# Radantrieb und Raketenantrieb

Von Eugen Sänger, Paris[1])

Man begegnet noch vielfach der Ansicht, der Radantrieb sei dem Raketenantrieb hinsichtlich des äusseren mechanischen Wirkungsgrades des Antriebsvorganges allgemein überlegen.

Die folgenden, elementaren mechanischen Überlegungen zeigen, dass dies nur für den Bereich der uns geläufigen geringen Fahrgeschwindigkeiten richtig ist, für die hohen Geschwindigkeiten der Raumfahrt aber keineswegs mehr zutrifft, dass dort vielmehr der Raketenantrieb mechanisch wesentlich überlegen ist.

Wir bezeichnen mit $m_1$ die Fahrzeugmasse in einem beliebigen Augenblick, in dem das Fahrzeug die Geschwindigkeit $v$ gegenüber dem erdfesten Beobachter hat, und mit $dm_2$ die in diesem Augenblick $dt$ verbrauchte kleine Treibstoffmasse des Heizwertes $H$, welch letzterer sich der Einfachheit halber hundertprozentig in Energie umsetzen möge, das heisst, der rein maschinelle, innere Wirkungsgrad wird zu Eins angenommen.

Im Falle des radangetriebenen Fahrzeuges werde die Masse $dm_2$ ohne Relativgeschwindigkeit zum Fahrzeug von Bord gegeben, im Falle des raketenangetriebenen Fahrzeuges jedoch mit der entgegengesetzt zur Fahrtrichtung weisenden Relativgeschwindigkeit $w = \sqrt{2\,g\,H}$.

Die Fahrzeugmasse zu Anfang des Antriebvorganges sei $m_a$, am Ende des Antriebes $m_e$, der Treibstoffvorrat also $m_a - m_e$.

Dann gilt für beide Fälle:

## 1. Radantrieb

(Widerstands- und schwerefreie Beschleunigung)

a) Erhaltung der Masse:

$$dm_2 = -dm_1;$$

die abgegebene Masse $dm_2$ muss natürlich gleich der Massenabnahme $-dm_1$ des Wagens sein.

b) Erhaltung der Energie:

$$d\left(\frac{m_1\,v^2}{2}\right) = -dm_2\,\frac{v^2}{2} + dm_2\,\frac{w^2}{2};$$

die Änderung der kinetischen Energie $d(m_1\,v^2/2)$ des Wagens muss gleich sein dem Energieverlust infolge der Abgabe der nach der Abtrennung noch mit der kinetischen Energie $(dm_2\,v^2/2)$ ausgestatteten kleinen Masse $dm_2$ und dem Energiezuwachs $(dm_2\,w^2/2)$ des ganzen Systems infolge der in diesem Augenblick frei gemachten Heizwertenergie $(dm_2\,g\,H)$ der verbrauchten Masse $dm_2$.

Durch Eliminieren von $dm_2$ aus beiden Gleichungen erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dm_1}{m_1} = -\frac{2\,v\,dv}{w^2}, \tag{1a}$$

---

[1]) Arsenal de l'Aéronautique, Châtillon-sous-Bagneux (France).

deren Integration die Grundgleichung des Radantriebes liefert:

$$\frac{m_e}{m_a} = e^{-v^2/2gH} = e^{-v^2/w^2}. \tag{1}$$

Der mechanische Antrieb $P\,dt$ selbst folgt aus dem Impulssatz und Gleichung (1a) zu:

$$P = m_1 \frac{dv}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{w^2}{2\,v} = \frac{g\,H}{v} \cdot \frac{dm_2}{dt}, \tag{2}$$

das heisst, der Schub $P$ an den Rädern nimmt mit wachsender Fahrtgeschwindigkeit hyperbolisch ab, die Antriebsleistung $Pv$ ist konstant und unabhängig von der Fahrtgeschwindigkeit und bekanntlich nur durch Heizwert und sekundlichen Treibstoffverbrauch bestimmt.

Der äussere Antriebswirkungsgrad ist in jedem Augenblick:

$$\eta = \frac{P\,v}{\dfrac{dm_2}{dt} \cdot \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{dm_2}{dt} \cdot \dfrac{w^2}{2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{v^2}{w^2}}, \tag{3}$$

das heisst, der äussere Antriebswirkungsgrad des Radantriebes wird nur dann gleich Eins, wenn $v^2/2\,g\,H$ gegen Null geht, was für unsere bekannten Radfahrzeuge allerdings recht gut zutrifft. Dieser Antriebswirkungsgrad gilt auch für stationäre Fahrt, also gleichbleibende Fahrgeschwindigkeit, unter Überwindung eines Fahrwiderstandes oder eines Schwerefeldes.

## 2. Raketenantrieb

(Widerstands- und schwerefreie Beschleunigung)

a) Erhaltung der Masse:

$$dm_2 = -dm_1.$$

b) Erhaltung der Energie:

$$d\left(\frac{m_1\,v^2}{2}\right) = -dm_2\,\frac{v_2^2}{2} + dm_2\,\frac{w^2}{2}.$$

Darin ist $v_2 = w - v$ die Geschwindigkeit der abgestossenen Masse $dm_2$ nach der Abstossung relativ zum erdfesten Beobachter.

Die Änderung der kinetischen Energie $d(m_1\,v^2/2)$ des Raketenfahrzeuges muss gleich sein dem Energieverlust infolge Abgabe der nach der Abstossung noch mit der kinetischen Energie $(dm_2\,v_2^2/2)$ ausgestatteten kleinen Masse $dm_2$ und dem Energiezuwachs $(dm_2\,w^2/2)$ des ganzen Systems infolge der in diesem Augenblick frei gemachten Heizwertenergie $(dm_2\,g\,H)$ der verbrauchten Masse $dm_2$.

Durch Eliminieren von $dm_2$ und $v_2$ erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dm_1}{m_1} = -\frac{dv}{w}, \tag{4a}$$

deren Integration die bekannte klassische Raketengrundgleichung

$$\frac{m_e}{m_a} = e^{-v/\sqrt{2gH}} = e^{-v/w} \tag{4}$$

liefert.

Die Grundgleichung des Raketenantriebes wird gewöhnlich an Stelle des Energiesatzes aus dem anschaulicheren Impulssatz $d(m_1 v) = dm_2 v_2$ abgeleitet. Da der Impuls bekanntlich die Ableitung der kinetischen Energie nach der Geschwindigkeit ist, kommt man damit hier zum selben Resultat.

Bemerkenswert ist bei diesen Ableitungen der Grundgleichungen, dass das totale Energiedifferential

$$d\left(m_1 \frac{v^2}{2}\right) = m_1 v \, dv + dm_1 \frac{v^2}{2}$$

im zweiten Glied den Energieverlust des Fahrzeuges infolge Abtrennung der mit der kinetischen Energie $dm_2 v^2/2$ ausgestatteten Treibstoffmasse $dm_2 = -dm_1$ enthält, und ferner, dass die absolute Grösse und der Verlauf der angewendeten Beschleunigungen ohne Einfluss auf das Ergebnis sind.

Die Gegenüberstellung der Gleichungen (1) und (4) in Figur 1 zeigt sofort, dass unter sonst gleichen Bedingungen zur Beschleunigung auf dieselbe Endgeschwindigkeit $v$ beim Radantrieb wesentlich höhere relative Treibstoffverbrauche $(m_a - m_e)/m_a$ nötig sind als beim Raketenantrieb, sobald $v/w > 1$ wird. Bei geringeren Endgeschwindigkeiten ist dagegen der Radantrieb günstiger. Bei Werten von $v/w$, die gross gegen Eins sind, wird

$$\frac{(m_e/m_a)_{Rad}}{(m_e/m_a)_{Rak}} \sim e^{-v^2/w^2} ,$$

das heisst, die Überlegenheit des Raketenantriebes wächst rasch über alle Grenzen.

Der mechanische Antrieb $P\,dt$ beim Raketenantrieb folgt aus dem schon erwähnten Impulssatz und Gleichung (4a) zu

$$P = m_1 \frac{dv}{dt} = \frac{dm_2}{dt} w = \frac{dm_2}{dt} \sqrt{2 g H} , \tag{5}$$

das heisst, der Schub $P$ der Rakete ist von der Fahrgeschwindigkeit unabhängig, die Antriebsleistung $Pv$ nimmt proportional der Fahrgeschwindigkeit zu und kann grösser werden als $g H \, dm_2/dt$, da als zusätzliche Energie noch die kinetische Energie der an Bord mitgeführten Treibstoffmassen zur Verfügung steht.

Der äussere Antriebswirkungsgrad ist in jedem Augenblick bekanntlich:

$$\eta = \frac{P v}{\frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{w^2}{2}} = \frac{2 \, v/w}{1 + \frac{v^2}{w^2}} . \tag{6}$$

Die zahlenmässige Gegenüberstellung der äusseren Wirkungsgrade nach den Gleichungen (3) und (6) des Radantriebes und des Raketenantriebes in Figur 2 zeigt deren wesentliche Unterschiede, die auf die jeweils zweiten Glieder in den zitierten Energiesätzen zurückgehen:

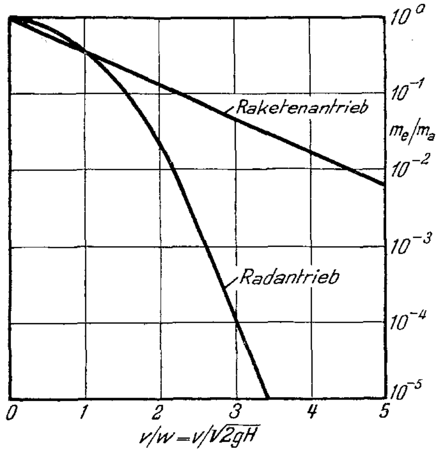
Der Energiezuwachs der Raketenfahrzeuge ist jeweils um

$$\frac{dm_2}{2} (v^2 - v_2^2) = dm_2 \frac{w^2}{2} \left(\frac{2 v}{w} - 1\right)$$

grösser als jener der Radfahrzeuge, das heisst, beide Vorgänge sind gleichwertig bei $v/w = 1/2$; bei kleineren Fahrgeschwindigkeiten $v$ ist der Raketenantrieb ungünstiger als der Radantrieb, weil die kinetische Energie ihrer ausgestossenen Massen (relativ zum erdfesten Beobachter, Geschwindigkeitsrichtung entgegen der Fahrrichtung) grösser ist als jene des Radfahrzeuges.

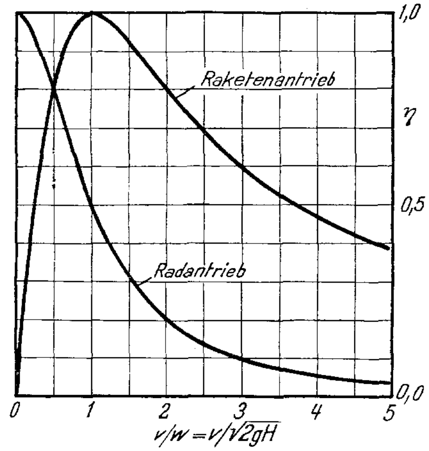
Bei $v/w = 1/2$ werden diese kinetischen Energien der Abgase beider Fahrzeuge gerade gleich, wenn auch ihre Geschwindigkeitsrichtungen entgegengesetzt sind. Bei grösseren Fahrgeschwindigkeiten ist die Rakete aus denselben Gründen günstiger und wird es für immer höhere $v/w$ immer mehr, da die Wirkungsgrade des Raketen- und des Radantriebes sich wie $2\ v/w$ verhalten.

Dies deshalb, weil mit $v/w \to \infty$ bei unter sich gleich werdender kinetischer Energie der Abgase beider Antriebe die Schubleistung des Raketenantriebes




Figur 1

Grundgleichungen des Radantriebes und des Raketenantriebes.




Figur 2

Äussere Wirkungsgrade des Radantriebes und des Raketenantriebes.

$w\,v\,dm_2/dt$ immer weiter wächst, jene $w^2/2 \cdot dm_2/dt$ des Radantriebes aber konstant bleibt.

Selbst wenn Schienen durch den Weltraum führten, wäre es demnach meist wirtschaftlicher, dort nicht mit radangetriebenen, sondern mit raketenangetriebenen Fahrzeugen zu verkehren.


*Summary*

It is a general believing that propulsive efficiency of wheel-propulsion for vehicles is always unity, and thus superior to propulsive efficiency of rocket-propulsion. By some elementary mechanical considerations can be shown that this is only true for slow drive velocities.

With growing velocities, propulsive thrust of wheel-propulsion decreases, while it remains constant for rocket-propulsion; propulsive performance remains constant for wheel-propulsion, whilst it grows for rocket-propulsion with increasing velocity.

As a consequence thereof, propulsive efficiency of wheel-propulsion decreases much faster than that of rocket-propulsion with growing velocity, so that efficiency of rocket-propulsion is far higher at high velocities.


(Eingegangen: 8. Oktober 1953.)