре начальных условий колебаний  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0 \neq 0$  всегда можно подобрать такие  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0=0$ , что амплитуда углов атаки ГЧ будет такой же, как и при исходных начальных условиях  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0 \neq 0$ . Поэтому при решении практических задач, например при исследовании максимальных поперечных перегрузок или же максимальных отклонений параметров движения ГЧ за счет колебаний угла атаки, начальные условия колебаний удобно задавать в виде  $\alpha_0=\alpha'_0$  и  $\alpha'_0=0$ , так чтобы при всевозможных значениях  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0$  углы атаки ГЧ не выходили с заданной вероятностью  $B$  за пределы огибающей углов атаки, полученной при  $\alpha_0=\alpha'_0$  и  $\alpha'_0=0$ .

Для этого задаются некоторыми значениями  $\alpha'_0$ , определяют огибающую углов атаки  $A(t)$  и находят вероятность появления углов атаки, не превосходящих значения  $A(t)$ . Если полученная вероятность мала, выбирают новое значение  $\alpha'_0$ , меньшее прежнего, снова определяют указанную вероятность и т. д.

Для определения вероятности  $B(\alpha'_0)$  появления углов атаки, не превышающих расчетных значений  $A(t)$ , можно предложить различные методы. Рассмотрим два из них: метод, основанный на использовании законов распределения случайных значений  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0$  в момент входа в атмосферу (метод выделения областей неблагоприятных начальных условий колебаний), и метод статистических испытаний.

#### Метод выделения областей неблагоприятных начальных условий колебаний

Неблагоприятными начальными условиями колебаний назовем такие начальные условия  $\alpha_0$  и  $\alpha'_0$ , при которых углы атаки выходят на соответствующих высотах за пределы огибающей  $A$ ,

полученной для принятых начальных условий  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0 = 0$  (при  $h = h_0$ ). Все остальные сочетания  $\alpha_0$  и  $\dot{\alpha}_0$  являются благоприятными.

Определение вероятности появления благоприятных начальных условий колебаний производится в следующей последовательности:

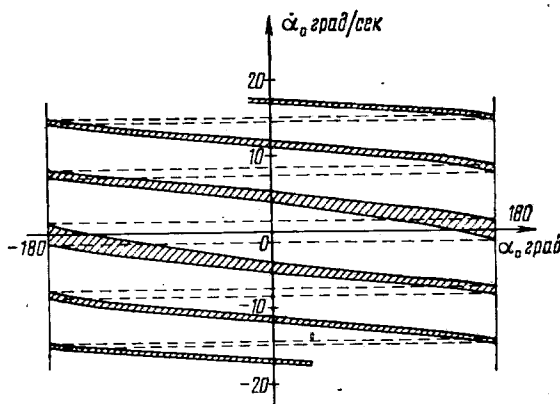


Рис. 4.12. Примерный вид области (заштрихована) неблагоприятных начальных условий колебаний головной части при входе в атмосферу

1) рассчитывают параметры движения ГЧ на атмосферном участке траектории для принятых расчетных начальных условий колебаний  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0 = 0, q = q_0$  и определяют зависимости  $A(t), h(t), V(t)$ ;

2) задают из области возможных начальных условий колебаний в момент входа в атмосферу на высоте  $h_0$  ряд значений  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$  и, интегрируя уравнение (4.39), подбирают такие значения  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$ , которые приводят к колебаниям угла атаки с амплитудой  $A(t)$ . Такие начальные условия  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0$  эквивалентны начальным условиям  $\alpha_0, \dot{\alpha}_0 = 0$ .

Геометрическое место эквивалентных начальных условий колебаний образует в области возможных значений параметров в  $\alpha_0$  и  $\dot{\alpha}_0$  линии, ограничивающие область неблагоприятных начальных условий колебаний. Примерный вид области неблагоприятных начальных условий на высоте  $h_0$  изображен на рис. 4.12 (область  $D$  неблагоприятных начальных условий колебаний заштрихована);

3) определяет вероятность  $P$  того, что начальные условия

$\alpha_0, \dot{\alpha}_0$  попадают в область ( $D$ ) неблагоприятных начальных условий колебаний:

$$P = \int_D \int f(\alpha_0, \dot{\alpha}_0) d\alpha_0 d\dot{\alpha}_0,$$

где  $f(\alpha_0, \dot{\alpha}_0)$  — плотность распределения вероятностей случайных величин  $\alpha_0$  и  $\dot{\alpha}_0$ .

Предположим, что угол атаки ГЧ на высоте  $h_0$  подчинен закону равномерной плотности вероятности  $f(\alpha_0) = 1/360^\circ$  (т. е. ГЧ совершает плоское движение и в течение свободного полета делает несколько оборотов), а угловая скорость — нормальному закону:

$$f(\dot{\alpha}_0) = \frac{1}{\sigma_{\dot{\alpha}_0} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\dot{\alpha}_0 - m_{\dot{\alpha}_0})^2}{2\sigma_{\dot{\alpha}_0}^2}},$$

причем случайные величины  $\alpha_0$  и  $\dot{\alpha}_0$  независимы, т. е.

$$f(\alpha_0, \dot{\alpha}_0) = f(\alpha_0) f(\dot{\alpha}_0).$$

Тогда вероятность появления неблагоприятных начальных условий колебаний определяется формулой

$$P = \frac{1}{360 \sigma_{\dot{\alpha}_0} \sqrt{2\pi}} \iint_D e^{-\frac{(\dot{\alpha}_0 - m_{\dot{\alpha}_0})^2}{2\sigma_{\dot{\alpha}_0}^2}} d\alpha_0 d\dot{\alpha}_0.$$

При вычислениях по этой формуле разбивают область  $D$  на ряд элементарных областей  $D_i$  шириной  $\Delta\alpha_0$  прямыми, параллельными оси  $O\dot{\alpha}_0$ . Тогда вероятность неблагоприятных начальных условий колебаний ГЧ будет равна:

$$P = \sum_{i=1}^n P_i;$$

$$P_i = \frac{\Delta\alpha_0}{2 \cdot 360} \left[ \Phi \left( \frac{\dot{\alpha}_{0в} - m_{\dot{\alpha}_0}}{\sigma_{\dot{\alpha}_0} \sqrt{2}} \right) - \Phi \left( \frac{\dot{\alpha}_{0н} - m_{\dot{\alpha}_0}}{\sigma_{\dot{\alpha}_0} \sqrt{2}} \right) \right]_i,$$

где  $n$  — число элементарных областей  $D_i$ ;

$\Phi$  — функция Лапласа;

$\alpha_{0в}$  и  $\alpha_{0н}$  — ординаты середин верхней и нижней границ элементарной области  $D_i$  соответственно.

При значениях  $\alpha_0$  и  $\dot{\alpha}_0$ , соответствующих области благоприятных начальных условий, движение ГЧ происходит с углами



атаки, не превышающими расчетные  $A(t)$ . Вероятность такого движения равна

$$B = 1 - P.$$

Полученное таким методом значение вероятности  $B$  является приближенным, так как фактический закон распределения случайных начальных условий  $f(\alpha_0, \alpha_0)$  может отличаться от принятого. Кроме того, этот метод не позволяет учесть случайные разбросы характеристик ГЧ и параметров атмосферы. Для определения более точного значения вероятности  $B$  можно применить другие методы, например метод статистических испытаний.

### Метод статистических испытаний

Для определения вероятности  $B$  благоприятных начальных условий колебаний ГЧ с помощью метода статистических испытаний на ЦВМ проводится  $N$  расчетов параметров движения ГЧ при случайных сочетаниях параметров ГЧ, атмосферы, характеристик ветра и других факторов, определяющих угловое движение ГЧ. Затем строится функция распределения  $f(A)$  амплитуды углов атаки ГЧ на некоторой высоте  $h$  и по этой функции распределения определяется вероятность  $B$  того, что расчетное значение амплитуды углов атаки  $A(h)$  не будет превзойдено.

С целью сокращения затрат машинного времени приходится использовать более или менее упрощенные уравнения движения ГЧ, вводя различные допущения, практически не влияющие на максимальные углы атаки, например, допущение о том, что движение ГЧ является плоским.

---

В результате влияния различных возмущений фактическая траектория ракеты и головной части (ГЧ) никогда не совпадает с номинальной, а точка падения головной части неизбежно отклоняется от расчетной точки прицеливания на некоторую случайную величину. Это явление называется рассеиванием.

Определим плоскость рассеивания как касательную к земному эллипсоиду плоскость, проведенную через точку цели. На этой плоскости построим декартову систему координат  $OLZ$  (рис. 5.1). На рисунке обозначено:  $A$  — точка старта;  $O$  — точка цели; траектория  $AK^*O$  — номинальная, соответствующая расчетному времени отделения  $\Gamma Ч t_k^*$ .

A diagram of a sphere with several geometric elements. A vertical axis passes through the center, with point N at the top pole and S at the bottom pole. A horizontal dashed line represents the equator, with Q at its left end and another Q at its right end. A great circle arc is drawn from point A on the left towards the top, passing through points K and K\*. Another arc starts near the top and goes down towards the right, passing through points L and O'. Point Z is located on the vertical axis between N and the center. An angle labeled  $\varphi_r$  is shown at the center of the sphere, between a vertical line segment and a line segment extending towards point O'. Arrows are present on some of the arcs, indicating direction or flow.

Рис. 5.1. Система координат для определения рассеивания точек падения головных частей:  
*O*—начало координат (точка падения головной части при номинальных условиях, или точка цели)

увеличения дальности; обозначим эту ось  $OL$  и будем отсчитывать вдоль нее отклонение по дальности  $\Delta L$ . В связи с тем, что ось  $OZ$  перпендикулярна оси  $OL$ , малые изменения времени  $t_k$  приводят к отклонению точки падения головной части от цели по оси  $OZ$  на величину второго порядка малости по сравнению с величиной  $\Delta L$ , т. е. производная боковой координаты точки падения ГЧ по времени  $t_k$  примерно равна нулю. Это свойство оказывается весьма удобным при расчетах рассеивания.

Систему координат  $OLZ$ , построенную указанным образом, будем называть условной системой координат.

Все возмущающие факторы, влияющие на рассеивание головных частей, можно разделить на две группы. К первой группе относятся возмущающие факторы, действующие на активном участке траектории, ко второй — возмущающие факторы, действующие на пассивном участке.

На активном участке траекторий, где движение ракеты управляемое, отклонения фактических значений параметров движения от расчетных обуславливаются, в основном, погрешностями системы управления. На пассивном участке, где движение головной части неуправляемое, возмущающими факторами являются погрешности изготовления ГЧ, отличия фактического состояния атмосферы от номинального и разбросы начальных условий (при входе в атмосферу) движения ГЧ вокруг центра масс.

Различие условий движения ракеты на активном участке и ее головной части на пассивном участке обуславливают различный подход к определению точности стрельбы и разработке мероприятий, повышающих эту точность.

Для уменьшения рассеивания точек падения головных частей, обусловленного отклонениями фактического движения ракеты от номинального на активном участке траектории, идеальная система управления должна полностью учитывать отклонения параметров движения ракеты от номинальных и компенсировать эти отклонения таким образом, чтобы свести их влияние в конце полета ГЧ к цели до нуля. Однако неизбежные погрешности в работе отдельных элементов системы управления, обусловленные неточностью изготовления и условиями эксплуатации, приводят к погрешностям в определении координат и проекций скорости ракеты. Кроме того, с целью упрощения аппаратуры (для уменьшения ее веса, стоимости, повышения надежности и т. д.) нередко упрощают алгоритм обработки информации о движении ракеты, что также приводит к известным неточностям при определении параметров движения ракеты.

Естественно, что успех решения задачи попадания ГЧ в цель реальной системой управления зависит от того, насколько полно алгоритм управления учитывает всевозможные факторы, влияющие на точность стрельбы. Неполнота учета системой управления возмущающих факторов, влияющих на точность стрельбы, приводит к появлению так называемой методической ошибки

Эта ошибка возникает вследствие того, что приборами системы наведения контролируются параметры, не связанные непосредственно с дальностью полета ГЧ — составляющие кажущейся скорости и кажущегося пути. Если некоторое возмущение вызвало изменение траектории, то появляется отклонение точки падения ГЧ, несмотря на то, что контролируемые системой наведения параметры в момент отделения ГЧ точно равны требуемым значениям. Примером методической ошибки может служить погрешность, вызванная пренебрежением влияния боковых отклонений на дальность стрельбы. Для уменьшения методических ошибок обычно приходится усложнять алгоритм управления и, следовательно, саму систему управления.

Как и любое автоматическое устройство, система управления имеет некоторую инструментальную ошибку, в состав которой входят следующие составляющие:

ошибки измерительных устройств — смещение нулей, неточности передаточных коэффициентов, уходы гироскопов, ошибки начального ориентирования;

ошибки вычислительных устройств — ошибки округления, аппроксимации, ошибки функциональных устройств (сумматоров, множителей, интегрирующих устройств), погрешности преобразователей координат.

С усложнением системы управления ее инструментальная ошибка обычно возрастает. Таким образом, при правильном подходе к выбору алгоритмов управления дальностью и направлением полета ГЧ должны учитываться как инструментальные, так и методические ошибки.

## **5.2. РАССЕИВАНИЕ ГОЛОВНЫХ ЧАСТЕЙ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ВОЗМУЩЕНИЯМИ НА ПАССИВНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ**

При движении головных частей на пассивном участке траектории основные возмущающие факторы, вызывающие отклонения точек падения от расчетных, действуют на атмосферном участке. К ним, в первую очередь, относятся следующие:

- разбросы параметров атмосферы;
- ветер;
- отклонения характеристик ГЧ (весовых, геометрических, центровочных, аэродинамических и др.);
- разбросы начальных условий углового движения ГЧ в атмосфере.

Рассмотрим действие каждого из приведенных возмущающих факторов.

Из параметров атмосферы на рассеивание точек падения основное влияние оказывают разбросы плотности и температуры воздуха. Особенностью этих возмущающих факторов является то, что на различных участках движения ГЧ в атмосфере они

имеют, как правило, различные, иногда даже противоположные по знаку значения. Например, в зимний период плотность атмосферы у поверхности Земли выше номинальной (стандартной), а на высотах более 6—10 км — ниже. Отрицательные отклонения плотности атмосферы на больших высотах вызывают положительные отклонения дальности полета, положительные отклонения плотности у поверхности Земли — отрицательные отклонения дальности. Суммарное отклонение дальности полета за счет разброса плотности атмосферы зависит от характеристик ГЧ и от конкретных значений параметров атмосферы.

Для расчетов рассеивания головных частей отклонения плотности и температуры атмосферы, являющиеся случайными функциями высоты, можно задавать в виде канонического разложения (см. разд. 1.2).

Действие ветра может вызвать отклонения точек падения ГЧ как по дальности, так и по направлению. Скорость и направление ветра также являются случайными функциями высоты, которые для расчетов рассеивания ГЧ можно задавать также в виде канонических разложений.

Отклонения характеристик ГЧ от номинальных по их влиянию на отклонения точек падения сгруппируем следующим образом:

- отклонения веса ( $G$ ), площади мишени ( $S$ ) и коэффициента аэродинамического сопротивления ( $c_x$ ) от расчетных значений (разброс, так называемого, баллистического коэффициента  $\sigma_x = c_x S / G$ );

- поперечное смещение центра масс ГЧ относительно геометрической оси симметрии.

Отклонения других характеристик головной части (например, моментов инерции, длины и др.) на рассеивание точек падения влияют незначительно.

Увеличение баллистического коэффициента  $\sigma_x$  вызывает отрицательные отклонения дальности, уменьшение — положительные. Поперечное смещение центра масс ГЧ  $r_\tau = \sqrt{y_\tau^2 + z_\tau^2}$

вызывает движение ГЧ с некоторым балансировочным углом атаки (4.45), ориентация плоскости которого относительно плоскости стрельбы зависит от угла собственного вращения  $\psi$  в данный момент времени. В связи с тем, что при движении неуправляемых головных частей значение угла  $\psi$  произвольно, отклонения точки падения за счет поперечного смещения центра масс может быть как по дальности, так и по направлению.

Для ГЧ, вращающихся вокруг продольной оси, влияние поперечного смещения центра масс на рассеивание точек падения существенно снижается и при некотором значении угловой скорости вращения может быть сведено практически к нулю.

При движении ГЧ с углами атаки, возникающими за счет неориентированного входа в атмосферу, происходит увеличение

аэродинамического сопротивления ГЧ, которое приводит к отрицательному отклонению дальности, величина которого зависит от амплитуды колебаний угла атаки; при этом наименьшее отрицательное отклонение дальности соответствует движению с нулевыми углами атаки, наибольшее отрицательное — движению с максимальной амплитудой колебаний угла атаки (соответствующей заданной вероятности).

Для расчетов рассеивания ГЧ за счет факторов, действующих на пассивном участке траектории, можно проводить численное интегрирование (с помощью ЦВМ) системы уравнений возмущенного движения ГЧ вида (4.36) — (4.37), оценивая отдельно влияние каждого возмущающего фактора на координаты точки падения.

Предполагая, что указанные возмущающие факторы независимы друг от друга, а отклонения точек падения пропорциональны величинам возмущений, определяют предельные значения отклонений точек падения ГЧ геометрическим суммированием предельных отклонений, вызванных каждым возмущающим фактором:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n L &= \sqrt{[\Delta L(\Delta Q, \Delta T)]^2 + [\Delta L(W)]^2 + [\Delta L(\sigma_x)]^2 + \\ &\quad \sqrt{V + [\Delta L(r_T)]^2 + [\Delta L(\alpha_0, \dot{\alpha}_0)]^2}; \\ \Delta_n Z &= \sqrt{[\Delta Z(W)]^2 + [\Delta Z(r_T)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Для более строгого и точного определения отклонений координат точек падения ГЧ за счет факторов, действующих на пассивном участке траектории, можно применять другие статистические методы, например метод статистических испытаний.

### 5.3. ИНЕРЦИАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДАЛЬНОСТЬЮ И НАПРАВЛЕНИЕМ ПОЛЕТА ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ

#### Постановка задачи

При исследовании инерциальной системы наведения движение ракеты целесообразно рассматривать относительно инерциальной системы координат. При этом значительно упрощается зависимость параметров движения ракеты от измеряемых составляющих ускорения и облегчается анализ ошибок системы наведения.

Поместим начало инерциальной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  в центр Земли, а координатные оси направим параллельно соответствующим осям начальной стартовой системы координат. Между параметрами движения ракеты, определенными относительно инерциальной и стартовой систем координат, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{r}_c &= \bar{r} - \bar{R}_0; \\ \bar{V} &= \bar{V}_a - \bar{\omega}_3 \times \bar{r}, \end{aligned}$$



где  $\bar{r}_c, \bar{r}$  — радиусы-векторы, определяющие положение центра масс ракеты относительно точки старта и относительно центра Земли, соответственно;

$R_0$  — радиус-вектор, определяющий положение точки старта относительно центра Земли;

$\bar{V}, \bar{V}_a$  — векторы скорости центра масс ракеты, определяемые относительно стартовой и инерциальной систем координат, соответственно;

$\bar{\omega}_3$  — вектор угловой скорости суточного вращения Земли.

Определим дальность стрельбы как расстояние, измеренное по дуге большого круга между точкой старта и точкой пересечения нисходящей ветви траектории полета ракеты с поверхностью земного эллипсоида.

Как известно, дальность стрельбы однозначно определяется параметрами движения ракеты относительно стартовой системы координат в момент  $t_K$  отделения ГЧ

$$L = L[x(t_K), y(t_K), z(t_K), V_x(t_K), V_y(t_K), V_z(t_K)]$$

или параметрами движения ракеты относительно инерциальной системы координат в момент отделения ГЧ и продолжительностью  $t_K$  полета ракеты до этого момента

$$L = L[\xi(t_K), \eta(t_K), \zeta(t_K), V_\xi(t_K), V_\eta(t_K), V_\zeta(t_K), t_K]. \quad (5.2)$$

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать также следующие обозначения параметров движения:

$$q_1 = \xi, q_2 = \eta, q_3 = \zeta, \dot{q}_1 = V_\xi, \dot{q}_2 = V_\eta, \dot{q}_3 = V_\zeta.$$

Если в выражении (5.2) принять, что параметры конца активного участка равны их расчетным (номинальным) значениям:

$$\left. \begin{aligned} q_i(t_K) &= q_i^*(t_K^*); \\ \dot{q}_i(t_K) &= \dot{q}_i^*(t_K^*); \\ t_K &= t_K^*, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

то получим расчетную дальность стрельбы

$$L^* = L[q_i^*(t_K^*), \dot{q}_i^*(t_K^*), t_K^*]. \quad (5.4)$$

При выполнении условий (5.3) отделение ГЧ можно осуществить в расчетный момент времени  $t_K^*$ . Однако в реальном полете из-за воздействия на ракету возмущающих факторов параметры движения в расчетный момент времени  $t_K^*$  будут отличаться от расчетных и, следовательно,

$$L[q_i(t_K^*), \dot{q}_i(t_K^*), t_K^*] \neq L^*.$$

Условие (5.4) не определяет, очевидно, значения каждой из величин  $q_i(t_k)$ ,  $\dot{q}_i(t_k)$ ,  $t_k$ ; оно лишь требует, чтобы для достижения дальности  $L^*$  их совокупность удовлетворяла соотношению (5.4); таких совокупностей, вообще говоря, может быть бесчисленное множество. С другой стороны, для каждой конкретной траектории активного участка в силу условий единственности лишь одна совокупность  $\{q_i(t_k), \dot{q}_i(t_k), t_k\}$  соответствует расчетной дальности  $L^*$ . Эти соображения указывают на один из методов управления дальностью стрельбы: требуется прекращать активный участок траектории, точнее говоря, отделять ГЧ, в момент  $t=t_k$ , когда функция  $L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]$  достигает требуемого значения  $L^*$ . Реализацию указанного метода можно осуществить с помощью некоторой системы измерительных и вычислительных устройств, определяющих текущие значения  $q_i(t)$  и  $\dot{q}_i(t)$  с последующим вычислением функции  $L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]$  и непрерывным сравнением ее текущего значения  $L$  с заданным  $L^*$ . В момент времени, когда выполняется равенство

$$L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t] = L^*, \quad (5.5)$$

подается команда на отделение головной части.

Сформулируем теперь общую постановку задачи выбора момента времени отделения ГЧ. Этот момент должен определяться по текущим значениям измеренных параметров движения центра масс ракеты. Посредством вычислительного устройства той или иной сложности можно вычислять значение некоторой функции  $J$  от текущих параметров движения и отделять ГЧ, когда это значение становится равным требуемому. Функцию  $J$ , с помощью которой определяется момент отделения ГЧ, будем называть в дальнейшем *управляющим функционалом*, или просто *функционалом*. (В ряде работ применяются также термины «баллистическая функция», или «управляющая функция»).

Значение управляющего функционала в некоторый момент времени должно быть непосредственно связано с величиной ошибки стрельбы, которая возникла бы, если отделение ГЧ произошло в этот момент времени. Система управления должна выдавать сигнал на отделение ГЧ при достижении функционалом значения, соответствующего нулевой (практически минимальной) величине упомянутой ошибки.

Одним из возможных управляющих функционалов является сама дальность стрельбы, выраженная через текущие координаты ракеты и проекции ее скорости:

$$J_L = L[q_i(t), \dot{q}_i(t), t]. \quad (5.6)$$

Используя это выражение, ошибку стрельбы можно представить в виде

$$\Delta L = L[q_i(t_k), \dot{q}_i(t_k), t_k] - L^* = J_L - J_L^*. \quad (5.7)$$

Функционалу (5.6) соответствуют уравнения управления (5.5) и ошибки стрельбы (5.7). Если отделить ГЧ в момент выполнения условия (5.5), то, естественно, ошибки в дальности за счет возмущений активного участка не будет.

Однако возможности построения функционала (5.6) ограничены, в частности, ограниченным быстродействием вычислительной аппаратуры. Поэтому обычно используется функционал, получающийся в результате разложения функции  $L[q_i(t_k), \dot{q}_i(t_k), t_k]$  в ряд Тейлора в окрестности расчетных значений ее аргументов.

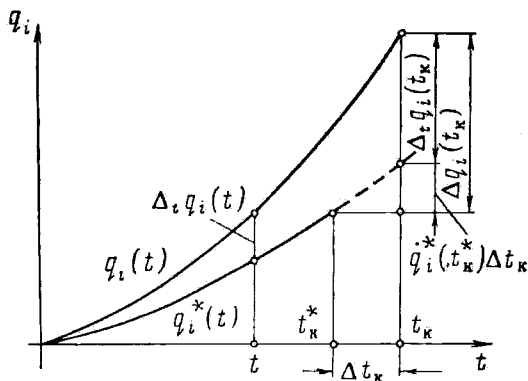


Рис. 5.2. К определению полных и изохронных вариаций параметров движения ракеты

Пусть  $q_i^*(t)$  — расчетное изменение  $i$ -го параметра движения по времени и  $t_k^*$  — расчетный момент времени отделения ГЧ;  $q_i(t)$  — фактическое изменение  $i$ -го параметра и  $t_k$  — фактический момент отделения ГЧ (рис. 5.2).

Разность

$$\Delta q_i(t_k) = q_i(t_k) - q_i^*(t_k^*) \quad (5.8)$$

будем называть полной вариацией параметра  $q_i$ .

Аналогично

$$\Delta \dot{q}_i(t_k) = \dot{q}_i(t_k) - \dot{q}_i^*(t_k^*). \quad (5.8a)$$

С точностью до членов второго порядка малости относительно полных вариаций имеем

$$\begin{aligned} \Delta L = L - L^* = & \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \Delta \zeta + \frac{\partial L}{\partial V_\xi} \Delta V_\xi + \\ & + \frac{\partial L}{\partial V_\eta} \Delta V_\eta + \frac{\partial L}{\partial V_\zeta} \Delta V_\zeta + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t_k, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $\Delta t_k = t_k - t_k^*$  — вариация момента времени отделения ГЧ.

Частные производные в этом выражении (баллистические коэффициенты) определяются для расчетных значений переменных  $\xi^*(t_k^*)$ ,  $\eta^*(t_k^*)$ , ...,  $V_\zeta^*(t_k^*)$ ,  $t_k^*$  (обычно расчетами на ЦВМ).

Аналогично выражению (5.9) записывается отклонение  $\Delta Z$  точки падения ГЧ от плоскости стрельбы

$$\begin{aligned} \Delta Z = & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial Z}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \Delta \zeta + \frac{\partial Z}{\partial V_\xi} \Delta V_\xi + \\ & + \frac{\partial Z}{\partial V_\eta} \Delta V_\eta + \frac{\partial Z}{\partial V_\zeta} \Delta V_\zeta. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Принимая во внимание выражения для вариаций (5.8), запишем условия равенства нулю соотношений (5.9) и (5.10) в виде

$$\Delta L = J_L - J_L^* = 0 \text{ или } J_L = J_L^*; \quad (5.11)$$

$$\Delta Z = J_Z - J_Z^* = 0 \text{ или } J_Z = J_Z^*, \quad (5.12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_L &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial q_i} q_i(t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j(t) + \frac{\partial L}{\partial t} t; \\ J_L^* &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial L}{\partial q_i} q_i^*(t_k^*) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial t} t_k^*; \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$\left. \begin{aligned} J_Z &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Z}{\partial q_i} q_i(t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j(t); \\ J_Z^* &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial Z}{\partial q_i} q_i^*(t_k^*) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial Z}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j^*(t_k^*). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Функционал  $J_L$  будем называть *функционалом управления дальностью полета*, а  $J_Z$  — *функционалом управления направлением полета*. Величины  $J_L^*$  и  $J_Z^*$  будем называть *настроечными значениями* соответствующих функционалов.

Если отличие действительного движения ракеты от расчетного невелико, т. е. вариации (5.8) малы, то при отделении ГЧ в момент времени, являющийся корнем уравнения (5.11), отклонение ГЧ от цели по дальности за счет возмущений активного участка будет величиной второго порядка малости.

Можно всегда найти такой момент времени отделения ГЧ, когда равенство (5.11) выполняется; достичь же выполнения ра-

венства (5.12), только варьируя временем отделения ГЧ, вообще говоря, нельзя. Чтобы это равенство выполнялось, необходимо в момент отделения ГЧ сообщить ракете некоторую боковую составляющую скорости. Требуемую величину этой составляющей скорости можно получить путем подачи соответствующих сигналов в канал боковой стабилизации.

Для вычисления функционалов (5.11) и (5.12) в процессе полета необходимо знать компоненты вектора скорости и координаты ракеты. Определение этих данных в стартовой системе координат с помощью измерительных средств, установленных на Земле (как это делается в радиокомандных системах наведения), вполне осуществимо с требуемой точностью. Однако при использовании инерциальных систем наведения эти параметры непосредственно не могут быть замерены. Поэтому при разработке инерциальных систем очень важно подобрать управляющий функционал достаточно простого вида, обеспечивающий требуемую точность управления дальностью и направлением стрельбы.

Рассмотрим один из возможных путей упрощения управляющих функционалов, пригодный для любых типов систем наведения.

Как видно из соотношений (5.9) и (5.10), отклонение точки падения ГЧ по дальности  $\Delta L$  зависит не только от вариаций параметров движения центра масс ракеты в плоскости стрельбы ( $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta V_{\xi}, \Delta V_{\eta}$ ), но и от вариаций параметров бокового движения ракеты ( $\Delta \zeta, \Delta V_{\zeta}$ ). Отклонение точки падения по направлению  $\Delta Z$ , в свою очередь, зависит не только от вариаций параметров бокового движения ( $\Delta \zeta, \Delta V_{\zeta}$ ), но и от вариаций  $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta V_{\xi}, \Delta V_{\eta}$ . Несмотря на это, в системах управления ракетами с регулируемой тягой может использоваться схема независимого управления дальностью и направлением стрельбы.

Рассмотрим порядок величин баллистических производных для случая стрельбы баллистической ракетой на дальность около 10 000 км:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} &\approx 5000 - 6000 \text{ сек}, & \frac{\partial L}{\partial \xi} &\approx 1 - 2; \\ \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} &\approx 1500 - 2500 \text{ сек}, & \frac{\partial L}{\partial \eta} &\approx 2 - 10; \\ \frac{\partial L}{\partial V_{\zeta}} &\approx 100 - 200 \text{ сек}, & \frac{\partial L}{\partial \zeta} &\approx 0,1 - 0,5. \end{aligned}$$

Как можно заметить, производные от дальности по параметрам бокового движения  $\frac{\partial L}{\partial V_{\zeta}}, \frac{\partial L}{\partial \zeta}$  существенно меньше соответствующих производных дальности по проекциям скоростей и координатам, характеризующим движение ракеты в плоскости

стрельбы. Аналогично производные  $\frac{\partial Z}{\partial V_{\xi}}, \frac{\partial Z}{\partial V_{\eta}}, \frac{\partial Z}{\partial \xi}, \frac{\partial Z}{\partial \eta}$  оказываются существенно меньше, чем  $\frac{\partial Z}{\partial V_{\zeta}}$  и  $\frac{\partial Z}{\partial \zeta}$ .

Независимое управление становится возможным благодаря достаточно точной работе систем регулирования кажущейся скорости, нормальной и боковой стабилизации движения центра масс ракеты. При этом вариации параметров движения центра масс ракеты в момент отделения ГЧ остаются в таких пределах, что для обеспечения заданной точности стрельбы нет необходимости в управляющем функционале учитывать влияние вариаций  $\Delta \zeta, \Delta V_{\zeta}$  на отклонение по дальности, а вариаций  $\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta V_{\xi}, \Delta V_{\eta}$  на отклонение по направлению. В результате дальность полета определяется отделением ГЧ в момент времени, когда выполняется равенство

$$J_L(t) = J_L^*, \quad (5.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_L &= \frac{\partial L}{\partial \xi} \xi(t) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \eta(t) + \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} V_{\xi}(t) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} V_{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial t} t; \\ J_L^* &= \frac{\partial L}{\partial \xi} \xi^*(t_k) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \eta^*(t_k) + \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} V_{\xi}^*(t_k) + \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} V_{\eta}^*(t_k) + \frac{\partial L}{\partial t} t_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

При этом необходимое направление полета ГЧ обеспечивается выполнением в момент ее отделения следующего условия, накладываемого на боковую составляющую скорости:

$$J_z(t_k) = J_z^*, \quad (5.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} J_z(t_k) &= \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \zeta(t_k) + \frac{\partial Z}{\partial V_{\zeta}} V_{\zeta}(t_k); \\ J_z^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

В наиболее простой системе наведения направление полета ракеты и головной части задается с помощью предстартовой ориентации соответствующих измерительных элементов и выдерживается с требуемой точностью системой боковой стабилизации ракеты (см. разд. 1.8); соответствующие законы управления боковым движением имеют вид

$$V_{\zeta}(t) = 0; \quad \zeta(t) = 0. \quad (5.19)$$

Приведем теперь уравнение управления (5.15) к такой форме, которая позволяет получать необходимую для вычислений информацию непосредственно от инерциальных измерительных устройств.



## Уравнение управления дальностью в кажущихся параметрах движения

Принцип действия инерциальных измерительных систем основывается на измерении ускорений и использовании инерционных свойств гироскопов. При помощи гироскопических приборов фиксируется направление в пространстве осей некоторой инерциальной системы координат. Измеряя проекции ускорения ракеты на какие-либо направления в инерциальном пространстве и интегрируя замеренные величины, можно получить проекции скорости ракеты и составляющие пройденного ракетой пути и, следовательно, координаты ракеты.

Как известно, инерциальные измерители ускорений могут измерять проекции так называемого кажущегося, а не действительного ускорения той точки ракеты, в которой они расположены. Вектором кажущегося ускорения какой-либо точки называют вектор разности между ускорением относительно инерциальной системы координат и ускорением силы тяжести:

$$\ddot{\vec{w}} = \dot{\vec{V}} - \vec{g}. \quad (5.20)$$

Обычные одноосные акселерометры измеряют проекцию вектора кажущегося ускорения  $\ddot{\vec{w}}$  на направление своей оси чувствительности  $\vec{\lambda}$ , т. е. величину

$$\ddot{w}_\lambda = \dot{V}_\lambda - g_\lambda, \quad (5.21)$$

где  $\dot{V}_\lambda$  — проекция на ось  $\vec{\lambda}$  ускорения корпуса измерителя относительно инерциальной системы координат;

$g_\lambda$  — проекция на ту же ось ускорения силы тяжести.

Указанное обстоятельство обусловлено действием сил тяготения, которые на основании общего принципа относительности Эйнштейна нельзя отличить от сил инерции. Это приводит к тому, что ускорение силы тяжести акселерометр отмечает как ускорение, направленное в сторону, противоположную проекции вектора силы тяжести на ось чувствительности прибора.

Кроме акселерометров, для целей инерциальной навигации применяют также интеграторы ускорений. Среди них широко распространены гироскопические интеграторы. Скорость угловой прецессии гиринонтегратора  $\omega$  пропорциональна составляющей кажущегося ускорения вдоль оси прецессии  $\dot{w}_\lambda$ . Выходной сигнал гиринонтегратора, характеризующий угол прецессии

$$\varphi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau = K \int_0^t \dot{w}_\lambda(\tau) d\tau = K w_\lambda, \quad (5.22)$$

пропорционален составляющей кажущейся скорости по оси  $\vec{\lambda}$ :

$$w_\lambda = \int_0^t \dot{w}_\lambda(\tau) d\tau \quad (w_\lambda(0) = 0). \quad (5.23)$$

Повторное интегрирование выходного сигнала гиросинтезатора  $\Phi$ , осуществляемое уже другим прибором, даст величину кажущегося пути по направлению  $\bar{\lambda}$ :

$$s_{\lambda} = \int_0^t \omega_{\lambda}(\tau) d\tau \quad (s_{\lambda}(0) = 0). \quad (5.24)$$

В соответствии с выражениями (5.20), (5.21), (5.23) и (5.24) можно ввести понятия векторов кажущейся скорости и кажущегося пути, представляя эти векторы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}(t) &= \int_0^t \dot{\bar{\omega}}(\tau) d\tau = \bar{V}(t) - \int_0^t \bar{g}(\tau) d\tau; \\ \bar{s}(t) &= \int_0^t \bar{\omega}(\tau) d\tau = \int_0^t \bar{V}(\tau) d\tau - \int_0^t \int_0^{\tau} \bar{g}(\tau) d\tau dt \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

при  $\bar{\omega}(0) = 0$  и  $\bar{s}(0) = 0$ .

Координаты и составляющие скорости центра масс ракеты могут быть рассчитаны, если в уравнении движения центра масс, определяющем абсолютное ускорение:

$$\ddot{\bar{r}} = \dot{\bar{V}} = \dot{\bar{\omega}} + \bar{g}(\bar{r}), \quad (5.26)$$

где  $\bar{r}$  — радиус-вектор центра масс ракеты, известна правая часть и начальные условия (координаты и проекции скорости точки старта). С помощью трех акселерометров (или гиросинтезаторов), ориентированных относительно инерциальных осей и установленных в центре масс ракеты, можно вычислить три составляющие кажущегося ускорения  $\dot{\bar{\omega}}$  (или скорости  $\bar{\omega}$ ). Для вычисления составляющих ускорения силы тяжести должна быть задана зависимость  $\bar{g}(\bar{r})$ .

Уравнение (5.26) может быть решено одним из численных методов (методом итераций и т. п.). Для автоматического вычисления функции  $\bar{r}(t)$  можно использовать блок-схему (рис. 5.3), получившую название схемы автоматической компенсации. Приведенная схема достаточно сложна, поэтому целесообразно использовать ряд упрощений. Так, для ракет, двигающихся по траекториям, близким к расчетным, функция  $\bar{g}(t)$  может быть вычислена предварительно. В этом случае блок-схема автокомпенсации становится разомкнутой с программным вводом поправки на ускорение силы тяжести (рис. 5.4).

Определение вариаций действительных параметров движения  $\Delta q_i(t)$  и  $\Delta \dot{q}_i(t)$  с помощью инерциальных измерительных систем с применением схем автокомпенсации усложняет и удорожает систему управления. Вместе с тем оказывается, что при

достаточно малых отклонениях возмущенного движения ракеты от расчетного можно перейти к кажущимся параметрам движения, непосредственно получаемым инерциальной измерительной системой. Для этого вводят понятие об *изохронных вариациях* параметров движения ракеты.

Рассматривая зависимости  $q_i(t)$  и  $q_i^*(t)$  в любой момент времени  $t (0 \leq t \leq t_k^*)$ , определим *изохронную вариацию*  $q_i(t)$  в момент времени  $t$  как

$$\Delta_i q_i(t) = q_i(t) - q_i^*(t). \quad (5.27)$$

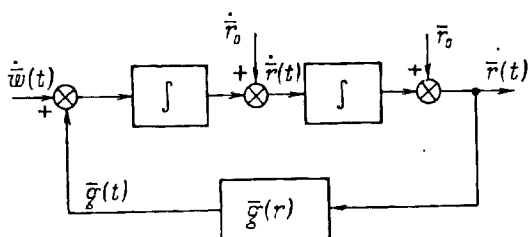


Рис. 5.3. Замкнутая схема учета гравитационного ускорения

В частности, в момент  $t_k$  имеем

$$\Delta_i q_i(t_k) = q_i(t_k) - q_i^*(t_k). \quad (5.28)$$

Установим связь между полной и изохронной вариациями в произвольный момент времени  $t_k$ , для чего проэкстраполируем зависимость  $q_i^*(t)$  до некоторого момента времени, немного превышающего величину  $t_k^*$ , предположив, например, что двигатель в момент времени  $t_k^*$  не выключался. В соответствии с выражением (5.8) имеем

$$\Delta q_i(t_k) = q_i(t_k) - q_i^*(t_k) = q_i(t_k) - q_i^*(t_k) + q_i^*(t_k) - q_i^*(t_k^*). \quad (5.29)$$

Считая  $\Delta t_k$  малой величиной и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$q_i^*(t_k) - q_i^*(t_k^*) = \dot{q}_i^*(t_k^*) \Delta t_k. \quad (5.30)$$

Таким образом, из выражений (5.28), (5.29) и (5.30) следует (см. рис. 5.2)

$$\Delta q_i(t_k) = \Delta_i q_i(t_k) + \dot{q}_i^*(t_k^*) \Delta t_k. \quad (5.31)$$

Полная вариация параметра  $\dot{q}_i$  выражается через изохронную вариацию аналогично:

$$\Delta \dot{q}_i(t_k) = \Delta_i \dot{q}_i(t_k) + \ddot{q}_i^*(t_k^*) \Delta t_k. \quad (5.32)$$

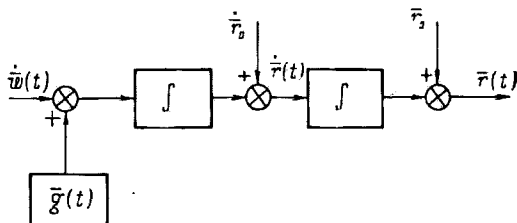
Преобразуем теперь с учетом изохронных вариаций выражение для  $\Delta L$ , соответствующее упрощенному уравнению управления (5.15):

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial L}{\partial V_\xi} \Delta V_\xi + \frac{\partial L}{\partial V_\eta} \Delta V_\eta + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t_k. \quad (5.33)$$

Подставляя выражения (5.31) и (5.32), получим

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \Delta_t V_{\xi}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \Delta_t V_{\eta}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_t \xi(t_k) + \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_t \eta(t_k) + \left[ \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \dot{V}_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \dot{V}_{\eta}^*(t_k^*) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial L}{\partial \xi} V_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \eta} V_{\eta}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] \Delta t_k. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Рис. 5.4. Разомкнутая схема учета гравитационного ускорения



Учитывая зависимость (5.21), выражение (5.34) представим в виде

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \Delta_t V_{\xi}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \Delta_t V_{\eta}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_t \xi(t_k) + \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_t \eta(t_k) + \left[ \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \dot{w}_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \dot{w}_{\eta}^*(t_k^*) \right] \Delta t_k + \\ & + \left[ \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} g_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} g_{\eta}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \xi} V_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \eta} V_{\eta}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] \Delta t_k. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Выражение во второй квадратной скобке в зависимости (5.35) тождественно равно нулю как производная дальности по времени полета на пассивном участке траектории. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \Delta_t V_{\xi}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \Delta_t V_{\eta}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_t \xi(t_k) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_t \eta(t_k) + \\ & + \left[ \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \dot{w}_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \dot{w}_{\eta}^*(t_k^*) \right] \Delta t_k. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Рассмотрим изохронные вариации составляющих ускорения:

$$\Delta_t \dot{V}_{\xi} = \Delta_t \dot{w}_{\xi} + \Delta_t g_{\xi};$$

$$\Delta_t \dot{V}_{\eta} = \Delta_t \dot{w}_{\eta} + \Delta_t g_{\eta}.$$

Появление изохронных вариаций кажущегося ускорения  $\Delta_t \dot{w}_{\xi}$  и  $\Delta_t \dot{w}_{\eta}$  непосредственно связано с отклонением сил негравитационного происхождения и массы ракеты от расчетных значений; изохронные вариации ускорения силы тяжести  $\Delta_t g_{\xi}$  и

Диаграммы обусловлены тем, что траектория возмущенного полета проходит выше (или ниже) расчетной. Для ракет, возмущенные траектории которых близки к расчетным, изохронные вариации ускорения силы тяжести малы. В этом случае можно принять

$$\begin{aligned} \Delta_t V_\xi(t) &\approx \Delta_t w_\xi(t); \\ . & . . . . . \\ . & . . . . . \\ \Delta_t \eta(t) &\approx \Delta_t s_\eta(t). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Сделанное предположение позволяет записать выражение (5.36) в виде

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \Delta_{\xi} w_{\xi}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \Delta_{\eta} w_{\eta}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_{\xi} s_{\xi}(t_k) +$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_{\eta} s_{\eta}(t_k) + \left[ \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \dot{w}_{\xi}^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \dot{w}_{\eta}^*(t_k^*) \right] \Delta t_k. \quad (5.38)$$

Исключим отсюда неизвестную величину  $\Delta t_R$ , учитывая, что в соответствии с выражениями (5.8), (5.31) и (5.32)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathcal{W}_{\xi}(t_{\kappa}) &= \Delta t \mathcal{W}_{\xi}(t_{\kappa}) + \dot{\mathcal{W}}_{\xi}^*(t_{\kappa}^*) \Delta t_{\kappa} = \mathcal{W}_{\xi}(t_{\kappa}) - \mathcal{W}_{\xi}^*(t_{\kappa}^*); \\ \Delta \mathcal{W}_{\eta}(t_{\kappa}) &= \Delta t \mathcal{W}_{\eta}(t_{\kappa}^*) + \dot{\mathcal{W}}_{\eta}^*(t_{\kappa}^*) \Delta t_{\kappa} = \mathcal{W}_{\eta}(t_{\kappa}) - \mathcal{W}_{\eta}^*(t_{\kappa}^*). \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Тогда вместо выражения (5.38) получим

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} w_{\xi}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} w_{\eta}(t_k) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta t S_{\xi}(t_k) + \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta t S_{\eta}(t_k) - \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} w_{\xi}^*(t_k^*) - \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} w_{\eta}^*(t_k^*). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Уравнение управления в этом случае может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \omega_{\xi}(t) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \omega_{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_t s_{\xi}(t) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_t s_{\eta}(t) = \\ = \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \omega_{\xi}^*(t_{\kappa}^*) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \omega_{\eta}^*(t_{\kappa}^*) \end{aligned} \quad (5.41)$$

**или**

$$J_t = J^*(t_K^*), \quad (5.42)$$

где

$$J(t) = \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} w_{\xi}(t) + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} w_{\eta}(t) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_t s_{\xi}(t) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_t s_{\eta}(t); \quad (5.43)$$

$$J^*(t_k^*) = \frac{\partial L}{\partial V_f} w_f^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_n} w_n^*(t_k^*). \quad (5.44)$$

Уравнение управления приведено теперь к такой форме, которая позволяет реализовать его, не прибегая к сложным вычислениям на борту ракеты.

### Приборная реализация уравнения управления дальностью

Принципиальную схему приборной реализации уравнения управления дальностью стрельбы рассмотрим на примере уравнения (5.41). Основу схемы (рис. 5.5) составляет гиростабили-

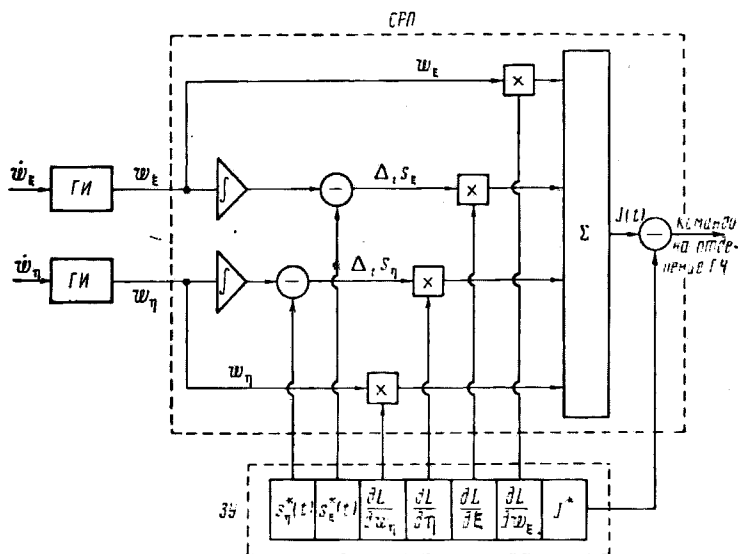


Рис. 5.5. Схема приборной реализации уравнения управления

зированной платформы (ГСП); задаваемые ею оси инерциальной системы координат направлены по осям начальной стартовой системы. На ГСП установлены два гироскопических интегратора (ГИ), оси чувствительности которых направлены по осям  $O\xi$  и  $O\eta$ . Кроме того, имеется запоминающее устройство (ЗУ), в которое введены необходимые для расчетов величины: баллистические производные, программированные по времени расчетные значения  $s_\xi^*(t)$  и  $s_\eta^*(t)$  и расчетные значения управляющего функционала. Величины, вводимые в запоминающее устройство, зависят от геофизических условий стрельбы.

Имеется также счетнорешающий прибор (СРП), содержащий:

- интегрирующие устройства, осуществляющие повторное интегрирование показаний ГИ с целью получения кажущихся координат;



— вычитающие элементы, образующие изохронные вариации  $\Delta_t s_\xi$ ,  $\Delta_t s_\eta$ ;

— множительные устройства;

— суммирующее устройство;

— сравнивающее устройство, ведущее непрерывное по времени полета на активном участке траектории сравнение текущего значения управляющего функционала  $J(t)$  с его расчетным значением  $J^*$ . В момент, когда выполняется равенство  $J(t) = J^*$ , СРП формирует команду на отсечку двигателя и отделение головной части.

Рассмотрим теперь возможные пути упрощения приборной реализации уравнения управления дальностью стрельбы.

Практическую важность представляет возможность сокращения числа элементов автомата управления дальностью посредством надлежащего выбора ориентации осей чувствительности акселерометров или гиросинтезаторов ускорений. Оказывается, что можно уменьшить вдвое число интегрирующих элементов по сравнению с методом построения уравнения управления, изложенным выше. Для этой цели оси чувствительности акселерометров (гиросинтезаторов ускорений) должны иметь специальную ориентацию — параллельно некоторым направлениям, неизменным для конкретного случая стрельбы.

Чтобы определить эти направления и построить соответствующий функционал, будем рассматривать проекции кажущейся скорости  $w_\xi$ ,  $w_\eta$  как компоненты некоторого вектора  $\vec{w}$ , который характеризуется модулем  $|\vec{w}| = \sqrt{w_\xi^2 + w_\eta^2}$  и аргументом  $\arg \vec{w} = \arctg w_\eta / w_\xi$ .

Аналогично построим вектор  $\vec{\Delta_t s}$  с модулем  $|\vec{\Delta_t s}| = \sqrt{\Delta_t s_\xi^2 + \Delta_t s_\eta^2}$  и аргументом  $\arg \vec{\Delta_t s} = \arctg \frac{\Delta_t s_\eta}{\Delta_t s_\xi}$ .

Подобным же образом можно рассматривать и баллистические производные как проекции вектора  $\vec{\Lambda}$  с модулем  $|\vec{\Lambda}| = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial V_\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial V_\eta}\right)^2}$  и аргументом  $\lambda = \arctg \frac{\partial L / \partial V_\eta}{\partial L / \partial V_\xi}$  и вектора  $\vec{M}$  с модулем  $|\vec{M}| = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \eta}\right)^2}$  и аргументом  $\mu = \arctg \frac{\partial L / \partial \eta}{\partial L / \partial \xi}$ .

Используя введенные таким образом обозначения и известное правило записи скалярного произведения двух векторов через их проекции, перепишем выражение (5.41) в виде

$$\vec{\Lambda} \vec{w}(t) + \vec{M} \vec{\Delta_t s}(t) = \vec{\Lambda} \vec{w}^*(t_k^*). \quad (5.45)$$

С другой стороны, скалярное произведение может быть представлено в виде

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\bar{b}_a,$$

где  $\bar{b}_a$  — проекция вектора  $\bar{b}$  на направление  $\bar{a}$ .

На этом основании представим уравнение управления (5.45) в виде

$$|\bar{\Lambda}|w_\lambda(t) + |\bar{M}|\Delta_t s_\mu(t) = |\bar{\Lambda}|w_\lambda^*(t_k^*), \quad (5.46)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w_\lambda(t) &= w_\xi(t) \cos \lambda + w_\eta(t) \sin \lambda; \\ \Delta_t s_\mu(t) &= \Delta_t s_\xi(t) \cos \mu + \Delta_t s_\eta(t) \sin \mu. \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

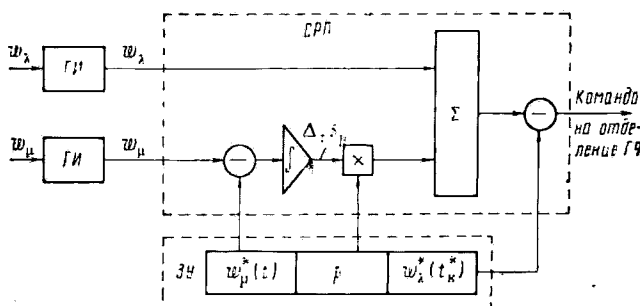


Рис. 5.6. Схема приборной реализации уравнения управления, использующего  $\lambda$ — $\mu$ -функционал

Уравнение управления (5.46) можно пронормировать относительно коэффициента  $|\bar{\Lambda}|$ , в результате чего оно примет вид

$$w_\lambda(t) + p\Delta_t s_\mu(t) = w_\lambda^*(t_k^*), \quad (5.48)$$

где

$$p = \frac{|\bar{M}|}{|\bar{\Lambda}|}.$$

Таким образом,

$$J_{\lambda-\mu}(t) = w_\lambda(t) + p\Delta_t s_\mu(t) = w_\lambda(t) + p \int_0^t [w_\mu(t) - w_\mu^*(t)] dt; \quad (5.49)$$

$$J_{\lambda-\mu}^* = w_\lambda^*(t_k^*). \quad (5.50)$$

Рассмотренная модификация управляющего функционала называется  $\lambda$ — $\mu$ -функционалом. Можно показать, что направления, заданные углами  $\lambda$  и  $\mu$ , являются оптимальными баллистическими направлениями в следующем смысле. Отклонения кажущейся скорости ракеты вдоль направления вектора  $\bar{\Lambda}$  и отклонения кажущегося пути вдоль направления вектора  $\bar{M}$  макси-

мально влияют на отклонения по дальности, а отклонения кажущейся скорости и кажущегося пути по нормали к соответствующему направлению не вызывают отклонений по дальности.

Принципиальная схема приборной реализации уравнения управления, использующего  $\lambda$ - $\mu$ -функционал, показана на рис. 5.6. Эта схема более проста, чем предыдущая (см. рис. 5.5) за счет отказа от одного интегрирующего устройства и уменьшения объема запоминающего устройства. Углы  $\lambda$  и  $\mu$  установки осей чувствительности гироинтеграторов относительно оси  $O\xi$  инерциальной системы координат, программа  $w_\mu^*(t)$ , параметр  $p$  и расчетное значение управляющего функционала  $w_\lambda^*(t_k^*)$  определяются геофизическими условиями стрельбы.

#### 5.4. РАССЕИВАНИЕ ТОЧЕК ПАДЕНИЯ ГОЛОВНЫХ ЧАСТЕЙ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ОШИБКАМИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

##### Основные формулы для расчета рассеивания точек падения головных частей

Перепишем выражение (5.34), учитывая, что изохронные вариации в моменты времени  $t_k$  и  $t_k^*$  равны друг другу с точностью до величин второго порядка малости:

$$\begin{aligned} \Delta L = & \frac{\partial L}{\partial V_\xi} \Delta_t V_\xi(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_\eta} \Delta_t V_\eta(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_t \xi(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_t \eta(t_k^*) + \\ & + \left[ \frac{\partial L}{\partial V_\xi} \dot{V}_\xi^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_\eta} \dot{V}_\eta^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \xi} V_\xi^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \eta} V_\eta^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] \Delta t_k \end{aligned} \quad (5.51)$$

Легко можно заметить, что выражение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial V_\xi} \dot{V}_\xi^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_\eta} \dot{V}_\eta^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \xi} V_\xi^*(t_k^*) + \\ & + \frac{\partial L}{\partial \eta} V_\eta^*(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt}(t_k^*) \end{aligned} \quad (5.52)$$

представляет собой значение в момент отделения ГЧ полной производной от дальности стрельбы по времени полета на активном участке.

Первое слагаемое в выражении (5.51) обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_t L(t_k^*) = & \frac{\partial L}{\partial V_\xi} \Delta_t V_\xi(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial V_\eta} \Delta_t V_\eta(t_k^*) + \\ & + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_t \xi(t_k^*) + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_t \eta(t_k^*) \end{aligned} \quad (5.53)$$

и будем называть изохронным отклонением дальности стрельбы. Эта величина  $\Delta_t L(t_k^*)$  представляет собой отклонение точки па-

дения ГЧ в случае полета по возмущенной траектории при отделении ГЧ в расчетный момент времени  $t_k^*$ .

С учетом сказанного выражение (5.51) запишем в виде

$$\Delta L = \Delta_t L(t_k^*) + \dot{L}(t_k^*) \Delta t_k. \quad (5.54)$$

Отклонение  $\Delta t_k$  можно найти, варьируя уравнение управления  $J(t_k) = J^*(t_k^*)$ . Тогда получим

$$\Delta J(t_k) = \Delta_t J(t_k^*) + J^*(t_k^*) \Delta t_k = 0, \quad (5.55)$$

где

$$J^*(t_k^*) = \left( \frac{dJ^*}{dt} \right)_{t=t_k^*};$$

$\Delta_t J(t_k^*)$  — изохронная вариация управляющего функционала.

Отсюда найдем отклонение

$$\Delta t_k = - \frac{\Delta_t J(t_k^*)}{J^*(t_k^*)}. \quad (5.56)$$

Используя соотношения (5.54) и (5.56), отклонение по дальности можно представить в виде

$$\Delta L = \Delta_t L(t_k^*) - \frac{\dot{L}(t_k^*)}{J(t_k^*)} \Delta_t J(t_k^*). \quad (5.57)$$

Повторяя проведенные рассуждения, можно получить аналогичное выражение для отклонения точки падения ГЧ по направлению

$$\Delta Z = \Delta_t Z(t_k^*) + \dot{Z}(t_k^*) \Delta t_k. \quad (5.58)$$

Согласно определению условной системы координат  $\dot{Z} = 0$  и для этой системы имеем

$$\Delta Z = \Delta_t Z, \quad (5.59)$$

где

$$\Delta_t Z = \frac{\partial Z}{\partial V_\zeta} \Delta_t V_\zeta(t_k^*) + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \Delta_t \zeta(t_k^*), \quad (5.60)$$

если пренебречь влиянием вариаций параметров движения в плоскости стрельбы на отклонение по направлению  $Z$ .

### **Влияние ошибок системы управления на рассеивание параметров движения ракеты**

Рассмотрим влияние инструментальных и методических ошибок системы управления на точность полета ракеты на активном участке траектории.

Будем пользоваться следующими системами координат:

— инерциальной системой координат  $O\xi\eta\zeta$ ;

— связанной системой координат  $Ox_1y_1z_1$ , характеризующей фактические направления осей ракеты в возмущенном движении;

— опорной системой координат  $Ox_3y_3z_3$ , задающей направления связанных осей ракеты в полете по номинальной траектории. Направления опорных осей относительно осей инерциальной системы показаны на рис. 5.7. Ось  $Oz_3$  направлена параллельно оси  $O\xi$ , а оси  $Ox_3$  и  $Oy_3$  повернуты относительно осей  $O\xi$  и  $O\eta$

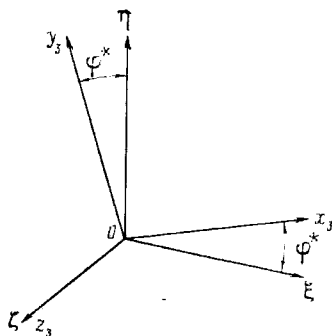


Рис. 5.7. Ориентация опорной системы координат относительно инерциальной

на программный угол тангажа  $\varphi$ . Как видно, связанная система координат совпадает с опорной при полете ракеты по номинальной траектории.

Найдем взаимосвязь между компонентами вектора кажущегося ускорения, определяемыми измерительными элементами систем продольной (РКС), нормальной (НС) и боковой стабилизации (БС) и проекциями этого вектора на оси опорной системы координат.

Пусть измерительный элемент системы РКС, например гироскопический интегратор продольных ускорений, который будем называть датчиком рассогласования скорости (ДРС), установлен на ракете так, что его ось чувствительности ориентирована в направлении продольной оси ракеты  $Ox_1$ . Этот прибор определяет величину проекции вектора кажущегося ускорения на продольную ось ракеты  $\dot{w}_{x1}$  и осуществляет ее интегрирование:

$$w_{x1} = \int_0^t \dot{w}_{x1}(\tau) d\tau. \quad (5.61)$$

Предположим, что измерительные элементы систем НС и БС устанавливаются на ГСП так, что в номинальном полете ось чувствительности измерительного элемента системы НС направлена по оси  $Oy_3$ , а ось чувствительности измерительного элемента системы БС — по оси  $Oz_3$ . Так как оси чувствительности этих элементов на всем протяжении управляемого полета направлены перпендикулярно оси  $Ox_3$ , то таким путем исключается влияние на показания чувствительных элементов систем НС и БС продольной составляющей вектора кажущегося ускорения  $\dot{w}_{x3}$  и регистрируется отклонение оси  $Ox_1$  от опорного направления.

Направления опорных осей  $Ox_3y_3z_3$  материализуются на ракете направлениями осей  $Ox_{гy_{г}z_{г}}$  ГСП и программным разворотом основания датчика угла тангажа. В номинальном полете оси ГСП  $Ox_{гy_{г}z_{г}}$  направлены параллельно соответствующим осям

$O\xi\eta\zeta$  инерциальной (начальной стартовой) системы координат (рис. 5.8).

В реальном полете направления осей ГСП  $Ox_2y_2z_2$  в общем случае не совпадают с направлениями осей инерциальной системы координат. Отклонения осей  $Ox_2$ ,  $Oy_2$ ,  $Oz_2$  от номинального направления вызываются:

— погрешностями прицеливания (поворот вокруг оси  $Oy_2$  подвески ГСП);

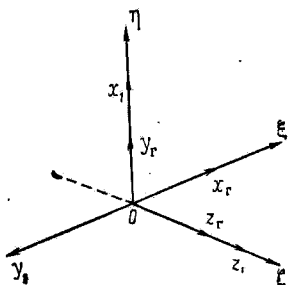


Рис. 5.8. Ориентация осей гиросtabilизированной платформы  $Ox_1y_1z_1$  относительно инерциальной (начальной стартовой) системы координат  $O\xi\eta\zeta$  в номинальном полете;  $Ox_1y_1z_1$  — связанные оси ракеты на старте

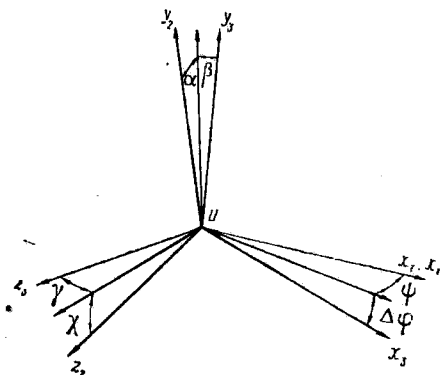


Рис. 5.9. Ориентация системы координат  $Ox_2y_2z_2$ , реализуемой в качестве опорной, относительно опорной системы координат  $Ox_3y_3z_3$

— погрешностями установки ГСП в момент пуска, т. е. погрешностями системы приведения ГСП (повороты вокруг осей  $Ox_2$  и  $Oz_2$ );

— уходами гироскопов в течение полета.

В возмущенном полете погрешность в реализации направления опорной оси  $Ox_3$  определяется:

— погрешностями установки ГСП в момент пуска;

— погрешностями задания угла тангажа, которые складываются из погрешностей программного механизма и погрешностей задания и воспроизведения программы;

— уходами ГСП вокруг оси тангажа  $Oz_2$ .

Отклонение направления оси чувствительности измерительного элемента системы НС от направления оси  $Oy_3$  вызывается теми же погрешностями.

Отклонение направления оси чувствительности измерительного элемента системы БС от направления оси  $Oz_3$  вызывается:

— погрешностями прицеливания;



— погрешностями установки измерительного элемента системы БС относительно площадки для призмы прицеливания;  
 — уходами ГСП вокруг оси  $Ox_T$ .

При наличии погрешностей ориентирования измерительных элементов систем РКС, НС, БС имеют место погрешности измерения компонент кажущегося ускорения  $\dot{w}_{x3}$ ,  $\dot{w}_{y3}$ ,  $\dot{w}_{z3}$ . Для определения этих погрешностей рассмотрим рис. 5.9. Направление оси чувствительности измерительного элемента системы НС определено осью  $Oy_2$ , а погрешности ее ориентирования — углами  $\alpha$  и  $\beta$ ; направление оси чувствительности измерительного элемента системы БС определено осью  $Oz_2$ , а погрешности ее ориентирования — углами  $\gamma$  и  $\chi$ .

В табл. 5.1 приведены направляющие косинусы осей  $Ox_1$ ,  $Oy_2$ ,  $Oz_2$  относительно осей  $Ox_3$ ,  $Oy_3$ ,  $Oz_3$ , определенные с точностью до малых второго порядка (такая точность вполне достаточна для практических целей). Из табл. 5.1 следует, что проекции вектора кажущегося ускорения на оси  $Ox_1$ ,  $Oy_2$ ,  $Oz_2$  и на оси  $Ox_3$ ,  $Oy_3$ ,  $Oz_3$  находятся в следующей зависимости:

$$\dot{w}_{x1} = \dot{w}_{x3} + \dot{w}_{y3} \Delta\varphi - \dot{w}_{z3} \psi; \quad (5.62)$$

$$\dot{w}_{y2} = -\dot{w}_{x3} \beta + \dot{w}_{y3} + \dot{w}_{z3} \alpha; \quad (5.63)$$

$$\dot{w}_{z2} = +\dot{w}_{x3} \gamma - \dot{w}_{y3} \chi + \dot{w}_{z3}. \quad (5.64)$$

Таблица 5.1

| Оси    | $Ox_1$          | $Oy_2$   | $Oz_2$   |
|--------|-----------------|----------|----------|
| $Ox_3$ | 1               | $-\beta$ | $\gamma$ |
| $Oy_3$ | $\Delta\varphi$ | 1        | $-\chi$  |
| $Oz_3$ | $-\psi$         | $\alpha$ | 1        |

Проекция вектора кажущегося ускорения  $\dot{w}_{y3}$ ,  $\dot{w}_{z3}$  и угловые отклонения  $\Delta\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\chi$  в номинальном полете равны нулю, а в реальном полете появляются вследствие воздействия возмущающих факторов. Все эти величины являются малыми погрешностями системы управления. Поэтому произведениями вида  $\dot{w}_{y3} \Delta\varphi$ ,  $\dot{w}_{z3} \psi$ ,  $\dot{w}_{z3} \alpha$  можно пренебречь как величинами второго порядка малости. Тогда проекции вектора кажущегося ускорения на опорные оси  $Ox_3y_3z_3$  определяются следующими выражениями:

$$\dot{w}_{x3} = \dot{w}_{x1}; \quad (5.65)$$

$$\dot{w}_{y3} = \dot{w}_{y2} + \dot{w}_{x3} \beta; \quad (5.66)$$

$$\dot{w}_{z3} = \dot{w}_{z2} - \dot{w}_{x3} \gamma. \quad (5.67)$$

Отсюда получим отклонения рассматриваемых проекций вектора кажущегося ускорения от их номинальных значений:

$$\Delta_i \dot{w}_{x3} = \Delta_i \dot{w}_{x1}; \quad (5.68)$$

$$\Delta_i \dot{w}_{y3} = \Delta_i \dot{w}_{y2} + \dot{w}_{x3} \beta; \quad (5.69)$$

$$\Delta_i \dot{w}_{z3} = \Delta_i \dot{w}_{z2} - \dot{w}_{x3} \gamma. \quad (5.70)$$

Найдем теперь величины отклонений от номинальных значений проекций вектора кажущегося ускорения на оси инерциальной системы координат. Указанные величины легко можно получить, используя известные формулы перехода от связанной к инерциальной системе координат:

$$\Delta_i \dot{w}_\xi = \Delta_i \dot{w}_{x3} \cos \varphi^* - \Delta_i \dot{w}_{y3} \sin \varphi^*; \quad (5.71)$$

$$\Delta_i \dot{w}_\eta = \Delta_i \dot{w}_{x3} \sin \varphi^* + \Delta_i \dot{w}_{y3} \cos \varphi^*; \quad (5.72)$$

$$\Delta_i \dot{w}_\zeta = \Delta_i \dot{w}_{z3} \quad (5.73)$$

и соотношения (5.68) — (5.70). \*

Окончательно получим:

$$\Delta_i \dot{w}_\xi = \Delta_i \dot{w}_{x1} \cos \varphi^* - \Delta_i \dot{w}_{y2} \sin \varphi^* - \dot{w}_{x3} \beta \sin \varphi^*; \quad (5.74)$$

$$\Delta_i \dot{w}_\eta = \Delta_i \dot{w}_{x1} \sin \varphi^* + \Delta_i \dot{w}_{y2} \cos \varphi^* + \dot{w}_{x3} \beta \cos \varphi^*; \quad (5.75)$$

$$\Delta_i \dot{w}_\zeta = \Delta_i \dot{w}_{z2} - \dot{w}_{x3} \gamma. \quad (5.76)$$

Интегрируя выражения (5.74) — (5.76), получим изохронные вариации проекций вектора кажущейся скорости на оси инерциальной системы координат:

$$\begin{aligned} \Delta_i w_\xi = & \int_0^t \Delta_i \dot{w}_{x1} \cos \varphi^* d\tau - \int_0^t \Delta_i \dot{w}_{y2} \sin \varphi^* d\tau - \\ & - \int_0^t \dot{w}_{x3} \beta \sin \varphi^* d\tau; \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i w_\eta = & \int_0^t \Delta_i \dot{w}_{x1} \sin \varphi^* d\tau + \int_0^t \Delta_i \dot{w}_{y2} \cos \varphi^* d\tau + \\ & + \int_0^t \dot{w}_{x3} \beta \cos \varphi^* d\tau; \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\Delta_i w_\zeta = \int_0^t \Delta_i \dot{w}_{z2} d\tau - \int_0^t \dot{w}_{x3} \gamma d\tau. \quad (5.79)$$

Повторное интегрирование даст изохронные вариации кажущегося пути по осям инерциальной системы координат:

$$\Delta_t s_\xi = \int_0^t \Delta_t w_\xi d\tau; \quad (5.80)$$

$$\Delta_t s_\eta = \int_0^t \Delta_t w_\eta d\tau; \quad (5.81)$$

$$\Delta_t s_\zeta = \int_0^t \Delta_t w_\zeta d\tau. \quad (5.82)$$

Уравнения (5.77) — (5.82) интегрируются при нулевых начальных условиях.

Полагая, что действие на ракету силы тяжести в возмущенном и номинальном полетах практически одинаково (такое предположение допустимо, так как отклонения возмущенного движения от номинального достаточно малы), можно приближенно положить:

$$\Delta_t \dot{V}_\xi \approx \Delta_t \dot{w}_\xi; \quad \Delta_t V_\xi \approx \Delta_t w_\xi; \quad \dots, \quad \Delta_t \zeta \approx \Delta_t s_\zeta. \quad (5.83)$$

В уравнениях (5.77) — (5.82) зависимости  $\dot{w}_{xz}(t)$  и  $\Phi^*(t)$  соответствуют полету в номинальных условиях. Остальные параметры:  $\Delta_t \dot{w}_{x1}(t)$ ,  $\Delta_t \dot{w}_{y2}(t)$ ,  $\Delta_t \dot{w}_{z2}(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$  определяются воздействием возмущений. Ниже рассматриваются способы их определения для основных типов погрешностей системы управления.

1. Инструментальная погрешность измерителя системы РКС в основном определяется разбросом передаточного коэффициента измерителя и потому пропорциональна измеряемой величине, т. е.

$$\Delta_t \dot{w}_{x1}(t) = n \dot{w}_{xz}(t),$$

где  $n$  — безразмерный коэффициент.

2. Погрешность включения измерителя системы РКС учитывается в начальных условиях, т. е. принимается

$$(\Delta_t w_{x1})_{t=0} = c.$$

Аналогичным образом учитывается погрешность задания программы кажущейся скорости.

3. Постоянная ошибка задания программы угла тангажа  $\Delta\phi$  является одной из составляющих угла  $\beta$ . К другим постоянным составляющим угла  $\beta$  относятся: ошибка программного механизма угла тангажа, ошибка приведения ГСП вокруг оси тангажа, погрешность установки измерительного элемента системы НС.

Аналогичным образом, как постоянные составляющие угла  $\gamma$ , учитываются ошибки прицеливания, ошибки приведения ГСП вокруг осей рыскания и вращения, погрешность установки измерительного элемента системы БС.

#### 4. Погрешность включения программы РКС $\tau$ .

Как видно из рис. 5.10, эта ошибка приводит к сдвигу кривой  $w_{x1}(t)$  вдоль оси абсцисс на постоянную величину  $\tau$ . Разлагая  $w_{x1}(t) = w_{x1}^*(t - \tau)$  в ряд по степеням  $\tau$ , получим в первом приближении  $\Delta_t w_{x1}(t) = -\tau \dot{w}_{x1}^*(t)$ .

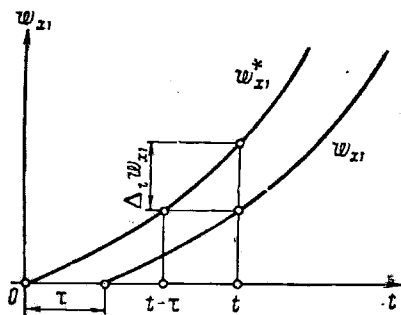


Рис. 5.10. Влияние погрешности включения программы РКС на продольную составляющую кажущейся скорости

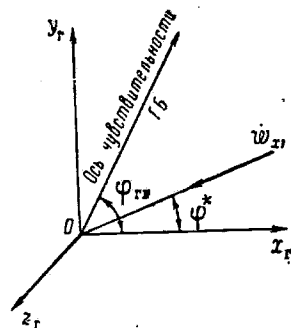


Рис. 5.11. К определению ухода гироскопов ГСП

Аналогичным образом учитывается ошибка включения программы тангажа

$$\beta(t) = -\tau \dot{\varphi}^*(t).$$

5. Уходы ГСП от воздействия постоянных моментов можно принимать пропорциональными времени:

$$\beta(t) = \dot{\varphi}_r t;$$

$$\gamma(t) = \dot{\psi}_r \sin \varphi^* t;$$

$$\chi(t) = \dot{\gamma}_r \cos \varphi^* t,$$

где  $\dot{\varphi}_r$ ,  $\dot{\psi}_r$ ,  $\dot{\gamma}_r$  — соответственно скорости уходов ГСП вокруг осей тангажа, рыскания, вращения.

6. Уходы ГСП вследствие статистической неуравновешенности гироскопов.

Необходимо отметить следующую особенность ухода гироскопов ГСП. У гироскопов, установленных для стабилизации ГСП, снабженной стабилизирующими двигателями, возмущающие моменты относительно осей чувствительности гироскопов компенсируются стабилизирующими моментами и не приводят к уходам. Однако вредное действие возмущающих моментов

относительно оси прецессии сохраняется и дает уходы ГСП относительно оси чувствительности.

Рассмотрим выражение для соответствующей погрешности на примере гироблока тангажа, установленного под углом  $\varphi_{ГБ}$  к оси  $Ox_T$  (рис. 5.11). В этом случае составляющая кажущегося ускорения, вызывающая уход, равна  $\dot{w}_{x1} \sin(\varphi_{ГБ} - \varphi^*)$ , а величина ухода определяется выражением

$$\beta(t) = \frac{\dot{\varphi}_g}{g} \int_0^t \dot{w}_{x1} \sin(\varphi_{ГБ} - \varphi^*) d\tau,$$

где  $\dot{\varphi}_g$  — скорость ухода ГСП вокруг оси тангажа под действием ускорения силы тяжести.

Аналогично определяются уходы ГСП вокруг осей рыскания и вращения.

### Расчет рассеивания

Рассматривая выражение (5.57) как запись некоторой реализации случайных отклонений параметров движения, преобразуем его, выделив явно методические ошибки, инструментальные ошибки ГСП и прочие инструментальные ошибки:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \Delta_t L - \frac{L}{J} \Delta_t J = \left( \Delta_{tm} L - \frac{L}{J} \Delta_{tm} J \right) + \Delta_{tr} L - \\ &- \frac{L}{J} \Delta_{tn} J = \Delta_m L + \Delta_r L + \Delta_n L. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Аналогичным образом запишем выражение для конкретной реализации случайного отклонения по направлению:

$$\Delta Z = \Delta_m Z + \Delta_r Z + \Delta_n Z. \quad (5.85)$$

Члены  $\Delta_n L$  и  $\Delta_n Z$  в этих формулах появляются за счет инструментальных ошибок приборов, вырабатывающих главную команду на отделение ГЧ, и приборов системы боковой стабилизации.

Как следует из выражений (5.84) и (5.85), расчетные формулы для определения инструментальных ошибок имеют вид:

$$\Delta_n L = -\frac{L}{J} \Delta_{tn} J; \quad (5.86)$$

$$\Delta_n Z = \frac{\partial Z}{\partial V_\zeta} \Delta_{tn} V_\zeta + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \Delta_{tn} \zeta, \quad (5.87)$$

где  $\Delta_{tn} J$  — инструментальная погрешность вычисления управляющего функционала  $J$ ;

$\Delta_{tn} V_\zeta$ ,  $\Delta_{tn} \zeta$  — инструментальные погрешности определения боковой составляющей скорости и боковой координаты.

Члены  $\Delta_{\tau}L$  и  $\Delta_{\tau}Z$  в формулах (5.84) и (5.85) представляют собой отклонения точек падения ГЧ за счет инструментальных ошибок ГСП:

$$\begin{aligned}\Delta_{\tau}L = \Delta_{\tau}L = & \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \Delta_{\tau}V_{\xi} + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \Delta_{\tau}V_{\eta} + \frac{\partial L}{\partial V_{\zeta}} \Delta_{\tau}V_{\zeta} + \\ & + \frac{\partial L}{\partial \xi} \Delta_{\tau}\xi + \frac{\partial L}{\partial \eta} \Delta_{\tau}\eta + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \Delta_{\tau}\zeta;\end{aligned}\quad (5.88)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\tau}Z = \Delta_{\tau}Z = & \frac{\partial Z}{\partial V_{\xi}} \Delta_{\tau}V_{\xi} + \frac{\partial Z}{\partial V_{\eta}} \Delta_{\tau}V_{\eta} + \frac{\partial Z}{\partial V_{\zeta}} \Delta_{\tau}V_{\zeta} + \\ & + \frac{\partial Z}{\partial \xi} \Delta_{\tau}\xi + \frac{\partial Z}{\partial \eta} \Delta_{\tau}\eta + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \Delta_{\tau}\zeta.\end{aligned}\quad (5.89)$$

Инструментальные ошибки ГСП  $\Delta_{\tau}V_{\xi}, \dots, \Delta_{\tau}\zeta$  вычисляются по формулам (5.77) — (5.82).

Первые члены в формулах (5.84) и (5.85) представляют собой методические ошибки, обусловленные приближенностью (неполнотой) управляющего функционала.

Пусть для управления по дальности принят функционал (5.49). Сравнивая его с точным функционалом (5.6), обнаруживаем следующие методические ошибки, обусловленные упрощениями функционала.

1. Ошибка из-за пренебрежения членами выше первого порядка разложения функции  $L$  в ряд Тейлора, которую приближенно можно оценить по формуле

$$\Delta L_R = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \Delta q_i \Delta q_j. \quad (5.90)$$

2. Ошибка из-за пренебрежения изохронными вариациями силы тяжести

$$\begin{aligned}\Delta L_g = & \frac{\partial L}{\partial V_{\xi}} \int_0^t \Delta_t g_{\xi} dt + \frac{\partial L}{\partial V_{\eta}} \int_0^t \Delta_t g_{\eta} dt + \\ & + \frac{\partial L}{\partial \xi} \int_0^t \int_0^t \Delta_t g_{\xi} dt dt + \frac{\partial L}{\partial \eta} \int_0^t \int_0^t \Delta_t g_{\eta} dt dt.\end{aligned}\quad (5.91)$$

3. Ошибка из-за пренебрежения влиянием отклонений параметров бокового движения на дальность стрельбы

$$\Delta L_Z = \frac{\partial L}{\partial V_{\zeta}} \Delta_{\tau}V_{\zeta} + \frac{\partial L}{\partial \zeta} \Delta_{\tau}\zeta. \quad (5.92)$$



Если направление полета ГЧ обеспечивается выполнением условий (5.17) или (5.19), то методическая ошибка по направлению стрельбы определяется как

$$\Delta Z_{\text{м}} = \frac{\partial Z}{\partial V_{\xi}} \Delta_i V_{\xi} + \frac{\partial Z}{\partial V_{\eta}} \Delta_i V_{\eta} + \frac{\partial Z}{\partial \xi} \Delta_i \xi + \frac{\partial Z}{\partial \eta} \Delta_i \eta. \quad (5.93)$$

Приведенные выше формулы могут быть использованы для расчета отдельных составляющих ошибок, которые затем суммируются по правилам сложения независимых случайных величин, например,

$$\Delta_{\text{п}} L = \sqrt{\sum_i \Delta_{\text{п}} L_i^2}.$$

Суммарное рассеивание за счет инструментальных и методических ошибок системы управления и возмущений на пассивном участке траектории найдем по формулам:

$$\Delta L = \sqrt{\Delta_{\text{п}} L^2 + \Delta_{\text{г}} L^2 + \Delta_{\text{м}} L^2 + \Delta_{\text{п}} L^2}; \quad (5.94)$$

$$\Delta Z = \sqrt{\Delta_{\text{п}} Z^2 + \Delta_{\text{г}} Z^2 + \Delta_{\text{м}} Z^2 + \Delta_{\text{п}} Z^2}, \quad (5.95)$$

в которых  $\Delta_{\text{п}} L$  и  $\Delta_{\text{п}} Z$  определяются формулами (5.1).

## НОМИНАЛЬНАЯ ТРАЕКТОРИЯ ПОЛЕТА РАКЕТЫ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ

Выбор программ управления является составной частью проектирования и разработки ракеты. Это обусловлено тем обстоятельством, что конструктивные, летно-тактические и эксплуатационные характеристики ракеты в значительной степени зависят от траектории полета, определяемой программами или алгоритмами управления.

Состав программ управления полетом ракеты может быть различным и зависит от назначения ракеты, особенностей ее конструкции и системы управления. У ракет с регулируемой тягой к основным программам управления могут быть отнесены программы угла тангажа и проекций кажущейся скорости на некоторые направления.

Выбор оптимальной формы траектории полета баллистических ракет при нулевых программных значениях нормальной и боковой скоростей, углов рыскания и крена сводится к оптимизации двух программ системы управления — программ регулирования кажущейся скорости и угла тангажа.

Программа регулирования кажущейся скорости, равной

$$w_{x1}(t) = \int_0^t \frac{\dot{G}P_{y1} - c_x q S}{m_0 - mt} dt,$$

практически полностью определяется основными конструктивными и энергетическими характеристиками ракеты — тяговооруженностью, тягой двигательных установок ступеней, секундным расходом топлива и в меньшей степени формой траектории. По этой причине, а также вследствие достаточно узких пределов регулирования величины тяги задача выбора оптимальной программы регулирования кажущейся скорости не имеет существенного значения. Поэтому для ракеты с заданными конструктивными параметрами определение программ управления сводится к выбору оптимальной программы угла тангажа, представляющему в этом случае самостоятельную задачу.

Решению задачи выбора программы угла тангажа баллистической ракеты посвящено ряд работ. Однако в подавляющем большинстве из них выбор программы рассматривается без учета реальных ограничений, накладываемых техническими требованиями на программу управления, форму траектории и условия полета ракеты.

Целью настоящей главы является в основном изложение инженерного подхода к выбору оптимальной формы траектории или, другими словами, оптимальной программы изменения угла тангажа для ракет дальнего действия с жидкостными ракетными двигателями.

### **6.1. ТРЕБОВАНИЯ К ПРОГРАММЕ УГЛА ТАНГАЖА И МЕТОДАМ ЕЕ ВЫБОРА**

От формы траектории полета, задаваемой программой угла тангажа, зависят такие летно-тактические характеристики ракеты, как максимальная дальность стрельбы, рассеивание головных частей, а также температура оболочек, прочность корпусов ракеты и головной части, управляемость на активном участке и др. Поэтому выбор программы угла тангажа ракеты должен проводиться с учетом требований, предъявляемых к форме траектории, совместно с выбором эффективности органов управления, толщин оболочек корпуса, расчетами на прочность и т. д. Пренебрежение комплексным подходом к выбору программы угла тангажа может привести к существенному ухудшению летно-тактических характеристик ракеты.

Одним из основных требований, предъявляемых к программе угла тангажа, является обеспечение максимальной дальности стрельбы. Программа угла тангажа, удовлетворяющая этому условию и всем остальным предъявляемым к ней требованиям, называется *программой максимальной дальности*. Другим важнейшим требованием, предъявляемым к программе угла тангажа, является требование обеспечения минимального рассеивания головной части.

Оба требования — обеспечение максимальной дальности и минимального рассеивания, почти всегда несовместимы. Полету на максимальную дальность не соответствует, как правило, минимальное рассеивание. С уменьшением дальности можно путем соответствующего выбора программы угла тангажа уменьшить рассеивание. Поэтому баллистические ракеты дальнего действия могут оснащаться не одной, а несколькими программами. Одна из них — программа максимальной дальности (или близкая к ней). Она предназначена для стрельбы на максимальную или близкие к ней дальности. Другая программа — так называемая *программа минимального рассеивания*. Эта программа используется для стрельбы на минимальную и промежуточные дальности. Рассеивание головных частей при полете ракеты с исполь-

зованием этой программы меньше, чем при полете по программе максимальной дальности.

Траектория полета ракеты при использовании программы минимального рассеивания является более крутой (менее настильной) по сравнению с траекторией полета на максимальную дальность. Программ минимального рассеивания может быть несколько. Каждая из них имеет свой диапазон применения.

Кроме названных двух требований, к программе угла тангажа предъявляется еще ряд требований, которые определяются условиями эксплуатации, назначением ракеты, особенностями системы управления и т. п. Однако эти требования, как правило, не зависят от того, какая используется программа — максимальной дальности или минимального рассеивания.

Среди упомянутых требований есть такие, которые являются общими, типичными для баллистических ракет дальнего действия. Есть и такие, которые определяются спецификой данной ракеты или ее отдельных систем и не всегда являются обязательными для любой ракеты.

К общим, типичным требованиям к программе можно, например, отнести следующие.

1. Старт ракеты должен быть вертикальным; продолжительность вертикального участка траектории должна быть не менее заданной, определяемой обычно условиями старта.

2. Программа угла тангажа должна быть непрерывной функцией времени<sup>1</sup>; программные скорости и ускорения разворота оси ракеты должны быть приемлемыми для приборной реализации.

3. Температуры оболочки корпуса ракеты и программные углы атаки на участке больших скоростных напоров должны быть приемлемыми с точки зрения прочности.

4. На участке полета ракеты в плотных слоях атмосферы должны быть обеспечены приемлемые условия для управляемости (с уменьшением крутизны траектории увеличивается максимальный скоростной напор и, как следствие этого, растут возмущения, вызванные действием таких возмущающих факторов, как ветер, аэродинамическая асимметрия формы и т. д.).

5. Условия полета ракеты на участке разделения ступеней должны быть приемлемыми для обеспечения надежного разделения.

6. Область параметров входа головных частей в атмосферу должна быть приемлемой с точки зрения прочности, температурных режимов и условий работы автоматики головной части.

Примером частных требований к программе, обусловленных спецификой ракеты, могут служить требования к программе угла

---

<sup>1</sup> В данном случае имеется в виду требование непрерывности функции  $\varphi(t)$  при «идеальном» (без разрывов) ее задании в приборах системы управления.

тангажа, накладываемые радиотехнической системой управления:

а) угол между линией радиовизирования и плоскостью местного горизонта в точке расположения наземной антенны (угол места  $\beta_n$ ) должен быть не меньше допустимого  $\beta_{n \min}$ , т. е.

$$\beta_n \geq \beta_{n \min}; \quad (6.1)$$

б) угол между линией радиовизирования и продольной осью ракеты  $\beta_6$  должен находиться в определенных пределах, т. е. удовлетворять неравенству

$$\beta_{6 \min} \leq \beta_6 \leq \beta_{6 \max}. \quad (6.2)$$

Перечисленные требования накладывают наиболее существенные ограничения на программу максимальной дальности. Это обусловлено тем, что любые отступления от оптимальной программы, реализующей максимум дальности, вызванные перечисленными выше требованиями, приводят к уменьшению максимальной дальности. К числу таких требований, влияние которых на форму траектории и программу максимальной дальности является определяющим, можно отнести требования обеспечения приемлемого рассеивания, прочности и управляемости.

Так, для уменьшения рассеивания ракет необходимо увеличивать крутизну траектории. С увеличением крутизны траектории уменьшаются значения частных производных дальности и бокового отклонения по параметрам движения ракеты в момент отделения головной части и, как следствие этого, уменьшается рассеивание; кроме того, уменьшается рассеивание головных частей на атмосферном нисходящем участке траектории. С увеличением крутизны траектории уменьшаются нагрузки, действующие на корпус ракеты (в основном, вследствие уменьшения скоростного напора), и температуры оболочки корпуса (вследствие того, что уменьшается время движения в плотных слоях атмосферы). Наконец, с увеличением крутизны траектории уменьшаются скоростные напоры и величины возмущающих моментов, что облегчает управление ракетой. С другой стороны, следствием увеличения крутизны траектории является уменьшение максимальной дальности.

При выборе программы минимального рассеивания отпадают требования приемлемых температурных режимов, управляемости и ряд других, так как траектория в этом случае, как правило, лежит выше траектории максимальной дальности. Кроме того, при выборе программы минимального рассеивания возможна известная свобода действий в изменении программы. Дело в том, что некоторое изменение программы в ту или иную сторону для выполнения требований и ограничений, к ней предъявляемых, приводит, как правило, к незначительному изменению рассеивания.

В связи с изложенным можно заключить, что наибольшие трудности возникают при выборе программы максимальной

дальности. Поэтому дальнейшее рассмотрение требований к программе угла тангажа ведется применительно к программе максимальной дальности.

Необходимость обеспечения первого из перечисленных выше требований вызвана простотой и удобством вертикального старта. В этой связи вертикальный старт ракет дальнего действия является общепринятым.

Время полета на вертикальном участке траектории  $t_v$  (или путь, проходимый на вертикальном участке полета) может варьироваться при выборе программы полета. Минимально допустимая продолжительность вертикального полета определяется условиями безопасности старта. Продолжительность вертикального участка выбирается по возможности малой, так как чем она больше, тем круче траектория (увеличиваются потери скорости на преодоление земного притяжения) и тем труднее осуществить разворот ракеты в последующем (требуются большие углы атаки) [2].

Второе требование обусловлено возможностями приборной реализации программ угла тангажа. Очевидно, что техническое осуществление разрывных программ угла тангажа вообще невозможно, поскольку одному и тому же моменту времени соответствуют два угловых положения продольной оси ракеты, отличающиеся друг от друга на конечный угол. Поэтому может идти речь только об очень больших скоростях разворота продольной оси ракеты. Величина этой скорости ограничивается техническими возможностями приборов системы управления. При невыполнении указанного ограничения точность реализации системой управления программы угла тангажа ухудшается. Ограничение скорости разворота оси ракеты играет существенную роль при большой тяговооруженности ракеты, при которой продолжительность активного участка полета мала. Потребные скорости разворота оси ракеты в этом случае могут достигать больших величин.

Программа угла тангажа оказывает существенное влияние на величину поперечных нагрузок и температуры оболочки корпуса. С уменьшением крутизны траектории скорость движения и время пребывания ракеты в плотных слоях атмосферы увеличиваются. Следствием этого является увеличение температур оболочки корпуса и в этой связи уменьшение запасов прочности. Кроме того, с понижением крутизны траектории увеличивается влияние возмущающих факторов (ветер, разброс плотности атмосферы и т. п.) на прочность корпуса. И, наконец, с понижением крутизны траектории при полете ракеты в плотных слоях атмосферы увеличиваются значения программных углов атаки и, как следствие, возрастают величины поперечных нагрузок. В результате увеличиваются толщины оболочки корпуса и «сухой» вес ракеты. Потеря максимальной дальности за счет увеличения «сухого» веса при этом может оказаться больше вы-



игрыша дальности за счет изменения программы на атмосферном участке.

Для ракет дальнего действия и в особенности для ракет межконтинентальных требование уменьшения толщины оболочек корпуса и «сухого» веса почти всегда ограничивает область возможных значений угла тангажа в плотных слоях атмосферы условием малых (близких к нулю) углов атаки. Требование малости углов атаки тем более существенно, чем больше тяговооруженность ракеты. При малых величинах тяговооруженности скорость ракеты нарастает медленно и плотные слои атмосферы ракета проходит со сравнительно малыми скоростями. С увеличением тяговооруженности скорость ракеты нарастает быстрее и плотные слои атмосферы ракета проходит с большими скоростями. В соответствии с этим поперечные нагрузки, обусловленные углами атаки, растут с увеличением тяговооруженности.

Траектория полета ракеты на активном участке оказывает влияние на управляемость ракеты и условия разделения ступеней. С понижением крутизны траектории полета на активном участке растут возмущающие силы и моменты, увеличивается потребная эффективность органов управления и ухудшаются условия разделения ступеней. Кроме того, управляемость ракеты и надежность разделения ступеней зависят от программных углов атаки, причем с увеличением последних управляемость ракеты и надежность разделения ухудшаются. Поэтому для обеспечения управляемости ракеты и надежности разделения ступеней целесообразно повышать крутизну траектории и уменьшать программные углы атаки при полете в плотных слоях атмосферы. Однако при этом, как правило, уменьшается максимальная дальность стрельбы.

Наибольшие трудности возникают при обеспечении управляемости ракеты в начале движения второй ступени. Это обусловлено тем, что для уменьшения веса органов управления второй ступени последние целесообразно выбирать из условия обеспечения управляемости в разреженных слоях атмосферы, поскольку большая часть полета второй ступени происходит практически в безвоздушном пространстве. По этой причине для обеспечения надежного разделения ступеней и управляемости второй ступени необходимо ограничить величины возмущений действующих на участке разделения ступеней и в начале движения второй ступени. Решение этой задачи наиболее сложно для ракет с низкими высотами разделения ступеней ( $h < 40$  км) когда аэродинамические возмущения сравнимы с возмущениями за счет погрешностей изготовления и монтажа ракеты. Для ракет с малой продолжительностью полета первой ступени выполнение указанного требования может привести к значительному уменьшению максимальной дальности.

Значительные потери в дальности, связанные с обеспечением требований надежного разделения ступеней, управляемости вто-

рой ступени, приемлемых температурных режимов корпуса и его прочности, приводят к необходимости выбора программы угла тангажа совместно с выбором схем разделения ступеней, эффективности органов управления, толщин оболочек. Необходимость обеспечения приемлемых температурных режимов оболочки корпуса ракеты в первую очередь следует учитывать для траекторий реализующих максимум дальности ракет с высокой тяговооруженностью.

Для обеспечения прочности и управляемости ракеты и надежности разделения ее ступеней к программе угла тангажа предъявляют требование малости углов атаки при полете ракеты в плотных слоях атмосферы. На этом участке программа угла тангажа обычно принимается такой, чтобы программные углы атаки были равны нулю. Потеря максимальной дальности, обусловленная необходимостью выполнения условия  $\alpha = 0$ , у ракет со сравнительно большой продолжительностью активного участка мала; с уменьшением продолжительности активного участка потеря максимальной дальности возрастает.

Траектории полета головной части в атмосфере, перегрузки, температурные режимы и прочность корпуса головной части в основном определяются параметрами движения центра масс головной части в момент входа в атмосферу<sup>1</sup> — скоростью головной части  $V_0$  и углом входа  $\Theta_0$ . При стрельбе в различных геодезических условиях (широта точки старта и азимут стрельбы) на максимальную и минимальную дальности с использованием принятых программ угла тангажа (максимальной дальности, минимального рассеивания) параметры движения центра масс в момент входа в атмосферу образуют некоторую область, называемую *областью входа головной части в атмосферу*. В том случае, если ракета оснащается несколькими программами, эта область включает в себя области, получаемые при использовании каждой из указанных программ. Примерный вид области входа центра масс головной части в атмосферу при использовании двух программ угла тангажа (максимальной дальности и минимального рассеивания) приведен на рис. 6.1.

Верхняя граница приведенной области (линия 2—3) соответ-

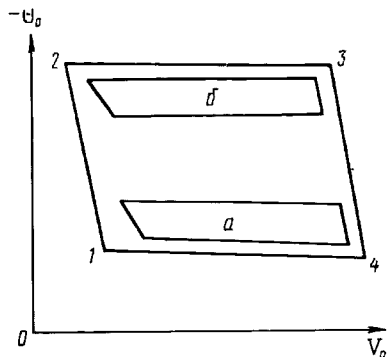


Рис. 6.1. Область входа головной части в атмосферу:

*a* — область входа, соответствующая программе максимальной дальности; *б* — область входа, соответствующая программе минимального рассеивания

<sup>1</sup> Угол атаки в момент входа в атмосферу, который также определяет поперечные перегрузки, здесь не рассматривается, поскольку его зависимость от программы угла тангажа можно пренебречь.

ствует использованию программы минимального рассеивания, нижняя (линия 1—4) — программы максимальной дальности. Граница области, проходящая через точки 1 и 2, соответствует стрельбе на минимальную дальность с использованием упомянутых программ угла тангажа, через точки 3 и 4 — стрельбе на максимально возможную дальность.

С увеличением скорости  $V_0$  и абсолютной величины угла входа  $|\Theta_0|$  растут продольные и боковые перегрузки и, как следствие, вес головной части. Наихудшие с точки зрения прочности головной части и работоспособности ее автоматики условия входа в атмосферу соответствуют точке 3 приведенной области. С другой стороны, с уменьшением абсолютной величины угла  $\Theta_0$  увеличивается требуемый вес теплозащитного покрытия, что обусловлено увеличением времени полета головной части в атмосфере.

Границы области параметров входа центра масс головной части в атмосферу, как правило, обусловлены предельно допустимыми величинами продольных и боковых перегрузок. Последние определяются прочностью и условиями нормальной работы автоматики головной части и, в конечном счете, — уровнем развития техники на момент проектирования ракеты. Программа угла тангажа баллистической ракеты должна быть такой, чтобы параметры движения головной части  $V_0$  и  $\Theta_0$  удовлетворяли заданной области входа в атмосферу.

Требования к программе угла тангажа в отношении обеспечения ограниченных значений угла места  $\beta_n$  и бортового угла  $\beta_b$  линии радиовизирования обусловлены особенностями работы системы радиоуправления. В частности, требование ограничения диапазона возможных значений угла места условием  $\beta_n \geq \beta_{n \min}$  связано с тем, что с уменьшением угла места линии радиовизирования  $\beta_n$  возрастают погрешности измерений системой радиоуправления параметров движения ракеты из-за увеличения влияния неоднородности атмосферы, ее турбулентности, рефракции и т. п. на точность измерений. По этой причине, если не ограничить снизу возможные значения угла места  $\beta_n$ , то погрешности измерения системой радиоуправления параметров движения, а также отклонения точек падения головных частей от цели при использовании настильных траекторий будут большими.

Требование ограничить диапазон изменения бортового угла линии радиовизирования обусловлено использованием узких диаграмм направленности бортовых и наземных антенн. (Как известно, с увеличением ширины диаграммы направленности антенн увеличивается область пространства, в котором распространяются радиоволны и соответственно увеличивается вероятность обнаружения радиоизлучения. Кроме того, с увеличением ширины диаграммы направленности увеличивается требуемая мощность радиопередатчика.)

В связи с этим диапазон изменения бортового угла линии

радиовизирования обычно невелик. Некоторая часть этого диапазона расходуется на колебания ракеты вокруг центра масс. Если на участке радиуправления выполняется программный разворот ракеты по тангажу порядка нескольких градусов, то оставшийся (располагаемый) диапазон изменения угла  $\beta_0$  оказывается малым (меньше  $5^\circ$ ). В связи с этим в программе полета ракет, у которых отделение головной части осуществляется по команде системы радиуправления, предусматривается ограничение разворота ракеты по тангажу на участке радиуправления. Обычно этот участок траектории является прямолинейным.

Одним из требований, предъявляемых автономной системой управления ракетой к программе угла тангажа, является ограничение максимального угла разворота ракеты по тангажу на активном участке пределом в  $85^\circ$ — $90^\circ$  (при стрельбе на сверхбольшие дальности угол разворота по тангажу может превышать  $90^\circ$ ). Если программный угол разворота ракеты превышает указанный предел, то усложняется конструкция гироскопических приборов, увеличиваются их габариты и вес.

Программу угла тангажа, обеспечивающую выполнение всех предъявленных к ней требований, в дальнейшем будем называть оптимальной. Для выбора программы угла тангажа могут быть использованы различные методы.

В общем случае выбор оптимальной программы угла тангажа является сложной вариационной задачей. Решение этой задачи классическими методами Эйлера—Лагранжа сопряжено с большими трудностями. Даже в простейшем случае, когда полет ракеты происходит в безвоздушном пространстве, эти методы приводят к необходимости решения краевой задачи для сложной системы дифференциальных уравнений. Для атмосферного участка полета задача становится еще более громоздкой из-за необходимости выбора программы угла тангажа с учетом требований со стороны системы управления и конструкции ракеты, о которых говорилось выше.

По существу эти требования на отдельных участках траектории настолько сужают область возможных вариаций программ угла тангажа, что для этих участков решение вариационной задачи не имеет практического значения. Кроме того, конструктивное исполнение корпуса ракеты и систем, ее комплекующих, накладывают ограничения на параметры движения (например, на угол атаки в области больших скоростных напоров и на участке разделения ступеней, на скоростной напор на участке разделения ступеней и т. д.). В этих условиях при попытке решать задачу классическими методами вариационного исчисления неизбежны настолько грубые допущения, что эффективность этих методов сводится на нет.

Изложенные выше соображения привели к разработке инженерных методов выбора оптимальной траектории, в основе кото-

рых лежат идеи прямых методов решения вариационных задач. Один из таких методов рассматривается в разд. 6.3.

В заключение отметим, что большие перспективы в разработке методов выбора оптимальной траектории движения ракеты имеют новые методы теории оптимальных процессов, которые позволяют находить решения задач оптимизации с учетом ограничений возможных значений параметров движения или характеристик ракеты [19], [25], [28].

## 6.2. ОПТИМАЛЬНАЯ ПРОГРАММА УГЛА ТАНГАЖА НА БЕЗАТМОСФЕРНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

Дальность полета головной части определяется параметрами движения центра масс ракеты в момент отделения головной части от последней ступени ракеты, т. е. в момент подачи главной команды:

$$L = L(q_i). \quad (6.3)$$

Параметры движения центра масс ракеты в момент подачи главной команды  $q_i$  ( $i=1 \div 6$ ), в свою очередь, определяются программой угла тангажа  $\varphi(t)$ :

$$q_i = q_i[\varphi(t)] \quad (i=1 \div 6).$$

Следовательно, дальность полета определяется программой  $\varphi(t)$ :

$$L = L[\varphi(t)].$$

Необходимое условие экстремума функционала (6.3) может быть записано в виде

$$\delta L(q_i) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = 0. \quad (6.4)$$

Здесь  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$  — баллистические производные дальности по параметрам движения в момент подачи главной команды;

$\delta q_i$ ,  $i=1 \div 6$ ) — отклонения параметров движения ракеты в момент подачи главной команды, обусловленные вариацией программы угла тангажа  $\delta\varphi(t)$ .

Программа угла тангажа  $\varphi(t)$ , удовлетворяющая условию (6.4), реализует максимум дальности стрельбы. Определение этой программы будем проводить при следующих допущениях:

- 1) влияние вращения Земли на параметры движения ракеты на активном участке мало и ими можно пренебречь;
- 2) аэродинамические силы равны нулю;
- 3) поле силы притяжения на активном участке плоскопараллельное, ускорение силы притяжения постоянно (не зависит от высоты).

Уравнения движения ракеты на активном участке траектории в земной системе координат в этом случае записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_x &= \frac{P}{m} \cos \varphi(t); \\ \dot{V}_y &= \frac{P}{m} \sin \varphi(t) - g; \\ \dot{x} &= V_x; \\ \dot{y} &= V_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Параметры движения ракеты в момент подачи главной команды  $t_k$  могут быть определены интегрированием уравнений (6.5):

$$\left. \begin{aligned} V_{x_k} &= V_{x0} + \int_0^{t_k} \frac{P}{m} \cos \varphi(t) dt; \\ V_{y_k} &= V_{y0} + \int_0^{t_k} \left( \frac{P}{m} \sin \varphi(t) - g \right) dt; \\ x_k &= x_0 + V_{x0} t_k + \int_0^{t_k} \left( \int_0^t \frac{P}{m} \cos \varphi(t) dt \right) dt = \\ &= x_0 + V_{x0} t_k + \int_0^{t_k} (t_k - t) \frac{P}{m} \cos \varphi(t) dt; \\ y_k &= y_0 + V_{y0} t_k + \int_0^{t_k} (t_k - t) \left( \frac{P}{m} \sin \varphi(t) - g \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Время  $t_k$  в этих уравнениях есть величина постоянная. Поэтому вариации параметров движения в момент главной команды и вариации дальности стрельбы при изменении программы угла тангажа запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta V_{x_k} &= - \int_0^{t_k} \frac{P}{m} \sin \varphi(t) \delta \varphi(t) dt; \\ \delta V_{y_k} &= \int_0^{t_k} \frac{P}{m} \cos \varphi(t) \delta \varphi(t) dt; \\ \delta x_k &= - \int_0^{t_k} (t_k - t) \frac{P}{m} \sin \varphi(t) \delta \varphi(t) dt; \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \delta y_k &= \int_0^{t_k} (t_k - t) \frac{P}{m} \cos \varphi(t) \delta \varphi(t) dt; \\
 \delta L &= \left( \frac{\partial L}{\partial V_x} \right)_k \delta V_{x_k} + \left( \frac{\partial L}{\partial V_y} \right)_k \delta V_{y_k} + \left( \frac{\partial L}{\partial x_k} \right) \delta x_k + \left( \frac{\partial L}{\partial y_k} \right) \delta y_k = \\
 &= \int_0^{t_k} \left[ - \left( \frac{\partial L}{\partial V_x} \right)_k \frac{P}{m} \sin \varphi(t) \delta \varphi(t) + \left( \frac{\partial L}{\partial V_y} \right)_k \frac{P}{m} \cos \varphi(t) \delta \varphi(t) - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right)_k \frac{P}{m} (t_k - t) \sin \varphi(t) \delta \varphi(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial L}{\partial y} \right)_k \frac{P}{m} (t_k - t) \cos \varphi(t) \delta \varphi(t) \right] dt.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Учитывая произвольный характер вариации  $\delta \varphi(t)$ , можно показать, что необходимым условием равенства нулю вариации дальности  $\delta L$  является равенство нулю подинтегрального выражения в любой точке траектории активного участка:

$$\begin{aligned}
 &- \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x} \right)_k (t_k - t) + \left( \frac{\partial L}{\partial V_x} \right)_k \right] \sin \varphi(t) + \\
 &+ \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial y} \right)_k (t_k - t) + \left( \frac{\partial L}{\partial V_y} \right)_k \right] \cos \varphi(t) = 0.
 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Последнее уравнение непосредственно дает зависимость оптимальной программы угла тангажа от времени полета:

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{\left( \frac{\partial L}{\partial y} \right)_k (t_k - t) + \left( \frac{\partial L}{\partial V_y} \right)_k}{\left( \frac{\partial L}{\partial x} \right)_k (t_k - t) + \left( \frac{\partial L}{\partial V_x} \right)_k}. \quad (6.9)$$

Эта формула в принципе пригодна для программирования угла тангажа баллистических ракет при стрельбе на любую дальность, если выполняются принятые допущения. Рассмотрим эти допущения подробнее.

Первое допущение, очевидно, оказывает незначительное влияние на программу  $\varphi(t)$ , поскольку параметры движения на активном участке слабо зависят от того, учтено или не учтено вращение Земли в уравнениях (6.5). К тому же влияние вращения Земли на вид программы  $\varphi(t)$  при изменении дальности стрельбы и географических условий пуска ракеты (широты точки старта и азимута стрельбы) учитывается в формуле (6.9) посредством соответствующего изменения производных

$$\frac{\partial L}{\partial V_x}, \quad \frac{\partial L}{\partial V_y}, \quad \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial y}.$$

Второе допущение может накладывать существенные ограничения на возможность использования формулы (6.9). У ракет



с дальностью стрельбы до 1000—1500 км активный участок траектории, как правило, лежит в плотных слоях атмосферы. Определение оптимальной программы угла тангажа по этой формуле неизбежно приведет к ошибке. У межконтинентальных ракет большая часть активного участка (примерно 60—70%) лежит в разреженных слоях атмосферы, и на этой части траектории оптимальная программа управления близка к программе (6.9).

Третье допущение достаточно хорошо выполняется при стрельбе на малые и средние дальности, когда высота активного участка не превышает 80—100 км, а угловая дальность в момент главной команды не превышает нескольких градусов. Условие постоянства ускорения силы притяжения в этом случае выполняется с погрешностью в 2—3%, а условие плоскопараллельности поля силы притяжения — с погрешностью в 1°—2°. У межконтинентальных ракет приведенные погрешности возрастают в два-три раза.

Ошибки в определении программы угла тангажа за счет этих погрешностей могут быть уменьшены, если ускорение силы притяжения при расчете активного участка принять равным его среднему значению на этом участке, а уравнения движения (6.5) записать в системе координат  $O'x'y'$ , начало которой  $O'$  расположено на поверхности Земли на расстоянии  $x(t_k)/2$  от точки старта в направлении стрельбы; ось  $O'x'$  направлена по касательной к поверхности Земли в плоскости стрельбы; ось  $O'y'$  — по вертикали.

Уравнение оптимальной программы угла тангажа  $\varphi'(t)$  в этой системе координат принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi'(t) = \frac{\left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right)_k (t_k - t) + \left( \frac{\partial L}{\partial V_{y'}} \right)_k}{\left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right)_k (t_k - t) + \left( \frac{\partial L}{\partial V_{x'}} \right)_k}, \quad (6.10)$$

где  $\frac{\partial L}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial y'}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial V_{x'}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial V_{y'}}$  — баллистические производные от дальности по параметрам движения в системе координат  $O'x'y'$ .

Пересчет программы угла тангажа в систему координат, расположенную в точке старта, может быть осуществлен по формуле

$$\varphi(t) = \varphi'(t) - \chi,$$

где  $\chi$  — угловая дальность от точки старта до начала  $O'$  системы координат  $O'x'y'$ .

Следует отметить, что определение оптимальной программы угла тангажа по формуле (6.9) представляет собой итерационный процесс, поскольку неизвестны частные производные дальности по параметрам движения центра масс ракеты в момент главной команды. Сначала проводится расчет траектории с выбранной в первом приближении программой угла тангажа и

определяются производные  $\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_k, \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)_k, \left(\frac{\partial L}{\partial V_x}\right)_k, \left(\frac{\partial L}{\partial V_y}\right)_k$ . Баллистические производные, полученные при первом расчете, используются для определения второго приближения программы угла тангажа уже по формуле (6.9). Затем расчет активного участка повторяется и т. д. Быстрота сходимости итерационного процесса зависит от близости первого приближения программы  $\varphi_1(t)$  к оптимальной.

### 6.3. МЕТОД ВЫБОРА ПРОГРАММ УГЛА ТАНГАЖА

#### Общие положения

Как известно, решение вариационной задачи прямым методом состоит из следующих этапов.

1. Построение минимизирующей последовательности функций  $y_i(t)$ :  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , обладающей свойством:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(y_n(t)) = \min_{y(t)} I(y(t)) = I(y^0(t)), \quad (6.11)$$

где  $I(y(t))$  — оптимизирующий функционал.

Кривая  $y^0(t)$  является предельной кривой последовательности  $\{y_n(t)\}$  и решением вариационной задачи.

2. Доказательство существования у последовательности  $\{y_n(t)\}$  предельной кривой  $y^0(t)$ .

3. Доказательство законности предельного перехода (6.11).

Применительно к задаче выбора оптимальных программ угла тангажа необходимо найти такую последовательность  $\{\varphi_n(t)\}$ , которая обеспечивала бы экстремум некоторого функционала  $I(\varphi(t))$ , например максимум дальности  $L(\varphi(t))$ .

Методы построения последовательности  $\{\varphi_n\}$  могут быть довольно разнообразными. Однако наиболее целесообразен метод, основанный на представлении последовательности  $\{\varphi_n\}$  в виде последовательности семейств программ, зависящих от параметров  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ :

$$\varphi_1(t, \lambda_1), \varphi_2(t, \lambda_1, \lambda_2), \dots, \varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Если программа  $\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  зависит от одного неизвестного параметра ( $n=1$ ), то семейство таких программ называется однопараметрическим, при двух неизвестных параметрах ( $n=2$ ) — двухпараметрическим и т. д.

Нашей задачей будет определение такой программы  $\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , которая аппроксимировала бы функцию  $\varphi^0(t)$ , реализующую экстремум функционала  $L(\varphi(t))$ , т. е. обеспечивала бы незначительное отличие значения функционала  $L(\varphi_n(t))$  от экстремума функционала  $L(\varphi^0(t))$  при условии, что программа  $\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на форму траектории конструкцией ракеты и ее системой управления, причем затраты времени на отыскание

оптимальной программы угла тангажа  $\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  приемлемы для практики.

Выбор семейств программ  $\{\varphi_n\}$  является в известной степени произвольным, однако, как уже отмечалось ранее, накладываемые на форму траектории и программу угла тангажа требования настолько сужают этот «произвол», что уже исходное семейство программ на отдельных участках полета оказывается почти определенным. Выбор семейств программ ограничивается классом непрерывных функций, поскольку программа угла тангажа должна быть непрерывной; на участке больших скоростных напоров вид семейства  $\{\varphi_n\}$  определяется условием малых углов атаки; в районе главной команды от системы радиоуправления — условием постоянства угла тангажа и т. д.

При выборе последовательности программ  $\{\varphi_n\}$  нет необходимости проводить доказательства существования у этой последовательности предельной кривой  $\varphi^0(t)$  и справедливости предельного перехода (6.11). В самом деле, область возможных вариаций программ угла тангажа с учетом требований, изложенных в разд. 6.1, весьма ограничена. Исходное семейство программ  $\varphi_i(t, \lambda_1, \dots, \lambda_i)$  и оптимальная программа тангажа  $\varphi^0(t)$  лежат в этой узкой области. Поэтому и без математического доказательства представляется очевидным, что с увеличением числа параметров  $\lambda_n$  и при выборе их оптимальных значений из допустимой области программа  $\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  из рассматриваемой последовательности семейств непрерывных функций будет приближаться к оптимальной программе.

Далее, для выполнения равенства (6.11) необходимо, чтобы функционал  $L(\varphi_n(t))$  был непрерывен в классе непрерывных функций  $\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Когда оптимизирующим функционалом является дальность стрельбы, непрерывность функции  $L[\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)]$  очевидна.

Наконец, нужно отметить, что для практики нет необходимости в строгом выполнении равенства (6.11), а достаточно выполнение этого условия с некоторой погрешностью  $\Delta L_n$ , соответствующей допустимой потере максимальной дальности:

$$L[\varphi^0(t)] - L[\varphi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_n)] \leq \Delta L_n.$$

### Семейства программ угла тангажа

Траекторию активного полета ракеты можно условно разделить на три участка:

- 1) участок дозвуковых скоростей ( $0-t_1$ );
- 2) участок транс- и сверхзвуковых скоростей и больших ( $q > 800-1000 \text{ кг/м}^2$ ) скоростных напоров ( $t_1-t_{II}$ );
- 3) участок малых скоростных напоров или безатмосферный участок ( $t_{II}-t_K$ ).

**1-й участок.** Форма дозвукового участка траектории слабо влияет на максимальную дальность и рассеивание ракеты.

В связи с этим программа угла тангажа на этом участке выбирается из условия безопасной для старта продолжительности вертикального полета  $t_b$ , допустимой скорости разворота ракеты по тангажу и обеспечения малых углов атаки в точке сопряжения 1 и 2-го участков.

Программа угла тангажа на 1-м участке после вертикального полета ( $t_b < t < t_I$ ) может быть выбрана в виде кубической параболы (рис. 6.2, а) или двух прямых (см. рис. 6.2, б):

$$\varphi_1(t) = at^3 + bt^2 + c \quad \text{при } t_b < t < t_I \quad (6.12)$$

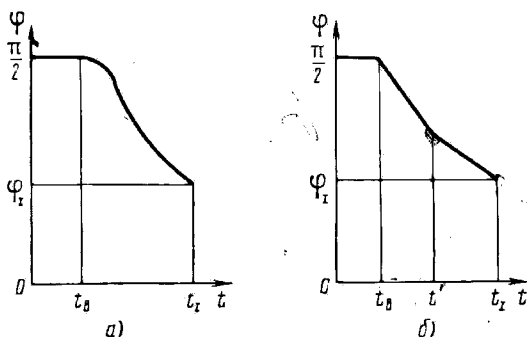


Рис. 6.2. Программа угла тангажа на начальном участке траектории:

а — в виде кубической параболы; б — в виде двух отрезков прямых

или

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \dot{\varphi}_1(t - t_b) & \text{при } t_b \leq t \leq t'; \\ \varphi_I - \dot{\varphi}_1(t - t_I) & \text{при } t' \leq t \leq t_I. \end{cases} \quad (6.13)$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  в уравнении параболы и наклон прямых определяются условием  $\alpha = 0$  при  $t = t_I$ , значением угла тангажа  $\varphi_I$  в тот же момент и допустимой величиной угловой скорости тангажа.

**2-й участок.** Основными требованиями, предъявляемыми на этом участке к программе угла тангажа, помимо обеспечения максимальной дальности и заданного рассеивания, являются обеспечение ограниченных поперечных перегрузок, приемлемых температурных режимов, управляемости ракеты и надежности разделения ступеней. Семейство программ на этом участке характеризуется условием малых углов атаки, которое может быть записано в виде

$$\dot{\varphi}_2(t) = -\frac{g}{V} \cos \varphi_2(t) \quad \text{при } (t_I \leq t \leq t_{II}). \quad (6.14)$$

Интегрирование уравнения (6.14) дает следующее выражение для программы угла тангажа на 2-м участке:

$$\varphi_2(t) = \operatorname{arctg} \left[ e^{-\int_{t_1}^t \frac{g}{V} dt} \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (6.15)$$

Таким образом, программа угла тангажа ракеты, обеспечивающая малые значения углов атаки в районе больших скоростных напоров, зависит от начальной величины угла тангажа  $\varphi_1$  и отношения  $g/V$ . Учитывая, что отношение  $g/V$  практически не зависит от вариаций траектории полета в некоторых пределах, можно считать, что программа угла тангажа ракеты на втором участке определяется параметром  $\varphi_1$ . Выбор величины этого параметра должен проводиться с учетом перечисленных выше требований.

**3-й участок.** Основными требованиями к программе угла тангажа на этом участке являются обеспечение максимальной дальности стрельбы и заданного рассеивания и в необходимых случаях обеспечение приемлемых условий для работы системы радиоуправления.

При полете в пустоте максимум дальности обеспечивается программой, определяемой выражением (6.9). Эта программа угла тангажа может быть принята в качестве оптимальной, если не предусмотрено каких-либо особых ограничений на вид программы на третьем участке полета. В соответствии с выражением (6.9) угол тангажа на этом участке убывает примерно с постоянной угловой скоростью  $\varphi_3$ .

Однако при такой программе угла тангажа затруднено обеспечение нормальных условий работы системы радиоуправления.

Кроме того, следует учитывать, что изменение угла тангажа ракеты на активном участке до  $90^\circ$  (при стрельбе на большие дальности) усложняет конструкцию giroприборов [12].

Учитывая изложенные выше соображения, можно построить следующую последовательность возможных программ угла тангажа:

1) форма траектории характеризуется условием  $\alpha=0$  от  $\varphi=\varphi_1$  до конца активного участка [однопараметрическое семейство  $\varphi(t, \varphi_1)$ ];

2) от  $\varphi=\varphi_1$  до некоторого момента времени программа характеризуется условием  $\alpha=0$ , далее угол тангажа является постоянным  $\varphi=\varphi_K$  [двухпараметрическое семейство  $\varphi(t, \varphi_1, \varphi_K)$ ];

3) от участка полета при  $\alpha=0$  до достижения некоторого значения  $\varphi=\varphi_K$  угловая скорость тангажа — максимально допустимая  $|\dot{\varphi}|=\varphi_{\max}$ , далее  $\varphi=\varphi_K$  [трехпараметрическое семейство  $\varphi(t, \varphi_1, \varphi_K, \varphi)$ ].

Каждое из перечисленных семейств, кроме первого, достаточно полно реализует максимум дальности при заданном рассеивании. С точки зрения простоты приборной реализации предпочтительным оказывается второе семейство, при этом замена энергетически оптимальной программой угла тангажа на 3-м участке полета программой с постоянным углом  $\varphi = \varphi_k$  позволяет устранить упомянутые выше недостатки оптимальной программы при незначительной потере максимальной дальности.

### Выбор оптимальных параметров программы угла тангажа

В соответствии с прямыми методами вариационного исчисления определение оптимальных параметров программы угла тангажа должно проводиться путем исследования оптимизирующих функционалов (дальности, рассеивания и т. п.) на экстремум. Однако применение обычных методов определения экстремальных значений параметров программы не представляется возможным вследствие сложной зависимости дальности и рассеивания от параметров  $\varphi_1$  и  $\varphi_k$ . В этой связи предпочтительным оказывается графоаналитический метод определения оптимальных значений параметров  $\varphi_1$  и  $\varphi_k$ , который состоит в следующем.

Выбирают некоторое семейство кривых  $\varphi(t, \varphi_{11}, \varphi_{k1})$ ,  $\varphi(t, \varphi_{12}, \varphi_{k2}), \dots, \varphi(t, \varphi_{1m}, \varphi_{km})$ , каждая кривая которого должна удовлетворять дополнительным требованиям, предъявляемым к программе. Решая систему уравнений движения ракеты на активном и пассивном участках траектории, получают зависимости оптимизирующих функционалов  $I(\varphi(t))$  (дальности, рассеивания и т. п.), а также других характеристик ракеты (например, перегрузок головной части, углов радиовизирования и др.) от параметров программ  $\varphi_1, \varphi_k$ . Полученные зависимости представляют графически и используют для выбора оптимальных значений параметров программы угла тангажа, который сводится к следующим этапам.

1. Определение дальности стрельбы и рассеивания головных частей в зависимости от параметров программы угла тангажа.

2. Расчеты температур и толщин оболочек корпуса, «сухих» весов ступеней ракеты, эффективности органов управления, надежности разделения ступеней, радиовидимости, перегрузок, действующих на головную часть, а также других характеристик для различных значений параметров программы.

3. Построение допустимой области изменения параметров программы угла тангажа с учетом требований со стороны конструкции ракеты и системы управления.

4. Выбор оптимальных значений параметров программы, соответствующих максимуму дальности стрельбы при заданном рассеивании.

В качестве примера рассмотрим порядок выбора оптимальных значений параметров программы угла тангажа для ракеты

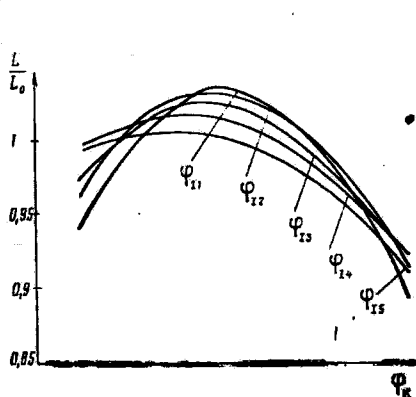


Рис. 6.3. Зависимость максимальной дальности стрельбы от параметров программы  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$  ( $\varphi_{I1} < \varphi_{I2} < \dots < \varphi_{I5}$ )

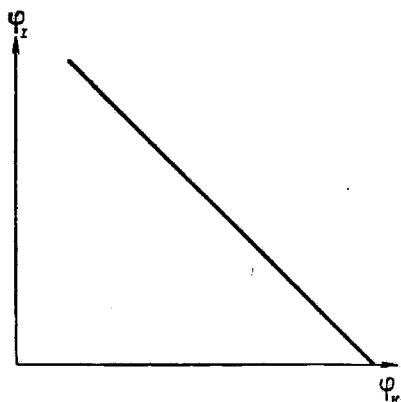


Рис. 6.4. Связь между значениями параметров программы  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$ , обеспечивающими максимальную дальность стрельбы

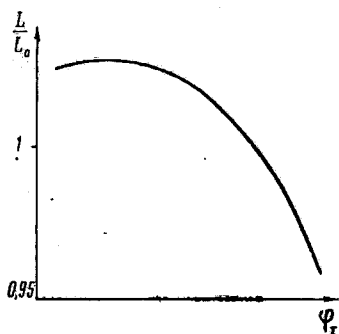


Рис. 6.5. Зависимость максимальной дальности стрельбы от параметра программы  $\varphi_I$  при оптимальных значениях угла  $\varphi_K$

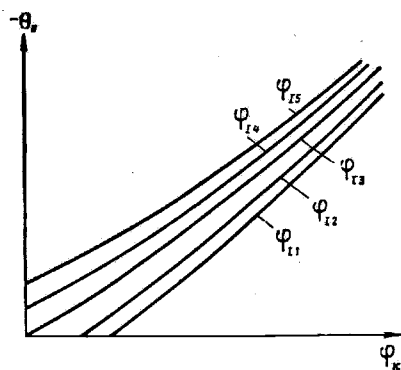


Рис. 6.6. Зависимость угла входа в атмосферу  $\theta_0$  от параметров программы  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$



с заданной дальностью стрельбы  $L_0$ . При этом для наглядности и упрощения рассуждений из полного комплекса требований (см. разд. 6.1) будем учитывать только требования обеспечения радиовидимости (6.1) и (6.2) и допустимых перегрузок.

Примерные зависимости дальности и рассеивания, углов радиовизирования, углов бросания и входа головных частей

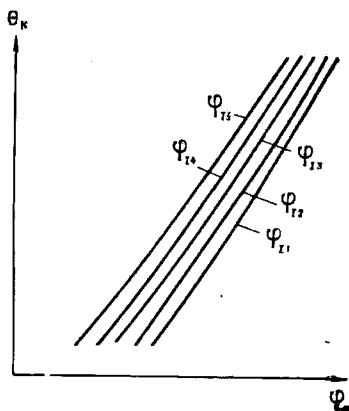


Рис. 6.7. Зависимость угла наклона траектории в момент главной команды  $\Theta_k$  от параметров программы  $\varphi_1$  и  $\varphi_k$

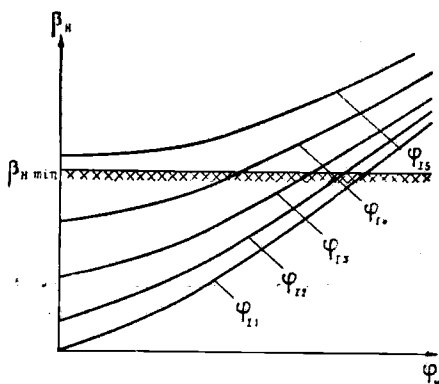


Рис. 6.8. Зависимость угла радиовизирования  $\beta_n$  от параметров программы  $\varphi_1$  и  $\varphi_k$ :

$\beta_n$ —угол между линией радиовизирования и плоскостью местного горизонта в точке расположения наземной антенны;  
 $\beta_{n \min}$ —минимально допустимый угол  $\beta_n$ , определяемый допустимой погрешностью измерения системой радиоуправления параметров движения

в атмосферу от параметров программы угла тангажа приведены на рис. 6.3—6.11. Из рассмотрения этих графиков можно сделать следующие выводы.

Сочетания параметров программы, соответствующие максимуму дальности и минимуму рассеивания, не совпадают друг с другом. Углы бросания, соответствующие минимальному рассеиванию, лежат выше углов максимальной дальности; с увеличением угла бросания максимальная дальность уменьшается. Из условий радиовидимости наиболее существенно требование (6.2).

Пример допустимой области параметров программы, полученной с учетом приведенных выше зависимостей, показан на рис. 6.12. На этом рисунке кривые, соответствующие равным дальностям, показаны штрих-пунктирными линиями, а кривые равных рассеиваний—сплошными линиями. Выбор оптимальных значений параметров  $\varphi_1$  и  $\varphi_k$  из допустимой области сводится к выбору таких сочетаний этих параметров, которые при заданном рассеивании соответствуют наибольшей дальности.

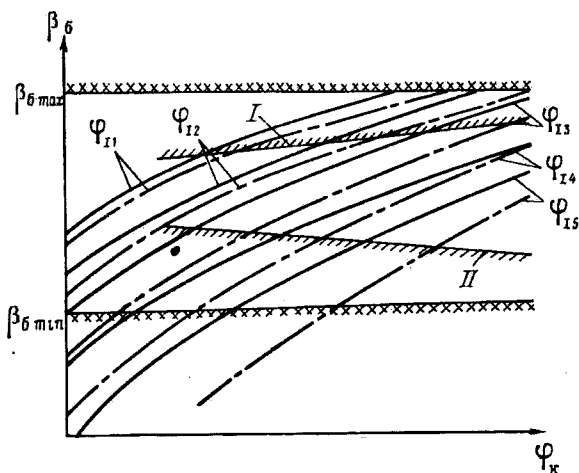


Рис. 6.9. Зависимость бортового угла  $\beta_6$  радиовизирования от параметров программы  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$ :

$\beta_6$ —угол между линией радиовизирования и продольной осью ракеты;

$\beta_6 \max$ ,  $\beta_6 \min$ —максимально и минимально допустимые значения бортового угла радиовизирования, определяемые шириной диаграммы направленности бортовых и наземных антенн;

I и II—границы области параметров  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$ , гарантирующих нахождение угла  $\beta_6$  внутри диапазона  $\beta_6 \min < \beta_6 < \beta_6 \max$  при всех географических условиях пуска;

— значение угла  $\beta_6$  в момент главной команды;

--- значение угла  $\beta_6$  в момент начала работы системы радиоуправления

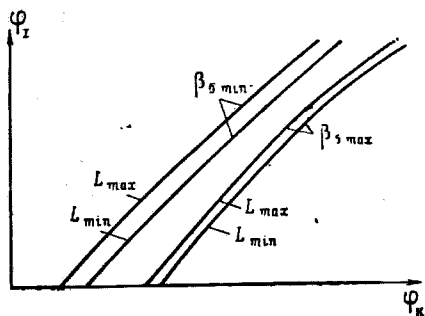


Рис. 6.10. Зависимость между параметрами программы  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$ , обеспечивающими при стрельбе на максимальную и минимальную дальности допустимые значения бортового угла радиовизирования

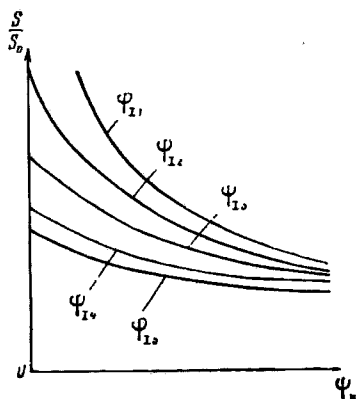


Рис. 6.11. Зависимость рассеивания по дальности и бокового рассеивания от параметров программы  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$ :

$S_0$ —площадь эллипса рассеивания, принятая за единицу

Рассмотренный метод позволяет решать задачу определения оптимальной программы угла тангажа в полной постановке с учетом всех технических требований и ограничений. Кроме того, этот метод имеет и ряд других преимуществ.

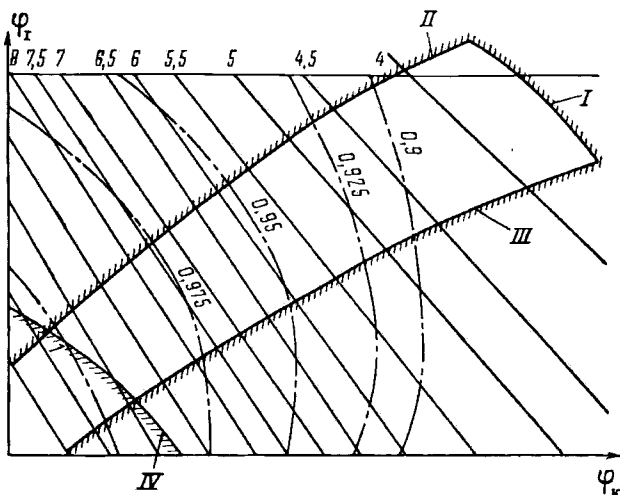


Рис. 6.12. Допустимая область параметров программы  $\varphi_I$  и  $\varphi_K$ :

*I*—граница области по допустимой перегрузке; *II*—граница области по углу  $\beta_{\text{б min}}$ ; *III*—граница области по углу  $\beta_{\text{б max}}$ ; *IV*—граница области по углу  $\beta_{\text{н min}}$ ;

— линии равных площадей рассеивания, отнесенных к площади  $S_0$ , принятой за единицу;

- - - линии одинаковых дальностей стрельбы, отнесенных к дальности  $L_0$ , принятой за единицу

В процессе проектирования часто приходится решать вопрос об изменении оптимальной программы угла тангажа при изменении каких-либо характеристик ракеты или требований к ней. В этом случае для выбора новой программы могут быть использованы результаты предыдущих исследований. Более того, используя эти результаты, можно прогнозировать направление изменения программы при изменении характеристик ракеты.

Метод позволяет находить решение задачи оптимизации программы угла тангажа с любой точностью. Это обстоятельство является очень важным, так как на разных этапах проектирования и разработки ракеты не всегда нужно знать точное решение задачи оптимизации, иногда бывает достаточным грубое приближение. Изложенный метод в этом случае очень эффективен, поскольку позволяет находить решение с той точностью, которая требуется на различных этапах проектирования.

### УСТАНОВОЧНЫЕ ДАННЫЕ НА ПУСК РАКЕТЫ

Для пуска управляемой ракеты необходимо выполнить работы, связанные с подготовкой систем ракеты и наземного оборудования к пуску. Среди этих работ можно выделить в отдельную группу работы по подготовке так называемых установочных данных системы управления ракеты и наземного оборудования.

Под установочными данными будем понимать данные, которые предназначены для предстартовой настройки приборов систем управления и прицеливания, обеспечивающие прохождение расчетной траектории полета ГЧ через точку цели. Состав установочных данных определяется способом прицеливания, типом системы управления, видом функционала управления, схемой разделения ступеней и т. п.

В настоящей главе кратко рассмотрены примерный состав установочных данных и методы их определения для ракеты с инерциальной системой управления.

#### 7. 1. МЕТОДЫ ПОДГОТОВКИ УСТАНОВОЧНЫХ ДАННЫХ

При подготовке исходных данных для стрельбы ракетами дальнего действия считаются заданными координаты точек старта и цели относительно принятой формы Земли: широта  $\varphi$ , долгота  $\lambda$  и высота  $h$ . При известных координатах старта иногда удобно координаты цели задавать посредством азимута линии старт — цель  $A_{сф}$  и дальности  $L_{сф}$ , заданных на сферической Земле.

Основными исходными данными для стрельбы служат величина функционала управления дальностью  $J$ , задаваемого в систему управления полетом и определяющего время подачи команд на отсечку двигателя последней ступени, и азимут стрельбы  $A_0$ , используемый для прицеливания ракеты. Эти данные называют также основными установками.

Определением основных установок не исчерпывается подготовка данных на пуск ракеты. В зависимости от структуры си-

стемы управления ракетой (в частности, от законов управления дальностью и направлением стрельбы), от устройства агрегатов и систем, установленных на ракете, а также от особенностей их работы, кроме основных установок, могут определяться и вспомогательные, а именно:

а) установка для предварительной команды на выключение двигателя (при выключении двигателя в две ступени);

б) установки, определяющие моменты разделения ступеней (для многоступенчатых ракет), дросселирования двигателя при увеличении перегрузки сверх допустимой и др.

Так, например, у ракеты с функционалом управления дальностью вида (5.49)

$$J = w_\lambda + p \int_0^t (w_\mu - w_\mu^*) dt$$

для настройки приборов систем управления необходимы следующие установки:

а) значение функции  $J$  на момент исполнения предварительной и главной команд;

б) значения углов  $\lambda$  и  $\mu$  и параметра  $p$ , зависящих от дальности, географических условий и т. п.

Исходные данные для стрельбы (основные и вспомогательные установки) оформляются в виде соответствующего документа.

Необходимо отметить, что совокупность тактико-технических требований, предъявляемых к тому или иному типу ракет, а также конкретное построение системы управления полетом, обеспечивающее выполнение этих требований, обуславливает разнообразие методов подготовки исходных данных для стрельбы. Детальная разработка этих методов может быть проведена при проектировании ракеты с учетом ее конкретных особенностей. Поэтому ниже даются только общие понятия о методах расчета установочных данных для стрельбы.

Можно выделить два метода получения основных установок:

1) расчет «попадающей» траектории для заданных координат точки старта и цели (интегрирование уравнений движения ракеты);

2) расчет основных установок с помощью таблиц стрельбы (по конечным формулам).

Первый метод определения основных установок может применяться при заблаговременной подготовке исходных данных. При наличии достаточно надежных и удобных в эксплуатации специальных электронных вычислительных машин, предназначенных для расчета «попадающей» траектории, он может быть также использован в процессе подготовки ракеты к пуску.

Второй метод позволяет путем достаточно простых вычислений, обычно проводимых методами «ручного счета», получить

основные установки как заблаговременно, так и в процессе подготовки ракеты к пуску. Надежность полученных результатов обеспечивается дублированием расчетов. Следует отметить, что для ракет с большими дальностями стрельбы применение таблиц стрельбы становится затруднительным ввиду их большого объема.

Значительный интерес представляет подготовка исходных данных для стрельбы с помощью специализированных электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Можно представить следующие принципы построения таких машин.

1. По заданным координатам точек старта и цели выбираются программы управления полетом ракеты (программа тангажа, программа кажущейся скорости и др.). Выбор программных функций системы управления может проводиться по заранее разработанному алгоритму, например, с использованием методов, изложенных в гл. VI. Для выбранных программ управления путем расчета «попадающей» траектории определяются необходимые установки приборов управления полетом ракеты.

2. Для возможных условий стрельбы заранее выбрана совокупность программ управления полетом ракеты и введена в «память» машины. При подготовке данных необходимо в зависимости от условий стрельбы из заданной совокупности выбрать соответствующие программы управления полетом ракеты и путем расчета «попадающей» траектории определить установку приборов управления.

3. Установка приборов управления полетом ракеты, а также программы управления рассчитаны заранее и в зависимости от условий пуска введены в «память» машины в виде коэффициентов некоторых известных функций. Машина производит расчет всех необходимых установок по сравнительно простым конечным формулам (подобно расчету установок при составлении таблиц стрельбы).

Перечисленные принципы построения специализированных ЭВМ имеют свои преимущества и недостатки.

Первый способ является наиболее универсальным. Но, с другой стороны, объем вычислительных операций в этом способе настолько велик, что для его осуществления потребуется специализированная ЭВМ, обладающая свойствами универсальной стационарной машины.

Второй способ основан на расчете «попадающей» траектории при выбранных программах управления и требует решения сложной системы уравнений движения. Для решения такой задачи специализированная ЭВМ должна также обладать всеми возможностями универсальной стационарной машины. Это не позволяет выполнить ее с одновременным удовлетворением тре-

бований, вытекающих из условий боевого применения (компактность, транспортабельность, простота обслуживания и др.).

Третий способ позволяет производить подготовку данных для стрельбы по конечным формулам путем сравнительно небольшого количества простых операций. Этот способ является наиболее приемлемым для использования специализированных ЭВМ.

Окончательные данные по основным установкам, полученные с помощью таблиц стрельбы (или при решении «попадающей» траектории), оформляются в виде соответствующего документа. примерная форма которого следующая.

#### I. Исходные данные

1. Сферическая дальность  $L_{сф}$  . . .
2. Сферический азимут линии старта — цель  $A_{сф}$  . . .

#### II. Данные для пуска

1. Азимут прицеливания  $A_0$  . . .
2. Значение функционала управления  $J$  . . .

### 7.2. РАСЧЕТ «ПОПАДАЮЩЕЙ» ТРАЕКТОРИИ

Расчет «попадающей» траектории проводится с целью определения азимута прицеливания и времени подачи предварительной и главной команд на выключение двигателя, обеспечивающих прохождение (с заданной точностью) номинальной траектории через точку старта и точку цели. Поскольку обычно моменты времени подачи предварительной и главной команд связаны соотношением

$$t_{г.к} = t_{п.к} + \Delta t,$$

где  $\Delta t = \text{const}$  (для номинальной траектории), задача сводится к определению только азимута и времени подачи главной команды.

Основными исходными данными для расчета «попадающей» траектории являются следующие:

- 1) характеристики стандартной атмосферы, поля силы тяжести Земли и фигуры Земли;
- 2) аэродинамические, геометрические, центровочные и весовые характеристики ракеты;
- 3) характеристики двигателя;
- 4) характеристики системы управления (в том числе задержки включения приборов);
- 5) временная схема работы двигателя;
- 6) программа изменения угла тангажа и кажущейся скорости по времени полета;



7) геодезические координаты точек старта и цели.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение центра масс ракеты на активном и пассивном участках траектории, составляется с учетом требований по допустимой величине ошибок в определении данных на пуск.

Расчет «попадающей» траектории основан на численном интегрировании системы уравнений движения ракеты на активном и пассивном участках траектории. Обеспечение попадания в заданную цель осуществляется выбором номинального времени (и соответствующего ему значения функционала  $J$ ) выключения двигателя и азимута прицеливания.

Расчет попадающей траектории можно проводить в два этапа по следующей схеме:

1. Заданы: приближенный азимут прицеливания  $A_0'$ , координаты точки старта ( $T_0$ ) и дальность  $L$ . Требуется определить время подачи главной команды, необходимое для получения заданной дальности  $L$  при заданном азимуте прицеливания  $A_0'$ .

2. Заданы координаты точек старта и цели ( $T_0, T_{ц}$ ) и время подачи главной команды, определенное на первом этапе. Необходимо определить точный азимут, а затем окончательное значение времени подачи главной команды.

При проведении расчетов на первом этапе для заданной точки старта, принятого приближенного значения азимута стрельбы и двух произвольно выбранных значений времени подачи главной команды  $t_1$  и  $t_2$  определяются координаты точек падения ( $T_1$  и  $T_2$ ). По заданным координатам точки старта и полученным координатам точек падения определяются геодезические дальности  $L_1$  и  $L_2$ . Далее путем линейной интерполяции уточняется время главной команды

$$t_3 = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{L_2 - L_1} (L - L_1). \quad (7.1)$$

Для полученного времени  $t_3$  проводится расчет активного и пассивного участков.

Снова уточняется время подачи главной команды по приведенной выше формуле. При этом принимается, что

$$t_1 = t_3; \quad t_2 = \bar{t},$$

где  $\bar{t}$  — тот из моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , для которого  $\Delta L_i$  равно

$$\Delta L_i = |L - L_i| \quad (i=1; 2), \quad (7.2)$$

будет меньше

Уточнение проводится до тех пор, пока не будет удовлетворено неравенство

$$\Delta L_i \leq \varepsilon(L), \quad (7.3)$$

где  $\varepsilon(L)$  — заданная точность расчета «попадающей» траектории (по дальности).

Расчеты по второму этапу проводятся с целью определения азимута прицеливания. Для двух значений времени подачи главной команды  $t_1$  и  $t_2$ , рассчитанных при условии (7.3), и данного азимута  $A_0'$  определяются координаты точек падения  $T_1(\varphi_{T1}, \lambda_1)$  и  $T_2(\varphi_{T2}, \lambda_2)$  и расстояние  $D$  между точкой цели и линией, проходящей через точки  $T_1$  и  $T_2$ . Проводится уточнение начального значения азимута по формуле

$$A_0 = A_0' + \frac{D}{\partial D / \partial A}, \quad (7.4)$$

где  $\partial D / \partial A$  рассчитывается методом численного дифференцирования.

Выбор азимута прицеливания заканчивается при удовлетворении условия

$$|D| \leq \varepsilon(A), \quad (7.5)$$

где  $\varepsilon(A)$  — заданная точность расчета «попадающей» траектории по азимуту.

После выбора азимута прицеливания проводится расчет «попадающей» траектории с использованием значения этого азимута для окончательного определения времени подачи главной команды, т. е. проверка условия (7.3).

### 7.3. СОСТАВЛЕНИЕ ТАБЛИЦ СТРЕЛЬБЫ

#### Табличные и действительные условия пуска ракет

Принцип составления таблиц стрельбы заключается в следующем. Рассматриваются идеализированные условия пуска ракет — так называемые табличные условия, для которых определение данных для стрельбы не представляет особых трудностей. Отличие действительных условий пуска от табличных учитывается путем расчета поправок. Определение поправок и их табулирование и является содержанием задачи составления таблиц стрельбы.

Обычно систему управления ракетами стремятся выполнить таким образом, чтобы возможные отклонения действительных условий пуска от табличных (назовем эти отклонения возмущающими факторами) были скомпенсированы работой системы управления. Однако система управления может иметь методические погрешности, зависящие от величины возмущающих факторов. Поэтому одной из задач составления таблиц стрельбы является выяснение влияния методических погрешностей системы управления на отклонения точек падения ГЧ от цели в зависимости от величины возмущающих факторов и при необходимости расчет поправок в основные установки, соответствующие табличным условиям.

Поскольку посредством системы управления не все возмущающие факторы целесообразно (а иногда и возможно) ком-

пенсировать, другой задачей составления таблиц стрельбы является изучение влияния некоторых возмущающих факторов на отклонения точек падения ГЧ от цели и компенсация их поправками в основные установки, соответствующие табличным условиям.

Важнейшими из таких факторов являются геофизические условия пуска ракеты. Основной задачей составления таблиц стрельбы и является получение поправок в установочные данные, учитывающих геофизические условия пуска.

Кроме этого, при составлении таблиц стрельбы может возникнуть необходимость введения поправок, учитывающих инструментальные погрешности системы управления, отклонения стартового веса ракеты и удельной тяги, аномалии поля силы тяжести и другие возмущающие факторы. Все эти поправки в основные установочные данные (за исключением геофизических условий пуска) являются малыми величинами (в пределах нескольких километров) и введение их в таблицы стрельбы может быть обусловлено только стремлением повысить точность стрельбы. В связи с тем, что учет малых поправок не представляет принципиальных трудностей и не всегда является необходимым, вопросы, связанные с расчетом этих поправок, рассматривать не будем.

Под табличными можно понимать следующие условия:

а) Земля является невращающейся сферой радиуса  $R = 6371 \text{ км}$ ;

б) ускорение силы тяжести направлено к центру Земли и по величине обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли, т. е. подчиняется закону Ньютона;

в) ускорение силы тяжести на поверхности Земли равно нормальному значению  $g_0 = 9,81 \text{ м/сек}^2$ ;

г) точки старта и цели расположены на поверхности Земли;

д) ветер отсутствует, а остальные метеорологические элементы соответствуют стандартной атмосфере;

е) все основные параметры ракеты соответствуют номинальным значениям;

ж) аномалии поля силы тяжести отсутствуют.

При табличных условиях основные установки зависят только от дальности стрельбы (азимут стрельбы определяется из чисто геометрических условий и равен азимуту линии старт—цель).

Действительные условия стрельбы значительно отличаются от табличных. Влияние этих отличий на точность стрельбы (за исключением геофизических условий пуска) и решение вопроса о необходимости учета их в основных установках зависят от особенностей системы управления. В общем случае при расчете основных установок в зависимости от геофизических условий целесообразно учитывать вращение Земли, несферичность Земли и нецентральность поля силы тяжести.

## Расчет основных установок

Поскольку метод определения установочных данных может быть разработан только с учетом конкретных особенностей ракеты, то для примера рассмотрим ракету, оснащенную интегратором продольных ускорений, ось чувствительности которого направлена под некоторым постоянным углом  $\lambda$  к начальному горизонту в точке старта, системой регулирования кажущейся скорости и системами нормальной и боковой стабилизации. Приборы систем нормальной и боковой стабилизации и чувствительные элементы интеграторов продольных ускорений установлены на гиросtabilизированной платформе. Программы изменения угла тангажа и кажущейся скорости считаются заданными и не зависят от условий стрельбы. Функционал управления дальностью определяется величиной кажущейся скорости  $\omega_\lambda$  в направлении  $\lambda$ :  $J = \omega_\lambda$ .

Рассмотрим расчет основных установок  $J$  и  $A_0$  в зависимости от геофизических условий.

Задача заключается в том, чтобы по известным геодезическим координатам точки старта  $\varphi_{г0}$ ,  $\lambda_0$  и цели  $\varphi_{гц}$ ,  $\lambda_{ц}$  определить функционал управления дальностью  $J$  и азимут стрельбы  $A_0$ .

Таблицы стрельбы получаются достаточно удобными для практического использования, если входными величинами в них принять сферическую дальность стрельбы  $L_{сф}$ , сферический азимут линии старт — цель  $A_{сф}$  и широту  $\varphi_{г0}$ .

Значения  $L_{сф}$  и  $A_{сф}$  по известным  $\varphi_{г0}$ ,  $\lambda_0$  и  $\varphi_{гц}$ ,  $\lambda_{ц}$  могут быть определены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} L_{сф} &= R \arccos [\sin \varphi_{г0} \sin \varphi_{гц} + \cos \varphi_{г0} \cos \varphi_{гц} \cos (\lambda_{ц} - \lambda_0)]; \\ A_{сф} &= \arcsin \left[ \sin (\lambda_{ц} - \lambda_0) \frac{\cos \varphi_{гц}}{\sin \frac{L_{сф}}{R}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

в которых геоцентрическая широта точки старта или цели связана с геодезической широтой соответствующей точки формулой

$$\varphi_{гц} = \arctg \left( \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi_{г} \right), \quad (7.7)$$

где  $a$  и  $b$  — соответственно большая и малая полуоси земного эллипсоида.

Зависимость установок  $J$  и  $A_0$  от  $A_{сф}$  и  $\varphi_{г0}$  для заданной  $L_{сф}$  можно представить в виде рядов:

$$\left. \begin{aligned} J &= J_0 + J_1 \Phi_1 + J_2 \Phi_2 + \dots + J_N \Phi_N; \\ A_0 &= A_{сф} + K_1 \Psi_1 + K_2 \Psi_2 + \dots + K_M \Psi_M, \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

где  $N$  и  $M$  — количество выбранных членов разложений;  
 $\Phi_i$  и  $\Psi_j$  — сферические функции от  $\varphi_{г0}$ ,  $A_{сф}$ .

Коэффициенты разложений  $J_1, \dots, J_N, K_1, \dots, K_M$  вычисляются по соответствующим формулам на основании данных, получаемых при численном интегрировании ряда опорных траекторий. В результате получают значения коэффициентов  $J_i(L_{сф})$  и  $K_i(L_{сф})$  для всех опорных дальностей интересующего диапазона.

Значения величин  $J_i$  и  $K_i$  для промежуточных (между опорными) дальностей, помещаемых в таблицы стрельбы, определяют путем квадратичного интерполирования зависимостей  $J_i(L_{сф})$  и  $K_i(L_{сф})$ .

Шаг помещаемых дальностей выбирается так, чтобы погрешность за счет линейной интерполяции табличных дальностей при расчете основных установок не превышала допустимой.

Для окончательного решения вопроса о количестве помещаемых в таблицы стрельбы членов разложения исследуется влияние на дальность стрельбы и боковое отклонение последних членов разложений.

Оценка необходимого числа членов разложений производится исходя из требуемой точности получения величин  $J$  и  $A_0$  на основании анализа остаточных членов разложений, определяемых как разность соответственных значений функционала  $J'(\varphi_{г0}, A_0)$  и отклонения по направлению  $\Delta A'(\varphi_{г0}, A_0)$ , рассчитанных численным интегрированием, и значений функционала  $J''(\varphi_{г0}, A_0)$  и отклонения по направлению  $\Delta A''(\varphi_{г0}, A_0)$ , рассчитанных на основании таблиц стрельбы.

В качестве критерия точности можно принимать условие, когда систематические погрешности в определении точек падения головных частей за счет отбрасывания членов разложений более высоких порядков не превосходят некоторых допустимых величин.

В заключение проводится ряд контрольных расчетов основных установок по таблицам стрельбы и путем решения уравнений движения ракеты. Сравнение данных, полученных таким путем, позволяет судить о правильности и точности составления таблиц стрельбы.

### Схема расчета и оформления таблиц стрельбы

1. Расчет коэффициентов  $q_k^i$  и  $p_k^i$  разложений параметров конца активного участка  $q_k$  и  $p_k$  в зависимости от геодезических условий производится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} q_k &= q_k^{(0)} + \sum_{i=1}^{N-1} q_k^i \Phi_i(\varphi_{г0}, A_0); \\ p_k &= \sum_{i=1}^M p_k^i \Psi_i(\varphi_{г0}, A_0), \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

где  $q_k = (x_k, y_k, V_{xk}, V_{yk})$ ;  $p_k = (z_k, V_{zk})$ .

Используются соответствующие формулы и результаты решения дифференциальных уравнений движения ракеты на активном участке траектории для ряда комбинаций  $(\varphi_{г0}, A_0)$ .

Результаты расчетов каждого параметра  $q_k^i$  и  $p_k^i$  при аргументе  $t_k$  (от  $t_{k\min}$  до  $t_{k\max}$ ) оформляются в виде таблицы.

2. Расчет параметров конца активного участка для выбранных комбинаций  $(\varphi_{г0}, A_0)$ . Используются формулы (7.9) и  $J = \omega_\lambda$ , результаты расчетов  $q_k^i$  и  $p_k^i$ , рекомендуемые комбинации  $(\varphi_{г0}, A_0)$ . Результаты расчетов оформляются в зависимости от аргумента  $t_k$  в виде табл. 7.1.

Таблица 7.1

| $t_k$           | $(A_0, \varphi_{г0})_2$ | $x_k$ | $y_k$ | $V_{xk}$ | $V_{yk}$ | $J$ | $z_k$ | $V_{zk}$ |
|-----------------|-------------------------|-------|-------|----------|----------|-----|-------|----------|
| $t_{k1}^{\min}$ | $(A_0, \varphi_{г0})_1$ |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | • • • • •               |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | • • • • •               |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | $(A_0, \varphi_{г0})_m$ |       |       |          |          |     |       |          |
| • • •           | • • • • •               |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | • • • • •               |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | • • • • •               |       |       |          |          |     |       |          |
| $t_{kp}^{\max}$ | $(A_0, \varphi_{г0})_1$ |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | • • • • •               |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | • • • • •               |       |       |          |          |     |       |          |
|                 | $(A_0, \varphi_{г0})_m$ |       |       |          |          |     |       |          |

3. Расчет сферической дальности  $L_{сф}$ , сферического азимута линии старт — цель  $A_{сф}$  и поправки в сферический азимут  $\Delta A_{сф} = A_0 - A_{сф}$ .

Используются формулы (7.6) и результаты расчета параметров конца активного участка ( $x_k, y_k, V_{xk}, V_{yk}, J, z_k, V_{zk}$ ).

Координаты точки падения  $\varphi_{гп}, \lambda_{п}$  определяются путем решения дифференциальных уравнений движения ракеты на пассивном участке для всех  $m$  начальных условий (параметров конца активного участка). При этом долгота  $\lambda_0$  может задаваться произвольно и быть принята постоянной для всех расчетов. Результаты расчетов оформляются в виде табл. 7.2.

4. Оформление таблиц стрельбы. Для каждого опорного значения дальности  $L_{сф1}^{оп}$ , заносимого в таблицу, определяются коэффициенты  $J_i, K_i$ . Эти коэффициенты для дальностей, лежащих между значениями  $L_{сф1}^{оп}$ , определяются квадратичной интерполяцией. Результаты расчетов могут быть оформлены в виде табл. 7.3.

Таблица 7.2

| $t_k$          | $(A_0, \varphi_{r0})_1$ |          |                 |     | ... | $(A_0, \varphi_{r0})_m$ |          |                 |     |
|----------------|-------------------------|----------|-----------------|-----|-----|-------------------------|----------|-----------------|-----|
|                | $A_{сф}$                | $L_{сф}$ | $\Delta A_{сф}$ | $J$ |     | $A_{сф}$                | $L_{сф}$ | $\Delta A_{сф}$ | $J$ |
| $t_{к1}^{min}$ |                         |          |                 |     |     |                         |          |                 |     |
| $t_{к2}$       |                         |          |                 |     |     |                         |          |                 |     |
| ...            |                         |          |                 |     |     |                         |          |                 |     |
| ...            |                         |          |                 |     |     |                         |          |                 |     |
| ...            |                         |          |                 |     |     |                         |          |                 |     |
| $t_{кn}^{max}$ |                         |          |                 |     |     |                         |          |                 |     |

Таблица 7.3

| $L_{сф}$        | $\frac{\partial J}{\partial L_{сф}}$ | $J_0$           | $J_1$           | ... | $J_N$           | $K_1$ | $K_2$ | ... | $K_M$ |
|-----------------|--------------------------------------|-----------------|-----------------|-----|-----------------|-------|-------|-----|-------|
| $K_M$           | $\frac{M}{K_M \cdot сек}$            | $\frac{M}{сек}$ | $\frac{M}{сек}$ |     | $\frac{M}{сек}$ | мин   | мин   |     | мин   |
| $L_{сф1}^{min}$ |                                      |                 |                 |     |                 |       |       |     |       |
| ...             |                                      |                 |                 |     |                 |       |       |     |       |
| $L_{сфn}^{max}$ |                                      |                 |                 |     |                 |       |       |     |       |

Для каждой дальности (или некоторого диапазона дальностей) оценивается необходимость учета всех  $N$  коэффициентов  $J_i$  и  $M$  коэффициентов  $K_i$  на основании расчетов остаточных членов. При возможности часть коэффициентов не учитывается.

Окончательное число коэффициентов в зависимости от дальности помещаются в таблицы стрельбы по приведенной форме. Кроме этого, в таблицы стрельбы помещаются также коэффициенты, характеризующие влияние малых возмущающих факторов на основные установки.

Из рассмотренной выше схемы составления таблиц стрельбы следует, что основные установки не являются непосредственно выходными величинами их. Для получения основных установок необходимо провести ряд расчетов, результаты которых зависят от геофизических условий, а также могут зависеть от некоторых формулярных данных ракет (например, стартовый вес), метеорологических условий (например, температуры компонентов топлива) и др. Большая часть расчетов (учет геофизических условий, формулярных данных ракеты) может быть проведена заранее при известной задаче и известных ракетах, предназначенных для выполнения ее.



ПРЕДЕЛЬНАЯ ДАЛЬНОСТЬ  
СТРЕЛБЫ✓ 8.1. ПОНЯТИЯ О ПРЕДЕЛЬНОЙ ДАЛЬНОСТИ  
СТРЕЛБЫ И ГАРАНТИЙНЫХ ЗАПАСАХ ТОПЛИВА

Современные баллистические ракеты дальнего действия предназначены для доставки головной части на большие расстояния, в том числе на межконтинентальные. Ввиду этого вопросы, связанные с обеспечением необходимой дальности стрельбы, представляют значительный интерес.

Каждый конкретный тип ракеты проектируется под определенный диапазон дальностей, граничные точки которого называются соответственно минимальной  $L_{\min}$  и максимальной  $L_{\max}$  дальностями стрельбы. При стрельбе на дальности, выходящие за границы этого диапазона, ракета может не удовлетворять тем или иным техническим требованиям. Так, например, при стрельбе на дальности, превышающие максимальную, могут возникнуть следующие ненормальности:

- нехватка компонентов топлива;
- нарушение прочности отдельных элементов конструкции из-за увеличения перегрузок в конце активного участка или на атмосферной части пассивного участка траектории;
- нарушение прочности головной части из-за увеличения аэродинамического нагрева на атмосферном участке траектории;
- увеличение рассеивания точек падения головных частей сверх допустимых величин и т. д.

Очевидно, что для идеально спроектированной ракеты ограничения подобного рода должны одновременно ставить предел дальнейшему увеличению дальности. Например, нет никакого смысла иметь запас теплозащитного покрытия, если он все равно не может быть использован из-за нехватки топлива или нарушения прочности ракеты.

В дальнейшем будем рассматривать только те ограничения на дальность стрельбы, которые обусловлены возможностью нехватки компонентов топлива. Тем самым предположим, что номинальная траектория и основные конструктивные параметры ракеты уже выбраны так, чтобы обеспечить наибольшую дальность стрельбы.

Максимальная дальность стрельбы является сложным функционалом от параметров и функций, характеризующих конструкцию ракеты, двигателя, системы управления, программы управления, условия пуска и полета и т. п. Максимально возможную дальность стрельбы отдельной ракетой, соответствующую конкретным условиям пуска и полета, условимся называть располагаемой дальностью полета  $L_{\text{расп}}$ . Располагаемая дальность не может служить проектной характеристикой ракеты, обеспечивающей заданный диапазон дальностей стрельбы, поскольку в реальных условиях производства и эксплуатации

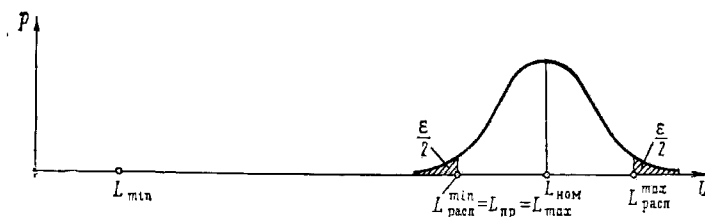


Рис. 8.1. К определению предельной дальности стрельбы методом статистических испытаний

основные параметры ракеты и условия пуска и полета ракеты (условия стрельбы) не являются стабильными, а изменяются в некоторых пределах.

Проектные параметры ракеты и условия стрельбы, принятые при расчетах за стандартные, будем называть номинальными (обычно они соответствуют их среднестатистическим характеристикам). Дальность полета, соответствующую номинальным характеристикам ракет и условиям стрельбы, будем называть номинальной  $L_{\text{ном}}$ . Отклонения характеристик ракеты и условий стрельбы от номинальных значений, определяющие отклонения располагаемой дальности от номинальной, будем называть возмущающими факторами.

В соответствии со случайным характером возмущающих факторов область их изменения и диапазон изменения располагаемой дальности можно определить только с некоторой вероятностью  $1-\varepsilon$ . Очевидно, для заданной вероятности  $\varepsilon$  существуют две границы изменения располагаемых дальностей: максимальная  $L_{\text{расп}}^{\text{max}}$ , соответствующая вероятности  $P(L \geq L_{\text{расп}}^{\text{max}}) = \frac{\varepsilon}{2}$ ,

и минимальная  $L_{\text{расп}}^{\text{min}}$ , соответствующая вероятности  $P(L \leq L_{\text{расп}}^{\text{min}}) = \frac{\varepsilon}{2}$  (рис. 8.1). Так как проектант должен надежно обеспечить стрельбу ракетой в заданном диапазоне дальностей, в том числе достижение максимальной дальности  $L_{\text{max}}$ , то при проектировании ракеты следует исходить из условия  $L_{\text{расп}}^{\text{min}} = L_{\text{max}}$ . В этом случае для всей совокупности ракет определен-

ного класса запасы топлива обеспечивают выключение двигателя по команде от системы управления с вероятностью  $P = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , т. е. с данной вероятностью гарантируется достижение заданной максимальной дальности  $L_{\max}$ . Очевидно, что с вероятностью  $P < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  при пусках ракет на  $L_{\max}$  в зависимости от конкретного сочетания возмущающих факторов может произойти израсходование топлива или одного из компонентов, что приведет к самопроизвольному выключению двигателя. Данное обстоятельство недопустимо ввиду значительного увеличения рассеивания точек падения ГЧ. Поэтому выключение двигателя одноступенчатых ракет и последних ступеней многоступенчатых ракет всегда производится по команде от системы управления.

Исходя из этого, предельной дальностью  $L_{\text{пр}}$  будем называть минимальное значение располагаемой дальности  $L_{\text{расп}}^{\min}$ , которое может быть достигнуто ракетой, если имеющиеся на ней запасы топлива обеспечивают с заданной надежностью  $P = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  выключение двигателя по команде от системы управления (т. е. при достижении определенного значения функционала управления). Соответственно, предельным значением функционала управления  $J_{\text{пр}}$  будем называть такое наибольшее значение функционала, достижение которого обеспечивается имеющимися запасами топлива с заданным уровнем надежности.

Согласно данному определению под предельной дальностью стрельбы многоступенчатой ракетой следует понимать ту максимальную дальность, которая может быть достигнута, если имеющиеся на каждой ступени запасы топлива обеспечивают с заданной надежностью выключение двигателя последней ступени по команде системы управления.

Рассмотрим более подробно связь между предельной дальностью стрельбы и количеством топлива, которое может быть использовано для работы двигательной установки. Представим себе полет ракеты на максимальную дальность в номинальных условиях. В этом полете для создания тяги будут израсходованы некоторые количества компонентов топлива, которые назовем номинальными рабочими запасами компонентов топлива. В реальном полете, чтобы достигнуть той же дальности, может потребоваться дополнительное количество топлива для компенсации влияния возмущающих факторов, например для преодоления дополнительного лобового сопротивления, вызванного встречным ветром. Чтобы предельная дальность стрельбы была гарантирована выключением двигателя по команде управления с надежностью  $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , на борту ракеты необходимо иметь дополнительные (сверх рабочих) запасы топлива, потребные для компенсации влияния возмущающих факторов с тем же уровнем

надежности. Эти дополнительные запасы называют гарантийными запасами компонентов топлива.

Рассмотрим подробнее понятие о гарантийных запасах топлива. Пусть проводится стрельба серией ракет на одну и ту же максимальную дальность  $L_{\max}$ . Чтобы достигнуть эту дальность в различных условиях стрельбы при воздействии разнообразных случайных факторов, необходимо затратить в каждом полете разное количество топлива. Запасы топлива, потребные для полета на заданную дальность, являются случайными величинами,

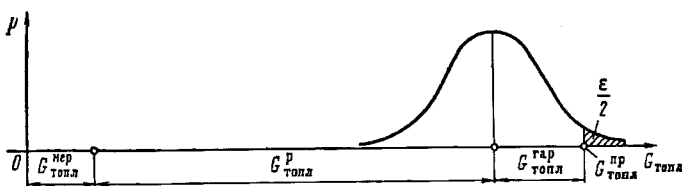


Рис. 8.2. Составляющие доз заправки топлива

подчиненными некоторому закону распределения вероятностей (рис. 8.2). Для того чтобы заданная дальность полета  $L_{\max}$  достигалась с надежностью  $1 - \frac{\epsilon}{2}$  (т. е. чтобы  $L_{\max} = L_{\text{пр}}$ ), необходимо

заправить ракету некоторым количеством топлива  $G_{\text{топл}}^{\text{пр}}$ , обеспечивающим этот уровень надежности.

Выделим из полного запаса топлива  $G_{\text{топл}}^{\text{пр}}$  нерабочие запасы  $G_{\text{топл}}^{\text{нер}}$  и номинальный рабочий запас  $G_{\text{топл}}^{\text{р}}$ .

*Рабочие запасы* используются в качестве рабочего тела двигателя для обеспечения предельной дальности стрельбы при полете в номинальных условиях.

*Нерабочие запасы* включают в себя топливо, которое не может быть использовано в полете в качестве рабочего тела двигателя, но должно быть заправлено в ракету для обеспечения нормального функционирования двигательной установки (топливо, залитое в двигатель; топливо, необходимое для безкавитационной работы насосов; остатки незабора топлива; топливо, расходуемое до старта и пр.).

Разность

$$G_{\text{топл}}^{\text{пр}} - (G_{\text{топл}}^{\text{нер}} + G_{\text{топл}}^{\text{р}}) = G_{\text{топл}}^{\text{гар}}$$

будет представлять собой гарантийные запасы топлива.

В номинальном полете на дальность  $L = L_{\text{пр}}$  в баках ракеты останутся гарантийные запасы топлива. Отсюда вытекает простой способ определения величины предельной дальности — из расчета номинальной траектории ракеты, проведенного при неиспользованных гарантийных запасах. Вся сложность задачи оценки предельной дальности в этом способе переносится на расчет гарантийных запасов. Уровень надежности обеспечения пре-

дельной дальности равен при этом уровню надежности, принятому при расчете гарантийных запасов.

Гарантийные запасы топлива являются балластом, снижающим предельную дальность стрельбы. Действительно, важнейшим параметром, определяющим дальность полета ракеты, является отношение веса топлива, сгорающего на активном участке (т. е. рабочего запаса топлива), к полному весу ракеты. Это отношение тем больше, чем меньше пассивный вес ракеты, который представляет собой сумму весов конструкции корпуса и двигателей, головной части, системы управления и гарантийных запасов топлива. При прочих равных условиях максимальная дальность полета будет тем меньше, чем больше гарантийные запасы топлива.

По этой причине нецелесообразно влияние всех возмущающих факторов учитывать только назначением гарантийных запасов. Чем большее количество факторов рассматривается как случайные возмущения и учитывается в расчетах гарантийных запасов, тем больше вес ракеты при заданной предельной дальности стрельбы. Ракета, у которой гарантийными запасами обеспечивалась бы одна и та же предельная дальность при стрельбе как на восток, так и на запад, как зимой в самые холодные дни, так и летом в самые жаркие дни и т. д., была бы крайне перетяжелена и неудобна в эксплуатации. Поэтому желательно часть возмущающих факторов определять с достаточной точностью перед пуском ракеты и учитывать их при расчете доз заправки соответствующим выбором рабочих запасов топлива. Так, например, при расчете доз заправки можно учитывать температуры (удельные веса) компонентов топлива и формулярное<sup>1</sup> значение параметра  $K$  — отношения весовых секундных расходов компонентов топлива.

Хотя учет возмущающих факторов при расчете доз заправки ракеты компонентами топлива позволяет более полно использовать энергетические возможности ракеты, далеко не все известные факторы целесообразно учитывать при расчете доз заправки. Очевидно, что чем большее количество факторов учитывается при подготовке ракеты к пуску, тем труднее обеспечить простоту эксплуатации ракеты и высокую ее боеготовность. Поэтому ряд возмущающих факторов учитывается путем введения поправок либо в значение предельной дальности стрельбы (например, влияние геодезических условий пуска), либо в уровень надежности обеспечения предельной дальности.

Таким образом, влияние возмущающих факторов при обеспечении предельной дальности стрельбы может быть учтено:

- назначением гарантийных запасов топлива;
- выбором доз заправки рабочих запасов топлива;

---

<sup>1</sup> Значение параметра  $K$ , полученное по данным стендовых испытаний двигателя.

— введением поправок в значение предельной дальности стрельбы или в уровень ее надежности.

В соответствии со сказанным систему возмущающих факторов, влияющих на предельную дальность стрельбы, целесообразно разделить на две группы. К первой группе отнесем известные возмущающие факторы, влияние которых на предельную дальность учитывается перед пуском (в дозах заправки ракеты топливом, в поправках на величину предельной дальности и в соответствующем выборе цели). В другую группу включим случайные факторы, влияние которых компенсируется наличием на ракете гарантийных запасов топлива.

В процессе проектирования предельная дальность может быть найдена расчетом. Значение предельной дальности, полученное расчетом, будем называть расчетной предельной дальностью стрельбы.

Задачу определения расчетной предельной дальности стрельбы целесообразно подразделять на две задачи: расчет предельной дальности для некоторых номинальных условий стрельбы и учет влияния условий стрельбы на предельную дальность.

В качестве номинальных можно принять, например, следующие условия:

- геодезическая широта точки старта  $\varphi_0=45^\circ$ ;
- азимут направления прицеливания  $A_0=0^\circ$ ;
- параметры атмосферы стандартные;
- температура компонентов топлива, равная температуре, принятой за номинальную при выборе программ управления.

Окончательное назначение предельной дальности стрельбы может производиться по результатам согласования расчетной предельной дальности с данными летных испытаний, что позволяет также учесть, кроме нехватки топлива, и другие ограничения на максимальную дальность стрельбы.

Расчет предельной дальности в общем случае может быть проведен путем использования метода статистических испытаний. Для этого выполняют  $n$  расчетов располагаемой дальности для случайных сочетаний случайных величин возмущающих факторов и определяют величину предельной дальности при заданном уровне надежности  $P$  путем статистической обработки  $n$  значений дальностей, соответствующих полному выгоранию топлива (см. рис. 8.1).

Поскольку метод статистических испытаний требует значительных затрат времени (в том числе машинного), гораздо проще и удобнее определять величину предельной дальности из расчета невозмущенной траектории ракеты, проведенного при неиспользованных гарантийных запасах. Уровень надежности обеспечения предельной дальности в этом случае равен уровню надежности, принятому при расчете гарантийных запасов.

Исходными данными для расчета предельной дальности таким методом служат стартовые и конечные веса каждой ступени ракеты.

Стартовый вес  $G_{0i}$  каждой  $i$ -й ступени при номинальных условиях стрельбы определяется по формуле

$$G_{0i} = G_{\text{сух } i} + G_{\text{топл } i}^{\text{р}} + G_{\text{топл } i}^{\text{гар}} + G_{\text{топл } i}^{\text{нер}} - G_{\text{топл } i}^{\text{дост}} + G_{\text{надд } i} + G_{0,i+1}, \quad (8.1)$$

где  $G_{\text{топл } i}^{\text{р}}$  — вес номинального рабочего запаса топлива;  
 $G_{\text{топл } i}^{\text{гар}}$  — вес гарантийных запасов;  
 $G_{\text{топл } i}^{\text{нер}}$  — вес нерабочих запасов топлива;  
 $G_{\text{топл } i}^{\text{дост}}$  — топливо, расходуемое до старта;  
 $G_{\text{надд } i}$  — вес рабочего тела наддува;  
 $G_{\text{сух } i}$  — «сухой» вес отделяющейся части  $i$ -й ступени;  
 $G_{0,i+1}$  — начальный вес запавленной  $(i+1)$ -й ступени.

Из этого выражения определяются значения конечных весов, соответствующих полному выгоранию рабочих запасов топлива и неиспользованным гарантийным запасам. Затем с учетом значений стартовых и конечных весов каждой ступени ракеты рассчитываются активный и пассивный участки траектории при номинальных условиях полета. Полученное в результате расчета значение дальности принимается в качестве предельной дальности стрельбы.

Как видно, рассмотренный метод пригоден только для поворочных расчетов предельной дальности, когда уже известны гарантийные запасы топлива. Поэтому представляют интерес методы расчета, которые позволяют определить предельную дальность и соответствующие ей гарантийные запасы топлива в зависимости от возмущающих факторов.

Один из таких методов основан на расчете возмущенных траекторий ракеты. Этот способ является методически простым, но требует определенных затрат машинного времени для многократного решения системы дифференциальных уравнений движения ракеты. Другой приближенный метод основан на разложении выражения для дальности стрельбы в ряд по параметрам, характеризующим движение центра масс ракеты, с отбрасыванием членов выше первого (или второго) порядков малости.

Ниже будут рассмотрены особенности назначения гарантийных запасов топлива, определения доз заправки компонентов топлива и учета влияния условий стрельбы на предельную дальность. Рациональное решение этих взаимосвязанных вопросов с учетом особенностей конструкции ракеты и системы управления и условий эксплуатации ракеты является необходимым условием обеспечения требуемой предельной дальности стрельбы.



## 8.2. ГАРАНТИЙНЫЕ ЗАПАСЫ ТОПЛИВА

Задача по назначению гарантийных запасов топлива состоит в определении количества топлива, которое необходимо для компенсации влияния наихудшего сочетания возмущающих факторов. При расчете гарантийных запасов топлива необходимо определить:

— состав, максимальные значения и вероятностные характеристики возмущающих факторов, кроме факторов, являющихся аргументами доз заправки или учитываемых путем ввода поправок в предельную дальность стрельбы;

— влияние каждого возмущающего фактора на максимальную дальность стрельбы (для оценки значимости возмущающего фактора);

— количество топлива, необходимое для компенсации суммарного влияния возмущающих факторов при наихудшем их сочетании на максимальную дальность стрельбы, т. е. гарантийный запас топлива.

Основные возмущающие факторы, учитываемые при определении гарантийных запасов топлива, можно подразделить на следующие группы, составленные по общим признакам:

- отклонения «сухого» веса;
- отклонения веса топлива;
- отклонения параметров двигателя;
- отклонения параметров атмосферы;
- погрешности системы управления;
- отклонения начальных параметров движения.

Конкретный перечень возмущающих факторов зависит от особенностей конструкции ракеты, условий ее эксплуатации и т. д.

### Уравнения движения ракеты

Для оценки гарантийных запасов топлива рассмотрим упрощенную систему уравнений движения центра масс ракеты в плоскости стрельбы на активном участке траектории:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g \frac{P-X}{G} - g \sin \Theta; \\ \frac{d\Theta}{dt} &= g \frac{Pa+Y}{GV} - \frac{g}{V} \cos \Theta; \\ \frac{dx_3}{dt} &= V \cos \Theta; \\ \frac{dy_3}{dt} &= V \sin \Theta, \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

которую дополним упрощенными уравнениями системы управления — уравнениями регулирования кажущейся скорости и угла тангажа:

$$\left. \begin{aligned} V + \int_0^t g \sin \Theta dt &= w_{x1}^*(t); \\ \alpha + \Theta &= \varphi^*(t) \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

и уравнением изменения веса

$$G = G_0 - \int_0^t \dot{G} dt. \quad (8.4)$$

В этих уравнениях подъемная сила рассчитывается с учетом подъемной силы органов управления при помощи балансировочного уравнения  $M_z = 0$ , т. е. по формуле

$$Y_{\text{бал}} = Y \frac{x_{\text{лв}} - x_d}{x_{\text{лв}} - x_r}.$$

Аэродинамические силы определяются с учетом ветра<sup>1</sup>

$$X = i c_x \left( \alpha_w, \frac{V_w}{a} \right) q_w S;$$

$$Y = c_y \left( \alpha_w, \frac{V_w}{a} \right) q_w S.$$

В правые части уравнений входят параметры  $\lambda_i$ , характеризующие конструкцию ракеты, двигательной установки, системы управления и условия полета. Так, например, можно записать

$$G = \lambda_1 - \int_0^t \lambda_2 dt; \quad P = \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_5 \frac{p}{p_0};$$

$$X = \lambda_4 c_x \frac{q}{q_0} V_w^2,$$

где  $\lambda_1 = G_0$  — стартовый вес;

$\lambda_2 = \dot{G}$  — секундный расход;

$\lambda_3 = P_{\text{уд.п}}$  — удельная тяга в пустоте;

$\lambda_4 = \frac{i q_0 S}{2}$  — коэффициент в формуле для лобового сопротивления;

$\lambda_5 = S_a p_0$  — коэффициент высотной характеристики двигателя.

Отклонения параметров  $\lambda_i$  от их номинальных значений  $\lambda_i^*$ :

$$\Delta \lambda_i = \lambda_i - \lambda_i^*,$$

а также начальных условий  $V_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  от номинальных значений  $V_0^*$ ,  $\Theta_0^*$ ,  $x_0^*$ ,  $y_0^*$ :

$$\Delta V_0 = V_0 - V_0^*, \dots, \Delta y_0 = y_0 - y_0^*$$

являются возмущающими факторами.

<sup>1</sup> Здесь  $i$  — коэффициент, учитывающий изменение формы ракеты.

# Влияние малых возмущающих факторов на максимальную дальность стрельбы и составляющие гарантийных запасов топлива

## Ракета без системы РКС

Для оценки влияния возмущающих факторов на максимальную дальность стрельбы воспользуемся известным выражением для отклонения  $\Delta L$  дальности  $L$  от ее номинального значения  $L^*$ :

$$\Delta L = L - L^* = \frac{\partial L}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial L}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial L}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial L}{\partial y} \Delta y. \quad (8.5)$$

Здесь  $L^* = L(V_k^*, \theta_k^*, x_k^*, y_k^*)$ , т. е. номинальная дальность полета, определяется номинальными значениями параметров движения в расчетный момент времени отделения ГЧ  $t_k^*$ ;  $\frac{\partial L}{\partial V}, \dots, \frac{\partial L}{\partial y}$  — частные производные, определяемые либо в квадратурах [2], либо численными методами для номинальной траектории и расчетного момента времени  $t_k^*$ ;  $\Delta V, \dots, \Delta y$  — отклонения параметров движения  $V(t_k), \dots, y(t_k)$  в момент  $t_k$  отделения ГЧ от их расчетных значений

$$V^*(t_k^*), \dots, y^*(t_k^*).$$

Возмущения  $\Delta V, \dots, \Delta y$  возникают в результате воздействия возмущающих факторов  $\Delta \lambda_i$ . Некоторые возмущающие факторы изменяют также момент  $t_k$  отделения ГЧ, определяемый уравнением управления  $J(t_k) = J^*$ . Однако мы не будем рассматривать влияние этого обстоятельства на максимальную дальность, полагая  $\frac{\partial L}{\partial t} \Delta t_k \approx 0$ . Выражение (8.5) дает возможность определить в первом приближении изменение максимальной дальности при изменении параметров движения в момент отделения ГЧ за счет влияния возмущений  $\Delta \lambda_i$ .

Полагая величины  $\Delta \lambda_i$  малыми и ограничиваясь линейными членами разложения, получим

$$\Delta V_i = \frac{\partial V}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i, \dots, \Delta y_i = \frac{\partial y}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i, \quad (8.6)$$

где значения производных  $\frac{\partial V}{\partial \lambda_i}, \frac{\partial y}{\partial \lambda_i}, \frac{\partial x}{\partial \lambda_i}, \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_i}$  соответствуют номинальной траектории и расчетному моменту времени  $t_k^*$ . На методе определения этих производных не будем останавливаться, поскольку он рассмотрен в книге [2].

Подставляя зависимости (8.6) в выражение для отклонения максимальной дальности (8.5), получим

$$\Delta L_i = \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i, \quad (8.7)$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial L}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \lambda_i} + \dots + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda_i}. \quad (8.8)$$

Примерное изменение некоторых из коэффициентов  $dL/d\lambda_i$  по времени полета ракеты показано на рис. 8.3.

Потерю дальности  $\Delta L_i$  из-за воздействия возмущающего фактора  $\Delta \lambda_i$  можно компенсировать работой двигательной установки в течение времени  $\Delta t_{ki}$ , равного

$$\Delta t_{ki} = \frac{\Delta L_i}{\dot{L}}, \quad (8.9)$$

где

$$\dot{L} = \frac{dL}{dt_k} = \frac{\partial L}{\partial V} \dot{V} + \frac{\partial L}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y} \quad (8.10)$$

— производная, учитывающая изменение дальности стрельбы при изменении времени работы двигателя (в малой окрестности момента  $t_k^*$ ), причем значения всех величин в выражении для этой производной определяются для номинальных параметров движения  $V^*(t_k^*), \dots, y^*(t_k^*)$ .

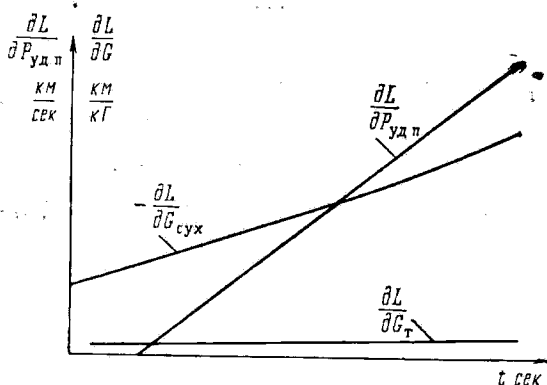


Рис. 8.3. Производные  $\partial L/\partial \lambda_i$  в зависимости от времени полета ракеты на активном участке траектории

Топливо, расходуемое за дополнительное время  $\Delta t_{ki}$ :

$$\Delta G_{\text{топл } i}^{\text{гар}} = \dot{G} \Delta t_{ki}, \quad (8.11)$$

где  $\dot{G} = \dot{G}^*(t_k^*)$ , представляет собой составляющую гарантийного запаса топлива, компенсирующую возмущение  $\Delta \lambda_i$  для обеспечения номинальной максимальной дальности стрельбы  $L^*$ .

Составляющие гарантийных запасов компонентов топлива распределяются в соответствии с формулами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta G_{\text{ок } i}^{\text{гар}} &= \frac{K}{K+1} \Delta G_{\text{топл } i}^{\text{гар}}; \\ \Delta G_{\text{г } i}^{\text{гар}} &= \frac{1}{K+1} \Delta G_{\text{топл } i}^{\text{гар}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

В этом случае влияние на движение ракеты подавляющего большинства возмущающих факторов компенсируется соответствующим изменением тяги двигателя путем регулирования секундного расхода топлива  $\dot{G}$ . Указанное обстоятельство позволяет существенно упростить определение составляющих гарантийных запасов компонентов топлива, положив в основу расчета уравнение идеальной работы системы РКС:

$$P - X_1 = \frac{G}{g} \dot{w}_{x1}^* \quad (8.13)$$

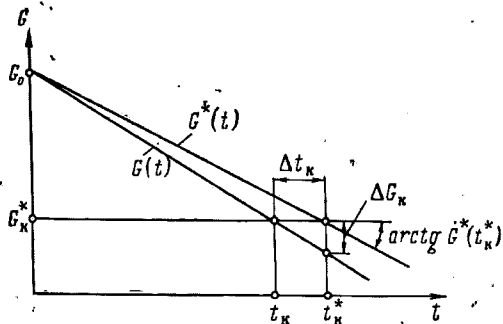


Рис. 8.4. К определению гарантийного запаса топлива для ракеты с системой РКС

Уже одно это уравнение позволяет определить составляющие гарантийного запаса топлива  $\Delta G_{\text{топл } i}^{\text{гар}}$  как возмущения конечного веса ракеты  $\Delta G_{ki}$ , обусловленные возмущениями сил тяги и сопротивления из-за воздействия возмущающих факторов  $\Delta \lambda_i$ .

Влияние возмущающих факторов на потери максимальной дальности (при отсутствии гарантийного запаса) тогда можно определить исходя из следующих соображений. Перерасход топлива на величину  $\Delta G_{ki}(t_k^*)$  из-за влияния возмущения  $\Delta \lambda_i$  приведет к преждевременному выключению двигателя (по выгоранию топлива) в момент  $t_{ki} = t_k^* - \Delta t_{ki}$  (рис. 8.4) и потере дальности

$$\Delta L_i = \dot{L} \Delta t_{ki} = \dot{L} \frac{\Delta G_{ki}}{\dot{G}} = \frac{\partial L}{\partial G} \Delta G_{ki}, \quad (8.14)$$

где  $\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\dot{L}}{\dot{G}}$  — производная, определяемая для номинальной траектории и  $t_k^*$ .

Составляющая гарантийного запаса топлива  $\Delta G_{\text{топл } i}^{\text{гар}}$ , необходимая для того, чтобы обеспечить выключение двигателя по сигналу от системы управления, будет

$$\Delta G_{\text{топл } i}^{\text{гар}} = \frac{\partial G_k}{\partial \lambda_i} \Delta \lambda_i. \quad (8.15)$$

Рассмотрим на примере метод определения производных  $\partial G_K / \partial \lambda_i$ . Будем считать, что двигательная установка состоит из основного и управляющих двигателей, регулирование кажущейся скорости происходит путем изменения секундного расхода основного двигателя.

Исследуем влияние на конечный вес ракеты следующих основных конструктивных параметров:

- $\lambda_1 = G_0$  — стартового веса ракеты;
- $\lambda_2 = P_{уд.п}^{осн}$  — удельной тяги основного двигателя;
- $\lambda_3 = P_{уд.п}^y$  — удельной тяги управляющих двигателей;
- $\lambda_4 = \dot{G}^y$  — секундного расхода топлива через управляющие двигатели.

Выражение для силы тяги двигательной установки (1.35) представим в виде

$$P = P_{уд.п}^{осн} \dot{G}^{осн} + P_{уд.п}^y \dot{G}^y - (S_a p_0)^{осн} \frac{P}{p_0} - (S_a p_0)^y \frac{P}{p_0}. \quad (8.16)$$

Учитывая, что

$$\frac{dG}{dt} = -\dot{G}^{осн} - \dot{G}^y, \quad (8.17)$$

получим

$$P = -P_{уд.п}^{осн} \frac{dG}{dt} - P_{уд.п}^{осн} \dot{G}^y + P_{уд.п}^y \dot{G}^y - (S_a p_0)^{осн} \frac{P}{p_0} - (S_a p_0)^y \frac{P}{p_0}. \quad (8.18)$$

Дифференцируя уравнение (8.13) по параметрам  $\lambda_i$ , имеем

$$\frac{\partial P}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} \frac{\dot{w}_{x1}^*}{g} = 0. \quad (8.19)$$

Производные  $\partial P / \partial \lambda_K$  определяются путем дифференцирования выражения для тяги (8.18). Так, например, для  $\lambda_1 = G_0$  имеем

$$\frac{\partial P}{\partial G_0} = -P_{уд.п}^{осн} \frac{\partial}{\partial G_0} \left( \frac{dG}{dt} \right).$$

Производя аналогичные операции для других  $\lambda_i$  и меняя порядок дифференцирования, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial G_0} &= -P_{уд.п}^{осн} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial G_0} \right); \\ \frac{\partial P_{уд.п}^{осн}}{\partial P_{уд.п}^{осн}} &= -P_{уд.п}^{осн} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial P_{уд.п}^{осн}} \right) + \dot{G}^{осн}; \\ \frac{\partial P}{\partial P_{уд.п}^y} &= -P_{уд.п}^{осн} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial P_{уд.п}^y} \right) + \dot{G}^y; \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{G}^y} &= -P_{уд.п}^{осн} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \dot{G}^y} \right) - P_{уд.п}^{осн} + P_{уд.п}^y. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Подставляя полученные выражения производных (8.20) в уравнение (8.19), получим дифференциальные уравнения для определения производных  $\partial G/\partial \lambda_i$  в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial G_0} \right) + \frac{\dot{w}_{x1}^*}{g P_{уд.п}^{осн}} \frac{\partial G}{\partial G_0} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial P_{уд.п}^{осн}} \right) + \frac{\dot{w}_{x1}^*}{g P_{уд.п}^{осн}} \frac{\partial G}{\partial P_{уд.п}^{осн}} &= \frac{\dot{G}^{осн}}{P_{уд.п}^{осн}}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial P_{уд.п}^y} \right) + \frac{\dot{w}_{x1}^*}{g P_{уд.п}^{осн}} \frac{\partial G}{\partial P_{уд.п}^y} &= \frac{\dot{G}^y}{P_{уд.п}^{осн}}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{G}}{\partial \dot{G}^y} \right) + \frac{\dot{w}_{x1}^*}{g P_{уд.п}^{осн}} \frac{\partial G}{\partial \dot{G}^y} &= \frac{P_{уд.п}^y}{P_{уд.п}^{осн}} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Начальные условия для решения дифференциальных уравнений (8.21) следующие:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} \right)_{t=0} &= 0 \quad \text{при } i=2+4; \\ \left( \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} \right)_{t=0} &= 1 \quad \text{при } i=1. \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Каждое из уравнений (8.21) представляет собой линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} \right) + \frac{\dot{w}_{x1}^*}{g P_{уд.п}^{осн}} \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} = \beta_i, \quad (8.23)$$

решение которого дает искомые производные конечного веса по конструктивным параметрам ракеты

$$\frac{\partial G_k}{\partial \lambda_i} = e^{-\alpha} \left[ \int_0^{t_k^*} \beta_i e^{\alpha t} dt + \left( \frac{\partial G}{\partial \lambda_i} \right)_{t=0} \right], \quad (8.24)$$

где

$$\alpha = \frac{\dot{w}_{x1}^*(t_k^*)}{g P_{уд.п}^{осн}}. \quad (8.25)$$

Используя формулу Циолковского

$$\dot{w}_{x1}^*(t_k^*) = -P_{уд.п}^{a.y} g \ln \mu_k, \quad (8.26)$$

где

$$\mu_k = \frac{G(t_k^*)}{G_0} = \frac{G_k}{G_0}, \quad (8.27)$$



получим приближенные выражения для  $\partial G_k / \partial \lambda_i$  в конечном виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_k}{\partial G_0} &= \mu_k^n; \\ \frac{\partial G_k}{\partial P_{уд.п}^{осн}} &= - \frac{\dot{G}^{осн} G_0}{\dot{G}^y (P_{уд.п}^{осн} - P_{уд.п}^y)} (\mu_k - \mu_k^n); \\ \frac{\partial G_k}{\partial P_{уд.п}^y} &= - \frac{G_0}{P_{уд.п}^{осн} - P_{уд.п}^y} (\mu_k - \mu_k^n); \\ \frac{\partial G_k}{\partial \dot{G}^y} &= \frac{G_0 (\mu_k - \mu_k^n)}{\dot{G}^y}, \end{aligned} \right\} \quad (8.28)$$

где  $n = \frac{P_{уд.п}^y}{P_{уд.п}^{осн}}$  — отношение удельных тяг двигательной установки в целом и основных двигателей.

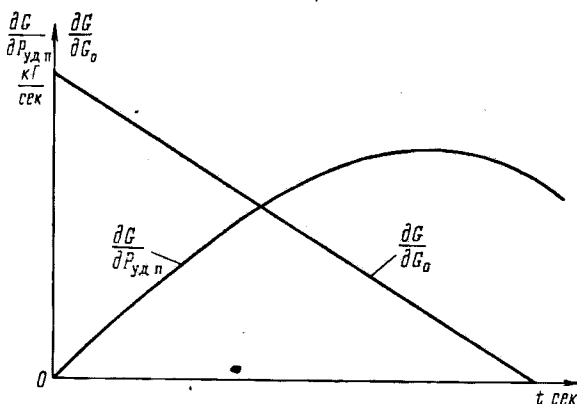


Рис. 8.5. Производные  $\partial G / \partial \lambda_k$  в зависимости от времени полета ракеты на активном участке траектории

Если управляющие двигатели отсутствуют, то

$$\frac{\partial G_k}{\partial P_{уд.п}} = - \frac{G_k}{P_{уд.п}} \ln \mu_k = - \frac{G_0}{P_{уд.п}} \mu_k \ln \mu_k. \quad (8.29)$$

На рис. 8.5 показано примерное изменение производных  $\frac{\partial G}{\partial G_0}$  и  $\frac{\partial G}{\partial P_{уд.п}}$  по времени полета  $t = t_k^*$ .

Выражения (8.28) и (8.29) являются приближенными вследствие использования формулы Циолковского (8.26). С ростом дальности точность определения гарантийных запасов при помощи этих выражений возрастает. Наиболее точные результаты выражения (8.28) и (8.29) дают для вторых и всех последующих ступеней ракет, полет которых происходит практически в безвоздушном пространстве.

## У Суммарные гарантийные запасы

Определение суммарных гарантийных запасов топлива проводится с учетом следующих положений (для общности будем рассматривать многоступенчатые ракеты).

1. Гарантийные запасы  $i$ -й ступени рассчитываются исходя из заданной надежности обеспечения максимальной дальности (для одноступенчатых ракет) или заданной надежности выключения двигателя по команде системы управления (для многоступенчатых ракет).

2. Распределение гарантийных запасов по ступеням ракеты производится так, чтобы потери дальности были минимальными.

3. Принимается, что уровни надежности назначения гарантийных запасов каждого из компонентов топлива равны между собой и равны уровню надежности выключения двигателя по команде от системы управления.

4. Предполагается, что возмущающие факторы подчинены нормальному закону распределения, за исключением некоторых возмущающих факторов, вероятностная природа которых более точно характеризуется законом равномерного распределения плотности вероятности.

К ним относятся, например:

— отклонения удельных весов окислителя и горючего за счет изменения химического состава топлива в процессе его хранения;

— отклонение параметра  $K$  за счет отличия температуры компонентов топлива от номинальной.

5. Из совокупности возможных значений возмущающего фактора, характеризующихся законом распределения, рассматриваются только те случайные значения, которые оказывают неблагоприятное влияние на дальность полета.

6. Максимальные величины возмущающих факторов и составляющих гарантийных запасов соответствуют уровню надежности обеспечения предельной дальности стрельбы  $B$ . Следовательно, с вероятностью  $B$

$$\left. \begin{aligned} |\Delta \lambda_i| &\leq u \sigma_{\lambda_i}; \\ \Delta G_{\text{топл } i}^{\text{гар}} &\leq u \sigma_i^{\text{гар}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

где  $u$  — аргумент функции Лапласа  $\Phi(u)$ , соответствующий вероятности  $\Phi=B$ ;

$\sigma_{\lambda_i}$  и  $\sigma_i^{\text{гар}}$  — средние квадратические отклонения  $i$ -го возмущающего фактора и соответствующей составляющей гарантийного запаса.

С учетом указанных положений величина суммарного гаран-

тийного запаса компонента топлива (окислителя или горючего) данной ступени ракеты определяется по формуле

$$G_j^{\text{rap}} = \sqrt{\sum_i (\Delta G_{ji}^{\text{rap}})^2}, \quad (8.31)$$

или

$$G_j^{\text{rap}} = u \sqrt{\sum_i (\sigma_{ji}^{\text{rap}})^2} = u \sigma_{jz}^{\text{rap}}, \quad (8.32)$$

где  $j$  — индекс компонента топлива (ок или г);

$\sigma_{jz}$  — среднее квадратическое отклонение суммарного запаса  $j$ -го компонента топлива.

Заметим, что формула (8.31) для определения суммарных гарантийных запасов окислителя и горючего является приближенной, поскольку основана на предположении, что все составляющие  $\Delta G_{ji}^{\text{rap}}$  подчинены нормальным законам распределения. Если в суммарных гарантийных запасах доля составляющих, подчиненных закону равномерной плотности, оказывается значительной, более правильно производить композицию различных законов распределения в соответствии с методами теории вероятностей. Достоверность ряда предпосылок, на которых основаны расчеты гарантийных запасов, на стадии проектирования не может быть надежно проверена. В частности, может оказаться, что предположение о нормальных законах распределения таких возмущающих факторов, как разброс параметра  $K$ , погрешности заправки топлива и другие, удовлетворяется лишь приближенно; принятые в расчетах величины возмущающих факторов недостаточно надежны; принцип суммирования таких составляющих гарантийных запасов, как отклонение параметра  $K$ , с остальными составляющими подлежит дополнительному обоснованию и т. д. В результате этого расчетные величины гарантийных запасов и соответствующая им расчетная предельная дальность не могут быть высоко достоверными. Поэтому расчетные величины гарантийных запасов желательно несколько увеличивать.

### Распределение гарантийных запасов между ступенями ракеты

#### Выключение двигательной установки отделяющейся ступени по команде системы управления

На многоступенчатых ракетах выключение двигательных установок отделяющихся ступеней может производиться по команде от системы управления при достижении ракетой заданного значения управляющего функционала.

Выключение двигательной установки таким способом предполагает наличие на отделяющихся ступенях гарантийных запаса-

сов, необходимых для компенсации влияния возмущающих факторов (отклонений удельной тяги, весовых и аэродинамических характеристик и др.) и обеспечивающих с требуемой надежностью выключение двигательных установок отделяющихся ступеней при заданных значениях управляющего функционала. Влияние возмущающих факторов, действующих на ракету после разделения ступеней, компенсируется гарантийными запасами топлива, которые размещаются на последующей ступени.

Для многоступенчатой ракеты уровень надежности обеспечения предельной дальности стрельбы

$$B = B_1 B_2 \dots B_l \dots B_n, \quad (8.33)$$

где  $l$  — номер ступени;

$n$  — количество ступеней;

$B_l$  — надежность обеспечения предельного значения функционала управления  $l$ -й ступени при условии, что  $(l-1)$ -я ступень достигла предельного значения функционала.

Рассмотрим задачу определения для заданной величины  $B$  таких значений  $B_l$ , которые, удовлетворяя условию (8.33), обеспечивают наибольшую предельную дальность. Для решения этой задачи будем рассматривать отклонение предельной дальности от величины, соответствующей тому случаю, когда гарантийные запасы топлива на каждой ступени обеспечивают достижение функционала управления с уровнем надежности  $\Phi(u^*) = B$ . При значениях уровней надежности  $B_l \neq B$  гарантийные запасы топлива  $l$ -й ступени изменяются на величину

$$\left. \begin{aligned} \Delta G_l^{\text{gap}} &= \sigma_{\Sigma l}^{\text{gap}} \Delta u; \\ \Delta u &= u(B_l) - u(B), \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

где  $u(B_l)$  — аргумент функции Лапласа, соответствующий уровню надежности  $B_l$ ;

$\sigma_{\Sigma l}^{\text{gap}}$  — среднее квадратическое отклонение гарантийного запаса  $l$ -й ступени, определяемое в соответствии с формулой (8.32).

Изменение предельной дальности за счет изменения гарантийных запасов каждой ступени на величину  $\Delta G_l^{\text{gap}}$  определяется выражением

$$\Delta L = \sum_{l=1}^n \left\{ \left( \frac{\partial L}{\partial G_k} \right)_l [u(B_l) - u(B)] \sigma_{\Sigma l}^{\text{gap}} \right\}, \quad (8.35)$$

где  $\left( \frac{\partial L}{\partial G_k} \right)_l$  — производная максимальной дальности по конечному весу  $l$ -й ступени.

Соотношение (8.35) выражает зависимость приращения предельной дальности от уровней надежности обеспечения функционалов управления всех ступеней ракеты, а с учетом выражения

(8.33) и от уровня надежности обеспечения предельной дальности.

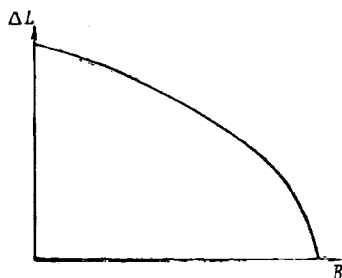


Рис. 8.6. Изменение предельной дальности стрельбы в зависимости от надежности ее обеспечения

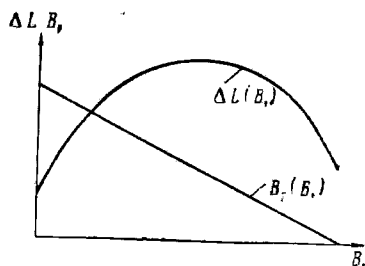


Рис. 8.7. Изменение предельной дальности стрельбы в зависимости от надежности обеспечения управляющих функционалов при надежности обеспечения предельной дальности  $B^*$

Ввиду небольшого числа ступеней ( $l=2\div 3$ ) исследование выражения (8.35) на экстремум может быть легко проведено численными методами. На рис. 8.6 и 8.7 показано примерное изменение предельной дальности двухступенчатой ракеты в зависимости от уровня надежности ее обеспечения.

#### Выключение двигательной установки отделяющейся ступени по выгоранию топлива

Для уменьшения гарантийных запасов топлива на многоступенчатых ракетах может применяться способ выключения двигательных установок отделяющихся ступеней (исключая последнюю) по полному выгоранию топлива (или одного из компонентов топлива). Выключение двигательных установок по выгоранию топлива позволяет использовать величины гарантийных запасов топлива на отделяющихся ступенях (исключая последнюю) в качестве рабочих запасов. При этом компенсация влияния возмущающих факторов, действующих на ракету при полете на активном участке траектории, проводится на последней ступени ракеты. Размещение гарантийных запасов только на последней ступени позволяет более рационально использовать запасы топлива и за счет этого значительно улучшить энергетические возможности ракеты (увеличить предельную дальность стрельбы или вес полезной нагрузки и т. п.).

Выключение двигательных установок отделяющихся ступеней может производиться по первому выгоревшему компоненту по сигналу от датчиков остатков топлива или от датчиков системы одновременного опорожнения баков.

Оценка целесообразности выключения двигательных установок ступеней ракеты по выгоранию топлива может проводиться

путем сравнения предельных дальностей стрельбы, обеспечиваемых при различных способах выключения двигательных установок.

### **Уменьшение гарантийных запасов путем регулирования расходов компонентов топлива**

Увеличение предельной дальности стрельбы может быть достигнуто путем установки на ракете специальной системы регулирования расходов компонентов топлива.

Если не принимать специальных мер, то в процессе работы двигателей ракеты всегда возникает отклонение от номинального значения параметра  $K$  (т. е. соотношения расходов окислителя и горючего), в результате чего может возникнуть ситуация, когда один из компонентов топлива будет полностью израсходован до момента подачи команды на выключение двигателей при стрельбе на максимальную дальность. Для исключения такого положения необходимо иметь на борту ракеты дополнительное количество одного и второго компонентов. Это дополнительное количество топлива составляет большую часть гарантийного запаса и, чтобы его уменьшить, целесообразно применять какую-либо систему регулирования расходов компонентов топлива, обеспечивающую требуемое соотношение компонентов топлива.

С целью более рационального использования в полете запаса топлива, имеющегося на борту ракеты, широкое применение находят системы одновременного опорожнения баков.

Эта система предназначена для регулирования относительного объемного расхода компонентов топлива. Она включает в свой состав датчики уровней компонентов топлива, установленные в каждом из баков, счетнорешающее устройство, вырабатывающее команды, и исполнительные органы.

Установка на борту ракеты системы одновременного опорожнения баков позволяет:

- существенно уменьшить гарантийные запасы топлива и, следовательно, увеличить предельную дальность стрельбы;

- снизить требования к точности настройки двигательной установки по параметру  $K$  и к точности заправки ракеты компонентами топлива;

- упростить подготовку исходных данных на заправку ракеты компонентами топлива.

В результате установки на борту ракеты системы регулирования расходов компонентов топлива изменяется предельная дальность стрельбы, что обусловлено:

- уменьшением гарантийных запасов топлива;

- увеличением «сухого» веса ракеты за счет установки системы регулирования;

- снижением удельной тяги двигательной установки.

Уменьшение гарантийных запасов топлива происходит за счет составляющей гарантийных запасов, предназначенной для ком-

пенсации разброса параметра  $K$ . При установке системы одно-временного опорожнения баков эта составляющая исключается, а неполное расходование одного из компонентов обуславливается лишь погрешностью системы регулирования.

Для оценки целесообразности установки той или иной системы регулирования расходов компонентов топлива суммарный выигрыш в дальности стрельбы можно определить по формуле

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial G_{\text{сух}}} (G_{\text{с.р}} + G_{\text{с.р}}^{\text{гар}} - G^{\text{гар}}) + \frac{\partial L}{\partial G_{\text{топл}}} (G^{\text{гар}} - G_{\text{с.р}}^{\text{гар}}) + \frac{\partial L}{\partial P_{\text{уд.п}}} (P_{\text{уд.п}}^{\text{с.р}} - P_{\text{уд.п}}), \quad (8.36)$$

где  $G_{\text{с.р}}$  — вес системы регулирования;

$G_{\text{с.р}}^{\text{гар}}$ ,  $G^{\text{гар}}$  — вес гарантийных запасов топлива при наличии на борту ракеты системы регулирования и при ее отсутствии;

$P_{\text{уд.п}}^{\text{с.р}} - P_{\text{уд.п}}$  — разница между удельными тягами двигателя при наличии системы регулирования и без нее;

$\frac{\partial L}{\partial G_{\text{сух}}}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial G_{\text{топл}}}$  — частные производные дальности по «сухому» весу и весу топлива соответственно.

Несмотря на то, что вес ракеты увеличивается за счет веса системы регулирования, общий пассивный вес ракеты уменьшается за счет значительного уменьшения гарантийных запасов топлива, в результате чего предельная дальность стрельбы существенно возрастает.

### ✓ 8.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОЗ ЗАПРАВКИ

Под способом заправки будем понимать принцип определения доз компонентов топлива, заправляемых в ракету, а не метод технической реализации этого принципа. Способ заправки влияет не только на энергетические характеристики ракеты и удобство ее эксплуатации, но и на конструкцию системы управления и ракеты в целом, например на количество программ управления, обусловленное допустимыми пределами форсирования и дросселирования двигателя и изменением стартового веса ракеты при наличии системы регулирования кажущейся скорости.

В связи с этим возникает важная задача по выбору способа определения доз заправки, наилучшим образом удовлетворяющего требованиям надежного обеспечения предельной дальности стрельбы и удобства эксплуатации ракеты.

#### ✓ Способы определения доз заправки и требования, предъявляемые к ним

Можно сформулировать следующие основные требования, с учетом которых должен выбираться способ определения доз заправки:



— наиболее полное использование энергетических возможностей ракеты;

— удобство и простота эксплуатации ракеты в боевых условиях, сведение к минимуму времени, потребного для определения доз заправки в предстартовый период;

— максимальное упрощение конструкции ракеты, системы управления и двигательной установки.

Кроме этих требований, при выборе способа расчета доз заправки принимается еще ряд исходных положений, которые обусловлены конструктивными особенностями ракеты и ее агрегатов, а также спецификой боевой эксплуатации. Так, например, для всех способов заправки обычно принимаются в качестве исходных следующие условия:

— стартовый вес ракеты не должен выходить за допустимые пределы, которые определяются, например, при наличии системы РКС максимально допустимой загрузкой этой системы или при отсутствии такой системы максимально допустимой величиной снижения дальности полета;

— гарантийные и нерабочие запасы компонентов топлива определяются для номинальной их температуры и принимаются постоянными по весу (или объему) в рабочем диапазоне изменения температур компонентов топлива;

— максимальные дозы заправки компонентов топлива не должны превосходить располагаемых объемов топливных систем (баков и трубопроводов) при всех условиях эксплуатации;

— рабочие запасы окислителя и горючего должны находиться в соотношении, позволяющем полностью расходовать их;

— дозы заправки компонентов топлива выбираются для максимальной дальности стрельбы и остаются постоянными в принятом диапазоне дальностей стрельбы.

Помимо указанных положений, можно назвать дополнительные требования, свойственные только данному конкретному способу заправки и типу ракеты. Эти дополнительные условия будут рассмотрены ниже при характеристике основных способов заправки.

Среди ряда возможных способов заправки можно выделить следующие основные:

- 1) «индивидуальная» заправка;
- 2) заправка весовыми дозами;
- 3) заправка объемными дозами.

Рассмотрим краткую характеристику этих способов.

При индивидуальном способе дозы заправки определяются с учетом известных фактических характеристик отдельных ракет, компонентов топлива и условий стрельбы так, чтобы возможно более полно использовать объемы топливных систем и получить выигрыш в дальности полета. Очевидно, что можно предложить большое число возможных индивидуальных способов заправки,

различающихся между собой количеством и составом учитываемых возмущающих факторов. В принципе можно осуществить такой индивидуальный способ заправки, который позволит учесть все известные на момент пуска отклонения параметров, влияющих на энергетические характеристики ракеты (температуры окислителя и горючего, значения параметра  $K$  двигателя, объемов топливных систем, сухого веса ракеты и т. д.). Однако учет большого числа возмущающих факторов при индивидуальном способе заправки требует выполнения значительного объема вычислительных работ в предпусковой период и увеличивает время подготовки ракеты к пуску. Кроме этого, индивидуальный способ заправки имеет еще следующий недостаток, связанный с эксплуатацией ракеты. Поскольку при данном способе предполагается максимальное использование располагаемых объемов баков, время нахождения заправленной ракеты на стартовом столе ограничено, так как изменение температуры окружающей среды может привести к повышению или понижению температуры компонентов топлива и изменению их объемов и, как следствие, к переполнению топливных систем или нерасчетному режиму работы двигательной установки в полете. По указанным причинам применение индивидуального способа заправки целесообразно только для ракет-носителей.

С точки зрения эксплуатации и готовности ракеты к пуску наиболее целесообразными являются способы заправки ракеты рабочими запасами топлива, не зависящими по весу или по объему от некоторых возмущающих факторов.

При *весовом способе* заправки вес заправляемых в ракету компонентов топлива является постоянным в заданном диапазоне температур; распределение доз заправки между окислителем и горючим производится таким образом, чтобы обеспечить равновеликие потери в дальности при возможных изменениях температуры до границ заданного диапазона. (Изменение температуры влияет на весовое соотношение секундных расходов компонентов топлива  $K$  и тем самым на величину неиспользуемых остатков окислителя и горючего).

Однако применение подобного способа заправки приводит к необходимости при проектировании ракеты предусматривать дополнительные объемы баков, обеспечивающие возможность расширения объемов заправленных компонентов топлива в заданном температурном диапазоне. Особенно нежелателен такой способ заправки для наземных стартов, когда диапазон возможных изменений температур компонентов топлива достаточно широк (около  $100^{\circ}\text{C}$ ), а система термостатирования не предусматривается.

Для ракет, оснащенных системами РКС, достоинством весового способа заправки является то обстоятельство, что необходимые пределы форсирования и дросселирования двигателя ввиду отсутствия возмущений стартового веса являются более уз-

кими, чем в случае, когда веса доз заправки зависят от температуры компонентов топлива.

При *объемном способе* заправка ракеты компонентами топлива производится постоянными объемными дозами окислителя и горючего при всех условиях эксплуатации ракеты; соотношение объемов окислителя и горючего выбирается из условия полного расходования рабочих запасов топлива при номинальных условиях.

Способ заправки влияет на потребные объемы топливных систем и через них на конструкцию ракеты. Взаимосвязь между характеристиками ракеты и двигательной установки, системой возмущающих факторов и способом заправки можно проследить на примере определения потребных объемов топливных систем.

### **Определение потребных объемов топливных систем**

Определение потребных объемов топливных систем проведем исходя из заданного значения номинального стартового веса ракеты (или ступени)  $G_{0i}$ . Пользуясь формулой (8.1), находим вес номинального рабочего запаса топлива  $G_{\text{топл}}^p$ , после того как определены все другие составляющие стартового веса  $G_0$ .

Весовые дозы заправки окислителя и горючего определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} G_{\text{ок}} &= \frac{K}{K+1} G_{\text{топл}}^p + G_{\text{ок}}^{\text{нер}} + G_{\text{ок}}^{\text{гар}}, \\ G_{\text{г}} &= \frac{1}{K+1} G_{\text{топл}}^p + G_{\text{г}}^{\text{нер}} + G_{\text{г}}^{\text{гар}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

где  $K$  — отношение весовых секундных расходов компонентов топлива при номинальных условиях.

Максимально возможные объемные дозы заправки  $V_{\text{ок}}^{\text{max}}$  и  $V_{\text{г}}^{\text{max}}$  рассчитываются с учетом способа заправки. Поскольку весовой способ предусматривает заправку весовых доз окислителя и горючего независимо от их температуры, максимально возможные объемы заправки определяются для максимальной температуры заданного диапазона:

$$V_j^{\text{max}} = \frac{G_j}{\gamma_j T^{\text{max}}}, \quad (8.38)$$

где  $j$  — индекс компонента топлива (ок или г).

При объемном способе заправки максимальные объемные дозы заправки равны номинальным:

$$V_j^{\text{max}} = \frac{G_j}{\gamma_j T^*}. \quad (8.39)$$

К максимально возможным объемным дозам заправки следует добавить минимально допустимые свободные объемы в ба-

ках, необходимые для нормальной работы системы наддува  $V_{\text{мин}j}^{\text{св}}$ , а также объемы  $\Delta V_j$ , необходимые для вариаций доз заправки за счет случайных факторов — погрешностей заправки (дозировки) компонентов топлива и погрешностей изготовления топливных баков.

В итоге потребные объемы топливных систем определяются по формуле

$$V_j^{\text{потр}} = V_j^{\text{max}} + V_{\text{св}j}^{\text{мин}} + \Delta V_j. \quad (8.40)$$

### Определение доз заправки при заданных объемах топливных систем

Для повышения предельной дальности стрельбы необходимо возможно более полно использовать объемы топливных баков. Рассмотрим, как можно решить эту задачу при весовом и объемном способах заправки ракеты компонентами топлива.

Для рабочего диапазона изменения температур компонентов топлива  $T_j^{\text{мин}} \leq T_j \leq T_j^{\text{max}}$  определим располагаемые объемы топливных систем (влиянием температуры на объемы топливных магистралей  $V_{\text{м}j}$  пренебрегаем):

$$V_j^{\text{расп}}(T_{\text{ок}}) = V_{\text{б}j}(T_{\text{ок}}) + V_{\text{м}j} - V_{\text{св}j}^{\text{мин}} - \Delta V_j, \quad (8.41)$$

где  $V_{\text{б}j}(T_{\text{ок}})$  — объем топливных баков, зависящий от температуры:

$$V_{\text{б}j}(T_{\text{ок}}) = V_{\text{б}j}^{\text{ном}} [1 + 3\alpha_j (T_{\text{ок}} - T_{\text{ок}}^{\text{ном}})];$$

$\alpha_j$  — коэффициент линейного расширения материала бака.

Найдем отношение рабочих запасов компонентов топлива  $K_6 = G_{\text{ок}}^p / G_{\text{г}}^p$ , которое определяется в основном располагаемыми объемами топливных систем:

$$K_6(T_{\text{ок}}) = \frac{V_{\text{ок}}^{\text{расп}}(T_{\text{ок}}) \gamma_{\text{ок}}(T_{\text{ок}}) - G_{\text{ок}}^{\text{нер}} \frac{\gamma_{\text{ок}}(T_{\text{ок}})}{\gamma_{\text{ок}}^{\text{ном}}} - G_{\text{ок}}^{\text{гар}} \frac{\gamma_{\text{ок}}(T_{\text{ок}})}{\gamma_{\text{ок}}^{\text{ном}}}}{V_{\text{г}}^{\text{расп}}(T_{\text{ок}}) \gamma_{\text{г}}(T_{\text{ок}}) - G_{\text{г}}^{\text{нер}} \frac{\gamma_{\text{г}}(T_{\text{ок}})}{\gamma_{\text{г}}^{\text{ном}}} - G_{\text{г}}^{\text{гар}} \frac{\gamma_{\text{г}}(T_{\text{ок}})}{\gamma_{\text{г}}^{\text{ном}}}}. \quad (8.42)$$

Параметр  $K_6(T_{\text{ок}})$  необходим для того, чтобы определить, какой из баков компонентов топлива является лимитирующим в зависимости от температуры топлива. Диапазон температуры компонентов топлива, в котором лимитирующим является располагаемый объем системы окислителя, определяется из условия  $K(T_{\text{ок}}) \geq K_6(T_{\text{ок}})$ . Если  $K(T_{\text{ок}}) \leq K_6(T_{\text{ок}})$ , то лимитирующим является объем системы горючего.

При весовом способе заправки дозы компонентов топлива определяем следующим образом.

По формуле (8.41) находим располагаемые объемы топлив-

ных систем при максимально возможной температуре  $V_{\text{расп}}^{\text{расп}}(T_{\text{max}})$ . Отношение рабочих запасов компонентов топлива, определяемое этими располагаемыми объемами, равно

$$K_6(T_{\text{max}}) = \frac{V_{\text{ок}}^{\text{расп}}(T_{\text{max}}) \gamma_{\text{ок}}(T_{\text{max}}) - G_{\text{ок}}^{\text{нер}} - G_{\text{ок}}^{\text{гар}}}{V_{\text{г}}^{\text{расп}}(T_{\text{max}}) \gamma_{\text{г}}(T_{\text{max}}) - G_{\text{г}}^{\text{нер}} - G_{\text{г}}^{\text{гар}}} \quad (8.43)$$

Нерабочие и гарантийные запасы топлива при весовом способе заправки естественно полагать в рабочем диапазоне температур постоянными по весу.

Значение  $K_6(T_{\text{max}})$  сравниваем с номинальным значением параметра  $K$ . Для случая, когда  $K^{\text{ном}} \geq K_6(T_{\text{max}})$ , весовые дозы заправки компонентов топлива вычисляем следующим образом:

весовая доза заправки окислителя

$$G_{\text{ок}}(T) = V_{\text{ок}}^{\text{расп}}(T_{\text{max}}) \gamma_{\text{ок}}(T_{\text{max}}); \quad (8.44)$$

вес рабочего запаса окислителя

$$G_{\text{ок}}^{\text{р}}(T) = G_{\text{ок}}(T) - G_{\text{ок}}^{\text{нер}} - G_{\text{ок}}^{\text{гар}}; \quad (8.45)$$

вес рабочего запаса горючего

$$G_{\text{г}}^{\text{р}}(T) = \frac{G_{\text{ок}}^{\text{р}}(T)}{K^{\text{ном}}}; \quad (8.46)$$

весовая доза заправки горючего

$$G_{\text{г}}(T) = G_{\text{г}}^{\text{р}}(T) + G_{\text{г}}^{\text{нер}} + G_{\text{г}}^{\text{гар}}. \quad (8.47)$$

Для случая, когда  $K^{\text{ном}} \leq K_6(T_{\text{max}})$ , весовые дозы заправки рассчитываем аналогично, определяя сначала дозу заправки горючего, затем рабочий запас горючего и, наконец, рабочий запас окислителя и дозу заправки окислителя.

При объемном способе определение доз заправки проводится следующим образом. Располагаемые объемы топливных систем и соотношение располагаемых рабочих запасов компонентов рассчитываются по формулам (8.41) и (8.42).

При  $K^{\text{ном}} \geq K_6(T^{\text{ном}})$  весовые дозы заправки окислителя и горючего определяются по формулам:

$$G_{\text{ок}}(T) = V_{\text{ок}}^{\text{расп}}(T) \gamma_{\text{ок}}(T); \quad (8.48)$$

$$G_{\text{г}}(T) = \frac{G_{\text{ок}}(T) - G_{\text{ок}}^{\text{нер}} - G_{\text{ок}}^{\text{гар}}}{K(T)} + G_{\text{г}}^{\text{нер}} + G_{\text{г}}^{\text{гар}}. \quad (8.49)$$

При  $K^{\text{ном}} \leq K_6(T^{\text{ном}})$  определение весовых доз заправки проводится аналогично, за исключением порядка расчета доз: вначале рассчитывается доза горючего исходя из располагаемого объема системы горючего, а потом доза окислителя.

При объемном способе расчета доз заправки с повышением температуры уменьшается вес заправляемого топлива, что приводит к некоторому снижению предельной дальности. Однако

объемный способ заправки позволяет использовать систему одновременного опорожнения баков, что повышает предельную дальность стрельбы.

#### 8.4. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ СТРЕЛЬБЫ НА ПРЕДЕЛЬНУЮ ДАЛЬНОСТЬ

Как указывалось выше, некоторые возмущающие факторы при расчетах доз заправки и гарантийных запасов топлива не учитываются. Влияние на предельную дальность таких факторов, как геодезические и метеорологические условия можно учитывать введением соответствующих поправок в значение предельной дальности. По этой причине предельная дальность представляет собой функцию некоторых условий стрельбы.

Чаще всего аргументами предельной дальности являются температуры компонентов топлива в момент пуска ракеты и геодезические условия пуска.

Влияние температуры топлива на предельную дальность (или на предельный функционал управления) проявляется двояко: через изменение параметров двигателя и через изменение составляющих доз заправки, и может быть приближенно оценено с помощью приведенных ниже выражений.

При отсутствии системы регулирования кажущейся скорости

$$\Delta S = \left( \frac{\partial S}{\partial P_{уд.п}} \frac{\partial P_{уд.п}}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial \dot{G}} \frac{\partial \dot{G}}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial G_0} \frac{\partial G_0}{\partial T} + \frac{\partial S}{\partial G_k} \frac{\partial G_k}{\partial T} \right) (T - T_{ном}). \quad (8.50)$$

При наличии системы регулирования кажущейся скорости

$$\begin{aligned} \Delta S = & \frac{\partial S}{\partial G_k} \left( \frac{\partial G_k}{\partial G_0} \frac{\partial G_0}{\partial T} + \frac{\partial G_k}{\partial T} + \frac{\partial G_k}{\partial P_{уд.п}} \frac{\partial P_{уд.п}}{\partial T} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial G_k}{\partial \dot{G}^y} \frac{\partial \dot{G}^y}{\partial T} \right) (T - T_{ном}), \end{aligned} \quad (8.51)$$

где  $S$  — дальность стрельбы  $L$  или значение функционала управления  $J$ ;

$\frac{\partial P_{уд.п}}{\partial T}$ ;  $\frac{\partial \dot{G}}{\partial T}$ ;  $\frac{\partial \dot{G}^y}{\partial T}$  — производные удельной тяги и секундных расходов двигательной установки и управляющих двигателей по температуре топлива;

$\frac{\partial G_0}{\partial T}$ ;  $\frac{\partial G_k}{\partial T}$  — производные стартового и конечного весов ракеты (ступени) по температуре топлива.

При больших отклонениях стартовых и конечных весов более точные результаты, чем по формулам (8.50) и (8.51), могут быть получены путем математического моделирования движения ракеты на ЦВМ.

Существенное влияние на предельную дальность оказывают геодезические условия пуска, которые характеризуются значениями геодезической широты точки старта  $\varphi_{г0}$  и азимута направления прицеливания  $A_0$ . Зависимость предельной дальности от геодезических условий пуска  $L_{пр}(\varphi_{г0}, A_0)$  используется для определения зоны действия ракеты, в пределах которой возможно достижение целей. Эта зона может быть найдена в результате расчета траекторий активного и пассивного участков при различных значениях  $\varphi_{г0}$  и  $A_0$ , а также по конечным формулам эллиптической теории. В последнем случае приходится пренебрегать изменением параметров траектории активного участка за счет вращения Земли.

Характерная зависимость изменений предельной дальности от геодезических условий стрельбы для условий ракеты представлена на рис. 8.8.

При пусках ракеты в различных геодезических условиях возможно также изменение величин гарантийных запасов компонентов топлива, чтобы не допустить существенных изменений предельной дальности стрельбы и надежности ее обеспечения. Так, например, для ракет, не имеющих систем РКС, при пусках в западном направлении величина гарантийных запасов должна быть увеличена, а при пусках в восточном направлении — уменьшена по отношению к величине гарантийных запасов, рассчитанных для пусков в северном направлении. Возможен также другой подход, когда для неизменной предельной дальности величина гарантийных запасов топлива сохраняется постоянной при всех геодезических условиях стрельбы и учитывается изменение надежности обеспечения предельной дальности.

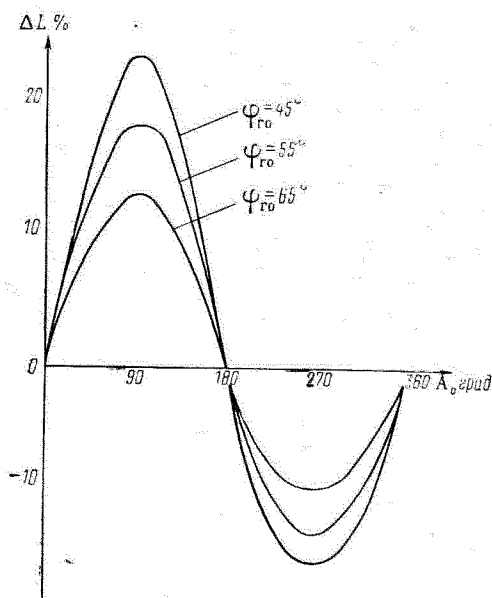


Рис. 8.8. Изменение предельной дальности стрельбы в различных геодезических условиях

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абгарян К. А., Рапопорт И. М., Динамика ракет, «Машиностроение», 1969.
2. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П., Баллистика управляемых ракет дальнего действия, «Наука», 1966.
3. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах, Физматгиз, 1961.
4. Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, «Наука», 1966.
5. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, «Наука», 1964.
6. Гантмахер Ф. Р. и Жевин Л. М., Теория полета неуправляемых ракет, Физматгиз, 1959.
7. Горбатенко С. А. и др., Механика полета, «Машиностроение», 1969.
8. Гордеев А. И., Автономные системы управления баллистических ракет, Воениздат, 1964.
9. Двигательные установки ракет на жидком топливе, под ред. Э. Ринг, «Мир», 1966.
10. Дмитриевский А. А. и др., Движение ракет (Введение в теорию полета ракет), Воениздат, 1968.
11. Ефимов М. В., Прицеливание баллистических ракет, Воениздат, 1968.
12. Инерциальные системы управления, под ред. Д. Питмана, Воениздат, 1964.
13. Ишлинский А. Ю., Инерциальное управление баллистическими ракетами, «Наука», 1968.
14. Карагодин В. М., Теоретические основы механики тела переменного состава, Оборонгиз, 1963.
15. Кары-Ниязов Ш., Полет баллистических ракет, Воениздат, 1966.
16. Киселев С. П., Чувев Ю. В., Рассеивание ракет, Воениздат, 1964.
17. Колесников К. С., Жидкостная ракета как объект регулирования, «Машиностроение», 1969.
18. Краснов Н. Ф. и др., Аэродинамика ракет, «Высшая школа», 1968.
19. Кротов В. Ф., Букреев В. З., Гурман В. И., Новые методы вариационного исчисления в динамике полета, «Машиностроение», 1969.
20. Лебедев А. А. и Карабанов В. А., Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами, «Машиностроение», 1965.
21. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С., Динамика полета беспилотных летательных аппаратов, Оборонгиз, 1962.
22. Конструкция управляемых баллистических ракет, под ред. Синюкова А. М. и Морозова Н. И., Воениздат, 1969.
23. Остославский И. В., Стражева И. В., Динамика полета, Траектории летательных аппаратов, «Машиностроение», 1969.
24. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли, «Успехи физических наук», 1957, т. LXIII, вып. 1а.
25. Пономарев В. М., Теория управления движением космических аппаратов, «Наука», 1965.
26. Проектирование и испытания баллистических ракет, под ред. Варфоломеева В. И. и Копытова М. И., Воениздат, 1970.
27. Стирнс Э., Космическая навигация, Воениздат, 1966.
28. Тарасов Е. В., Алгоритм оптимального проектирования летательного аппарата, «Машиностроение», 1970.
29. Типугин В. Н., Вейцель В. А., Радиоуправление, «Советское радио», 1962.
30. Феодосьев В. И., Синярев Г. Б., Введение в ракетную технику, Оборонгиз, 1960.
31. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                          | <i>Стр.</i> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| Предисловие . . . . .                                                                                    | 3           |
| Условные обозначения . . . . .                                                                           | 5           |
| Введение . . . . .                                                                                       | 8           |
| <b>Глава I. Условия полета ракеты. Особенности ракеты как управляемой механической системы . . . . .</b> | <b>19</b>   |
| 1.1. Движение, фигура и гравитационное поле Земли . . . . .                                              | 19          |
| 1.2. Атмосфера . . . . .                                                                                 | 29          |
| 1.3. Аэродинамические силы и моменты . . . . .                                                           | 31          |
| 1.4. Характеристики ракетных двигателей . . . . .                                                        | 37          |
| 1.5. Ракета как тело переменного состава . . . . .                                                       | 40          |
| 1.6. Возмущающие силы и моменты . . . . .                                                                | 43          |
| 1.7. Управляющие силы и моменты . . . . .                                                                | 44          |
| 1.8. Система управления полетом ракеты . . . . .                                                         | 52          |
| 1.9. Основные особенности ракеты как динамической системы . . . . .                                      | 65          |
| <b>Глава II. Общие уравнения движения . . . . .</b>                                                      | <b>69</b>   |
| 2.1. Векторные уравнения движения ракеты . . . . .                                                       | 69          |
| 2.2. Уравнения движения ракеты в проекциях на земные оси координат . . . . .                             | 72          |
| 2.3. Уравнение движения в проекциях на полускоростные оси координат . . . . .                            | 91          |
| 2.4. Основные упрощения уравнений движения . . . . .                                                     | 102         |
| <b>Глава III. Переходные участки траектории . . . . .</b>                                                | <b>108</b>  |
| 3.1. Старт ракеты . . . . .                                                                              | 108         |
| 3.2. Разделение ступеней и отделение головных частей . . . . .                                           | 114         |
| <b>Глава IV. Баллистика неуправляемой головной части . . . . .</b>                                       | <b>126</b>  |
| 4.1. Движение головной части на безатмосферном участке траектории . . . . .                              | 127         |
| 4.2. Движение головной части на атмосферном участке траектории . . . . .                                 | 135         |
| <b>Глава V. Рассеивание точек падения головных частей . . . . .</b>                                      | <b>151</b>  |
| 5.1. Общие положения . . . . .                                                                           | 151         |
| 5.2. Рассеивание головных частей, обусловленное возмущениями на пассивном участке траектории . . . . .   | 153         |
| 5.3. Инерциальное управление дальностью и направлением полета головной части . . . . .                   | 155         |
| 5.4. Рассеивание точек падения головных частей, обусловленное ошибками системы управления . . . . .      | 170         |

|                                                                                        |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Глава VI. Номинальная траектория полета ракеты на активном участке . . . . .           | 1 |
| 6.1. Требования к программе угла тангажа и методам ее выбора . . . . .                 |   |
| 6.2. Оптимальная программа угла тангажа на безатмосферном участке траектории . . . . . |   |
| 6.3. Метод выбора программ угла тангажа . . . . .                                      |   |
| Глава VII. Установочные данные на пуск ракеты . . . . .                                |   |
| 7.1. Методы подготовки установочных данных . . . . .                                   |   |
| 7.2. Расчет «падающей» траектории . . . . .                                            |   |
| 7.3. Составление таблиц стрельбы . . . . .                                             |   |
| У Глава VIII. Предельная дальность стрельбы . . . . .                                  |   |
| 8.1. Понятия о предельной дальности стрельбы и гарантийных запасах топлива . . . . .   |   |
| 8.2. Гарантийные запасы топлива . . . . .                                              |   |
| 8.3. Определение доз заправки . . . . .                                                |   |
| 8.4. Влияние условий стрельбы на предельную дальность . . . . .                        |   |
| Литература . . . . .                                                                   |   |

*Александр Александрович Лебедев,  
Николай Федорович Герасюта*

## БАЛЛИСТИКА РАКЕТ

Редактор *Л. В. Северьянов*  
Техн. редактор *Т. С. Старых*

Художник *Е. В. Бел*  
Корректор *Е. П. Кар*

|                                           |                              |                             |
|-------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------|
| Т-16240                                   | Сдано в набор 20/VII 1970 г. | Подписано в печать 19/XI 19 |
| Формат 60×90 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> | Печ. л. 15,25                | Уч.-изд. л.                 |
| Бум. л. 7,63                              | Бумага № 2                   | Тираж 4500 экз.             |
| Цена 90 коп.                              |                              | Изд. зак. №                 |
|                                           |                              | Тем. план 1970 г. №         |

Издательство «Машиностроение», Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3  
Московская типография № 8 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР,  
Хохловский пер., 7. Тип. зак. № 1443